MATHESIS

Serie III ■ Vol. IV ■ No. 2 ■ Jul - Dic 2009

filosofía e historia de las ideas matemáticas

ARTÍCULOS

FUENTES

RESEÑAS

Mathesis **III 4$_2$** (2009) 203 - 220.

Noesis, semiosis y matemáticas*

Miguel Ariza

Resumen

El presupuesto según el cual el contenido de una manifestación compleja está en función de los contenidos de sus partes componentes, expresa claramente una intuición que solemos tener sobre lo múltiple; implica una reflexión sobre la relación entre el todo y las partes que lo componen; involucra una teoría de las multiplicidades que entraña atributos de naturaleza matemática; presenta el problema de cómo los seres humanos nos relacionamos con los entornos del mundo para generar unidad de sentido. La significación es un proceso de síntesis. Y desentrañar los mecanismos de funcionamiento de dicho proceso es un enigma de carácter eminentemente fenomenológico. La matemática misma, como acto de significación, como conjunto de actos de contenidos intencionales, comparte este carácter y es susceptible de tratamiento fenomenológico. Noesis y semiosis se conjugan para dotar al saber matemático de un contenido, de articulación compleja, que trasciende las perspectivas meramente logicistas, formalistas o intuicionistas. Una primera aproximación a esta problemática es el propósito del presente trabajo.

Abstract

The assumption under which the content of a complex manifestation is a function of the contents of its component parts, clearly expresses an intuition we usually have regarding the manifold. It implies a reflection on the relationship between the whole and its component parts. Also, it involves a manifold theory which considers attributes of a mathematical nature. Lastly, it presents the problem of how human beings relate with the world's environments in order to generate a unit of sense. Meaning is a synthesis process and the functioning mechanisms of such a process are enigmas of an eminent phenomenological character. Mathematics, as an act of meaning and as a set of acts of intentional contents, shares this character and, therefore, is susceptible of a phenomenological treatment. Noesis and semiosis conjugate to give mathematical knowledge a content of complex articulation which transcends perspectives of a mere logicist, formalist or intuitionist nature. A first approximation to this problem is the purpose of this paper.

* Este trabajo toma como base la ponencia, con el mismo título, presentada en el *Coloquio Internacional Husserl. Perspectivas actuales de la fenomenología. En memoria del 70 Aniversario de su muerte* (México 2008, CLAFEN).

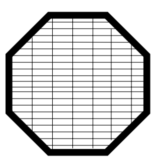
Palabras Clave: Noesis, Semiosis, Noema, Orden, Matemáticas.
Key words: Noesis, Semiosis, Noema, Order, Mathematics.
MSC 2000:

Una cuestión de gran interés a lo largo de la historia de las matemáticas ha radicado en cómo poder dar cuenta de una manera consistente de la naturaleza de lo múltiple, de la relación entre el todo y sus partes componentes. Y sobre todo, dilucidar cuáles son las leyes del pensamiento humano que nos permitan esclarecer cuáles son los procesos de interacción entre lenguaje y pensamiento, que por lo menos evoquen certidumbres consistentes sobre el incierto enigma de lo múltiple.

Husserl nos dice en el parágrafo ciento treinta y cuatro correspondiente al IV anexo de 'las ideas relativas a una fenomenología pura y una filosofía de la fenomenología' (ideas III):

> Al entregarnos sin reflexionar a los números y a las relaciones que guardan entre sí, números y relaciones que se dan en la intuición matemática y se investigan en el pensar matemático, y al ejecutar las respectivas intuiciones y actos intelectivos, hacemos matemáticas y no sabemos [nada] de la fenomenología. Sí, no obstante, tomamos lo intelectivamente visto, lo fundamentado inmediata o mediatamente como correlato, y lo ponemos en relación con el pensamiento intelectivo, fundamentador, demostrativo y constructivo, e investigamos las conexiones esenciales entre el número y el acto de contar, colección y colegir, entre proposición matemática y juzgar matemático, entre prueba matemática y actos de probar, etcétera, lo que hacemos es fenomenología y toda la matemática adquiere significado fenomenológico: cada uno de sus conceptos y proposiciones se convierte en índice de conexiones fenomenológicas y se integra en ella como correlato [Husserl 2000b, 150].

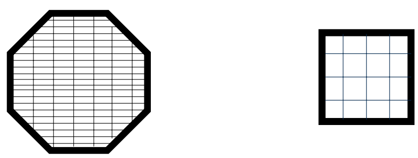
Supongamos que tenemos ante nuestro campo de visualización la siguiente figura:



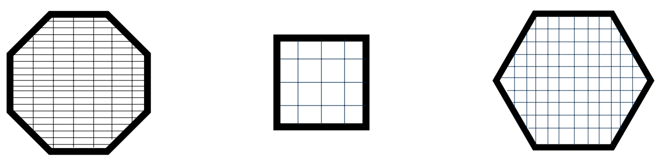
De ella percibimos un encadenamiento sintético de cualidades, distinguimos su tamaño, número de lados, el tipo de textura en su interior, etc. Una multiplicidad de atributos producto de una caracterización intencional en nuestra conciencia.

La apertura de la conciencia hacia este objeto lo dota de un contenido referencial, que sin embargo no es de ninguna manera estático en su presentación. Nuestra figura está conformada de maneras diversas. Su identidad es construida permanentemente por nosotros mismos, su coincidir consigo misma es reestablecido sin cesar por nuestra percepción. Sin embargo, su identidad depende de su posibilidad de ser diferente.

Es en contraposición con la posibilidad de existencia de otra figura distinta que, si bien puede mantener invariantes varios de los atributos de la figura inicial, podemos establecer con cierta certeza la identidad de cada una.



Y comienza a gestarse algo que se hace totalmente evidente al aparecer una tercera figura:



Las ordenamos de manera creciente, de acuerdo a ciertos rasgos que las distinguen entre sí. Es decir, les damos un ordenamiento serial a través de la construcción de diversas progresiones de carácter ordinal. De esta manera podemos establecer, al menos, tres tipos de ordenaciones:

Según el tamaño: cuadrado, octágono, hexágono.
Según el número de lados: cuadrado, hexágono, octágono.
Según el achurado: hexágono, octágono, cuadrado.

El anterior despliegue configuracional de variaciones eidéticas da lugar a un proceso de noesis que se proyecta en el nivel sémico.

El objeto intencional de este despliegue de ordenaciones es el orden mismo, lo que resulta invariante ante el juego de configuraciones: el noema. En cuanto noema el orden mismo se ofrece a la conciencia, en cuanto noesis la conciencia está referida a la ordenación.

Esta naturaleza noémica del orden es susceptible de ser postulada a través de sus propiedades relacionales. En este sentido, todas las ordenaciones anteriormente referidas (según tamaño, lados, achurado etc.) comparten lo que Brøndal [1950, 29] denominó ‘especies de relación’, seriaciones de carácter reflexivo, antisimétrico y transitivo. Las ‘relaciones de orden’ que poseen dichas propiedades son muy importantes en matemáticas, ya que pueden generar conjuntos ordenados con características mereológicas, y pueden ser postuladas como fundamento de axiomatizaciones en teorías de lo múltiple, que tratan de dar cuenta del vínculo existente entre el todo y sus partes componentes. Es así, que la reflexividad, la antisimetría y la transitividad, visualizados como correlatos invariantes de lo noémico, pueden constituirse en axiomas de una teoría. En particular, pueden postularse como los axiomas de una teoría semiótica inspirada en las ideas de Hjelmslev y en la mereología husserliana.

Recordemos que Hjelmslev, en sus *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*, expone los principios, conceptos y métodos de una teoría del lenguaje, consistente y con pertinencia lógica clara. Esta teoría del lenguaje intenta constituirse en un ‘álgebra lingüística’, cuya regla de correspondencia principal es la relación de ‘presuposición’. En este sentido, el aparato axiomático construido por Hjelmslev puede concebirse como un ‘sistema relacional’, cuya relación primitiva resulta ser la relación de ‘presuposición’.

Como ya en otras ocasiones he argumentado [Ariza 2007a, 73-97], la relación de ‘presuposición’ es una relación de orden de carácter reflexivo, antisimétrico y transitivo. Y da lugar a un orden parcial amplio o reflexivo. Comúnmente a las relaciones que dan lugar a órdenes parciales reflexivos se les llama ‘inclusión’, por el parecido que tienen estas relaciones de orden con la inclusión de conjuntos; y dichas relaciones se asemejan a la relación ‘mayor o igual que’ (≥).

Esto concuerda con las intuiciones expresadas por Sapir [1991, 207-208]:

> Se puede decir que las nociones ‘más que’ y ‘menos que’ están fundadas en las percepciones de ‘envoltura’: si *A* puede ser ‘envuelto’ por *B*, contenido en él, colocado en contacto con él, sea realmente, sea con la imaginación, de suerte que permanezca en el interior de los límites de *B*, entonces se podrá decir que *A* es 'menos que’ *B* y que *B* es ‘más que’ *A*].

Por otro lado, todo conjunto parcialmente ordenado es susceptible de ser visualizado a través de una configuración diagramática, isomorfa a una estructura algebraica. Este despliegue figural, más allá de ser un mero instrumento descriptivo de análisis o mera ayuda heurística, es una autentica elaboración conceptual de carácter semántico, es potencialidad constructiva, esquema ostensivo, que entraña un principio de acción, que se materializa en un proceso constructivo espacial, en un grafico concreto y singular. En este sentido el diagrama algebraico adquiere una relevancia que va mucho más allá de ser un entramado formal sintáctico creado de manera convencional, con vista a la producción de un lenguaje artificial. Es la actualización de un ámbito potencial a través de una acción intencional constructiva, cuya visualización o captación trasciende la concreción singular de su trazado gráfico, de su creación más o menos convencional o arbitraria, de su presentación singular y de su posible referente representacional [De Lorenzo 1994, 235-254]. Articulación relacional que entraña un pensamiento interior, médula o manifestación de la producción semántica.

De acuerdo a este despliegue figural y en concordancia con la intuición de Sapir, podemos afirmar que esta confección diagramática comporta el despliegue topológico, noémico, de la envoltura; despliegue figurativo que articula compacidad y conexidad, interioridad y exterioridad, delimitaciones y fronteras. En este sentido el quehacer diagramático es un permanente actuar en labor constructiva, doble trabajo en ‘interoridad y ‘exteroridad’, cuyo primer aspecto apunta a: “la construcción, la elaboración en sí del espacio constituido por el diagrama, e interroga finalmente su fijeza, su origen, la legitimidad de su postulación, su fundabilidad”, y cuyo segundo aspecto interroga: “su movilidad, su flexibilidad, su transformabilidad, la legitimidad de su uso, su funcionalidad” [Guitart 2003, 124]. Quehacer diagramático, en donde el sujeto que lo construye e interpreta se manifiesta en acto.

Supongamos ahora que, en lugar de figuras geométricas, tenemos un entramado matemático conformado por multiplicidades puras, sin hacer por lo pronto ninguna hipótesis respecto a su unidad, es decir, sin suponer que constituye una totalidad de contenido; una multiplicidad que más allá de visualizarse como un simple objeto en sí, es ‘acción potencial intencional constructiva’, que en su conformación genera propiedades de diversa índole, siendo justamente la intervención del matemático la que posibilitará actualizar esa ‘potencial intencionalidad intrínseca’. Postular esta hipótesis es precisamente el objeto de la primera operación descriptiva que se realiza sobre un acto matemático. Situados en este lugar inicial, nuestro entramado es una ‘situación abstracta’. En este ‘espacio’ todo objeto matemático es considerado como una posibilidad positiva simple, indiferenciada totalmente de la ‘situación’ en la que está inmerso.

Desde un punto de vista noémico, nuestro entramado es un ‘no-no lugar’, es decir una entidad de la cual podemos determinar la existencia de un interior y de un exterior a la situación misma, es la postulación de la existencia positiva de una entidad compleja, de la que sólo puede formularse la hipótesis de que a través de un proceso de construcción relacional, es posible concebirlo como unidad de contenido. Es decir, el entramado matemático es susceptible de ser concebido por medio de una ‘analítica fundante contextual’, a partir, como lo postula Hjelmslev, inclusive desde ‘el todo sin analizar’ [Hjelmslev 1974, 51].

Construyamos ahora nuestra primera multiplicidad fundante, ‘la multiplicidad a la que no le pertenece ninguna otra multiplicidad’, ‘la multiplicidad que no presupone ninguna otra multiplicidad’ es decir, el conjunto vació: Ø.

Al igual que en nuestro caso geométrico, la identidad de este objeto depende también de su capacidad de ser distinto, es decir, en su capacidad de dejar de ser vacío. Es hasta la aparición de una multiplicidad no vacía (el unitario del vacío: {Ø}) que podemos colimitar relacionalmente la identidad de ambos. Relacionar significa, en este sentido, reunir lo que ya ha sido previamente unido, restablecer un lazo entre lo ya conexo. Establecer una correspondencia entre lo que se encuentra explicitado, para dar cuenta de lo que se encontraba ya implícitamente (noémicamente) vinculado. Relacionar entraña reunir desde la partición. Establecer una conexión entre lo que en oposición se encuentra en exclusión pero que no obstante goza de la participación. El conjunto vacío y el unitario del vacío, como objetos distintos se encuentran en exclusión; sin embargo, cómo miembros de una progresión relacional se encuentran en participación ya que gozan ambos del mismo principio de generación fundante.

El conjunto vació es condición necesaria para poder establecer la existencia del unitario del vacío y a su vez el unitario del vacío es condición suficiente para asegurar la existencia previa del conjunto vacío. En otras palabras el conjunto unitario ‘presupone’ el conjunto vacío.

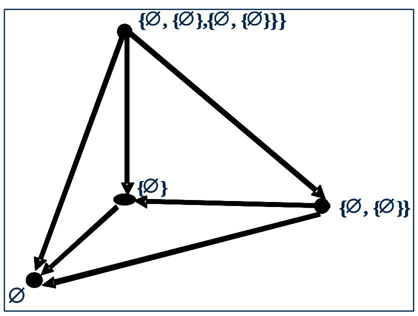
Y de manera semejante al caso geométrico, lo que nos interesa es articular la sucesión de acuerdo a un criterio general de ordenación. Lo cual se hace evidente con la construcción de una tercera multiplicidad: {Ø, {Ø}}.

La ordenación: Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, nos permite establecer un principio de articulación presuposicional, cuyo correlato noémico vuelve a ser el orden mismo. Señala Husserl [1962 II, 71-72]:

> El término de partes más próximas y más remotas unas de otras se refiere siempre a encadenamientos. Los conceptos *vecino* (= miembro inmediatamente enlazado), *vecino de un vecino*, etcétera, proporcionan —después de un complemento fácil de determinar formalmente— la gradación de «lejanía», y entonces no son sino los *números ordinales*: primero, segundo etc. El complemento tiende, naturalmente, a cuidar de la univocidad de esos conceptos, fijando una dirección del progreso; por ejemplo, si se tiene en cuenta la esencial *desigualdad* en los lados de una clase de relaciones, nacen conceptos como *vecino de la derecha de A* (el primero a la derecha de *A*), *vecino de la derecha del vecino de la derecha de A* (el segundo a la derecha de *A*) etc.

Esta ordenación presuposicional es una modalidad isomórfica de la inclusividad en el sentido amplio ya mencionado y nos despliega a través de un proceso de generación relacional totalidades conformadas a través de sus partes componentes, cuyos procesos parciales son susceptibles de ser visualizados a través de un diagrama.

Desde un punto de vista diagramático podemos visualizar el sistema entero a través de la siguiente construcción presuposicional:



Supongamos ahora, que en lugar de figuras geométricas y multiplicidades puras, tenemos una situación de habla cualquiera, un fragmento de discurso, tomando en cuenta, como señala de Lorenzo, que tanto en el hacer matemático como en el terreno del lenguaje humano, es insuficiente restringirse a la noción formal de 'código', ya sea lingüístico o proposicional, debido a que se deben tomar en cuenta también contextos y recreaciones. Es decir: 'cualquier texto escrito, como objeto semiótico, es un diagrama que carece de valor en sí, como objeto, si no se tiene presente el valor potencial de ser actualizado en cada momento, en cada instante. Y es ese valor potencial el que posibilita la construcción real del texto como objeto semiótico' [De Lorenzo 1994, 251].

Supongamos también que en nuestro fragmento identificamos tres magnitudes semióticas de carácter discursivo, las unidades de sentido:

/salir/, /tardar/ y /llegar/

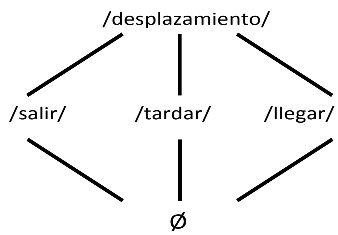
Al igual que en nuestros dos casos anteriores, podemos articular los tres eventos de manera ordenada; y, de manera semejante al caso geométrico y al conjuntista, lo que nos interesa es articular la sucesión de acuerdo a un criterio general de ordenación. En términos de Hjelmslev, nos encontramos a nivel 'sistema'. Desde este punto de vista estamos ante una 'situación esquemático contextual' donde pueden ser distinguidas, desde un punto de vista aspectual, una fase incoativa, una fase media y una fase terminativa.

Este nivel esquemático-aspectual es compatible con el nivel onomasiológico de las entidades semánticas en cuestión, como diría Hjelmslev, la sustancia del plano del contenido que es ordenada léxicamente. De esta manera, el verbo de movimiento 'salir' designa una trayectoria 'hacia' que posee una orientación espacial, refiere un desplazamiento completo de un punto de partida a un punto de arribo y que incide en el desarrollo interno del evento. En términos de su contenido léxico-aspectual puede ser considerado como una realización [*accomplishment*]. En tanto que 'llegar' puede ser considerado en nuestra situación contextual como un logro [*achievement*].

Ahora bien, desde el punto de vista del proceso, es decir, desde el punto de vista de la realización de las magnitudes semióticas, estamos ante la 'situación esquemático contextual' de un 'desplazamiento' donde pueden ser distinguidas una salida (realización: fase incoativa), una tardanza (ejecución: fase media) y una llegada (logro: fase terminativa).

En nuestro ejemplo podemos plantear un proceso de composición mereológica, reconociendo como unidad narrativa esquemática a la unidad de sentido /desplazamiento/, a partir de secuencias de unidades de sentido, representadas por los sucesos 'salir', 'tardar' y 'llegar'. Estos tres sucesos son susceptibles de ser representados como un proceso global, que no está explícitamente manifiesto, pero que da cuenta desde un punto de vista esquemático, de la sucesión aspectual antes mencionada. Así, /salir/, /tardar/ y /llegar/, son las partes componentes, que se fusionan para dar lugar a la unidad de sentido de carácter esquemático /desplazamiento/, que los presupone a los tres.

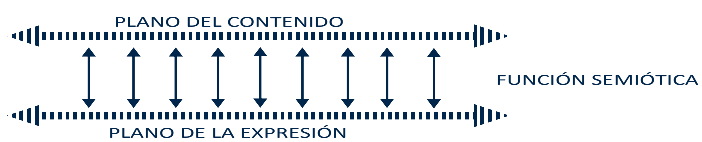
Desde un punto de vista diagramático podemos visualizar el sistema entero a través de la siguiente construcción reticular:



Desde un punto de vista fenomenológico, el diagrama geométrico y la geometría en general, dejan de ser construcciones de la razón pura, producto de la intuición apriorística del espacio y el tiempo. La fenomenología, logró descubrir en cambio, la intuitividad objetual de lo *a priori* que está ligada a los datos sensibles [Szilasi 2003, 71].

Desde un punto de vista semiótico, el hacer diagramático es un hacer figural que más allá de quebrantar el proceso de semiosis lo restituye, ya que muy por el contrario de lo que se cree, la noción de isomorfismo entre el plano de la expresión y el plano del contenido en Hjelmslev, no está abstractamente representada por un rasgo horizontal entre los dos planos. Y la figura de la interfaz que está sugerida en la metáfora saussuriana del 'recto' y del 'verso' de la hoja de papel, está preservada en la teoría semiótica hjelmsleviana.[1]

Tradicionalmente interpretamos la relación de isomorfismo del plano de la expresión y del plano del contenido, de la siguiente forma:



A cada entidad del plano de la expresión le corresponde una entidad del plano del contenido, hasta agotar todas las magnitudes de ambos planos en una relación uno a uno.

1. Cabe señalar que el proyecto de Saussure nunca fue de carácter eminentemente formalista, aún en el terreno estructuralmente organizado de la *Lengua* la identidad entre entidades lingüísticas siempre incluye una contribución subjetiva no identificable. Una crítica a la excesiva interpretación formalista de las ideas de Saussure ha sido expresada en diversos textos por Tasic, sosteniendo la tesis de que Saussure consideraba que 'la estructuración formal de los significantes es un componente *necesario* en la creación de 'significado', sin embargo la diferenciación puramente formal de los significantes no es *suficiente* para asegurar su generación'.

Sin embargo, en esta interpretación pareciera que ambos planos tuvieran existencia autónoma y preexistieran a la función semiótica, siendo ésta una mera articulación secundaria cuyo único papel fuera el garantizar el isomorfismo entre planos. En efecto este tipo de proceso entre planos existe en la lógica formal, en la llamada semiótica formal prefigurada por Carnap y llevada hasta sus últimas consecuencias por Morris. Lógica de los símbolos, en la que un plano sintáctico (relaciones de los símbolos entre sí) está articulado con un plano semántico (relaciones entre el símbolo y aquello que significa), a través de una función de interpretación.

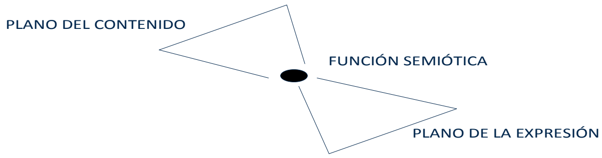
Para Hjelmslev esta concepción semiótica tiene un carácter 'conforme'. En el fondo se trata de una semiótica monoplanar, en cuya interpretación, cada entidad del contenido correspondiente a cada entidad de la expresión entra en exactamente la misma red funcional, sin poder discernir la oposición entre los dos planos, a través de un principio de conmutación. Ambos planos tienen la misma estructura de principio a fin (ambos componentes son 'conformales pero no conmutables'). Por lo que esencialmente se trabaja con un sólo plano, siendo estas estructuras ('sistemas simbólicos') divergentes fundamentalmente de "las verdaderas estructuras semióticas" [Hjelmslev 1974, 154-159].

Pero esta conceptualización es totalmente ajena a la concepción, bilateral, saussuriana y hjelmsleviana. Nos dice Hjelmslev [1974, 74-75]:

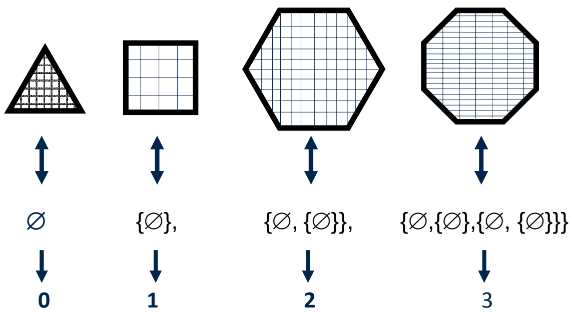
> Siempre habrá solidaridad entre una función y la clase de sus funtivos […]. Por lo tanto, hay también solidaridad entre la función semiótica y sus dos funtivos, la expresión y el contenido. Jamás habrá una función semiótica sin la presencia simultánea de estos dos funtivos; y una expresión y su contenido, o un contenido y su expresión, jamás aparecerán juntos sin que esté presente entre ellos la función semiótica.
>
> La función semiótica es siempre una solidaridad. Expresión y contenido son solidarios, se presuponen necesariamente. Una expresión sólo es expresión en virtud de que es expresión de un contenido, y un contenido sólo es contenido en virtud de que es contenido de una expresión. Por tanto —a menos que se opere un aislamiento artificial— no puede haber contenido sin expresión, o contenido carente de expresión, como tampoco puede haber expresión sin contenido, o expresión carente de contenido.

La función semiótica media entre ambos planos y guía su generación, los dimensiona, define sus mutuas correspondencias. La función semiótica es una verdadera interfaz, al igual que en la concepción saussuriana del signo. La función semiótica y sus dos funtivos generan una unidad triádica indisoluble. De la misma manera que el significante, el significado y el signo, la conforman en la concepción saussuriana.

Así, la articulación de la semiosis se puede interpretar de la siguiente forma:



Aún más, es justamente la naturaleza de la semiosis la que determina cómo quedan designados ambos planos. Expresión y contenido pueden intercambiar lugares según la articulación de la función semiótica. Consideremos el siguiente ejemplo:



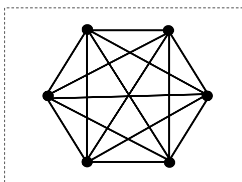
Ambos planos están configurados direccionalmente de manera creciente y ordenada, procesos de noesis paralelos que comparten el mismo noema de la envoltura configurado por el orden (reflexividad, antisimetría, transitividad). Por lo que según cierto punto de referencia, cualquiera de ambos puede ser expresión o contenido del otro. El proceso de semiosis configura una totalidad 'orgánica', una morfología dinámica, susceptible de proyectarse en un correlato diagramático.

La articulación diagramática es, como ya habíamos mencionado, un hacer figural, en donde el sujeto que construye e interpreta la articulación se manifiesta en acto. Desde este punto de vista el quehacer diagramático se torna figurativo, en donde a través de un despliegue fenomenológico de los procesos semióticos, aún de los que tienen un contenido axiomático, no queda excluida la vivencia intencional subjetiva en el papel de mediación de ambos planos, y no son las estructuras abstractas en sí mismas las que dan cuenta del proceso de semiosis.

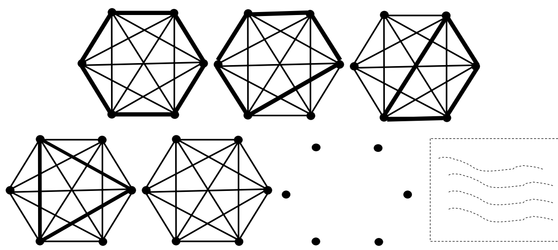
Más que un proceso de orden lógico-formalista, la articulación de la semiótica hjelmsleviana puede ser visualizada desde un punto de vista fenomenológico como una teoría de carácter matemático, enmarcada en la tradición de la teoría ‘parte-todo’ (‘lógica algebraica’ [Grattan-Guinness 1992, 55-72]) iniciada históricamente por Boole y posteriormente complementada y enriquecida por Jevons, De Morgan, Schröder y Peirce. Programa al que Husserl [1962a, 77] le reconoció “un núcleo de pensamientos con su propia legitimidad original”. Y que actualmente en algunas de sus vertientes tiene un gran desarrollo a través de la construcción de teorías mereológicas de carácter reticular.

La noción de isomorfismo es mucho más rica que la de un simple mapeo uno a uno, de carácter horizontal, entre las entidades de los dos planos conformadores de la semiosis. La función semiótica está articulada a través de un quehacer constructivo de carácter creativo y de articulación matemática, y es mucho más que una simple regla de correspondencia que articula entidades formales. El despliegue de la presuposición recíproca entre ambos planos nos permite un doble direccionamiento entre ambos, pudiendo invertir la relación expresión-contenido, preservando la metáfora de la envoltura.

Supongamos ahora que destacamos uno cualquiera de nuestros términos de la sucesión de figuras geométricas, por ejemplo el hexágono, y en lugar del achurado presentémoslo con todas sus diagonales.



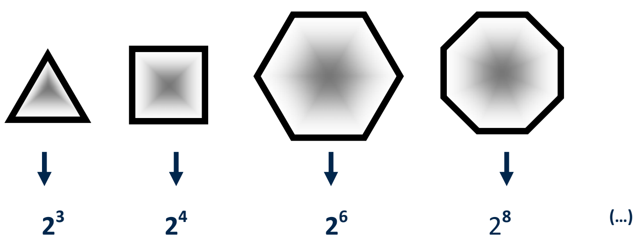
Podemos concebir la figura como una configuración de entidades cuya totalidad está compuesta de partes. Figuras geométricas que están inscritas dentro del hexágono, generadas por segmentos de recta: las diagonales y los puntos que corresponden a cada uno de los vértices. Podemos encontrar de esta manera, la configuración vacía (1), la de puntos sin diagonales (seis puntos), la de segmentos de rectas (las quince diagonales), configuraciones triangulares (veinte triángulos), configuraciones cuadrangulares (quince cuadriláteros), pentagonales (seis pentágonos) y finalmente una sola configuración hexagonal (un hexágono).



En total podemos encontrar sesenta y cuatro entidades geométricas (2^6), dentro de las que están contempladas, la configuración sin dimensiones, la unidimensional, bidimensional, tridimensional etc. Conformando la figura total en toda su compacidad y conexidad, a través de un proceso de generación geométrica de carácter recursivo. De la configuración vacía emerge una sexteta de puntos, cada par de puntos genera un segmento de recta, cada tres segmentos de recta conforman un triángulo distinto, cada cuatro triángulos generan un cuadrilátero etc. Así, hasta generar el hexágono entero. En palabras de Husserl [1962 II, 85-86]:

> Hay entre ellos una gradación fija de fundamentaciones, en la cual lo fundado en un grado se convierte en fundamento para el grado inmediato superior y de manera tal, que en cada grado son determinadas ciertas formas nuevas que solo en ese grado son accesibles. Podemos formular el siguiente principio general: *Partes mediatas o remotas del todo de que son pedazos, serán esencialmente aquellos pedazos que con otros pedazos estén unidos en todos, merced a formas enlazadoras, constituyendo estos todos a su vez unos todos de orden superior, gracias a formas nuevas*.

Ahora bien, si aplicamos el mismo procedimiento a cada uno de los términos de nuestra progresión geométrica.



Obtenemos una sucesión creciente de entidades geométricas con tantos términos como números naturales existen, sin embargo en el límite obtenemos una multiplicidad que posee la potencia del continuo cantoriano, un polígono infinito, una totalidad de cuyo interior emergen partes componentes, de carácter figurativo, que pueden ser mapeadas sobre todos los puntos de una línea recta. Nos dice Husserl [1967 II, 71]:

> Si destacamos una serie cualquiera de puntos en una recta, advertimos que los enlaces inmediatos de los miembros medianamente enlazados con los enlaces de los vecinos inmediatos pertenecen a uno y el mismo género ínfimo de enlace; y de tal suerte, que se diferencian de ellos sólo por su diferencia específica ínfima, mientras que esta diferencia misma está unívocamente determinada por las diferencias de los enlaces que en cada caso median. Tal suerte sucede en las duraciones del tiempo, en las configuraciones espaciales, en suma, siempre que los enlaces están caracterizados por *segmentos dirigidos* de uno y el mismo género. En una palabra: existe en todo ello *adición de segmentos*. Sin embargo, podemos prescindir de todo esto en nuestra consideración puramente formal.

Obtenemos una forma pura del todo y sus partes componentes, al abstraer la particularidad de las especies de contenidos correspondientes, y "así al mismo tiempo se verifican por el lado de la significación las sustituciones correspondientes de pensamientos puramente categoriales por los materiales" [Husserl 1967 II, 81-82].

De todo conjunto de contenidos, unidos así, podemos decir que componen formas categoriales de unidad. Para Husserl la unidad es justamente un producto de predicación categorial.

Sin embargo, según Husserl, los juicios categóricos más simples están basados en la percepción, 'enraizados en la experiencia antepredicativa y pre-judicativa del mundo'. Para que la lógica y la matemática no sean desarrolladas con una actitud ingenua, deben tratar de descubrir eidéticamente la génesis de sentido del 'juicio en general'. 'Génesis categorial' que transforma la unidad sintética de los perceptos en unidad analítica de las proposiciones que los describen [Petitot 1999, 137]. El juicio es en última instancia una construcción sintáctica con núcleos elementales que ya no contienen sintaxis [Husserl 1962, 212]. Formas nucleares que son recubiertas por formas funcionales en el entramado sintáctico de la predicación. Estos objetos-sustratos (color, textura, etc.) son individuos a los cuales se refiere en último término toda verdad. En consecuencia, la analítica lógica y toda teoría vericondicional de la verdad semántica (*i.e*., la semántica tarskiana que no problematiza nuestra relación prelingüística con las cosas) presuponen lo sintético perceptivo. Lo mismo ocurre con todos los procesos de semiotización y simbolización [Petitot 1999, 138].

Todos los niveles semiótico-categoriales se construyen, por decirlo de alguna manera, sobre la ordenación morfológica material que sirve de soporte de la semiosis recursiva, el despliegue recursivo del 'etcétera' como señala Husserl [1967, 197-198]:

> La temática intencional subjetiva de una analítica que (aunque se limite a lo meramente analítico-formal) quiera ser en verdad teoría de la ciencia, fundamentar en verdad la posibilidad de una ciencia autentica y suministrar en verdad a los científicos los principios de legitimidad de la autenticidad de sus ciencias, conduce como vemos —a honduras e implicaciones fenomenológicas insospechadas— […]. La matemática es el dominio de las construcciones infinitas, dominio no sólo de existencias ideales con sentido 'finito', sino también de infinitudes construidas. Patentemente repítese aquí el problema de los orígenes constitutivos subjetivos, como problema del método de las construcciones; dicho método está oculto: es menester descubrirlo y darle nueva forma de norma; en él se vuelven evidentes el '*etcetera*' con sus diversos sentidos, y las infinitudes como formas categoriales de nueva especie (pero que también desempeñan un papel importante en la esfera preconceptual de la representación).

Recursividad matemática que permite como señala Zalamea "tensar el espacio e iterar visiones locales en perspectivas globales". Articulación del hacer matemático en el que cada entorno estructural genera todo un universo de seres matemáticos (conceptos, funciones números etc.) que "tratando de asimilar los polos de tensión de la estructura, da lugar a los mixtos sostenes del andamiaje" [Zalamea 2006, 120]. Mixturas, morfologías dinámicas (forma y materia, articuladas, compenetradas) que en un proceso 'genético entre esencia y existencia' (como refiere Zalamea acerca de la filosofía matemática de Albert Lautman) permite explicar la "envoltura de edificios sucesivos que tiene que ir creando la matemática en sus procesos de conocimiento" [Zalamea 2006, 121]. Nos plantea Lautman [1989, 577; *Apud* Zalamea 2006, 121]:

> Se ve así cuál debe ser la tarea de la filosofía matemática e, incluso, de la filosofía de las ciencias en general. Se trata de edificar la teoría de las ideas y ello exige tres tipos de investigación: las que surgen de lo que Husserl llamaba eidética descriptiva, es decir, la descripción de esas estructuras ideales encarnadas en las matemáticas y cuya riqueza es inagotable. El espectáculo de cada una de estas estructuras es más que un ejemplo nuevo que se aporta para apoyar una misma tesis, pues no está excluido que sea posible —y allí reside la segunda tarea de la filosofía matemática— establecer una jerarquía de las ideas y una teoría de las génesis de unas a partir de otras, como lo había previsto Platón. Queda, en fin, la tercera de las tareas anunciadas, rehacer el Timeo, es decir, mostrar en el seno de las ideas mismas, las razones de su aplicación al universo sensible.

En este sentido la fenomenología descriptiva (o 'genética') husserliana es el primer eslabón en el tránsito hacia una visualización fenomenológico semiológica de la matemática. La intuición sensible y la intuición categorial están vinculadas en una misma orientación (intencional) hacia los objetos.

> Los contenidos categoriales —en cuanto momentos materiales de la determinación objetual—, así como las categorías, se captan receptiva-

> mente. Su origen reside en la trama de las cosas […]. Sólo el análisis de las intenciones puede distinguir, en la recepción, lo sensible de lo categorial [Szilasi 2003, 48].

Probablemente este es el primer embrión de la dialéctica generativa ('genética') concebida por Lautman [1977, 95; *Apud* Zalamea 1994, 278]: "[…] la esencia de una forma realizándose en el seno de una materia que ella crearía, la esencia de una materia haciendo nacer las formas que su estructura dibuja".

Despliegue, orgánico estructural (recursivo) de 'solidaridades':

> […] la solidaridad entre el todo y sus partes, la reducción de propiedades de relación a propiedades intrínsecas, el paso de la imperfección a lo absoluto son ensayos de organización estructural que confieren a los entes matemáticos un movimiento hacia la plenitud por el que puede decirse que existen [Lautman 1977, 81].

Plenitud noémica dependiente de la estrecha solidaridad de carácter intencional entre noesis y semiosis. Noesis y semiosis en plena interdependencia para configurar una noémica que apunta hacia la aprehensión fenomenológico trascendental de la matemática, cuyos relieves e instanciaciones son susceptibles de interpretación fenomenológico hermenéutica.

Umbral ante el cual culmina el presente ensayo.

Referencias

ARIZA, Miguel. 2007a. "Teoría semántica y matemáticas". *Mathesis* **III 2_1**: 73-97.

_________. 2007b. "Hacia una interpretación semiótica de los signos matemáticos". *Mathesis* **III 2_2:** 227-251.

BADIOU, Alain. 1999. *El ser y el acontecimiento*. Buenos Aires: Manantial.

BARWISE, Jon & John Perry: 1983. *Situations and Attitudes*. Cambridge, MA: MIT Press.

BRONDAL, V. 1950. *Théorie des prépositions*. Copenhague: E. Munksgaard.

DE LORENZO, Javier. 1989. *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Tecnos.

_________. 1994. "El discurso matemático: ideograma y lenguaje natural". *Mathesis* **10_3**: 235-254

FLORES, Roberto. 2000. "La construcción semántica del acontecimiento. Pasos para un análisis aspectual del relato". *Tópicos del seminario* **N_o 3** (aspectualidad y modalidades). Puebla: BUAP

GRATTAN-GUINNESS, Ivor. 1992. "Peirce: entre la lógica y la matemática". *Mathesis* **8_1**: 55-72.

GUITART, René. 1999. *La pulsation mathématique*. París: L'Harmattan.

_________. 2003. *Evidencia y extrañeza. Matemática, psicoanálisis, Descartes y Freud.* Buenos Aires: Amorrortu.

HESSELBART, Ana. 2008. **Semiosis y razonamiento matemático: un análisis teórico de los retos didácticos en el aprendizaje de la demostración**. Tesis de licenciatura. México: UNAM. Facultad de ciencias.

HJELMSLEV, Louis. 1974. *Prolegómenos a una teoría del lenguaje***.** Madrid: Gredos.

HUSSERL, Edmund. 1954. *Erfahrung und Urteil, Untersuchungen zur Genealogie der Logik.* Hamburg: Claasen & Goverts.

_________. 1962a. *Lógica formal y lógica trascendental*. México: UNAM

_________. 1962b. *Ideas relativas a una fenomenología pura y a una fenomenología trascendental* (*Ideas I*). México: Fondo de Cultura Económica.

_________. 1969. *Investigaciones lógicas*. Madrid: Revista de occidente. 2 Vols.

_________. 2000a. *Ideas relativas a una fenomenología pura y a una fenomenología trascendental* (*Ideas II*). México: UNAM.

_________. 2000b. *Ideas relativas a una fenomenología pura y a una fenomenología trascendental* (*Ideas III*). México: UNAM.

IBAÑEZ, Sergio. 2005. *Los verbos de movimiento intransitivos en español. Una aproximación léxico-sintáctica.* México: INHA-UNAM.

LAUTMAN, Albert. 1977. *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, 10/18. París: Union générale d'Editions.

LAUTMAN, Albert y CAVALLÉS Jean. 1989. "El pensamiento matemático". *Mathesis* **5**$_4$: 561- 567.

PETITOT, Jean. 1985. 'Morphogenèse du sens. Pour un schématisme de la structure'. Paris : Presses Universitaires de France (formes sémiotiques).

_________. 1995. "Sheaf Mereology and Husserl Morphological Ontology". *International Journal of Human-Computer Studies* **43**: 741-763.

_________. 1999. 'Las nervaduras del mármol'. La percepción puesta en discurso. *Tópicos del seminario* **2**. Puebla. BUAP: 121-148.

SALAMA, Roberto: 1998. *Los conjuntos*. *Ensayo lógico-filosófico*. Buenos Aires: Biblos

SANLANSKIS, Jean-Michel. 1997. *Le temps du sens*. Orléans: Éditions HYX.

SAPIR, Edward. 1991. *Linguistique*. París : Gallimard, Coll, "Folio-essais" : 207-208.

SZILASI, Wilhelm. 2003. *Introducción a la fenomenología de Husserl*. Buenos Aires: Amorrortu.

TASIC, Valdimir. 2002. *Mathematics in the Roots of Postmodern Thought*. Oxford University Press.

ZALAMEA, Fernando. 1994. “La filosofía de Albert Lautman”. *Mathesis* $\mathbf{10}_{3}$: 273-289.

_________. 2006. “Signos Triádicos. Lógicas, literaturas, artes. Nueve cruces latinoamericanos”. *Mathesis* **III** $\mathbf{1}_{1}$: 1-164.

_________. 2007. “Javier de Lorenzo: Por una filosofía dinámica de la praxis matemática”. *Mathesis* **III** $\mathbf{2}_{1}$: 1-35.

ZILBERBERG, Claude. 2000. “El esquema narrativo puesto en acción”. *Ensayos sobre semiótica tensiva*. Lima: FCE.

Mathesis **III 4₂** (2009) 221 - 238.

La enseñanza de las matemáticas en el Real Seminario de Minería: 1792-1810

Ruth López Alejandre

Resumen

Son pocos los trabajos historiográficos que abordan el estudio de la historia de las matemáticas en México. La necesidad de conocer los procesos de difusión, asimilación y aceptación de la matemática moderna en el país, han conducido a un grupo reducido de historiadores, filósofos y matemáticos a realizar el análisis de la labor de difusión de esta ciencia desde diferentes perspectivas. Sin embargo, es poco lo que sabemos de las contribuciones, al respecto, de las instituciones educativas de la época colonial. Es en este contexto en el que se enmarcan las siguientes líneas, que se concentran en mostrar la importancia del Real Seminario de Minería en la introducción de la matemática de corte moderno a la Nueva España; para lo cual hemos realizado el análisis de los elementos que coadyuvaron a tal fin, nos referimos a: la observancia y ajustes de las *Reales Ordenanzas de Minería*; reglamento interno; los planes de estudio oficiales y su adaptación que en gran medida dependió del desempeño académico de sus estudiantes y de la labor pedagógica del catedrático titular; al valor significativo de los libros de texto en el proceso enseñanza-aprendizaje, lo cual se complementó con la existencia de una biblioteca científica y especializada.

Abstract

….

Palabras clave: Real *Seminario de Minería*, México, Siglo XVIII, Bails
MSC 2000: 01A50, 01A72
Key words: Real *Seminario de Minería*, Mexico, XVIII Century, Bails
MSC 2000: 01A50, 01A72

Introducción

El *Real Seminario de Minería* se fundó, bajo los parámetros de una política propia de la época de la Ilustración que favoreció la enseñanza de las ciencias a través de la instauración de instituciones educativas.[1] Desde su fundación, el *Real Seminario de Minería* se rigió por las *Reales Ordenanzas de Minería* [véase: *Reales Ordenanzas* […], los planes de estudios y un reglamento interno, estos dos últimos propuestos por el Director General del *Real Tribunal de Minería*, Fausto de Elhuyar. Además se estableció que para la enseñanza de las ciencias impartidas en el recinto se tomaran los libros de texto utilizados en las instituciones educativas españolas. La enseñanza de las matemáticas se basó en las obras de los españoles Benito Bails, *Elementos de matemática* [véase: Bails 1779, 1772 y 1788], y Juan Justo García, *Principios de aritmética, álgebra y geometría* [véase: García 1815]; paralelo a ello la institución contó con la biblioteca científica más especializada y moderna de la época.

Estos elementos (las *Reales Ordenanzas de Minería*, planes de estudio, reglamento interno, libros de texto y la bibliografía matemática contenida en su biblioteca), aunados con la labor pedagógica de sus catedráticos y el desempeño académico de sus estudiantes, hicieron posible la consolidación de la introducción de la matemática moderna al virreinato a través de la cátedra de matemáticas del *Real Seminario de Minería*; dicha consolidación se efectuó en un proceso de mediana duración, el cual está caracterizado por dos etapas, de las que hablaremos al interior de este breve escrito.

1. Tales son los casos, para la Nueva España, de la fundación de la *Real Escuela de Cirugía*, el *Real Jardín Botánico* y el *Real Seminario de Minería*.

Estatutos del Real Seminario de Minería

Las *Reales Ordenanzas de Minería* establecieron que la instrucción académica al interior del *Real Seminario de Minería* constaría de cuatro años teóricos y tres de práctica, en algún real de mina del virreinato, en donde los estudiantes efectuarían funciones propias de peritos facultativos de minas[1] y perito beneficiador de metales. Sin embargo, Fausto de Elhuyar determinó, en 1790, que la formación práctica constara de dos años [Ramírez 1890, 62-63]; y a partir de 1802 resolvió que la teórica fuera de cinco años, los dos primeros en matemáticas.[2] La instrucción teórica estuvo constituida por cuatro asignaturas principales: matemáticas, física, química y mineralogía; y por asignaturas secundarias: dibujo, francés (1792), latín (1799), geografía (1802) y lógica (1809). Fue indispensable que los estudiantes aprobaran el curso de matemáticas para poder tomar el de física y el segundo de dibujo (planos y arquitectura subterránea). Durante el primer año también fueron instruidos en gramática castellana y en el primer curso de dibujo.[3] Además se estableció que los aspirantes a ingresar al *Real Seminario de Minería* contaran con conocimientos en las cuatros operaciones básicas de la aritmética con números enteros y quebrados [Valdés 1790-1791, 400-401].

Las *Reales Ordenanzas de Minería*, en su Título XVIII, también observaron que el *Real Seminario de Minería* se constituyera de tres tipos de estudiantes: los de dotación (becados), de los cuales se aceptaron veinticinco por año; los pensionistas que se hicieron cargo de sus gastos (estos dos grupos eran internos); y los estudiantes externos que asistieron de manera gratuita. A su vez, estableció la edad de ingreso de los estudiantes entre los catorce y diecisiete años; y que durante su formación académica los más destacados de cada asignatura sustentaran actos públicos en donde los primeros lugares fueran premiados [*Reales Ordenanzas […]*. 1783, 191-203]. En la práctica, el *Real Seminario de Minería* contó con estudiantes relativamente jóvenes (entre los doce y veintiún años), con una incipiente formación matemática, la cual consistía en los principios elementales de aritmética [Valdés 1790-1791.

1. Entre las funciones desempeñadas por los peritos facultativos de minas, destacan: el reconocimiento, medidas, delimitación de las minas a través de estacas y levantamiento de mapas; su acondicionamiento, cálculo y construcción de socavones y aplicación de otros métodos de desagüe; así como el manejo y calibración de instrumentos matemáticos, necesarios para desempeñar su profesión.
2. *Archivo Histórico del Palacio de Minería* (*AHPM*), 1802/II/114/d.10, Manuel Ruiz de Tejada y Otal, "[Propuesta de] Don Manuel Ruiz de Texada, Ayudante del Colegio Metálico [al Tribunal de Minería] sobre que se divida en dos clases la enseñanza de las matemáticas y que se le aplique una de las Cátedras" México, 1802, 13f.
3. *AHPM*, 1796/VII/85/d.1, Fausto de Elhuyar, "Distribución de los sujetos del Seminario en las clases, que deben seguir", México, 1796, 7f.

400-401], adquirida en la mayoría de los casos en las escuelas de Primeras Letras [Vázquez 1999, 54], en la Sala de Matemáticas de la *Real Academia de las Tres Nobles Artes de San Carlos* y en algunas academias matemáticas impartidas al interior del virreinato.[1] Más tarde, en 1800, se estableció que los interesados en ingresar al *Real Seminario de Minería* estuvieran, además, instruidos en gramática castellana, y que los diputados de los reales de minas expidieran un informe sobre la salud física y moral de aquellos.[2] A partir de esa fecha no fue suficiente presentar constancias de su instrucción académica, pues se les examinó en lectura, escritura y aritmética básica en el *Real Seminario de Minería*.[3]

Por su parte, el catedrático titular de cada asignatura, sería elegido entre los novohispanos más doctos, tal y como se estableció en el Art. X del Tit. 18 de las *Reales Ordenanzas de Minaría*:

> […] se pondrán Edictos convocatorios en término y emplazamiento señalado, y a los que se presenten se les permitirá sortear algunos Problemas de la respectiva facultad, los cuales deberán presentar resueltos dentro del tercero día; pero con la prevención de que antes de que se les repartan y entreguen los tales problemas deberá el Director presentar al Real Tribunal la resolución de todos ellos en pliego cerrado y sellados con separación, los cuales no se podrán abrir sino cuando que cada opositor hubiere presentado sus resoluciones para hacer el debido cotejo entre unas y otras. Y en el mismo día en que esto se verifique tendrá el opositor una sección pública de dos horas sobre los puntos que le moviere el Director extemporáneamente, y en presencia del Real Tribunal y de su Escribano […] [*Reales Ordenanzas*… 1783, 196-197].

El catedrático sustentaría la titularidad de manera vitalicia y gozarían de un sueldo anual de $2,000. Como característica distintiva del *Real Seminario de Minería* los profesores centraron su labor en la docencia y no tuvieron ingerencia en la vida política de la institución. Entre las obligaciones del catedráticos de matemáticas destacaban: la búsqueda de bibliografía adecuada para la enseñanza de las matemáticas, dar la clase conforme al programa establecido y basada en el libro de texto, proponer algunas modificaciones al plan de estudio para mejor la instrucción, aplicar un examen final de cada curso, seleccionar entre los

1. Hasta el momento contamos con noticias de algunas academias matemáticas; tal es el caso de la dirigida por Juan Bautista Blanes en la Ciudad de México; la impartida en Querétaro por José Mariano Oriñuela; la del *Colegio de la Santísima Concepción* impartida por José Rojas en la ciudad de Guanajuato; también tenemos noticias breves de las de Valladolid dictadas al interior del Seminario Tridentino y en el *Colegio de San Nicolás*.
2. *AHPM*, 1800/II/105/d.29, Carlos Marquina “Solicitud de Carlos Marquina al Tribunal de Minería para que le conceda el título de perito de minas. Real de Catorce”, 1800, 2f.
3. *AHPM*, 1803/II/120/d.6, Fausto de Elhuyar, “Sobre el modo con que deben acreditar las circunstancias necesarias para ser admitidos de alumnos del Real Seminario de Minería los que pretendan entrar en él”, México, 1803, 7f.

estudiantes a los más avanzados para participar en los actos públicos y formar parte del jurado calificador de dichos actos, determinar quién estaba facultado para ingresar al curso de física, entre otras. Como parte de las actividades extra académicas, el catedrático de matemáticas tenía la obligación de redactar artículos de difusión científica o tecnológica; también fue examinador de peritos facultativos de minas, de agrimensores y de algunos novohispanos y españoles que se propusieron instalar academias matemáticas al interior del virreinato.[1]

Al ausentarse el catedrático titular por enfermedad u otras circunstancias, se nombró un sustituto entre los egresados o estudiantes más sobresalientes de niveles superiores; estos sustitutos tenían todas las facultades y obligaciones del catedrático titular, y su sueldo se estableció en función del tiempo y la calidad de la sustitución.

En 1801, Elhuyar nombró ayudantes de cátedra entre los colegiales que habían realizado sus prácticas, con la finalidad de que consolidaran su instrucción académica y como apoyo a los educandos.[2] Con esta iniciativa sus egresados adquirieron experiencia en la docencia, de tal forma que algunos de ellos llegaron a ser catedráticos titulares, tales son los casos de Juan José Oteyza y José Manuel Ruiz de Tejada.

Planes de estudios para la enseñanza de las matemáticas

Fausto de Elhuyar propuso dos planes de estudios oficiales para la enseñanza de las matemáticas, durante el periodo que nos ocupa, que fueron modificados conforme a las necesidades académicas existentes al interior del *Real Seminario de Minería*; dichas modificaciones dependieron en gran medida del desempeño académico de sus estudiantes, así como de las propuestas de sus profesores para mejorar la instrucción.

Antes del arribo de Fausto de Elhuyar a la Nueva España; Juan Lucas de Lassaga y Joaquín Velázquez de León, en su *Representación* de 1774, propusieron la fundación de una institución académica cuyo objetivo primordial fue la formación de sujetos bien instruidos en la minería; un Seminario Metalúrgico en donde se formara a los novohispanos en las últimas innovaciones científicas de las matemáticas, la física, la química, la mineralogía, la metalurgia y el dibujo, a semejanza

1. Las funciones de examinar a los candidatos a agrimensor y las propuestas de academias matemáticas, no fueron exclusivas del catedrático de del Real Seminario, también los catedráticos de la Real Universidad de México y el de la Real Academia de las Tres Nobles Artes las ejercieron.
2. *AHPM*, 1801/IV/112/d.1, Fausto de Elhuyar, “Sobre nueva obligación a que deben arreglarse los Ayudantes puestos en el Colegio Metálico”, México, 1801, 22f.

de las academias europeas. Para el caso de la enseñanza de las matemáticas recomendaron que en los dos primeros años se enseñara, aritmética, geometría, trigonometría y álgebra [Ramírez 1890, 25].

Años más tarde, en 1790, Fausto de Elhuyar presentó el primer plan de estudios oficial para el Colegio de Minería, estableciendo en el artículo 1° de enseñanza lo siguiente:

> El primer año las Matemáticas puras, en que se comprenderá la aritmética, el álgebra, la geometría elemental, la trigonometría plana y las secciones cónicas.
>
> En el segundo la geometría práctica cuyas aplicaciones se dirigirán a las operaciones propias y usuales en la minería, comprendiendo, por consiguiente, en ella, la que llamamos geometría subterránea, y a continuado la dinámica y la hidrodinámica [Curso de Física] [Ramírez 1890, 62-63].

Posteriormente, en 1803, Elhuyar presentó al *Real Tribunal de Minería* la iniciativa de que la enseñanza de las matemáticas se dividiera en dos cátedras y que cada una contara con un titular, retomando como libro de texto los *Elementos de matemática* de Benito Bails. De tal manera que se dispuso para la primera cátedra que se impartiera: aritmética, geometría elemental, trigonometría rectilínea, geometría práctica y geometría subterránea; y para la segunda, álgebra, secciones cónicas, trigonometría esférica y cálculo infinitesimal [Ramírez 1890, 62-63].

La cátedra de matemáticas bajo el magisterio de José Andrés Rodríguez

El periodo en que estuvo vigente el primer programa propuesto por Elhuyar se corresponde a la época en que José Andrés Rodríguez fue el catedrático titular de matemáticas. Durante este periodo, al interior de cátedra, se hicieron ajustes no oficiales al plan de estudio y se formó a los novohispanos que más tarde serían titulares de dicha cátedra. Esta etapa comprende el periodo de 1792 a 1803, y se subdivide en dos fases definidas por la currícula académica a impartir:

El primero de estos periodos, de 1792 a 1797, se caracteriza por contar sólo con un curso oficialmente aunque, como veremos, existieron dos cursos de matemáticas a partir de 1793. Durante este periodo Rodríguez impartió: aritmética, geometría elemental, trigonometría plana, secciones cónicas y geometría práctica. Debemos destacar que en el año de 1797 enseñó el cálculo infinitesimal [Valdés 1796-1797, 374-375], rama de la matemática que a partir de 1798 y hasta 1802 se impartió desde la cátedra de física [Valdés 1800-1801, 239]. Durante esta fase también hubo cambio de libro de texto, en 1792 el curso se basó en los *Elementos de Matemática*, de Benito Balis, pero a partir de 1793 y hasta 1797 se siguió el segundo tomo de los *Principios de aritmética, álgebra y geometría* de Juan Justo García, ello a petición del catedrático por considerar que contenía explicaciones más inteligibles.[1] Haciendo memoria de lo establecido en el plan de estudios de 1790, visualizamos que al interior de la cátedra se impartieron dos ramas que en teoría debieron estudiarse desde la de física: la geometría práctica y la geometría subterránea, además de que por iniciativa de Rodríguez se introdujo la enseñanza del cálculo infinitesimal.

En 1798 se dividió oficialmente la enseñanza de las matemáticas en dos cursos, ambos impartidos por Rodríguez,[2] y se retomó como libro de texto la obra de Bails; también se introdujo la enseñanza del álgebra contemporánea. Durante este periodo (1798-1803), se impartió: aritmética, geometría elemental y trigonometría plana, en el primer curso, y en el segundo álgebra, secciones cónicas y geometría práctica.

Los logros pedagógicos que Rodríguez obtuvo, están estrechamente relacionados con el desempeño académico de sus estudiantes, el cual quedo registrado en las noticias de los actos públicos y en las listas de distribución de estudiantes.

Actos públicos de matemáticas: 1792-1803

Año	Primer curso	Segundo curso
1792[3]	Aritmética. Geometría Trigonometría plana	
1793[4]	Aritmética, geometría elemental y trigonometría plana.	Secciones cónicas y geometría práctica.
1794[5]	Secciones cónicas y geometría práctica	Secciones cónicas y geometría práctica
1795[6]	Aritmética, secciones cónicas y geometría práctica	
1797[7]		Trigonometría plana, secciones cónicas y cálculo infinitesimal

1. *AHPM*, 1793/VIII/67/d.13, Tribunal de Minería, “Sobre compra de una porción de libros que ha calificado el Señor director general por útiles para la instrucción y enseñanza de los alumnos del Colegio de Minería”, México, 1793, 11f.
2. *AHPM*, 1797/VI/91/d.21, Fausto de Elhuyar, “A solicitud del Señor Director sobre que se divida en dos años la enseñanza de las materias de la cátedra de Matemáticas”, México, 1797, 19f.
3. Valdés 1792-1793, 230.
4. Valdés 1792-1793, 241-242.
5. Valdés 1794, 2-4.
6. Valdés 1795, 492-493.
7. Valdés 1796-1797, 374-375.

1798[1]	Aritmética, geometría y trigonometría plana	
1799[2]	Aritmética, geometría y trigonometría plana	Álgebra, secciones cónicas y geometría subterránea
1800[3]	Aritmética, geometría elemental y trigonometría plana	Álgebra, secciones cónicas y geometría subterránea
1801[4]	Aritmética, geometría elemental y trigonometría plana	
1803[5]	Aritmética, geometría elemental y trigonometría plana.	Álgebra, secciones cónicas y geometría práctica

Con relación a los actos públicos podemos notar la existencia no oficial del segundo curso de matemáticas a partir de 1793; y partiendo del hecho de que estos se realizaban con base en lo difundido en la cátedra, con apego al libro de texto, notamos que las ramas matemáticas expuestas en dichos actos se corresponden a los tres tomos de los *Elementos de matemática* de Bails y al segundo tomo de los *Principios de aritmética, álgebra y geometría* de Juan Justo García, como elemento distintivo, en esta última obra Rodríguez sustentó la enseñanza del cálculo infinitesimal.

La enseñanza de las matemáticas bajo el magisterio de egresados del Real Seminario

Esta segunda etapa, entre los años de 1803 y 1810, se corresponde a la época en que Elhuyar dispuso seguir el plan de estudios de 1803. En esta etapa la enseñanza de las matemáticas se dividió en dos cátedras, impartida cada una por catedrático distinto. Como característica distintiva la titularidad de las cátedras recayó en dos novohispanos formados en la propia institución, Oteyza y Ruiz de Tejada.

La iniciativa de que la instrucción de las matemáticas se diera en dos cátedras, data de 1802; originalmente fue de Ruiz de Tejada, motivado por el atraso académico de algunos estudiantes, sobre todo del primer curso. Además, este novohispano, sugirió se incluyera la instrucción de la trigonometría esférica y del cálculo infinitesimal, a la segunda cátedra.[6] Elhuyar

1. Valdés 1798-1799, 124-126.
2. Valdés 1800-1801, 14-16.
3. Valdés 1800-1801, 211-213.
4. Valdés 1800-1801, 316-317.
5. Valdés 1802-1803, 168-169.
6. *AHPM*, 1802/II/114/d.10, Manuel Ruiz de Tejada y Otal, "[Propuesta de] Don Manuel Ruiz de Texada, Ayudante del Colegio Metálico [al Tribunal de Minería] sobre que se divida en dos clases la enseñanza de las matemáticas y que se le aplique una de las Cátedras", México, 1802, 13f.

huyar aprobó dicha iniciativa, a pesar de que la enseñanza del cálculo infinitesimal no estaba contemplada en el plan académico original, el de 1790; pues consideró que "[…] los principios del cálculo infinitesimal, por convenir mucho que los jóvenes los posean para poder perfeccionar su instrucción con las obras magistrales de mecánica, hidráulica, etc., de que con tanta utilidad y ventaja se hace uso de dicho cálculo"[1] por lo que estableció para la segunda cátedra de matemáticas se impartieran las secciones cónicas, la geometría subterránea, la trigonometría esférica y el cálculo infinitesimal.[2]

En 1803, Elhuyar presentó esta iniciativa al *Real Tribunal de Minería,* y se instituyó que en la primera cátedra se impartiera la aritmética, geometría elemental, trigonometría rectilínea, la geometría práctica y la geometría subterránea; y en la segunda el álgebra, secciones cónicas, trigonometría esférica y cálculo infinitesimal; ambas cátedras debía tomar como libro de texto los *Elementos de matemática* de Bails.[3] Comparando este programa con la propuesta de Ruiz de Tejada, observamos que la geometría subterránea se impartiría en la primera cátedra y el álgebra en la segunda. A pesar de que este nuevo plan académico se aprobó desde 1803, año en que la cátedra quedo vacante por la muerte de José Andrés Rodríguez, no se convocó a concurso de oposición abierto sino al año siguiente, y los catedráticos electos comenzaron a impartir curso como titulares hasta 1805; durante el periodo vacante Ruiz de Tejada fue sustituto de la segunda cátedra en 1803 y 1804 y de la primera en 1804, y los sustitutos de la primera, en 1803, fueron Manuel Cotero y Andrés Ibarra.[4]

A inicios de 1804, el *Real Tribunal de Minería* convocó a todos los instruidos en matemáticas a concursar por la titularidad de la primera y segunda cátedras de esta ciencia.[5] Tras el desempeño satisfactorio de

1. *AHPM,* 1803/II/120/d.12, Fausto de Elhuyar, "[Solicitud de Fausto de Elhuyar, director, al Tribunal de Minería] sobre que se divida en dos la Cátedra de Matemáticas en el Seminario Metálico, y provisión que se hizo de ambas en Don Juan José de Oteiza, y Don Manuel Ruiz de Texada", México, 1803. 62f.
2. *AHPM,* 1802/II/114/d.14, Manuel Ruiz de Tejada y Octal, "Don Manuel Ruiz de Texada, Ayudante del Colegio Metálico sobre que se divida en dos clases la enseñanza de las matemáticas y que se le aplique una de las Cátedras", México, 1802, 13f.
3. *AHPM,* 1803/II/120/d.12, Fausto de Elhuyar, "[Solicitud de Fausto de Elhuyar, director, al Tribunal de Minería] sobre que se divida en dos la Cátedra de Matemáticas…, *Op. cit.*
4. *AHPM,* 1804/II/125/d.5, Fausto de Elhuyar, "Sobre nombramiento de sustitutos para las cátedras de matemáticas en el Colegio y sobre el sueldo con que provisionalmente se les ha de acudir", México, 1804, 17f.
5. *AHPM*, 1804/IV/127/d.19, Tribunal de Minería, "Convocatoria del Tribunal de Minería al concurso de oposición a las cátedras de matemáticas del Colegio de Minería", México, 1804.

los dos únicos contendientes, el *Real Tribunal de Minería* dictaminó que Oteyza impartiera la primera cátedra y la segunda Ruiz de Tejada; esta decisión se fundamentó en el hecho de que "[…] atendiendo a que la del segundo curso, por comprender la de la Geometría subterránea o Arte de medir Minas, exige conocimientos prácticos de Minería en cuya rama se ha versado con toda formalidad el Alumno de dotación que fue de este Don Manuel Ruiz de Tejada y ejercitándose poco el Br. Don Juan José Oteyza, por haber seguido hasta ahora otra carrera distinta[…]" [*Ibid*., f 50].

Lo poco que sabemos sobre la formación académica de Oteyza se reduce a su breve estancia en el *Real Seminario de Minería*, al que ingresó en 1801, en el mismo año participó en acto público disertando sobre aritmética, geometría elemental y trigonometría plana; fue sustituto de la primer cátedra de matemáticas en 1804 y de la de física de 1808 a 1810. Cuando se presentó al concurso de oposición abierto era colegial del *Seminario Tridentino de la Ciudad de México*. Sobre su desempeño como catedrático de matemáticas en el *Real Seminario de Minería*, según lo establecido en el plan académico de 1803, debió enseñar aritmética, geometrías elemental, práctica y subterránea; y trigonometría plana. Según hemos podido constatar una vez que Oteyza se hizo cargo de la cátedra el índice de repetidores descendió considerablemente.

Por su parte, Ruiz de Tejada nació en Aguascalientes en octubre de 1779, ingresó al Real Seminario en 1792 y según consta en su 'Información de legitimidad y limpieza de sangre […]' fue examinado y encontrado apto en las cuatro operaciones básicas de la aritmética, por Diego de Guadalajara Tello, titular de la Sala de Matemáticas de la *Real Academia de San Carlos*, en diciembre de 1791.[1] Tejada no participó en ningún acto de matemáticas, pero si terminó su instrucción en la institución e hizo sus prácticas en Real de Catorce en 1798, en donde desempeñó "[…] operaciones relativas a la práctica de la minería, tanto las correspondientes a la geometría subterránea, laboreo y dirección económica de las minas, como en todo lo referente a los beneficios y azogue de sus frutos."[2] Una vez terminadas sus prácticas, a inicios de 1801, se le examinó encontrándolo capacitado para sustentar los títulos

1. *AHPM*, 1791/II/49/d.5, María de Aso y Ontal, "Información de legitimidad y limpieza de sangre de don José Manuel Ruiz de Tejada y Otal", México, 1791, 42f.
2. *AHPM*, 1811/II/153/d.20, Manuel Ruiz de Tejada, "A solicitud del Catedrático de Matemáticas D. Manuel Ruiz de Tejada, sobre que se recomiende su mérito al Señor Superintendente de la Real Casa de Moneda en que pretensión que hace a una de las plazas de Ensayadotes de dicha Casa, y que sea con retención de su Cátedra en el Colegio hasta obtener la aprobación de Su Majestad", México, 1811.

de Perito Facultativo y Perito Beneficiador. El mismo año fue comisionado para realizar visita y dar informe del hundimiento del Real de la Tergera. De 1801 a 1804 fue ayudante de cátedra: en 1801 de la cátedra de física, en 1802 de la mineralogía y sustituto del primer curso de matemáticas; en 1803 y 1804 fue catedrático interino de la segunda cátedra de matemáticas y de 1805 a 1812 catedrático titular de la segunda cátedra de matemáticas; de 1810 a 1812 fue catedrático interino de la primera cátedra de matemáticas y de la de física, de la cual fue titular a partir de 1813. Paralelo a ello, se desempeñó como ensayador de la *Real Casa de Moneda* a partir de 1811 [*Ibid*.]; murió en enero 1867 [Ramírez 1889, 64].

Sobre su desempeño como catedrático en el *Real Seminario de Minería*, podemos apuntar que una vez que Ruiz de Tejada se hizo cargo de la segunda cátedra de matemáticas el índice de repetidores descendió considerablemente y en varios años no hubo quien repitiera Matemáticas II.

Como ya hemos mencionado, los actos públicos de los estudiantes nos han permitido valorar el nivel de conocimiento matemático impartido al interior del *Real Seminario de Minería*; de tal manera que una vez que la enseñanza de las matemáticas se efectuó a través de dos cátedras, la calidad académica de los actos fue óptima. Así, por ejemplo, en el acto público de 1805 hubo cambios importantes en relación a los actos de años anteriores; se examinó a estudiantes de primero en aritmética, geometría elemental, trigonometría plana y álgebra; y a estudiantes de segundo en geometría analítica, cálculo infinitesimal y geometría práctica,[1] estas ramas matemáticas no coinciden con lo planteado en el programa académico para cada una de las cátedra, recordemos que según el plan de estudios de 1803, la geometría práctica se enseñaría desde la primer cátedra mientras que el álgebra en la segunda, además de que la instrucción de la geometría analítica no se consideró en ninguna de ellas.

En el acto público de 1807 los alumnos de primero fueron examinados en aritmética, geometría elemental, trigonometría plana y álgebra, esta última hasta la resolución de ecuaciones del segundo grado; mientras que los de segundo año fueron examinados en:

> […] resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, y las de grado superior por sus factores, así lineales como de dos dimensiones: en los métodos directo e inverso de las series, determinación de su suma, y aplicación a la extracción de las raíces, y cálculo de los logarit-

1. Juan Bautista Arizpe, *Diario de México*, México, tomo I, 1805, p. 60.

> mos; tratando todas estas materias con la extensión que tienen en la obra grande de Bails [*Principios de matemáticas*, en diez tomos]; y según la pequeña [*Elementos de matemática*] del mismo contestarán sobre la aplicación del álgebra a la geometría, las secciones cónicas, los cálculos diferencial e integral, la geometría práctica con sus aplicaciones a las medidas de minas.[1]

Esta nota es significativa, pues los actos públicos se realizaron en base al libro de texto. La primera parte de la temática citada pertenece al tomo II de los *Principios de Matemáticas* de Bails, y la geometría práctica se localiza en el tomo I de los *Elementos de matemática*, y el resto de las ramas matemáticas examinadas son los tomos II y III también de los *Elementos*. Es preciso hacer notar que ni en el acto público de 1805 ni en el de 1807 se examinó sobre trigonometría esférica, rama matemática que según el plan de estudios de 1803 se impartió desde la segunda cátedra.

Para el acto público de 1809 contamos con una lista más detallada de las ramas matemáticas a examinar. José María Apezechea y Rafael Duran, estudiantes de primero, fueron examinados en aritmética, geometría elemental, trigonometría plana y el álgebra; el examen se basó en el primer tomo de los *Elementos de matemática* de Bails.[2] Mientras que José Manuel González, Antonio Rábago y Tomas del Moral, estudiantes de segundo, respondieron cuestiones de:

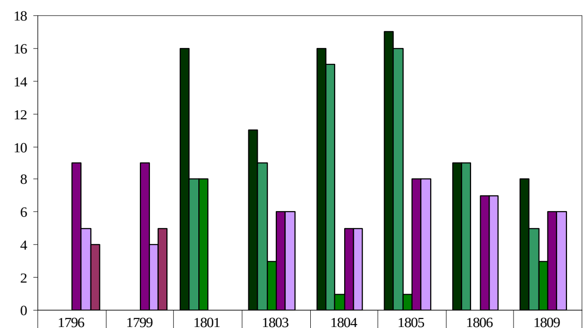
> […] raíces lineales de la ecuaciones de tercero y cuarto grados; lo que se emplea para la resolución de las de grado superior por medio de los factores de una a dos dimensiones; la naturaleza de las series, sus diversos ordenes, sumas y términos generales, la utilidad de los métodos directo e inverso, y su ventajosa aplicación a la formación de los logaritmos, y determinación así de los cocientes de las fracciones propias, como de las raíces de las cantidades inconmensurables, con la extensión que están tratadas estas materias en [*Principios de matemática*] la obra grande de Bails. Según el compendio del mismo, contestarán sobre aplicación del álgebra a la geometría, demostrando la exacta correspondencia entre los cálculos de la primera con las operaciones de la segunda; manifestarán también el origen, ecuaciones, y propiedades de la Parábola, Elipse, Hipérbola, Logarítmica y Cicloide: responderán sobre el cálculo infinitesimal, aplicando su primera parte a la diferenciación de toda cantidad variable, a la resolución de cuestiones de máximos y mínimos; a la determinación de los radios de curvatura; puntos de inflexión, tangentes, subtangentes, normales y subnormales de las curvas; y respecto a la segunda parte expondrán las reglas generales y particulares de integración, sus aplicaciones útiles a la formación de los logaritmos, así de los números naturales como de las líneas trigonométricas, a la rectificación de las curvas, determinación de sus superficies y sólidos que resultan de sus revoluciones. Acreditarán además su instrucción, así en la trigonometría

1. Juan Bautista Arizpe, *Diario de México*, México, tomo VII 1807, p. 226, 229-230.
2. *Archivo General de la Nación* (*AGN*), Indiferente Virreinal, Minería, Caja 6225, exp. 035.

esférica, como en todos los puntos de la geometría práctica, y particularmente en la formación de planos y mapas geográficos, y métodos para reducir los ángulos de un plano a otro, exponiendo sus aplicaciones a las medidas subterráneas con más extensión que la que tiene la obra de Mr. Duhamel [*Ibíd.*, f. 3r-4].

De esta lista de materias examinadas en el acto público debemos resaltar el hecho de que la enseñanza de las matemáticas desde la segunda cátedra se basó en los *Elementos de matemática* de Bails, en el segundo tomo de los *Principios de Matemáticas* del mismo autor y en la obra de Duhamel.

En los actos públicos participaron los estudiantes más destacados de cada curso. La ausencia de exposición de alguna de las ramas matemáticas en dichos actos es muestra del bajo desempeño académico en ellas. Sin embargo, estos actos públicos sólo dan cuenta de los logros de los estudiantes más destacados; pero gracias a los pocos oficios que localizamos sobre la distribución de los estudiantes del *Real Seminario de Minería*, tenemos el número de repetidores de cada curso. No estimamos pertinente, debido a la discontinuidad temporal, hacer una tabla de porcentajes, por lo que presentamos una tabla de valores numéricos con esos datos:



	1796	1799	1801	1803	1804	1805	1806	1809
1º Curso			16	11	16	17	9	8
Nvo. Ingreso			8	9	15	16	9	5
Repetidor			8	3	1	1	0	3
2º Curso	9	9		6	5	8	7	6
Nvo. Ingreso	5	4		6	5	8	7	6
Repetidor	4	5		0	0	0	0	0

Tabla de aprovechamiento de los cursos de matemáticas[1]

1. *AHPM*, 1796/VII/85/d.1, Fausto de Elhuyar, "Distribución de los sujetos del Seminario en las clases, que deben seguir", México, 1796, 7f., *AHPM*, 1799/III/100/d.24, Fausto de Elhuyar, "Expediente sobre distribución de los alumnos del real Seminario de Minería en la enseñanza del presente año", México, 1799, 4f., *AHPM*, 1801/II/110/d.15, Fausto de Elhuyar, "Sobre distribución de Colegiales en sus respectivas clases",

En los años señalados el mayor índice de repetidores se dio en Matemáticas I pero al paso del tiempo, bajo la dirección de Oteyza, se fue regularizando. Lo que podemos observar para el caso de Matemáticas II el proceso enseñanza-aprendizaje se regularizó y tuvo una eficiencia del cien por ciento a partir de Ruiz de Tejada se hizo cargo de él, primero como suplente y después como titular.

La bibliografía matemática en el Real Seminario de Minería

Existe otro elemento importante en la enseñanza de la matemática moderna al interior del *Real Seminario de Minería*; se trata de la bibliografía matemática con la que contó la institución y de los libros de texto utilizados con fines didácticos. Sobre la biblioteca [véase: Escamilla 2008], sólo haremos mención de que según lo enlistado en el "Catalogo de los libros existentes en la Biblioteca de este Colegio, formado en 2 de abril de 1799 […]"[1] destacan entre los autores algunos de los matemáticos europeos más sobresalientes de la época, tales son los casos de Collet, Claireaut, L'Hôpital, por mencionar algunos; de igual manera el listado cuenta con tratados específicos de algunas ramas matemáticas, ya no son sólo compendios; se adquirió un número considerable de bibliografía diseñada para la enseñanza; es importante mencionar que la mayoría de estos libros fueron editados en el siglo XVIII y que en un buen porcentaje sus autores son franceses, así como que de los ciento treinta títulos que para entonces formaban la biblioteca, sesenta y cinco fueron de matemática teórica, es decir, un cincuenta por ciento. Este porcentaje se reduce en los años posteriores en que se compraron más libros de química y mineralogía, de autoría alemana.[2]

México, 1801, 5f., *AHPM*, 1803/I/119/d.18; Fausto de Elhuyar, "Sobre la distribución de los Alumnos del Seminario de Minería en sus respectivas clases", México, 1803, 7f., *AHPM*, 1804/III/126/d.12, Fausto de Elhuyar, "Sobre distribución de los Alumnos del Seminario Metálico en sus respectivas clases", México, 1804, 6f., *AHPM*, 1805/I/129/d.18, Fausto de Elhuyar, "Distribución de los Alumnos del Colegio Metálico para las clases que deben cursar en el presente año, hecha por el Señor Director General", México, 1805, 5f., *AHPM*, 1806/I/139/d.14, Fausto de Elhuyar, "Distribución de Alumnos del Real Seminario de Minería, en sus diferentes clases en el curso del presente año de 1806", México, 1806, 8f., *AHPM*, 1808/I/141/d.1, Fausto de Elhuyar, "Distribución de los Alumnos del Real Seminario de Minería, en sus diferentes clases para el presente año de 1808", México, 1808, 6f., *AHPM*, 1809/I/145/d.8, Fausto de Elhuyar, "Distribución de los Alumnos del Real Seminario de Minería en sus diferentes clases para el presente año de [1]809", México, 1809, 3f.

1. *AHPM*, 1799/III/100/d.23, José Mariano Fernández de Castro, "Catalogo de los libros existentes en la Biblioteca de este Colegio, formado en 2 de abril de 1799 por el Doctor Don Mariano Fernández de Castro Colegial catedrático del mismo Seminario de Minería", México, 1799.
2. Ejemplo de ello es la carta de Juan Miguel Melquiond, *AHPM*, 1802/III/115/d.13.

Sobre los mencionados libros de texto [véase: Martínez 2002], nos limitaremos a apuntar que sus autores se basaron en las obras de los matemáticos europeos más destacados de la época. Por ejemplo Juan Justo García en *Principios de aritmética, álgebra y geometría*, se sustentó en las obras de Leibniz, Euler, Picard, De la Hire, L'Hôpital, Napier, Cramer y Benito Bails [véase: García 1815]. Mientras que, Benito Bails en el segundo tomo de los *Elementos de matemática* se basó en el *Cours de Mathématiques, a l´usage des Gardes du Pavillon de la Marine* de Mr. Bezóut; en las obras clásicas de la geometría analítica, *Geometría* de Descartes y *Aritmética Universal* de Newton; para el caso del álgebra hizo referencia a Euler, Lagrange, Saudersones, Mauduit, Clairut, Ricati, Abate Marie, Moivre, P. Gherli y Vicente Christofano [Bails 1771, i-xvii]; el estudio de las funciones trigonométricas, Bails se documentó con los tratados de Euler, Ricati, Mauduit, Emerson y Thomas Simpson [Bails 1771, xvii-xxiii]. Su análisis sobre la probabilidad lo basó en los estudios de Thomas Simpson [Bails 1771, xxiii-xxvi]. Y de su tercer tomo, la parte correspondiente a la geometría analítica está basada casi por completo en las propuestas del Conde L'Hôpital, por considerarla más sencilla que las explicaciones de Euler. Para la exposición del cálculo infinitesimal, empleó la obra de M. Bezout [Bails 1772, i-xxv].

Al revisar el “Catalogo de los libros existentes en la biblioteca de este Real Colegio […]” observamos que la mayoría de la bibliografía matemática con la que contó este recinto educativo, son de la autoría de los matemáticos estudiados por Bails. De igual manera pudimos constatar que el contenido del segundo y tercer tomos de los *Elementos de matemática* se corresponde a la materia enseñada en la segunda cátedra de matemáticas.

Conclusiones

La consolidación de la enseñanza de las matemáticas en el *Real Seminario de Minería* se efectuó a través de un proceso de mediana duración, el cual dependió de las necesidades académicas de la institución, que estuvieron matizadas por el ejercicio pedagógico del docente pero también por el desempeño académico de sus estudiantes.

Partiendo de las reformas a los programas académicos de las cátedra de matemáticas hemos identificado que el proceso de consolidación de la enseñanza de esta ciencia constó de dos etapas bien definidas: La primera de ellas encabezada por el José Andrés Rodríguez que fue su titular de 1792 a 1803, en cuyo periodo hemos identificado a la vez una subdivisión: a) de 1792 a 1798 con sólo un curso de matemáticas; b) de

1798 a 1803 la división de la enseñanza de las matemáticas en dos cursos y la introducción de la enseñanza del álgebra contemporánea y el cálculo infinitesimal. La segunda etapa (1803-1810), caracterizada por la existencia de dos cátedras, con ello la enseñanza de las matemáticas se extendió a dos años. Según lo establecido en el plan de estudios de 1803, en la primera cátedra debería de impartirse aritmética, las geometría elemental, práctica y subterránea, y trigonometría rectilínea; y en la segunda debía enseñarse álgebra, curvas (secciones cónicas), cálculo infinitesimal y trigonometría esférica,[1] estableciéndose así la enseñanza de la matemática de corte moderno. Consideramos como otra característica importante de este segundo periodo, el hecho de que ambas cátedras fueron impartidas por egresados del Real Seminario: Juan José Oteyza y Manuel Ruiz de Tejada.

De igual manera identificamos que el uso de libros de texto fue fundamental para la enseñanza de las matemáticas, y que ello se inscribe en una tradición ilustrada de difundir la ciencia en los recintos académicos a través de libros diseñados para la enseñanza, aunque, para el caso de las matemáticas el Real Seminario no contempló la opción de crear sus propios libros de texto.

Finalmente, hacemos hincapié en que la matemática que se enseñó al interior del *Real Seminario de Minería* fue de corte moderno, ya que retomó, vía los libros de texto, el trabajo de los matemáticos europeos más sobresalientes de la segunda mitad del siglo XVIII; además la enseñanza de esta ciencia tuvo fines didácticos y pragmáticos, ya que las matemáticas fueron la base para la enseñanza del resto de la ciencias, además fue aplicada en la labor de los peritos facultativos de minas.

Referencias

Archivo General de la Nación

AGN, Indiferente Virreinal, Minería, Caja 6225, exp. 035.
AGN, Minería, Vol. 18, s/ex., s/f.

Archivo Histórico del Palacio de Minería

AHPM, 1799/III/100/d.23., *AHPM*, 1799/III/100/d.24., *AHPM*, 1800/II/105/d.29., *AHPM*, 1801/II/110/d.15., *AHPM*, 1801/IV/112/d.1., *AHPM*, 1802/II/114/d.10., *AHPM*, 1802/II/114/d.10., *AHPM*, 1802/II/114/d.14., *AHPM*, 1802/III/115/d.13., *AHPM*, 1803/I/119/d.18., *AHPM*, 1803/II/120/d.6., *AHPM*, 1803/II/120/d.12., *AHPM*, 1804/II/125/d.5., *AHPM*, 1804/III/126/d.12., *AHPM*, 1804/IV/127/d.19.,

1. *AGN*, Minería, Vol. 18, s/ex., s/f.

AHPM, 1805/I/129/d.18., *AHPM,* 1806/I/139/d.14., *AHPM,* 1808/I/141/d.1., *AHPM,* 1809/I/145/d.8., *AHPM,* 1811/II/153/d.20., *AHPM,* 1791/II/49/d.5., *AHPM,* 1793/VIII/67/d.13., *AHPM,* 1796/VII/85/d.1., *AHPM,* 1796/VII/85/d.1., *AHPM,* 1797/VI/91/d.21.

BAILS, Benito. 1779 *Elementos de matemática.* Madrid: Joaquín Ibarra. Tomo II.

——————. 1772. *Elementos de matemática.* Madrid: Joaquín Ibarra. Tomo III.

——————. 1788. *Principios de matemática*. Madrid: Viuda de Ibarra. Tomo I.

BAUTISTA ARIZPE, Juan. 1805. *Diario de México.* México. Tomo I.

——————. 1807. *Diario de México*. México. Tomo VII.

ESCAMILLA, Francisco Omar. 2008. 'Origen de los libros de matemáticas en el Real Seminario de Minería de México: Análisis del inventario de 1799', ponencia presentada en el *I Congreso Nacional de Historia y Filosofía de la Ciencia en México*, Morelia del 2 al 4 de junio de 2008.

ESPINOSA SÁNCHEZ, Juan Manuel. 2006. **Newton en la ciencia novohispana del siglo XVIII**. Tesis inédita de doctorado. México: UAM-I (Facultad de Filosofía).

FLORES CLAIR, Eduardo. 1999. "*El Colegio de Minería*. Una institución ilustrada del siglo XVIII novohispano" en http://www.ejournal.unam.mxhistoria novoehn20EHN02005

IZQUIERDO, José Joaquín. 1958. *La primera casa de las ciencias en México: el Real Seminario de Minería (1792-1811).* México.

JUSTO GARCÍA, Juan. 1815. *Elementos de aritmética, álgebra y geometría.* Salamanca: Vicente Blanco. Tomo II. (Cuarta reimpresión).

LASSAGA, Juan Lucas de y Joaquín Velázquez de León. 1774. *Representación que a nombre de la Nueva España hacen al Rey Nuestro Señor. Los apoderados de ella Don Juan Lucas de Lassaga. Regidor de esta Nobilísima Ciudad, y juez contador de menores y albaceazgos: y Don Joaquín Velázquez de León, Abogado de esta Real Audiencia y catedrático que ha sido de matemáticas de esta Real Universidad, en 1774.* (Edición facsimilar. México: SEFI. 1979. Introducción de Roberto Moreno de los Arcos).

LÓPEZ ALEJANDRE, Ruth. 2008. **La institucionalización de las matemáticas en la Nueva España: 1782-1810.** Tesis inédita de Maestría. Morelia: IIH-UMSNH.

MARTÍNEZ REYES, Magally. 2002. **Newton en México.** Tesis inédita de Maestría. México: UNAM (Facultad de Ciencias).

RAMÍREZ, Santiago. 1889. *Biografía del Ilustre Don Manuel Ruiz de Tejada* México, Imprenta del Gobierno Federal del Ex_Arzobispado, 1889.

———. 1890. *Datos para la historia del Colegio de Minería.* México: Imprenta del Gobierno Federal en Ex-arzobispado.

Reales Ordenanzas para la Dirección Régimen y Gobierno del Importante Cuerpo de la Minería de Nueva España y de su Real Tribunal General de orden de su Majestad, Madrid, 1783.

VALDÉS, Manuel Antonio. 1788 - 1799. *Gazetas de México. Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1788-1799,* México, tomo III, Felipe de Zúñiga y Ontiveros.

———. 1790 - 1791. *Gazetas de México. Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1790-1791.* México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo IV.

———. 1792 - 1793. *Gazetas de México*. *Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1792-1793*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo V.

———. 1794. *Gazetas de México*. *Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende el año de 1794*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo VI.

———. 1795. *Gazetas de México*. *Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende el año de 1795*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo VII

———. 1796 – 1797. *Gazetas de México*. *Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1796-1797*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo VIII.

———. 1798 – 1799. *Gazetas de México*. *Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1798-1799*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo IX.

———. 1800 – 1801. *Gazetas de México. Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1800-1801*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo X.

———. 1802 – 1803. *Gazetas de México. Compendio de noticias de la Nueva España. Que comprende los años de 1802-1803*. México: Felipe de Zúñiga y Ontiveros. Tomo XI.

VÁZQUEZ, Josefina Zoraida, *et al.*, 1999. *Ensayos sobre historia de la educación en México.* México: COLMEX.

Mathesis **III 4$_2$** (2009) 239 - 263.

Hilbert y el método de los elementos ideales

Luis Carlos Arboleda

Resumen

En el presente trabajo se revisa la cuestión del método de los elementos ideales en el campo de estudios históricos y filosóficos sobre el formalismo de Hilbert. El propósito es dar una visión de conjunto del trasfondo filosófico de los ideales como instrumentos para la extensión de teorías matemáticas. Para ello se examinan tres problemáticas que conectan históricamente con los ideales en el pensamiento de Hilbert: método genético y método axiomático, matemáticas de contenido y matemáticas formales, formalismo e instrumentalismo. La literatura estudiada permite aclarar cómo la introducción de estas entidades prefigura, en la obra de Hilbert, el movimiento moderno de las matemáticas hacia estructuras idealizadas, y precisar la interacción que mantienen dichas estructuras entre ellas mismas y con la realidad concreta. Este trabajo muestra que el análisis del método de los ideales contribuye a la comprensión de la naturaleza del juego recurrente entre búsqueda atemporal de la teoría matemática formalmente más acabada, y constitución dinámica de objetos matemáticos mediante tematizaciones operadas sobre dominios previos.

Abstract

The question of the method of ideal elements in the historical and philosophical studies on Hilbert's formalism is explored here. The purpose is to analyze the whole philosophical background of the ideals as tools for the extension of mathematical theories. To that purpose we examine three problems that historically connect with Hilbert's thought: the genetic and axiomatic method, the mathematics of content and the formal mathematics, and formalism and instrumentalism. The literature here studied allows us to determine how the introduction to these theoretic entities prefigures, in Hilbert's work, the contemporary movement of mathematics toward idealized structures, and will also help us to determine the interaction that such structures maintain with them and with the concrete reality. This work shows that the analysis of ideals method contribute to the understanding of the recurrent game between the atemporal search of the mathematical theory formally achieved and the dynamic constitution of the mathematic objects through extensions operated within previous domains.

Palabras clave: Colombia, Garavito, Vera, Bellon, Teoría de Conjuntos
Key words: Colombia, Garavito, Vera, Bellon, Set theory
MSC 2000: 01A60

Introducción

Es sabido que para Hilbert la resolución de problemas es uno de los impulsos centrales de la creación matemática. "Por más inabordables […] que parezcan los problemas y por incapaces que nos sintamos ante ellos, tenemos, sin embargo, la firme convicción de que su solución debe seguir un número finito de deducciones lógicas." Una de las características de nuestro razonamiento matemático es un cierto 'axioma de resolubilidad' que se traduce en la convicción de que toda pregunta planteada por nuestro entendimiento debe tener solución. "Esta convicción en la resolución de todo problema matemático es un gran incentivo para el investigador." [Hilbert 1901, 444-445].

Un caso elemental de este axioma se manifiesta en la extensión de los sistemas numéricos, a través de la convicción de que existe un número que sirve de solución al problema planteado por el hecho de que una ecuación no tiene raíz en el dominio restringido. La extensión del campo numérico, mediante la adición sucesiva de tales soluciones (en particular, la introducción de $\sqrt{-1}$ para resolver el problema de que el polinomio $x^2 + 1$ no posea ceros en $\boldsymbol{R}$), tiene como último propósito la verificación del teorema fundamental del álgebra en el dominio de los números complejos (todo polinomio de grado n con coeficientes en $\boldsymbol{C}$ posee n raíces en $\boldsymbol{C}$).

Sin embargo, el teorema fundamental del álgebra no es una ley estándar de la aritmética, pues no se cumple en los sistemas previos a $\boldsymbol{C}$ en la extensión. De hecho el cuerpo $\boldsymbol{C}$, salvo isomorfismos, es el único cuerpo conmutativo que se obtiene agregando raíces de polinomios con coeficientes complejos al cuerpo $\boldsymbol{C}$ (Teorema de Hankel). Entonces existe una especie de interdependencia entre resolubilidad y principio de permanencia de las formas equivalentes en el sentido propuesto por Peacock y otros algebristas del siglo diecinueve, para quienes el álgebra simbólica debería preservar las leyes de la aritmética en la mayor extensión posible.

Esto equivale a afirmar que, en tanto cuerpo algebraicamente cerrado, $\boldsymbol{C}$ es el máximo *requerido* por la resolubilidad y, al mismo tiempo, el máximo *permitido* por la permanencia. Entonces parece que la confianza de resolubilidad en Hilbert es una manera de asegurar el principio de permanencia [Detlefsen 2005]. En términos del método de los ideales expuesto de manera más clara por Hilbert en [1926], se introducen elementos como $\sqrt{-1}$ para preservar ciertas leyes simples como el teorema fundamental del álgebra. Así mismo, se agregan o crean proposiciones ideales en el dominio de las proposiciones reales (como las leyes que permiten definir los ideales de un cuerpo de números algebraicos), para preservar en nuestro razonamiento por inferencia aquellas leyes de la lógica clásica que nos parecen más simples y confiables. En efecto, al adentrarnos en estudio conceptual de las sucesivas extensiones conservativas que conducen al cuerpo maximal, se reconocen dos características de la construcción. De una parte, se aclara cómo en la sucesiva cascada de tematizaciones se va decantando como una necesidad el propósito último de alcanzar la estructura de mayor simplicidad. Por otra parte, se descubre que la simplicidad de esta estructura es epistemológicamente solidaria de las estructuras previas.

Esta es una de las cuestiones más delicadas en la interpretación del formalismo. No es casual que Bernays la examine desde distintos ángulos y matices a lo largo de algunas de sus publicaciones filosóficas recopiladas en [1976]. Por ejemplo, Bernays se opone en [1923] a la posición simplista de matemáticos como Müller para quien los objetos matemáticos poseen una existencia ideal, independiente de todo pensamiento. En esta perspectiva, el método matemático estaría determinado solamente por los rasgos característicos que los objetos así concebidos le imponen al razonamiento puro. Este punto de vista, dice Bernays, se manifiesta corrientemente en una actitud que funciona en forma utilitaria en las ciencias. Sin embargo, en tanto posición epistemológica es muy primitiva y debe superarse. Sobre todo porque conduce a considerar, como lo hacía Müller, que un objeto es todo aquello 'que puede ser sujeto de juicio'. Bernays recuerda a este propósito el procedimiento de los 'elementos ideales' que se aplica en distintos campos de la actividad matemática. Estos elementos ideales se introducen de una manera puramente formal en tanto sujetos de juicios. Pero no son absolutamente nada separados de los enunciados en que ocurren formalmente.

Bernays se pone de acuerdo en [1955] con Heyting en cuanto a que la cuestión del objeto en las matemáticas estaba mal planteada y debía entonces reformularse. Afirma que la hipótesis usual de que el objeto debe darse previamente a su investigación es equivocada, puesto que "la consideración de las ciencias muestra que los objetos de las disciplinas teóricas provienen la mayoría de las veces de elaboraciones conceptuales que les asignan su exacta determinación" [Bernays 1955, 132]. En su artículo [1970], en el cual somete a revisión el programa de Hilbert (entre otras la 'tesis arbitraria' del monismo aritmético), Bernays defiende la tesis de que las matemáticas son ciencia de las estructuras idealizadas que no necesariamente pueden reducirse a representaciones numéricas.

En este mismo artículo, Bernays asocia la idealización matemática preferiblemente con la modalidad *estructurante* de axiomatización (Gonseth).[1] Los objetos y relaciones primitivas no tienen una existencia independiente al no estar dados en un lenguaje predeterminado ni vienen definidos implícitamente por un sistema de axiomas. Por el contrario, en esta axiomática los objetos intervienen en tanto que miembros de una estructura de conjunto que cumple una función gramatical, y el sistema de axiomas está constituido por enunciados sobre esta estructura de conjunto. Las estructuras idealizadas son de géneros diversos en las matemáticas (*v. gr*. teoría de grupos, topología, análisis, teoría de conjuntos, lógicas de primero y segundo orden, teoría de la demostración). De acuerdo con su género, las estructuras idealizadas poseen distintos 'horizontes' de objetividad matemática. Estos horizontes se producen poco a poco en el curso de la actividad matemática y no pueden establecerse *a priori*. La objetividad característica de esta matemática de estructuras idealizadas es de nuevo tipo. Cada componente del sistema participa, desde su horizonte, en la totalidad de objetividad propia a la estructura idealizada. Los distintos horizontes se relacionan entre sí, y tales relaciones representan las conexiones complejas que las estructuras idealizadas establecen con lo concreto [Bernays 1970, 204].

En lo que sigue vamos a tratar de colocarnos en esta perspectiva de análisis para examinar el trasfondo filosófico del método de los elementos ideales en Hilbert, en tres componentes del problema: método genético y método axiomático, matemáticas de contenido y matemáticas formales, formalismo e instrumentalismo.

Método genético y método axiomático

Hilbert formula su distinción entre método genético y método axiomático en [Hilbert 1900b], el primer trabajo suyo sobre los fundamentos de la aritmética en donde expone sus concepciones sobre la aplicación del método axiomático de la geometría a los fundamentos del análisis real. El método genético consiste en engendrar el concepto mucho más general de número real por medio de extensiones sucesivas del concepto simple de número natural. El dominio de los números reales, como cortadura o sucesión fundamental se obtiene mediante una serie de extensiones de dominios numéricos particulares. Las extensiones apuntan a un propósito con respecto a las operaciones del análisis; se trata de verificar las condiciones más generales para que una función continua sobre el dominio extendido posea una raíz.

1. Ver al respecto Panza [1992b] y Arboleda y Recalde [2003].

El método axiomático sigue un procedimiento distinto. Se supone la existencia de un sistema o dominio de objetos de naturaleza cualquiera, y se introduce un conjunto de axiomas que establecen relaciones entre tales objetos. Esta suposición plantea la necesidad de fijar un requerimiento lógico sobre el sistema de axiomas. Este requerimiento lógico será interpretado por Hilbert y Bernays bajo el concepto de *existencia axiomática.* La garantía de existencia se resuelve en geometría exhibiendo modelos del sistema de axiomas, en particular el modelo de la geometría analítica. Esta prueba de consistencia relativa se aplica igualmente a los números reales. [Hilbert 1899]. Más tarde, Hilbert propone una estrategia diferente en su conferencia de Heidelberg sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética [1904]. Reconoce que no es posible aplicar a la aritmética la prueba de consistencia de la geometría dando una interpretación aritmética del sistema de axiomas de la geometría. Se trata ahora de proceder ya no por vía semántica, sino estrictamente mediante una prueba sintáctica de consistencia. Finalmente, será en los trabajos de los años 1920 en donde Hilbert elaborará su teoría de la demostración o metamatemática.[1]

El método axiomático consiste entonces en demostrar la consistencia y completitud de dicho sistema. Hilbert se hace dos preguntas [1900b]. ¿Es el método axiomático de la geometría el más adecuado para el estudio del concepto de número? ¿Cuál de los dos métodos es el más ventajoso para una investigación lógica de los fundamentos de la mecánica y de otras disciplinas físicas? Su opinión es la siguiente: "A pesar del gran valor pedagógico y heurístico que pueda tener el método genético, el método axiomático resulta claramente preferible para una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos de nuestro conocimiento." [Hilbert 1900b, 1093].[2]

1. Ver, por ejemplo, Sieg [1999]. Es interesante tener en cuenta la posición que Frege mantuvo al respecto. Frege y Hilbert sostuvieron una controversia alrededor de 1900 sobre la naturaleza del método axiomático, la relación entre axiomas y definiciones, las pruebas de consistencia y las pruebas de independencia. Uno de los asuntos de mayor divergencia fue el de los procedimientos de consistencia. El único criterio de prueba de consistencia aceptado por Frege era mediante la exhibición de un modelo: "apuntar al objeto que tiene todas las propiedades, para dar un caso en que se satisfacen todos los requerimientos" [Shapiro 2000, 157]. Ferreirós analiza la cuestión en [2009].
2. Según [Resnik 1974, 387], Frege y Hilbert compartieron, en general, el enfoque del método axiomático y la necesidad de utilizar la prueba en la formalización deductiva de una teoría. En este sentido, uno y otro estuvieron en desacuerdo con la utilización poco rigurosa del método genético, especialmente en la extensión de los sistemas numéricos. De otra parte, su aceptación del ideal de formalización a través de la demostración, implicaba aceptar que ésta se verificaba de manera mecánica sin apelar al significado de los símbolos empleados.

Es posible establecer una conexión histórica entre las razones de Hilbert para mantener la preferencia por lo axiomático y la manera cómo se presenta este enfoque en los trabajos de Dedekind. Explorar cómo ambos enfoques metodológicos (genético, axiomático) se articulan en Dedekind puede contribuir a aclarar la propia orientación de Hilbert en sus trabajos sobre los fundamentos de la aritmética y el análisis.

En un libro notable por muchos aspectos, especialmente porque facilitó la renovación de investigaciones históricas sobre Dedekind, Dugac [1976, 19] llamó la atención sobre el siguiente aparte de su tesis de Habilitación de 1854 en donde afirma que lo característico de las matemáticas:

> es que las extensiones de las definiciones no dan ningún lugar a lo arbitrario; por el contrario, resultan, por una imperiosa necesidad, de las definiciones restringidas anteriores, con la condición de aplicar en esta ocasión el principio de considerar que las leyes que se obtienen de las definiciones iniciales, y que son características de los conceptos definidos, son universalmente válidas.

Dedekind se refiere al principio de permanencia de las formas de Peacock y Hankel que distintos historiadores de las matemáticas ubican entre los factores de emergencia del pensamiento formal en el siglo diecinueve.[1] Seguidamente muestra cómo se aplica este procedimiento a la aritmética elemental con la generación sucesiva de nuevas clases de números a partir de los naturales, los negativos, los racionales e imaginarios y, finalmente, los imaginarios. El método genético de extensión debe complementarse con un procedimiento, de naturaleza diferente, en el cual las operaciones correspondientes a cada dominio junto con las leyes que las determinan se definen garantizando que tales operaciones preserven las leyes establecidas con anterioridad para los enteros positivos. De manera que Dedekind tenía claro desde su tesis de Habilitación que el trabajo en los fundamentos de la aritmética y el análisis consiste en “un ir y venir entre los nuevos objetos matemáticos creados, las nuevas definiciones introducidas y las leyes y teoremas a los cuales están sujetos” [Dugac 1976, 20].

Esta apreciación sobre la recurrencia que Dedekind establece entre ambos procedimientos, es compartida por Sinaceur en [2008]. Con base en la propia traducción al francés de los principales trabajos de Dedekind y de varios manuscritos suyos menos conocidos, Sinaceur presenta una visión integral de su concepción sobre los números, su naturaleza y sus propiedades, y de las relaciones que se establecen en los sistemas numéricos desde el punto de vista de sus estructuras algebraicas. Sina-

1. Ver, por ejemplo, Detlefsen [2005].

ceur recuerda que Hilbert antepone una definición axiomática intrínseca de los reales a la generación genética de ellos a partir de los racionales. Pero hay que tener en cuenta que [Sinaceur 2008, 31]:

> […] si bien el procedimiento global de Dedekind es de tipo genético en la medida en que procede por extensiones sucesivas a partir del conjunto de los naturales, sus caracterizaciones de cada dominio por separado son sin duda de tipo axiomático: sus definiciones de los números enteros en [Dedekind, 1888] y de los números racionales y los números reales en [Dedekind, 1872] se establecen mediante conjuntos de condiciones necesarias y suficientes a las cuales están sujetos los elementos del dominio considerado.

Entonces los procedimientos de Dedekind son legítimas axiomatizaciones y no parece razonable analizarlas o juzgarlas utilizando como criterio rector el enfoque de las primeras axiomatizaciones de Hilbert. En [Hilbert 1900b] se introducen los reales por el método axiomático formal sin apelar a su generación por extensiones sucesivas a partir de los naturales. Hilbert opta así por definir el cuerpo ordenado arquimediano y completo de los reales de manera intrínseca sin apelar al cuerpo ordenado de los racionales. Dedekind por su parte, prefiere definir o crear[1] los números irracionales, "basándose únicamente en los fenómenos que es posible constatar con claridad en el dominio de los números racionales" [Sinaceur 2008, 31]. Sin embargo, como escribe Sinaceur en distintos lugares de su obra, tanto en sus investigaciones sobre el cuerpo de los números reales como en su trabajo sobre la teoría categórica de los números enteros, Dedekind desarrolla su análisis sobre dos dimensiones, genética (engendrar un dominio a partir de otro) y axiomática (fijar las condiciones necesarias y suficientes que caracterizan al dominio así generado).

En este mismo orden de ideas, Schlimm y Sieg [2005] concluyen que no existe algún conflicto entre los enfoques genético y axiomático en Dedekind, y, por lo tanto, les parece irrelevante establecer algún tipo de prioridad entre el uno y el otro[2]. Por el contrario, lo que se concluye

1. La distinción entre definición y creación en Dedekind es problemática. Algunos especialistas como Sinaceur, afirman que desde sus primeros trabajos Dedekind considera de manera natural que definir es crear y crear es definir. Pero solamente a partir de *Zahlen* [1888] reconoce necesario justificar esta equivalencia por medio de un principio lógico. El ejemplo más significativo es el célebre teorema 66 de *Zahlen* que corresponde a la necesidad de dar la prueba de existencia de un sistema simplemente infinito.

2. Tanto Schlimm y Sieg como Sinaceur, divergen en este asunto puntual de la apreciación de [Ferreirós 1999], una obra que por lo demás es de consulta obligada para quien esté interesado en un estudio serio del desarrollo histórico de la teoría de conjuntos y su impacto en las matemáticas modernas. Por su parte, Ferreirós reconoce en [2009, nota 4] que en [1999] no interpreta adecuadamente las relaciones entre el enfoque de Dedekind y las primeras axiomáticas de Hilbert, y confiesa que una razón importante para ello es haber seguido la tradicional y errónea oposición entre los métodos

es que en los planteamientos de Dedekind hay una “sutil aunque penetrante circularidad”, sobre todo cuando se trata de conectar creación de números con extensión de operaciones. El acto más elemental en la creación sucesiva de la serie infinita de los enteros positivos [Dedekind, 1872], es el paso de un individuo ya creado al siguiente nuevo individuo por crear. La ‘cadena’ de estos números, es decir, su representación mental en tanto serie de imágenes de la función sucesor, permite capturar en un solo acto la sucesión a partir de un número dado.[1] Esta es la más simple operación de la aritmética y las otras operaciones se definen de manera recursiva a partir de ella.

Schlimm y Sieg (y por su parte Sinaceur) no están de acuerdo en valorar el estilo informal deductivo propio de Dedekind, oponiéndolo al método axiomático de Hilbert. En primer lugar, porque la función de las ‘condiciones’ que permiten determinar el sistema abstracto de números naturales como sistema simplemente infinito, consiste precisamente en fijar los requerimientos suficientes y necesarios del sistema (los Axiomas de Dedekind-Peano). Como lo aclara Dedekind en la carta a Keferstein, estos enunciados son verdaderamente axiomas en el sentido de “propiedades fundamentales, mutuamente independientes de la sucesión $\boldsymbol{N}$, […] que, no siendo derivables unas de otras, permiten deducir todas las demás a partir de ellas” [Sinaceur 2008, 304-305].

Tampoco parece pertinente oponer uno al otro en materia de método axiomático. Los primeros trabajos de Hilbert tienen profundas raíces en la caracterización axiomática de los sistemas numéricos de Dedekind.[2] Schilmm y Sieg muestran que Hilbert utilizó los axiomas de Dedekind en la axiomatización de $\boldsymbol{N}$ al inicio de su artículo [1905]

genético y axiomático. Sin embargo, Ferreirós reivindica las consideraciones lógicas y conjuntistas en las que se basa su interpretación. Ver la explicación del asunto en el Epílogo a la reimpresión de [1999].

1. Esta es apenas una representación informal de la noción de cadena que será clave para capturar en el sistema de axiomas de [1888] la estructura de los sistemas simplemente infinitos incluidos los naturales. Sea φ una aplicación uno a uno, tal que φ: $S \rightarrow S$. Una parte *K de S* es una cadena si $\varphi(K) = K'$ está contenida en K [Dedekind 1888, definición 37]. Ver la explicación de [Sinaceur 2008, 63] y el estudio histórico y conceptual sobre la noción de cadena en [Ferreirós 1998]. Ver igualmente [Schlimm y Sieg 2005, 157] y [Ferreirós 2009].
2. “Las primeras formulaciones axiomáticas de Hilbert en [1899] y [1900b] siguen el patrón de las de Dedekind. De hecho, Hilbert es a tal punto logicista en el estilo de Dedekind que no por accidente intentó proponer una fundamentación logicista de las matemáticas alrededor de 1917/1918” [Schlimm y Sieg 2005, 157]. En [2009] Ferreirós aporta nuevas evidencias sobre el logicismo en el pensamiento axiomático de Hilbert en los años 1890, en particular en conexión con el estilo logicista de los trabajos de Dedekind sobre las matemáticas puras, a partir de las cuales propone su propia interpretación sobre las variaciones y condiciones de madurez de ese pensamiento en la perspectiva de la posterior formulación del programa formalista.

"Sobre los fundamentos de la lógica y la aritmética". En su intento de dar respuesta al problema de la prueba de consistencia, Hilbert requiere de la garantía de existencia del 'infinito más pequeño' y la encuentra precisamente en la caracterización axiomática de los sistemas simplemente infinitos de Dedekind.

La discusión sobre la influencia del enfoque axiomático de Dedekind en Hilbert, permitiría igualmente entender la insistencia de Hilbert en [1900b], en darle prioridad a la utilización de este recurso para la fundamentación del análisis. Al final del artículo, Hilbert conecta esta cuestión con uno de los propósitos generales de su entonces emergente teoría de la demostración, según el cual toda proposición matemática debe deducirse como teorema del sistema de axiomas en un número finito de inferencias, mediando obviamente la garantía de consistencia del sistema.[1] En este caso se dispondrá de una exposición axiomática 'definitiva y lógicamente segura':

> Las objeciones que se han planteado en contra de la existencia de la totalidad de los números reales y en contra de los conjuntos infinitos en general, pierden toda legitimidad con el enfoque identificado antes: no tenemos que concebir el conjunto de los reales, digamos, como la totalidad de todas las posibles leyes que permiten obtener los elementos de una sucesión fundamental, sino más bien […] como un sistema de cosas cuyas relaciones entre una y otra están dadas por el sistema finito y completo de axiomas […] y acerca del cual las nuevas proposiciones son válidas si se pueden deducir de tales axiomas en un número finito de inferencias lógicas.

Al presentar en [1935] el estado de las investigaciones de Hilbert sobre las pruebas de consistencia lógica, Bernays se refiere a la cuestión de la primacía que Hilbert le otorga al método axiomático. La perspectiva para el tratamiento de la cuestión es la misma de [Hilbert 1900b] sobre las relaciones entre método genético y método axiomático. Bernays recuerda que Hilbert retoma alrededor de 1920 las dificultades que antes se le habían planteado en el estudio de este problema, y aclara su punto de vista sobre el formalismo y las pruebas de consistencia. [Hilbert, 1922b]. La 'legitimidad' de los procedimientos del análisis matemático "no se fundamenta en la evidencia, sino en la garantía del método axiomático, sobre el cual Hilbert explica que siendo apropiado

1. En verdad, en este momento, Hilbert reconoce únicamente la prueba de consistencia de una teoría matemática relativamente a los números reales. El problema de la consistencia de los axiomas de la aritmética y la lógica será el segundo de los veintitrés problemas no resueltos que Hilbert propondrá poco después a la comunidad matemática en el congreso internacional de 1900. El segundo de los problemas tanto en la lista de diez de la conferencia, como de veintitrés en la versión publicada [Hilbert 1900a].

en lo general, también lo es en este campo. Esta es la concepción que soporta el problema de una prueba de consistencia" [Bernays 1935, 11].

La idea de Hilbert es, en primer lugar, axiomatizar el análisis y las otras teorías matemáticas expresando sus enunciados en un sistema deductivo a partir de un número finito de axiomas. Luego, investigar la consistencia de estos axiomas con base en la consistencia de los axiomas de la aritmética a los cuales se reducen todos los demás. Para alcanzar este doble propósito era necesario formalizar el sistema deductivo mediante el uso del lenguaje de la lógica formal y garantizar así el rigor de las inferencias. Esta 'actitud metodológica' se oponía a toda pretensión de aplicar el concepto intuitivo de número, concretamente en cuanto a fundar un principio como el de la inducción completa en intuiciones comunes de la sucesión numérica, y reclamaba la exigencia de un mayor nivel de reducción conceptual [Bernays 1935].

El método de los elementos ideales

La necesidad de introducir 'elementos ideales' en matemáticas puede interpretarse como una respuesta al doble propósito de Dedekind en su Tesis de Habilitación, de extender un dominio restringido de objetos por el método genético y, al mismo tiempo, caracterizar el nuevo dominio por el método axiomático con el fin de simplificar las leyes que lo regulan. Este enfoque permite explicar, por ejemplo, la introducción de los números complejos junto a los reales, o los números algebraicos junto a los racionales para garantizar que un polinomio siempre obtenga sus raíces.

Las extensiones del campo numérico en Dedekind verifican el mismo principio. Inicialmente el problema es la extensión sucesiva de una generación progresiva de números naturales, enteros, racionales, algebraicos y reales. Estas extensiones conducen al análisis de leyes y reglas que verifican las operaciones, en particular, la conmutatividad, la asociatividad, la distributividad, la existencia de un inverso. Estas reglas permiten definir estructuras, las cuales no dependen de los objetos sometidos a las operaciones sino de las reglas que determinan tales operaciones. En conclusión, el procedimiento consiste en caracterizar los sistemas de números por su estructura. Razonar sobre la estructura y no sobre los números permite aplicar los teoremas obtenidos a otros dominios, en particular a la teoría de funciones.

> Este punto de vista, que emerge en forma anónima e inconciente en los años 1880, impone el estudio de las estructuras por ellas mismas, de manera abstracta, sin especificar la naturaleza de sus elementos, la naturaleza de los objetos sometidos a las operaciones cuyas reglas se descri-

ben. Los primeros trabajos de Hilbert se inscribieron en ese movimiento [Cassou-Noguès 2003, 27].

Hilbert reconoce, por ejemplo en [1926], que la tradición de introducir elementos ideales para la extensión de teorías se encuentra presente corrientemente en distintas situaciones de la actividad matemática: en geometría proyectiva con la postulación de puntos y líneas al infinito; en álgebra con la postulación de la existencia de raíces en el Teorema Fundamental del Álgebra; en teoría de los números algebraicos con la definición de un ideal,[1] y en teoría de conjuntos con los cardinales infinitos y los números ordinales. Un caso familiar de uso de 'elementos ideales', es el procedimiento habitual de extensión conservativa del cuerpo ordenado $\boldsymbol{Q}$, para producir el cuerpo ordenado arquimediano y completo $\boldsymbol{R}$ en un nivel superior de existencia. Esta extensión respondió a la necesidad de resolver el problema histórico de llenar dos lagunas operatorias de $\boldsymbol{Q}$; una de naturaleza algebraica ($\boldsymbol{Q}$ no es cerrado por la operación raíz cuadrada); la otra topológica ($\boldsymbol{Q}$ no es cerrado por la operación del paso al límite). En otra publicación hemos tratado de clarificar la naturaleza de la construcción de la nueva entidad número real, por medio de las propiedades de la estructura del dominio anterior, sea que se utilicen las cortaduras de Dedekind o las sucesiones fundamentales de Cantor.[2] Los lineamientos generales del procedimiento son los siguientes: Se comienza por verificar la invarianza del principio de identidad en la extensión, y se garantiza así la equivalencia de las operaciones entre sucesiones (respectivamente cortaduras) y las operaciones entre reales. Luego se establecen las 'tematizaciones' que permiten completar a $\boldsymbol{Q}$. Se designa por $\boldsymbol{R^*}$ el nuevo dominio cuyos objetos son representantes de clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de racionales (respectivamente de cortaduras). Luego se definen las operaciones de estructura de cuerpo en $\boldsymbol{R^*}$ a partir de las correspondientes operaciones del sistema de sucesiones convergentes de racionales.

Un aspecto significativo en este proceso de extensión conservativa, es que "los objetos que pertenecen al sistema $\boldsymbol{R^*}$, tales que toda sucesión de Cauchy converge a un límite único en $\boldsymbol{R^*}$, se pueden componer entre sí y con los objetos que pertenecen a $\boldsymbol{Q}$ de acuerdo con las mismas leyes" [Desanti 1968 45-47]. Por último, se pasa a la teoría formalizada

1. "[Esta es] probablemente la aplicación más genial que se ha dado al principio de los elementos ideales" [Hilbert 1926, 89]. Un ideal es un subgrupo aditivo de un anillo tal que para todo elemento i del ideal, el producto de $\boldsymbol{i}$ por un elemento a del anillo sigue siendo un elemento del ideal, [ver el estudio histórico del concepto en Dedekind en Ferreirós [1999] y en [Sinaceur 2008]].
2. Ver los detalles del procedimiento en [Arboleda 2007] y [Desanti 1968].

de ***R****, en la cual las proposiciones fundamentales del análisis se obtienen como teoremas a partir del sistema clásico de axiomas de Hilbert para un dominio de objetos de naturaleza cualquiera. Particularmente se demuestra en esta teoría la proposición que permite completar a ***Q*** y que justifica el propósito último de la extensión de llenar las lagunas de su estructura: Una sucesión de números reales es convergente (con un número real como límite) si y solo si es una sucesión de Cauchy. En este sentido es pertinente observar que en la extensión se piensa a ***Q*** como un 'objeto ideal'. Es decir, en cierto momento de la construcción, la representación familiar de la estructura 'precedente' de ***Q*** (por ejemplo, como sistema de parejas ordenadas (a, b) de enteros), se reemplaza por la presencia de ***Q*** como una entidad dentro del sistema de sucesiones convergentes. Como 'idealidad matemática', ***Q*** participa de la realidad de ***R***, pues cumple algunas leyes de la estructura de ***R.*** De hecho ***Q*** es un subcuerpo ordenado de ***R*** [Desanti 1968].

Desde sus conferencias de 1919 Hilbert utiliza los elementos ideales para establecer la distinción entre matemática de contenido y matemática formal.[1] Esto tiene que ver con el hecho de que en el programa formalista las matemáticas se reducen a una derivación mecánica de fórmulas, empleando razonamientos que no tienen alguna referencia a un contenido específico. Hilbert aborda el tema en la perspectiva de la oposición entre lo real y lo ideal. Una manera de considerar tal oposición es a través de la diferencia entre aquello que tiene contenido y aquello que es estrictamente pensamiento. Cuando los matemáticos hablan de existencia matemática, los objetos a los que se refieren no tienen contenido en el sentido usual. Hilbert subraya que la existencia en el sentido matemático siempre es relativa a un sistema dado. Entonces, los elementos ideales intervienen en la situación en que el sistema se extiende por la adjunción de nuevos elementos con respecto al sistema original. No obstante, el nuevo sistema puede ser nuevamente extendido, en cuyo caso todos sus elementos se consideran reales y los nuevos ideales. Así pues, la distinción entre lo real y lo ideal es relativa a tales sistemas.

Pero es en su artículo sobre el infinito [1926] en donde se encuentra la reflexión más elaborada de Hilbert sobre esta oposición. En respuesta a la crítica de Brouwer de que la aritmética finitista es un juego formal sin sentido, Hilbert afirma que, por el contrario, los enunciados de la

1. Ver [Mancuso 1998, 159] en conexión con los puntos de vista de Hilbert sobre los elementos ideales en tales conferencias.

aritmética finitista tienen sentido y se refieren a un contenido.[1] Examinemos las ideas de Hilbert al respecto reconstruyendo y comentando la lectura de Shapiro [2000, 159-163].[2] Por ejemplo, las fórmulas de la aritmética finitista incluyen ecuaciones como '2 + 3 = 5' y '12553 + 2477 = 15030', o bien combinaciones simples de estas como '7 + 5 = 12 ó 7 + 7 $\neq$ 10', o también '2^{10200} + 1 es primo'. Estas afirmaciones tienen dos características: se refieren a números naturales específicos, y son decidibles. Una teoría es *decidible* si para cada fórmula del sistema existe un algoritmo capaz de decidir en un número finito de pasos si la fórmula es válida o no en el sistema. En cuanto a que el contenido de la aritmética finitista sean los naturales, es bien sabido que para Hilbert éstos se identifican con símbolos numéricos con representación intuitiva mediante barras verticales.[3] Así, por ejemplo, '3 > 2' es una forma de comunicar el hecho de que el símbolo 3, es decir, | | |, tiene una extensión mayor que el símbolo 2, es decir | |.

A pesar de su importancia, la aritmética finitista tiene una gran limitación: no incluye todas las proposiciones de la matemática. Solamente incluye proposiciones que involucran cuantificadores acotados.[4] En el enunciado,

'existe un número *p*, 100 < *p* < 101! + 2, tal que *p* es primo'

la condición impuesta sobre *p* involucra un *cuantificador acotado*. Pero hay afirmaciones como,

'existe un número *p* > 100 tal que *p* y *p* + 2 son primos'

1. Más adelante en el aparte sobre el instrumentalismo de Hilbert, se verá cómo puede entenderse la expresión "juego sin sentido" en la matemática formal.
2. En este contexto también se aprovechan en este trabajo las interpretaciones de [Cassou-Noguès 2001] y [Boniface 2004].
3. Como observa Cassou-Noguès, en la matemática de contenido "los enunciados tienen un sentido, las nociones que intervienen en los enunciados tienen un contenido, los razonamientos dependen del sentido de los enunciados y, finalmente, se refieren a objetos concretos, las barras verticales."
4. Que el cuantificador existencial esté acotado en la matemática de contenido, significa que el razonamiento finitista está restringido a una verificación de sentido. Supongamos un enunciado *E* del tipo 'existe una cifra a tal que *P'*, en donde *P* es una ecuación. *E* es un enunciado finitista incompleto cuyo sentido depende de fijar el dominio finito de signos donde la cifra a verifica la ecuación *P*. En consecuencia, este tipo de enunciados de la matemática de contenido no cumplen el principio del tercero excluido. Si se cumpliera en *E* significaría una de dos posibilidades, o bien *P* se verifica para una cifra a cualquiera o bien existe una cifra *a* que no verifica a *P*. Pero el segundo término de la alternativa y, por consiguiente, la alternativa misma, expresa una proposición transfinita. [Cassou-Noguès 2001, 92-93].

en las cuales el cuantificador es *no acotado*, ya que p toma sus valores sobre todos los naturales. Para Hilbert los únicos enunciados que pertenecen a la aritmética finitista son los primeros, aquellos que involucran cuantificadores acotados. Los segundos son enunciados no finitistas.

Los enunciados verdaderos con cuantificadores acotados (*v. gr.*, combinaciones de ecuaciones sencillas), son decidibles; es decir, siempre existe un algoritmo de cálculo que los verifica [Shapiro 2000]. Cuando las cotas son finitamente grandes, tales enunciados involucran alguna idealización, pero sigue existiendo un algoritmo que los representa por el mismo hecho de incluir cuantificadores acotados. Hilbert introduce letras para representar tal generalidad. Sea el enunciado:

$$(*)\ a + 100 = 100 + a$$

Las instancias de (*) como '0 + 100 = 100 + 0' y '47 + 100 = 100 + 47', son enunciados finitistas legítimos. El enunciado (*) asegura que cada una de tales instancias es verdadera. Según Hilbert, las generalizaciones de (*) también son finitistas; en particular lo es la ley conmutativa:

$$(**)\ a + b = b + a$$

Para Hilbert el carácter finitista de este enunciado se interpreta como que $a + b$ es el mismo numeral que $b + a$, y la "corrección concreta de esta afirmación puede ser demostrada mediante inferencias materiales" [Hilbert 1926, 97]. Es decir, mediante la ejecución de un algoritmo de cálculo. Según Shapiro [2000, 161], lo anterior no debería revestir alguna dificultad epistemológica. Pero Hilbert no es explícito sobre cómo se afirman legítimamente los enunciados finitistas con letras de generalidad. Entonces existe un desacuerdo entre los especialistas sobre las técnicas de prueba en la aritmética finitista. Aunque la cuestión está abierta a la discusión, la interpretación más comúnmente aceptada es que la aritmética finitista corresponde a la llamada 'aritmética recursiva primitiva'.

Ahora bien, a diferencia de un enunciado finitista particular, un enunciado finista con letras de generalidad *no es susceptible de negación* (Hilbert). La negación de una ecuación, como '$3 + 5 \neq 8$', es un enunciado finitista legítimo. Expresa el hecho de que es falso que la suma de *3* y *5 sea 8*. Pero un enunciado con letras de generalidad no admite negación finitista. Hilbert lo expresa de la siguiente manera [Hilbert 1926, 194]:

> el enunciado de que siendo a un símbolo numérico, $a + 1 = 1 + a$ es verdad universal, desde nuestra perspectiva finitista *no es susceptible de negación*. Lo veremos mejor si consideramos que este enunciado no puede interpretarse como una conjunción de un número infinito de

> ecuaciones en términos de '*y*, sino como un juicio hipotético que únicamente afirma algo con tal de que sea dado un símbolo numérico.

Es decir, no es posible negar en un número finito de etapas una afirmación universal que equivale a una infinidad de afirmaciones relacionadas por el conector 'y'. En consecuencia, en la aritmética finitista no se puede afirmar al mismo tiempo un enunciado con letras de generalidad y su negación. Por ejemplo, negar (*) significa que existe una instancia suya, un símbolo numérico, para el cual (*) es falso. Esto es, existe un número p tal que $p + 100$ no es idéntico a $100 + p$ Entonces, la negación de un enunciado de generalidad contiene un cuantificador *no acotado*, por lo cual tal negación es un enunciado no finitista. En las propias palabras de Hilbert [1926, 100], el dominio de tales proposiciones va más allá de la aritmética finitista. A diferencia de los numerales en la aritmética finitista, los signos y las fórmulas de los *enunciados ideales* no poseen, por sí mismos, ningún significado. Sin embargo [1926, 102]:

> A partir de esa fórmula (proposiciones ideales) es posible derivar otras fórmulas a las que sí podemos asignar un significado, considerándolas como comunicaciones de enunciados finitistas. La generalización de esta idea nos lleva a una concepción de las matemáticas que considera a éstas como un inventario de fórmulas a las que corresponden, en primer lugar, expresiones concretas de enunciados finitistas y a las que se añaden, en segundo, otras fórmulas que carecen de todo significado y que constituyen los objetos ideales de nuestra teoría.

A este respecto, [Thiele 2003, 9] subraya la característica filosófica del concepto de 'proposiciones ideales' en Hilbert, entendidas como contrapartes de 'proposiciones finitistas' o reales. Las primeras no corresponden a cosas reales, sino que obran como "reguladores" en el sentido que Kant le asigna a una idea: "un concepto de razón que trasciende toda experiencia y que permite completar lo concreto como totalidad."[1] La garantía de los métodos ideales se establece mediante métodos finitistas. Desde el punto de vista de Hilbert la aceptación de toda rama de las matemáticas relacionada con conceptos ideales tiene como condición la prueba de consistencia del sistema extendido.

Una aplicación lógica de los enunciados ideales es el llamado 'axioma transfinito' que Hilbert formula en su artículo [1923] sobre los fundamentos lógicos de las matemáticas. El axioma se satisface para una función lógica τ que hace corresponder a un predicado $A(a)$ en una variable a, determinado objeto $\tau\,(A(a))$ o simplemente $\tau\,(A)$ "Para

1. Thiele [2003, 9] asocia el concepto de 'proposiciones ideales' con el concepto kantiano de mecanismo regulador [*regulatives Prinzip*], y el de 'proposiciones finitistas' o reales con el de mecanismo constitutivo [*konstitutives Prinzip*].

aclarar su contenido", escribe Hilbert [1923, 69], "tomemos, por ejemplo, en lugar de A el predicado 'ser sobornable'. Tenemos entonces que $\tau(A)$ designa a una persona definida, con un sentido de honestidad tan inquebrantable, que del hecho de que ella resultase sobornable se seguiría que toda persona lo sería igualmente". Este axioma 'debe verse como el origen de todos los conceptos, principios y axiomas transfinitos'. Es decir, el axioma transfinito permite deducir los demás axiomas transfinitos que definen las reglas lógicas de los cuantificadores universal y existencial.

Lo anterior es interpretado de la siguiente manera por [Boniface 2004, 228-229]: $\tau(A)$ es el representante (negativo) de la propiedad A. Es el objeto que posee en menor grado la propiedad que representa; si él la posee, entonces cualquier otro objeto también la posee. Dicho de otra manera, $\tau(A)$ es el límite, la cota, la frontera, a partir de la cual todos los objetos están dotados de la propiedad A. Podría llamársele el representante-límite, o representante frontera, o incluso, en analogía con los puntos al infinito, representante al infinito. Esta es la traducción en lenguaje corriente del axioma transfinito: $\tau(A(a)) \rightarrow A(a)$, es decir, si $\tau(A)$ posee la propiedad A, entonces todo objeto a también la posee. Así, mediante la adición de una proposición ideal, el axioma transfinito, y teniendo en cuenta la condición de no contradicción, Hilbert logra extender a las afirmaciones no finitistas la validez de las leyes de la lógica clásica y, en particular, el principio de tercero excluido.[1]

En resumen, el método de los ideales en el programa formalista de Hilbert consiste en aplicar el método genético a las proposiciones matemáticas, para superar las restricciones de la matemática de contenidos. Este procedimiento tiene las siguientes características [Cassou-Noguès 2001, 97]:

- Las proposiciones de la matemática de contenido forman un dominio restringido sobre el cual no son verdaderas las leyes de la lógica clásica.
- La matemática formal contiene las proposiciones de la matemática de contenido, demostrables en los sistemas formales, y proposiciones que no resultan de la matemática de contenidos. Las primeras son proposiciones reales y las segundas proposiciones ideales.
- La matemática formal constituye un dominio extendido en el cual se introducen elementos ideales, con el propósito de simplificar las leyes lógicas que regulan las proposiciones.

1. Por supuesto, todo lo anterior es válido a condición de que los axiomas de la lógica se sometan a una demostración de consistencia [ver las interpretaciones de Mancosu 1998, 161-162] y [Shapiro 2000, 163-164] del procedimiento empleado por Hilbert con este fin en [1926]. Hilbert completa la formalización de las teorías matemáticas con base en este procedimiento de pruebas finitistas de consistencia.

- El paso siguiente consiste en mostrar que la extensión del dominio matemático no conduce a contradicción, es decir, que los sistemas definidos por la matemática formal son consistentes. Esa es la tarea que realiza la *metamatemática* o *teoría de la demostración*, utilizando para ello razonamientos de contenido.

La metamatemática retoma entonces la matemática de contenido para asegurar la consistencia de los sistemas formales que representan la matemática finitista. En este sentido, el programa formalista constituye una contribución original al problema de los fundamentos. Sin embargo, se encuentran distintos matices o tal vez serias divergencias entre los comentaristas de Hilbert sobre estas materias.

Elementos ideales e instrumentalismo

Existen distintas explicaciones sobre el instrumentalismo en Hilbert.[1] El método de los elementos ideales puede interpretarse como un juego formal bajo condiciones de no contradicción, es decir estrictamente en función de la consistencia del sistema. Como lo afirma Hilbert [1926, 106]:

> La extensión por medio de la adición de ideales es lícita y permisible solamente cuando con ello no se provoca el surgimiento de contradicciones en el dominio original y, en consecuencia, únicamente si al suprimir los elementos ideales, las relaciones que resultan para los elementos originales son válidas en la esfera original.

Ciertamente las matemáticas ideales participan del juego formalista a partir del momento en que se acuerdan y formulan de manera explícita la sintaxis y las reglas deductivas específicas al dominio en cuestión. Un dominio de las matemáticas ideales se traduce en un sistema formal cuando se le aplican las reglas de los sistemas deductivos.

Pero como se ha visto arriba, la introducción sistemática de los elementos ideales en 1926 se hace en un contexto polémico en el cual Hilbert se defiende de la crítica de Brouwer de que la aritmética finitista es un juego formal sin sentido. Por el contrario, replica Hilbert, los enunciados de la aritmética finitista tienen significado y se refieren a un contenido. Igualmente, al referirse en [1928] a las relaciones entre proposiciones reales y proposiciones ideales, Hilbert aclara que las primeras son fórmulas de variable libre decidibles pero en condición de ser

1. La concepción instrumentalista del lenguaje o formalismo simbólico sostiene que el razonamiento utiliza los signos de manera puramente simbólica [Detlefsen 2005]. El juego formalista sería análogo a las posiciones que consideran que la ciencia teórica es un instrumento complejo para hacer predicciones sobre entidades no observables como los electrones [Shapiro 146].

verificables, como lo son las leyes de la naturaleza. Zach [2003] observa que estos dos momentos representan un cambio de pensamiento de Hilbert, puesto que del énfasis exclusivo en la consistencia de la primera etapa, Hilbert pasa en la segunda mitad de la década de 1920 a incorporar en su programa el concepto de extensión conservativa *vía* el método de los ideales. En Hilbert [1928] los elementos ideales actúan como los constructos teóricos de la física, es decir, como dispositivos que permiten deducir hipótesis que luego deben ser verificadas empíricamente. Para aclarar el sentido de la comparación, conviene recordar el contexto polémico en que ella se ubica.

En [1928] Hilbert controvierte el punto de vista de Brouwer según el cual, las afirmaciones de existencia no tienen sentido intrínseco a no ser que contengan la construcción del objeto cuya existencia se afirma, pues de lo contrario se convierten en títulos sin valor y su uso lleva a la matemática a degenerar en un juego de fórmulas. Hilbert precisa que la razón última de la validez de las afirmaciones de existencia no es su construcción sino su demostración. La fuente de los teoremas de existencia pura es un axioma lógico, el axioma transfinito que se expresa en un operador con una función lógica semejante al operador τ de [1926]. Recordemos que τ garantiza el paso de la matemática de contenido a la matemática formal. De aquí se deriva la posibilidad de construir cualquier proposición ideal. Más adelante explica lo anterior en los siguientes términos [1928, 475]:

> El valor de las pruebas de existencia pura consiste precisamente en que la construcción individual queda eliminada por [las proposiciones reales] y que muchas construcciones diferentes quedan subsumidas en una idea fundamental, de manera que únicamente se preserva con claridad lo que es esencial a la prueba. Brevedad y economía de pensamiento son la *razón de ser* de las pruebas de existencia.

Además de su valor matemático, el juego de fórmulas tiene para Hilbert una importante significación filosófica, al permitir expresar el contenido de pensamiento matemático de manera uniforme y, al mismo tiempo, orientar su desarrollo en una dirección que clarifica las interconexiones entre las proposiciones individuales y los hechos. Ello justifica la razón de ser del juego de símbolos en la matemática formal y muestra que este juego no es arbitrario, pues refleja la 'técnica de nuestro pensamiento'. Es en el contexto de esta discusión con Brouwer que Hilbert plantea su interpretación física de la introducción de los elementos ideales en una teoría formal:

> De ninguna manera es razonable establecer como condición universal que cada formula individual sea en sí misma interpretable; por el contrario, corresponde a la propia naturaleza de toda teoría que no requira-

> mos retornar a la intuición o al significado en el medio de un argumento. Aquello que el físico espera de una teoría es que las proposiciones particulares se deduzcan de leyes de la naturaleza o de hipótesis, únicamente mediante inferencias, es decir, sobre la base de un juego de fórmulas puras sin apelar a consideraciones no esenciales. Solo se chequean experimentalmente algunas combinaciones y consecuencias de las leyes físicas, de la misma manera que las proposiciones reales están directamente en capacidad de verificarse en mi teoría de la prueba. [Hilbert 1928, 475].

Los elementos ideales funcionan entonces con el carácter de los constructos teóricos de la física, es decir como instrumentos para deducir hipótesis que luego deben ser chequeadas empíricamente. Varios autores, especialmente [Mancosu 1998b] y [Zach 2005], tienden a aproximar esta posición de Hilbert en [1928] con la opinión de Weyl de asignarle una significación a los sistemas formales, en analogía con lo que ocurría en el campo de la física teórica. Buscando una mediación entre formalismo e intuicionismo, Weyl sugería establecer una conexión entre la consistencia de los sistemas formales y la verdad de los contenidos matemáticos que tales sistemas codifican [Weyl 1925, 140]:

> No cabe duda que para que las matemáticas mantengan una preocupación cultural seria hay que atribuirle algún sentido al juego de fórmulas de Hilbert, y sólo veo una posibilidad de asignarle un sentido intelectual independiente a este juego, incluyendo sus componentes transfinitos. En la física teórica se nos ofrece el magnífico ejemplo de una clase de conocimiento con un carácter completamente distinto al conocimiento común o fenomenológico que expresa en forma pura aquello que no es dado en la intuición. Mientras que en este caso todo juicio tiene un sentido intrínseco realizable por completo en la intuición, en el caso de las afirmaciones de la física teórica ocurre todo lo contrario. En este caso lo que está en cuestión si se confronta con la experiencia es más bien *el sistema como un todo*.

Otros autores prefieren privilegiar la interpretación instrumentalista en la cita antes mencionada de [Hilbert 1926]: el método de los elementos ideales se reduce a un juego de fórmulas sin sentido intrínseco sujeto a condiciones de no contradicción. La concepción instrumentalista del lenguaje o formalismo simbólico sostiene que el razonamiento utiliza los signos de manera puramente simbólica. A este tipo de instrumentalismo no le preocupa el contenido semántico de los signos, y lo tiene sin cuidado que los signos tengan o no contenido [Detlefsen 2005]. Históricamente, esta concepción de Hilbert en [1926] sería hereditaria del punto de vista de Berkeley opuesto a las posturas 'presentistas' dominantes entre los algebristas de los siglos dieciséis y diecisiete. Para los presentistas el rigor de un argumento algebraico consiste en garantizar que los objetos involucrados en las distintas expresiones siempre estén directamente presentes en el razonamiento o en la intuición del sujeto.

El caso paradigmático son las pruebas constructivas de la geometría sintética clásica que establecen una relación de semejanza entre los diagramas utilizados y los objetos geométricos. Berkeley propende por un patrón de rigor de razonamiento en el cual la mente de quien razona no tenga que apelar continuamente en la argumentación al significado de las expresiones involucradas.[1] La función de los signos según este patrón no es necesariamente la de expresar ideas, como cuando utilizamos $\sqrt{-1}$ en el cálculo sin tener que formarnos una idea de la expresión en términos de cantidad. Esta concepción de Berkeley fue corrientemente aceptada por los matemáticos a mediados del siglo diecinueve como lo muestra la siguiente opinión de Boole [Detlefsen 2005, 272]:

> Es una verdad generalmente admitida que el lenguaje es un instrumento de la razón humana, y no simplemente un medio para la expresión de pensamiento […]. Sea que miremos los signos como representantes de cosas o relaciones, o como representantes de concepciones u operaciones del intelecto humano, cuando estudiamos las leyes de los signos estamos, en efecto, estudiando las manifestaciones de las leyes de razonamiento.

La posición del formalismo simbólico es igualmente heredera de las ideas de Peacock y los algebristas de Cambridge en el sentido que [Detlefsen 2005, 272]:

> […] el razonamiento matemático no necesita involucrarse en la manipulación constructiva de intuiciones o en la manipulación lógica de proposiciones. En lugar de ello apela a la manipulación sintáctica de signos sin interpretación o incluso no interpretables. El razonamiento simbólico es pues muy diferente al razonamiento sobre el *contenido* (semántico) de expresiones, tengan estas expresiones un carácter intuitivo o conceptual.

Detlefsen advierte una estrecha conexión entre [Hilbert 1928] y las ideas de sus predecesores, particularmente en dos puntos: sobre la naturaleza de los signos sin contenido en los fundamentos de la teoría de la demostración, y sobre la manera como el juego de fórmulas refleja la ‘técnica de nuestro pensamiento’. En la matemática formal, los signos que componen las fórmulas son vacios de significado y su encadenamiento en fórmulas y en demostraciones es una réplica del pensamiento de los matemáticos. El pensamiento es una actividad interna al entendimiento matemático y se refleja en el lenguaje sobre el papel. El pen-

1. Comparar con la concepción instrumentalista de Hilbert en la cita anterior [1928, 475] al afirmar que “corresponde a la propia naturaleza de toda teoría que no requiramos retornar a la intuición o al significado en el medio de un argumento”.

samiento es análogo pero exterior a la expresión. [Hilbert 1928, 475].[1] Según la lectura de Detlefsen, en [Hilbert 1928] se expresa todavía más fielmente que antes la concepción instrumentalista de Berkeley. El razonamiento matemático atraviesa por intervalos de pura manipulación simbólica referidos generalmente al 'razonamiento ideal'. Tales intervalos se alternan con largos períodos de razonamiento de contenido. Sin embargo, la adopción de los signos es anterior a sus significados, dada la naturaleza *técnica* que por momentos mantienen el razonamiento matemático y el razonamiento en general [Detlefsen 2005, 298].[2]

Esta interpretación del formalismo simbólico como modo técnico de razonar nos conduciría a un cierto tipo de 'instrumentalismo metodológico [Zach 2003]. No es que las matemáticas no tengan significado, sino que al aplicar de manera exitosa la teoría de demostración se procede, escribe Zach, *como si* ellas no lo tuvieran. La analogía que se presenta con la física no es entonces en tanto que las proposiciones transfinitas no tengan significado como tampoco lo tienen las proposiciones con términos teóricos, sino la siguiente: las proposiciones transfinitas no requieren tener sentido intuitivo así como no se requiere observar directamente los electrones para hacer teoría sobre ellos.

Bibliografía

Álvarez, Carlos y Segura, Luis Felipe. 1993. *Fundamentos de las Matemáticas.* México: Mathema.

Arboleda, Luis Carlos y Recalde, Luis Cornelio. 2003. "Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality". *Synthese* **134**: 245-272.

Arboleda, Luis Carlos. 2007. "Modalidades constructivas y objetivación del cuerpo de los reales". *Revista Brasileira de Historia da Matemátic* Especial n° 1: 215-230.

1. En [1923] Hilbert escribe que los sistemas formales son las "réplicas de los pensamientos que constituyen la práctica habitual de los matemáticos", citado en [Cassou-Noguès 2001, 95].

2. Por largos períodos el razonamiento matemático tiene que operar con 'pensamientos ciegos' que actúan sobre signos sin sentido (Leibniz). Tal fue el caso del manejo operatorio de las raíces imaginarias de la cúbica antes que el objeto alcanzara su significado real como número complejo. En [Arboleda, 2007] se comentan las posiciones de Leibniz y Huygens a este respecto. Mientras que para Huygens la única actitud posible ante tales raíces era esperar a que se nos revelara ese algo cuya existencia no está garantizada por su designación escritural, enigmática en sí misma, para Leibniz era legítimo e incluso necesario operar con tales signos aparentemente sin objeto, de la misma forma como lo hicieron los algebristas italianos.

Bernays, Paul. 1923. "Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller: Über Zahlen als Zeichen". *Mathematische Annalen* **90**: 159-63. Traducción al inglés en: Mancosu 1998a, 223-226.

__________. 1935. "Hilberts Unterssuchungen über die Grundlagen der Arithmetik ". En: (Hilbert, 1935, 196-216). Traducción al inglés en: Bernays Project: Text N°. 14, URL: http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Pdf/untersuchungen.pdf

__________. 1955. "Die Mathematik als ein zugleich Vertrautes und Unbekanntes". *Synthese* **9**(1): 465-471. Traducción al francés en: Bernays [2003, 129-134].

__________. 1970. "Die Schematische Korrespondenz und die Idealisierten Strukturen". *Dialectica* **24**(1-3): 53-66. Traducción al francés en: Bernays [2003, 199-210].

__________. 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*. Darmstadt: Wissenschaftliche uchgesellschaft. Traducción al francés en: Bernays [2003].

__________. 2003. *Philosophie des Mathématiques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Boniface, Jacqueline, 2004, *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Cassou-Noguès, Pierre. 2001. *Hilbert.* Paris: Les Belles Lettres.

Dedekind, Richard. 1872. *Stetigkeit und irrational Zahlen.* Brunswick: Vieweg. Traducción al francés en: Sinaceur [2008, 57-89]. Traducción al castellano en: Ferreirós [1998, 77-94].

__________. 1888. *Was sind und was sollen die Zahlen.* Brunswick: Vieweg. Traducción al francés en Sinaceur (2008, 131-216). Traducción al castellano en: Ferreirós [1998, 95-144].

Desanti, Jean T. 1968. *Les Idéalités mathématiques.* Paris: Editions du Seuil.

Detlefsen, Michael. 2005. "Formalism". En: Shapiro [2005, 236-317].

Dugac, Pierre. 1976. *Richard Dedekind et les Fondements des Mathématiques.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Ewald, William Bragg (ed.). 1996. *From Kant to Hilbert. A Source Book in the Foundations of Mathematics.* vol. 2. Oxford: Oxford University Press.

Ferreirós, José. 1998. *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid: Alianza Editorial.

__________. 1999. *Labyrinth of Thought. A history of Set Theory and its Role in Modern Mathematics.* Basel, Boston, Berlin: Birkhäuser. Reimpreso en 2007 por Birkhäuser con un epilogo.

__________. 2009. “Hilbert, logicism, and mathematical existence”. *Synthese*, 170(1): 33-70.

Hilbert, David. 1899. *Grundlagen der Geometrie,* Leipzig: Teubner. Traducción al inglés de la décima edición en alemán: *Foundations of Geometry,* Open Court, LaSalle, 1990.

__________. 1900a. "Mathematische Probleme". *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse*, 253-297. Conferencia impartida en el International Congress of Mathematicians, Paris, 1900. Traducción parcial al inglés en: Ewald [1996, 1096-1105].

__________. 1900b. "Über den Zahlbegriff", *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 8: 180-84. Traducción al inglés en: Ewald [1996, 1089-1096]. Traducción al Castellano en: Álvarez y Segura [1973, 17-22].

__________. 1901. “Mathematische Probleme”. *Archiv der Mathematik und Physic.* 3rd ser., **1**: 44-63, 213-237. Traducción al inglés en: *Bulletin of the American Mathematical Society* **8** (1902): 437-479.

__________. 1905. "Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik". En: *Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904*, A. Krazer, ed., Leipzig: Teubner, 174-85. Traducción al inglés en: van Heijenoort [1967, 129-38].

__________. 1918a. "Axiomatisches Denken". *Mathematische Annalen.* **78**: 405-15. Lectura impartida ante la Sociedad Suiza de Matemáticas, 11 septiembre 1917. Reimpreso en: Hilbert [1935, 146-56]. Traducción al inglés en: Ewald [1996, 1105-1115].

__________. 1918b. “Prinzipien der Mathematik”. Notas de clase de Paul Bernays. Semestre de invierno 1917-18. Manuscrito inédito. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen.

__________. 1922a. "Grundlagen der Mathematik". Vorlesung, Semestre de invierno 1921-22. Notas de clase de Paul Bernays. Manuscrito inédito. Bibliothek, Mathematisches Institut, Universität Göttingen.

__________. 1922b. "Neubegründung der Mathematik: Erste Mitteilung". *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität*, 1: 157-77. Serie de conferencias impartidas en la Universidad de Hamburgo. Julio 25-27, 1921. Reimpreso con notas por Bernays en: Hilbert [1935, 157-177]. Traducción al inglés en: Mancosu [1998a, 198-214] y Ewald [1996, 1115-1134]. Traducción al castellano en: Álvarez y Segura [1973, 37-62].

__________. 1923. “Die logischen Grundlagen der Mathematik”. *Mathematische Annalen.* **88**: 151-165. Lectura impartida en el Deutsche Naturforscher-Gesellschaft, Septiembre 1922. Reimpreso en: Hilbert [1935, 178-191]. Traducción al inglés en: Ewald [1996, 1134-1148]. Traducción al castellano en Álvarez y Segura [1973, 63-81].

__________. 1926. “Über das Unendliche”. *Mathematische Annalen*, **95**: 161-90. Lectura impartida en Münster, 4 junio 1925. Traducción al inglés en: van Heijenoort [1967, 367-392]. Traducción al castellano en: Álvarez y Segura [1973, 83-122].

__________. 1928. “Die Grundlagen der Mathematik”. *Abhandlungen aus dem Seminar der Hamburgischen Universität.* **6**: 65-85. Traducción al inglés en: van Heijenoort [1967, 464-479].

__________. 1935. *Gesammelte Abhandlungen.* Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes, Berlin: Springer. Reprint 1965, New York: Chelsea.

Mancosu, Paolo (ed.). 1998a. *From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford: Oxford University Press.

__________. 1998b. “Hilbert and Bernays on Metamathematics”. En: Mancosu [1998a, 149-188].

__________. 1998c. “Hermann Weyl: Predicativity and an Intuitionistic Excursion”. En Mancosu [1998a, 65-85].

Panza, Marco y Pont, Jean-Claude (eds.). 1992a. *Les savants et l’épistémologie vers la fin du XIXe siècle.* Paris: Blanchard.

__________. 1992b. “Gonseth et les prolégomènes d’une logique de la connaissance”. En: Panza y Pont [1992a, 23-45].

Resnik, Michael. 1974. “Frege-Hilbert Controversy”. *Philosophy and Phenomenological Research* **34** (3): 386-403.

Rivenc, François y Rouilhan, Philippe de (eds.). 1992. *Logique et fondements des mathématiques. Anthologie (1850-1914).* Paris: Éditions Payot.

Shapiro, Stewart. 2000. *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics.* New York: Oxford University Press.

__________. (ed.). 2005. *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic.* New York: Oxford University Press.

Sieg, Wilfried. 1999. “Hilbert's programs: 1917-1922”. *Bulletin of Symbolic Logic*, **5**(1): 1-44.

Sieg, Wilfried and Schlimm, Dirk. 2005. “Dedekind’s Analysis of Number: Systems and Axioms”. *Synthese* **147**: 121-170.

Sinaceur, Hourya. 2003. "Introduction de la Traductrice". En: Bernays [2003, 7-17].

__________. (ed.). 2008. *Richard Dedekind. La création des nombres.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Thiele, Rüdiger. 2003. "Hilbert's Twenty-Fourth Problem". *American Mathematical Monthly* **110**:1-24.

van Heijenoort, Jean (ed.). 1967. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1897-1931.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Zach, Richard. 2003. "Hilbert's Program". *The Stanford Encyclopedia of Philosophy, URL*: <http://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/>.

Weyl, Hermann. 1925. "Die heutige Erkenntnislage in der Mathematik". *Symposion* **1**: 1-32. Traducción al inglés en: Mancosu [1998, 123-142].

Mathesis **III 4**$_2$ (2009) 265 - 293.

La introducción de la teoría de conjuntos y la matemática moderna en Colombia. Primera parte: El aporte de los extranjeros

Víctor Samuel Albis
*Clara Helena Sánchez**

Resumen
El presente trabajo tiene como objetivo central mostrar la influencia de profesores extranjeros en la introducción de la teoría de conjuntos y la matemática moderna en Colombia.

Abstract
In this paper we examined the influence of foreign mathematicians in the introduction of set theory and modern mathematics in Colombia.

Palabras clave: Colombia, Garavito, Vera, Bellon, Teoría de Conjuntos
Key words: Colombia, Garavito, Vera, Bellon, Set theory
MSC 2000: 01A60

Introducción

En la década de 1940 encontramos los primeros intentos por dar a conocer la teoría de conjuntos y la lógica matemática en Colombia, las cuales son fundamentales, sobre todo la primera, para estudiar lo que hoy se conoce como matemática moderna. Estos intentos se encuentran en el libro de Francisco Vera titulado *Introducción a la teoría de conjuntos*, recopilación de las notas de un curso dictado en Bogotá entre

* Ambos autores son miembros del personal académico del Departamento de Matemáticas (Grupo Proclo) de la *Universidad Nacional de Colombia*. Este ensayo corresponde a una versión corregida, revisada y aumentada de una ponencia presentada en el *XXIII International Congress of History of Science.* Special Session: Introduction of Modern Mathematics in Iberoamerica. Budapest, Hungría. Sábado 1 agosto 2009.

septiembre y octubre de 1942, y en dos artículos de divulgación de la teoría de conjuntos publicados por Waldemar Bellon en la revista *Universidad Nacional de Colombia. Revista Trimestral de Cultura Moderna* en 1945. En cuanto a los escritos sobre lógica, en la ya mencionada revista, Carlo Federici publica el trabajo titulado *Sobre una ley de dualidad en lógica*, y en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Vera publica *El tertium non datur* en el cual encontramos una reflexión sobre la escuela intuicionista. Son valiosos trabajos que se inscriben dentro de los cambios que se dieron con la reforma educativa del primer gobierno de Alfonso López Pumarejo (1934-1938), reforma que buscaba superar el atraso social y económico en que se encontraba el país luego de varias décadas de hegemonía conservadora. Uno de los propósitos fundamentales de los liberales al llegar al poder en 1930 fue mejorar la educación y dar espacio a nuevas áreas del conocimiento, pues los planes de estudio y los métodos de enseñanza en todos los niveles de educación eran totalmente anticuados.

Las tendencias renovadoras se veían estimuladas por movimientos similares que en la década de los treinta aparecieron en varios países de América Latina. Fue sobre todo muy fuerte la influencia de la reforma educativa que llevaba a cabo México bajo la dirección de José Vasconcelos, reforzada por la política socializante del presidente Lázaro Cárdenas. También influía la política educativa de la reciente República Española, con su idea de las misiones pedagógicas itinerantes que democratizarían la cultura llevándola a campos y aldeas [Jaramillo 1989]. Los cambios en la educación superior estuvieron además fuertemente influidos por el movimiento estudiantil de Córdoba de 1918, que exigió autonomía universitaria, libertad de cátedra, apertura a la sociedad con la extensión universitaria, y trascender el proceso de enseñanza aprendizaje involucrándose en el estudio e investigación de los problemas del país.

En el caso de la matemática, que sufrió cambios substanciales en el siglo XIX con los desarrollos en el álgebra, el análisis, la teoría de conjuntos, la lógica, la geometría, para mencionar solo algunos campos, hay que decir que sólo llegaron a Colombia en los años cuarenta del siglo pasado con Vera, Bellon y Federici, como anotamos. En los años cincuenta llegó el húngaro John Horváth a dirigir el Departamento de Matemáticas de la *Universidad de los Andes* y junto con Federici y un grupo de ingenieros y estudiantes de ingeniería de la *Universidad Nacional* abrieron el camino para hacer de la matemática un área de estudio independiente de la ingeniería en Colombia. Para consolidar un área se requiere una institución que ofrezca un plan de estudios, una asociación que congregue a los interesados en el área y una revista especializada que sirva de medio de difusión y de comunicación con la comunidad nacional e internacional interesada en el área. Todo esto, como veremos, se dio en los años cincuentas en Colombia.

Sin embargo, cabe anotar que a finales del siglo XIX libros como el de Camille Jordan [1909], *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, que ya usaba el lenguaje de la teoría de conjuntos, fue conocido, por el ingeniero y profesor de los cursos más avanzados de matemáticas, Julio Garavito, como consta en el análisis de sus cuadernos de notas [Sánchez 2007]. En sus Apuntes de Análisis Matemático (Cuaderno 23, 1897), encontramos algunas páginas, traducidas del libro de Jordan, que tratan sobre una teoría de grupos al traducir del francés 'ensemble' como 'grupo'. En particular, allí aparecen las nociones de 'conjunto derivado' y 'conjunto perfecto', desarrolladas por Cantor. En el Cuaderno 26, Garavito realiza un resumen, basado en el mismo libro, de las cortaduras de Dedekind para definir los números reales, marginalmente, anota 'conjuntos'. Aparentemente, Garavito no encontró pertinente, por posiblemente considerarlos demasiado abstractos, usar los conceptos de la teoría de conjuntos contenidos en el libro de Jordan en sus cursos de análisis de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la *Universidad Nacional*. Prefirió, pues, mantenerse en la tradición 'cauchysiana' de los cursos que hasta entonces se habían enseñado en el *Colegio Militar* y la *Universidad Nacional de Colombia* [Villegas 1992]. Si lo hubiese considerado pertinente, la introducción de la teoría de conjuntos en Colombia podría haberse adelantado medio siglo.

Sólo a partir de 1960 los matemáticos recién graduados comenzarán a enseñar en sus cursos las nociones de la teoría de conjuntos y comienzan a aparecer artículos y folletos escritos por algunos de ellos sobre las nociones básicas de la teoría de conjuntos. Por otro lado, Federici en varias instituciones del país como las Universidades Pedagógicas de Tunja o de Bogotá, además de la *Universidad Nacional*, hará cursos sobre Lógica y Metodología y con grupos tanto de la Nacional como de la Pedagógica en Bogotá impulsará textos para la enseñanza de la matemática moderna en los niveles básico y medio. Federici fue director en el ministerio de Educación Nacional de los programas de actualización de la enseñanza de la matemática y de la física y del programa de televisión *Matemática Elemental* entre 1958 y 1964. Fue, además, representante por Colombia ante la *Commission Internationale pour L'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* en 1959. (Los trabajos de los colombianos serán motivo de una segunda parte de este estudio).

La reforma educativa de López Pumarejo: la fundación de la Escuela Normal Superior y la reforma de la Universidad Nacional

Uno de los propósitos de Alfonso López Pumarejo al asumir la presidencia de la república en 1934 fue renovar completamente el sistema educativo colombiano desde la primaria hasta la universidad. La educación estaba prácticamente a cargo de la iglesia católica en todos los niveles, incluida la *Universidad Nacional* que no escapaba a esa influencia a pesar de haber sido fundada en 1867 por los radicales como una institución laica. López Pumarejo quería que el Estado tomara las riendas de la educación y por ello, durante su gobierno, se reformó la *Universidad Nacional* y se creó la *Escuela Normal Superior* (*ENS*). Esta última concebida como una institución de altas calidades académicas en la cual se debían formar los maestros, que antes de ella no tenían ni la preparación ni las condiciones mínimas de trabajo para ejercer una buena docencia.

Ambas instituciones se nutrieron de exilados europeos por causa de la Guerra Civil Española y la Segunda Guerra Mundial. Estos profesores dieron un alto nivel a los estudios en la Escuela y tuvieron fuerte impacto también en la *Universidad Nacional*. En la *ENS* se formaron los que luego impulsarían el desarrollo de las distintas ciencias sociales en el país y, aunque con menor impacto, también influyeron en el desarrollo de las ciencias exactas, físicas y naturales.

La Escuela Normal Superior. Con esta institución se quería tener un gran centro nacional para formar 'a los maestros de los maestros',[1] haciéndolo no en el marco tradicional de la formación memorística, inductiva y escolástica, sino en la perspectiva de los conocimientos científicos más actualizados: las ciencias biológicas, físicas y exactas, que empezaban a enseñarse en las normales de Tunja y Bogotá, con la pedagogía que, como disciplina independiente, aparecía en la *Universidad Nacional*, con un fuerte respaldo de las ciencias sociales y humanas, hasta entonces bastante ausentes de los planes de estudio. Definíase así uno de los rasgos distintivos de la Normal: la interdisciplinaridad, el

1. Del discurso de posesión de Alfonso López Pumarejo como Presidente de Colombia (1934) tomamos lo siguiente: "No tenemos verdaderos maestros en la enseñanza primaria y secundaria [...]. El estado no se ocupa de dotar al país de instituciones que sepan lo que enseñan y lo sepan enseñar. Nuestras universidades son escuelas académicas. La situación nos obliga a buscar en profesionales extranjeros lo que los maestros nacionales no pueden ofrecer para el progreso material y científico de la nación".

diálogo permanente entre las ciencias y las humanidades, la búsqueda de una formación integral, abierta a todos los horizontes del saber, sin limitaciones, llena de sana ambición [véase: Ospina 1984].

En la *ENS* se podía obtener el título de Licenciado y con una tesis el título de Doctor, que muy pocos obtuvieron. En el caso de matemáticas sólo dos obtuvieron ese título en 1951: Agustín Pérez Repizo, con la tesis (honorífica) **Aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden** y Joaquín Giraldo con el trabajo **Estudio sobre series infinitas**, dirigidas ambas por Juan N. Segura. En 1956, la *Universidad Pedagógica Femenina Nacional* le otorgó el título de doctor a Alberto Vargas Muñoz, como antiguo estudiante que fue de la *ENS*, con el trabajo titulado **Las series algebraicas como introducción al cálculo infinitesimal**, dirigido por el pedagogo alemán Julius Sieber.[1] Los cursos más avanzados de matemáticas fueron los de geometría diferencial y de ecuaciones diferenciales que estuvieron a cargo del alemán Kurt Freudentahl,[2] quien daba sus lecciones sin seguir un texto determinado, según testimonio de Pérez Repizo dado a los autores. Freudentahl permaneció unos pocos años en la *ENS*, viajó a los Estados Unidos y se perdió contacto con él. En la *ENS*, hasta donde sabemos, no se enseñó curso alguno de teoría de conjuntos.

Además de Julius Sieber y Kurt Freudentahl debemos mencionar la labor ocasional como docente del matemático alemán Peter Thullen en la *ENS*.[3] La *ENS* duró apenas veinticinco años pero dejó honda huella

1. Lo que sigue se ha tomado de los archivos de la *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia*, Tunja (en los cuales se conservan los de la *ENS*). Los jurados de la tesis de Pérez Repizo fueron Camilo Rubiano y Santos María Pinzón (Licenciados de la *ENS*). En la misma ceremonia se doctoró en Filología e Idiomas Max Gómez Vergara. En [Delgado 2004] encontramos un análisis de las tres tesis mencionadas, así como muchos detalles valiosos sobre la enseñanza de las matemáticas en la *ENS*.
2. Obtuvo su título de doctor en la *Universidad Técnica de Múnich*, en 1935, con la mención *Sehr gut bestanden*, con la tesis **Bases axiomáticas comunes a los planos en las geometrías euclídea, hiperbólica y elíptica** [*Gemeinsame Axiomatische Grundlegung der Ebenen Euklidischen, Hyperbolischen und Elliptischen Geometrie*], bajo la dirección de Richard Baldus (alumno de Max Noether) y Georg Faber. Freudenthal era un judío converso pero este hecho no impidió que los nazis (1933-1945) quisieran despojarlo de su título, cosa que no ocurrió por la intervención de sus orientadores. En 1936 pensó emigrar a Bolivia, pero terminó en Colombia en la *ENS* para la misma época. La anterior información fue suministrada por Margot Fuchs, directora del archivo de la *Universidad Técnica de Munich* [cítese como HATUM.PAStud., Freudenthal].
3. Matemático alemán, alumno de H. Behnke con quien publicó en 1934 un libro que marcó época: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*. Este libro es posterior al artículo que publicó, sobre el mismo tema, con Henri Cartan [1932]. Más información de Thullen, y su labor como actuario en Colombia y como docente ocasional en la *ENS* se encuentra en Ortiz [2009].

en la educación colombiana. En 1951, durante el gobierno de Laureano Gómez (1950-1953), por razones de índole política e ideológica, fue clausurada y transformada en dos nuevas instituciones: una para varones, la *Escuela Normal de Varones* en Tunja, que en 1953 se convirtió en la *Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia* (UPTC) y otra para señoritas en Bogotá (*Universidad Pedagógica Femenina*), que dio origen a la actual *Universidad Pedagógica Nacional* de Bogotá en 1962.

La ley sesenta y ocho de 1936 transformó a la *Universidad Nacional* reagrupando las facultades existentes en un solo campus y dándole autonomía académica; también comenzaron a abrirse espacios para carreras distintas de las tradicionales de Derecho, Medicina e Ingeniería. Había un serio interés por fortalecer las ciencias básicas y estimular la investigación entre los profesores, dándoles cierta estabilidad laboral y creando un estatuto que los regulara. Comenzaba, pues, a profesionalizarse la carrera docente. Hasta entonces la cátedra era una tarea adicional a sus labores que ejercían algunos profesionales interesados en la docencia.

Para lo que nos interesa en este trabajo se impartieron por primera vez en los años cuarenta cursos de matemática moderna y en particular un curso de introducción a la teoría de conjuntos como anotamos al comienzo de este trabajo. En la Universidad se dio especial importancia a la divulgación cultural como una manera de estar más en contacto con la sociedad y se permitió la apertura a las corrientes culturales y científicas de la época. Esto se ve claramente manifiesto en los artículos de la revista *Universidad Nacional de Colombia. Revista Trimestral de Cultura Moderna*, cuyo título suficientemente ilustrativo, fue fundada en 1944 durante la rectoría de Gerardo Molina (1944-48).

Esos cambios permitieron que en 1947 se fundara una Facultad de Ciencias y en la década de 1950 se crean la carrera de matemáticas (1951) en la *Universidad Nacional*, la primera revista especializada en el área (1952), la *Sociedad Colombiana de Matemáticas* (1955) y el *Departamento de Matemáticas y Estadística* (1956), con lo cual se impulsó definitivamente el desarrollo de las matemáticas en Colombia.

Por otro lado, en la *Universidad de los Andes*, fundada en 1948, se creó el primer Departamento de Matemáticas del país dedicado a impartir todos los cursos de matemáticas necesarios en la Universidad. Allí se empezaron a usar textos norteamericanos, en contraste con los textos que se usaban en la *Universidad Nacional* como el de Sturm [1888] de análisis, para la carrera de ingeniería y los textos de Bourbaki en la carrera de matemáticas.

Francisco Vera y la introducción de la Teoría de Conjuntos en Colombia

Vera, exilado de la guerra civil española, llegó a Colombia por invitación del entonces presidente Eduardo Santos (1938-1942) en abril de 1941. Vera, reconocido matemático español,[1] especialmente por sus trabajos en historia de las matemáticas, fue profesor de esta materia tanto en la *ENS* como en la *Universidad Nacional* donde fue contratado como profesor de matemáticas. Allí, entre 1941 y 1942, tuvo a su cargo cursos de aritmética analítica (esencialmente, teoría elemental de los números) en la Facultad de Ingeniería y posiblemente de cálculo diferencial (Matemáticas II) en la Facultad de Química. Con el apoyo de la *Sociedad Colombiana de Ingenieros* realizó cursillos y conferencias de divulgación de las matemáticas, en la sede de la Sociedad, en la Universidad y en el Teatro Colón. Con sus cursos y conferencias abrió el camino para que nuestra comunidad académica y cultural se diera cuenta del grave atraso en que nos encontrábamos de lo cual dejó testimonio en algunas de sus obras. Nos referimos a los textos *Principios Fundamentales de Geometría* [1943a], *Tratado de Geometría Proyectiva* [1941b], *La historia de las ideas matemáticas*[2] [1943c] e *Introducción a la teoría de conjuntos* [1948]. Sobre el paso de Vera por Colombia dicen Cobos y Vaquero, con toda razón, que: “Nos encontramos a un Vera que explica lo que de sobra era ya conocido en Europa pero que no había llegado aún a algunos países de Latinoamérica” [véase: Cobos y Vaquero 1999]. Efectivamente en su libro *Introducción a la Teoría de Conjuntos*, a manera de prólogo, Vera comienza una ‘advertencia al lector’ en la cual afirma:

> Esta obrita es la reconstrucción aproximada del curso que sobre teoría de conjuntos dicté durante los meses de septiembre y octubre de 1942 en Bogotá por honroso encargo de la *Sociedad Colombiana de Ingenieros*, que realizaba el enorme esfuerzo de organizar conferencias de matemática pura puesto que la que se explicaba en la *Universidad Nacio-*

1. “En julio de 1967 moría en Buenos Aires (Argentina) Francisco Vera, a quién se puede considerar como el más importante historiador de la Ciencia en España. Fue un español, igual que muchos otros, forzado por ser coherente con sus ideas a exiliarse a tierras americanas, donde se le abrieron puertas merced a sus muchos saberes y pese a las carencias en que se produjo el transtierro. Baste recordar las palabras que el propio Vera puso en la introducción de las *Nociones de Aritmética Moderna* (Bogotá, Instituto Gráfico, 1943): ‘Sólo he dispuesto del tiempo estrictamente indispensable para ordenar los escasos papeles y apuntes, y ningún libro, que pude salvar de la hecatombe que me obligó a exiliarme’. Su producción científica se nos antoja muy importante, además de ser casi desconocida por razones bien comprensibles, aunque no siempre explicadas” [Cobos y Pecellin 1997].
2. Los primeros capítulos del libro fueron publicados por entregas entre 1942 y 1943 en los *Anales de Ingeniería.*

> *nal* tenía carácter más concreto que abstracto, ya que no existía en Colombia la Facultad de Ciencias creada recientemente.

El libro de Vera es uno pequeño publicado por la Editora y Distribuidora del Plata, Buenos Aires, en 1948.[1] En los seis capítulos que constituyen el libro de Vera hace una presentación histórico-filosófica de la teoría de conjuntos, deteniéndose en los puntos técnicos más relevantes. No se detiene en la parte operativa de la teoría y no tiene ejercicios. Presenta los resultados más impactantes de la teoría como son la existencia de diferentes tipos de infinito, primero mostrando que los racionales y los naturales tienen la misma cardinalidad, para luego mostrar como los reales tienen una cardinalidad diferente de la de los naturales. Muestra, en el capítulo *Continuo de varias dimensiones,* como el continuo, independiente de su dimensión, tiene la misma potencia a través de curvas como las de Peano, la de Koch, o la de Gonseth que prueban que un área plana puede ser reemplazada por una curva. Con la demostración de Cantor de que el cuadrado y su lado son equipotentes, prueba que la recta y el plano tienen la misma cardinalidad. Luego muestra algunas implicaciones de la teoría de conjuntos en el análisis al mostrar cómo se hizo necesario definir el concepto de 'medida' de un conjunto de puntos de manera tal que pudiera desempeñar un papel análogo al que representaban los conceptos de longitud, área y volumen en la geometría clásica.

Luego de haber probado que $\aleph_0 < F < \boldsymbol{f}$, ($\aleph_0$ la potencia de los naturales, $\boldsymbol{F}$ la potencia del continuo y $\boldsymbol{f}$ la potencia del conjunto de todas las funciones de una variable real) hace la pregunta ¿Existe un conjunto cuya potencia esté comprendida entre éstas y, en particular entre la del numerable y la del continuo?[2] Con lo cual presenta la 'hipótesis del continuo', como un problema que no ha sido resuelto todavía [véase: Vera 1948, 94].

El capítulo IV está dedicado a los conjuntos ordenados y conjuntos bien ordenados. La noción de orden le permitirá referirse a las cortaduras de Dedekind y al teorema de Bolzano-Weierstrass. Por su lado, la noción de conjunto bien ordenado lo llevará a compararlos (conjuntos semejantes) para terminar el capítulo con la sección titulada 'Números transfinitos' extractada directamente de los trabajos originales de Cantor. El capítulo V está dedicado a la aritmética de los números transfini-

1. Tamaño 17 x 14 cm., 190 páginas.
2. Este problema, como sabemos, fue resuelto negativamente apenas en 1962 con los trabajos de Cohen, que complementan los de Gödel de 1940, que prueban que tanto la 'hipótesis del continuo' como el 'axioma de elección' son independientes de los demás axiomas de la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel.

tos, suma, multiplicación, potenciación de ordinales y paso al límite de sucesiones transfinitas. Un apartado nos llamó especialmente la atención: titulado 'Inducción transfinita' atribuye el método de inducción (completa) a Francesco Maurolico [1575], monje del siglo XVI, y a Jacobo Bernoulli,[1] se trata del bien conocido 'Principio de inducción matemática', conocido también como el 'quinto postulado' de Peano, en su axiomatización del sistema de los números naturales. Termina el capítulo con la aritmética de los cardinales. En el VI y último capítulo presenta Vera las paradojas más conocidas de la teoría de conjuntos, las de Russell y de Buralli-Forti. Da luego la axiomatización de Zermelo como una de las soluciones a las paradojas y en seguida las de Fraenkel y de von Neumann hechas con el mismo fin. El numeral 51 es la última sección del libro y está dedicado al 'Estado actual de la teoría'.

La bibliografía es sorprendente si pensamos que comenzó a escribir su curso en Colombia donde el acceso a revistas especializadas de matemáticas era prácticamente imposible. Según él mismo cuenta, su biblioteca tuvo que ser abandonada al salir para el exilio. Más de cien autores aparecen en el índice de nombres mencionados en su libro. La mayoría de ellos de la mayor relevancia en la matemática de la segunda mitad del siglo XIX y la primera mitad del XX. Recordemos que el libro fue publicado en 1948, seis años después del curso, y culminado en Argentina donde seguramente encontró una buena biblioteca y acceso a la bibliografía que menciona.

Este curso debió sorprender enormemente a su público, pues como pretendemos mostrar con este trabajo fue la primera vez que se tocó públicamente este tema en Colombia. Por otra parte, es muy difícil verificar el impacto del curso entre los ingenieros colombianos que enseñaban matemáticas por esa época.[2] Sabemos sí que ese curso impactó a Mario Laserna, en ese entonces estudiante de Derecho del *Colegio del Rosario*, quien afirma que gracias a ese cursillo se dio cuenta

1. En su demostración de la llamada 'desigualdad de Bernoulli': $(1 + a)^n > 1 + na$, para todo $n \in \mathbf{N}$.

2. Para la época en que Vera estuvo en Colombia la matemática hacía parte del oficio de los ingenieros. Estos eran los profesores de matemáticas de nivel superior en las pocas universidades en que se podía cursar la carrera de ingeniería [véase: Sánchez 2007]. A los ingenieros podemos, pues, considerarlos como los 'matemáticos' colombianos hasta la creación de la carrera de matemáticas en 1951. Entre ellos, figura destacada fue Julio Garavito Armero, quien desconoció los importantes desarrollos de la matemática del siglo XIX. Por ello no es de extrañarse que las ideas novedosas expuestas por Vera debieron causar un fuerte impacto entre los ingenieros de la época, particularmente entre uno de sus más fieles seguidores y defensor a ultranza de sus trabajos Jorge Álvarez Lleras. Por ejemplo, tenemos noticia de la polémica que se dio en Bogotá por el *Tratado de geometría proyectiva* de Vera [1941b] [véase: Cobos y Vaquero 1999].

de que la matemática que se hacía en Colombia estaba muy atrasada, lo cual le motivó a irse a la *Universidad de Columbia* a estudiar matemáticas. Obtuvo allí, en 1948, un *Bachellor of Arts* con un *Major* en matemáticas. A su regreso al país fundó con un grupo de intelectuales colombianos la *Universidad de los Andes* [véase: Sánchez, 1998].

En 1943, Vera dictó un curso en la *Universidad Nacional* cuyo título es bien significativo para esta historia: 'Iniciación a la Matemática Moderna'. Aunque en la primera parte aborda temas de aritmética, algebra y geometría es claro que su enfoque no es el de la matemática clásica. La última parte del curso trató temas de topología [véase: Cobos y Vaquero 1999]. Vera dejó además varios textos publicados en Colombia en los que se puede apreciar su enfoque 'moderno' de las matemáticas. Entre ellos podemos mencionar *Metodología de la Matemática elemental* [1942] y *Nociones de aritmética moderna* [1943b]. Finalmente, Vera dejó el país en 1944 por razones de salud de su esposa, a quien la altura de Bogotá afectaba seriamente, para radicarse en Argentina donde él murió en 1967.

Waldemar Bellon el divulgador de la ciencia y de la teoría de conjuntos

Uno de los puntos centrales del Programa de Reforma del movimiento estudiantil de Córdoba para la educación superior era la 'Extensión y difusión cultural' en las universidades con el fin de ampliar la base del contacto cultural con los diferentes sectores sociales, especialmente las mayorías populares. Pues bien, la *Universidad Nacional* se preocupó por lograr este objetivo muy particularmente en la rectoría de Gerardo Molina (1944-1948). Además de numerosos cursos libres, conferencias, presentaciones artísticas (conciertos, ballet), fundó la *Revista de la Universidad Nacional* ya mencionada, publicación de divulgación científica y cultural en la cual la palabra 'moderna' fue estratégicamente elegida por sus fundadores; pues para ellos significaba que "La Universidad se sitúa en un plano moderno como es el de una constante difusión de la ciencia". En la Revista se puede apreciar efectivamente el interés por la ciencia, y las nuevas áreas de conocimiento que empiezan a cultivarse en la Universidad. Los artículos, todos ellos de excelente calidad, fueron escritos especialmente para la revista por la nueva generación de intelectuales nacionales, como Andrés Holguín, Daniel Arango, Fernando Charry, Danilo Cruz Vélez, o León de Greiff y extranjeros como Aldous Huxley, Juan David García Bacca, o Arthur P. Whitaker. La publicación, considerada como revista científica, fue muy bien acogida por la opinión pública. En ella se publicaron en la Sección de Ciencias Físicas y Matemáticas dos artículos de divulgación matemática sobre la teoría de conjuntos: "Cantor el conquistador del infinito", y "Nuevas perspectivas en la Matemática Moderna", firmados por Waldemar Bellon. A la par en la sección de Filosofía, Letras y Artes se publicó un interesante artículo del filósofo español, José Ferrater Mora titulado "El Infinito: esquema para una historia de su idea", en el cual el autor hace un valioso recorrido histórico de este concepto desde los griegos hasta los desarrollos del infinito matemático de su época, tema de los artículos mencionados. En todos los casos es de resaltar una bibliografía actualizada para la época, con valiosas fuentes para quienes quisieran profundizar en los temas tratados.

Bellon[1] exilado matemático alemán llegó al país en 1938 y pronto se vinculó a la comunidad académica de Bogotá. Fue un excelente colaborador de la *Revista de la Universidad Nacional* y de la *Revista de las Indias*, fundada, ésta última, en 1936 como órgano de divulgación cultural del Ministerio de Educación y que a partir de 1938 se convirtió

1. Waldemar Bellon nació en la ciudad de Cannstatt, hoy un barrio de Stuttgart, Alemania el 29 de abril de 1907, hijo de un comerciante del sector y el tercero de cuatro hijos. Terminados sus estudios básicos ingresó a la universidad de Tubinga donde estudió matemáticas y física bajo la dirección de los profesores Martin Wilhem Kutta, Konrad Knopp y Erick Kamke. Escribió su tesis sobre funciones convexas y se graduó con honores a finales de los años 20. Emprendió luego estudios propios que publicó en varias revistas y periódicos, especialmente sobre física y astronomía. Se dedicó a la docencia y a la investigación en el área de las matemáticas. Bellon, luego de la ascensión al poder de Hitler, integró grupos activistas que trabajaban contra el proyecto de raza superior y dominación propuesto por el nazismo. Dentro de esas actividades hizo parte de un grupo de personas que a través de una emisora clandestina, lanzaba arengas contra el gobierno y su mandatario. Fue denunciado por parientes cercanos afectos al movimiento; fue detenido y encarcelado en la ciudad de Ulm, al sur de Alemania. Sus compañeros de universidad lograron establecer una defensa y gracias a la intervención de personas influyentes de la intelectualidad y la academia de la región, el caso llegó a manos de un juez, amigo de infancia de Bellon. Luego de una condena bastante breve para un caso de este tipo, el juez le concedió permiso y visa para viajar a Chile, supuestamente para investigar y hacer reportajes sobre la enorme colonia alemana residente en el sur del continente. Huyó del barco al desembarcar en Buenaventura en el mes de septiembre de 1938, para casarse en Bogotá con Lisle Benkendörfer, hermana de un compañero suyo de colegio y quien había huido de Alemania en abril de 1938, con destino Colombia. Un primo suyo había llegado a comienzos de los años 30 a este país para fundar el Instituto Geográfico Agustín Codazzi. Bellon rápidamente se integró a la comunidad académica bogotana y empezó a dictar clases privadas y en algunas instituciones de educación de inglés y matemáticas. Entre ellas el *Colombo Americano* y la *Universidad Javeriana* en la cual fue, según nuestras fuentes, el primer profesor no católico. Bellon era protestante luterano. En los años 50, se convirtió en corresponsal de la agencia de noticias inglesa *Reuters*, y de varios servicios de noticias como el *Copley News Service* de Estados Unidos, y otras agencias de Inglaterra y Alemania. Murió de un infarto el 25 de octubre de 1962. Entre sus cuatro hijos se encuentra Manolo, reconocido periodista de radio, quien muy gentilmente nos dio algunos datos de su padre que complementan la presentación que sobre sus colaboradores hacía la *Revista de la Universidad Nacional.*

en órgano internacional de escritores hispanoamericanos. Esta revista "contiene en las páginas de sus numerosos volúmenes (1936-1951) las huellas del exilio de muchos refugiados republicanos españoles desplazados por la guerra civil y sus secuelas represivas, como también las de los afectados por la cruenta persecución fascista que tuvo como marco la segunda guerra mundial" [Restrepo 1990]. Bellon se convirtió, casi con certeza, en el primer divulgador de la ciencia moderna en Colombia como veremos a continuación.

El ensayo de Bellon titulado 'Cantor el conquistador del infinito' fue publicado en 1945 con motivo del centenario del nacimiento de Georg Cantor. En el epígrafe se afirma que 'es el primer trabajo que entre nosotros se dedica a este genial escalador de los cielos, para usar una expresión de Hermann Weyl'; y que 'el lector encontrará en este ensayo una oportunidad aprovechable para acercarse a Cantor y con él a un gran sector de la matemática moderna'. El artículo está dividido en doce secciones. En la primera titulada 'El hombre' describe muy brevemente a Cantor a quien presenta como un 'gran revolucionario' un 'transformador de todos los valores tradicionales'. Resalta además su labor organizativa y publicista, ya que Cantor fue el fundador de la *Asociación Alemana de Matemáticas*, uno de los principales centros de discusión y desarrollo de las matemáticas de su época en Alemania. A partir de la segunda sección '¿Qué es un conjunto?', en la cual da la definición de conjunto que se encuentra en los *Beiträge* de Cantor (1895, 1897), Bellon presenta de manera sencilla y didáctica los conceptos básicos de la teoría de conjuntos de Cantor enmarcándolos desde una perspectiva histórica. Aunque llama 'iguales' (y usa el símbolo =) a conjuntos que Cantor llamó 'equivalentes', para los cuales existe una correspondencia biunívoca entre ellos, hace la anotación de que otros autores prefieren llamarlos coordinables.

En seguida Bellon hace una reflexión sobre lo que ha sido la idea del infinito y la manera como Cantor lo introduce a pesar de la desconfianza que desde la antigüedad se le tenía al concepto; continúa con la demostración de que los números racionales y los algebraicos son enumerables. La siguiente sección la dedica a la demostración de 1874, por reducción al absurdo, de que los reales no son equipotentes con los naturales y con ello la existencia de por lo menos dos distintos tipos de infinito. 'Número Cardinal', 'El Continuo', 'Números cardinales más grandes' y 'Cubo igual a recta' son tres secciones dedicadas a los números cardinales, en las cuales enfatiza naturalmente la existencia de cardinales infinitos cada vez más grandes y obviamente mostrará con asombro que una recta, un cuadrado y un cubo tienen, respectivamente, igual número de puntos. Con dos secciones tituladas 'Las Paradojas' y 'Los dos Bandos' culmina el artículo. En la primera de ellas se describe la paradoja de Russell y en la segunda se presentan como rivales, con respecto a la forma de enfrentar las paradojas, las corrientes de Hilbert, Russell y Zermelo, por un lado, y la de Kronecker, Brouwer y Weyl por el otro. Bellon se reconoce partidario de la escuela de Hilbert y sugiere la lectura del artículo de Vera en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias* al que nos hemos referido anteriormente. El artículo incluye a pie de página un extracto del capítulo sobre Cantor publicado en el libro de E. T. Bell *Men of Mathematics*, cuya primera edición en inglés es de 1937.

Creemos que influenciado por Bellon, a quien cita de manera explícita, Antonio María Gómez, profesor de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería incluyó en las primeras dos páginas de sus *Conferencias de Análisis I*, la nociones de conjunto, conjuntos iguales o coordinables, conjuntos finitos y conjuntos enumerables [Gómez *s.f.*].

En un breve ensayo de apenas cuatro páginas titulado 'Nuevas perspectivas en la Matemática Moderna' [1946], Bellon presenta, de manera muy escueta, las ideas de Paul Finsler matemático suizo que desarrolló una teoría de conjuntos alternativa a la de Cantor con la cual pretende salvar las paradojas de la teoría. Bellon se basa en la descripción que hace Georg Unger, alumno de Finsler, en los números treinta y nueve y cuarenta y dos de la revista *Goetheanum* (Dornach, Suiza) de 1944. Si el primer trabajo nos sorprendió por su novedad en la época en Colombia, este nos parece aún más sorprendente ya que la teoría de conjuntos de Finsler acepta los conjuntos circulares como base de su teoría, es decir, conjuntos en los cuales el conjunto puede ser elemento de sí mismo. Finsler es reconocido por sus aportes a la geometría diferencial y a la astronomía, pero su aproximación filosófica al problema de los fundamentos y su solución de las paradojas no fue acogida por la comunidad matemática de su tiempo. Finsler en cierta manera plantea el problema de indecidibilidad de ciertas conjeturas matemáticas, problema que Bellon plantea en su artículo con la pregunta ¿hay teoremas que no se pueden demostrar? Así que, si el primer artículo es una verdadera novedad en Colombia como artículo de divulgación en una importante revista del momento, más novedoso aún es que dedique unas páginas a la teoría de conjuntos de Finsler y a su concepción filosófica de la matemática. En la revista encontramos también varias reseñas hechas por Bellon de libros de matemáticas recientemente publicados, algunos en inglés, de muy diversas áreas de la matemática algunas de ellas de matemáticas avanzadas para la época.[1]

En 1936, se funda la *Revista de las Indias* órgano de difusión del Ministerio de Educación. Dos años después se convierte en órgano internacional de escritores Latinoamericanos dirigido por un Comité conformado por destacadas personalidades de las letras latinoamericanas. *Revista de las Indias* contiene en las páginas de sus numerosos volúmenes (1936-1951) las huellas del exilio de muchos refugiados republicanos españoles desplazados por la guerra civil y sus secuelas represivas, como también las de los afectados por la cruenta persecución fascista que tuvo como marco la segunda guerra mundial. Estas huellas del exilio quedaron perpetuadas en hechos muy significativos para la historia cultural latinoamericana, en especial la mexicana y la colombiana. Los gobiernos de Lázaro Cárdenas y Alfonso López Pumarejo dieron albergue intelectual a profesionales de todas las ramas del saber, académicos y artistas, que habían sido fustigados por la intolerancia y la barbarie [Restrepo 1990, 27].

En 1948 se abrió un espacio para asuntos científicos (antes era completamente literaria), concedido a Bellon, quien empezó a publicar "con ágil estilo periodístico, reseñas y noticias sobre los principales inventos y acontecimientos del mundo europeo y norteamericano" [Restrepo 1990, 40, 41]. La primera nota de Bellon, sobre Max Planck, la encontramos en el número ciento uno de enero y febrero de 1948: a partir del número ciento cuatro se encuentra la sección 'Ciencias', a su cargo**,** la cual aparecerá sistemáticamente hasta el cierre de la revista en 1951. En ella encontramos temas de actualidad en física, geología, astronomía, medicina, cerebros electrónicos (las primeras computadoras), o arqueología. Leer su sección era ponerse al día con muchos de los avances científicos de la época. La *Revista de Indias* fue cerrada durante el gobierno de Laureano Gómez.

1. Entre algunos de los libros reseñados se encuentran: *Elementos de Geometría*. Obras completas de Euclides; Biblioteca *Scriptorum Graecorum et Romanorum Mexicana*; UNAM, 1944. Traducción de Juan David García Vaca. No. 4 de 1945. *Methods of Algebraic Geometry*, por W.V. D. Hodge y D. Pedoe. Cambridge University Press, Cambridge, 1947. *Elements of Mathematical Astronomy*, por Martin Davidson. Hutchinson's Scientific and Technical Publications, London, 1947, y *Geometry of Constructions*, por T.B. Nichols y Norman Keep. Cleaver-Hume Press, Ltd. Londres, 1947, en el No. 13 de 1948. *From Euclid to Eddington*, por Sir Edmund Whittaker. Cambridge University Press, 1949 en el No. 15 de 1949.

Carlo Federici y los primeros pasos de la profesionalización de la matemática en Colombia

Una de las evidencias que tenemos del atraso de la matemática en Colombia en 1940, a la llegada de Vera, son los artículos publicados en la revista de la *Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* (*ACCEFYN*), creada con su revista (*Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*) en 1936. La Academia, fundada con el fin de impulsar el desarrollo de la ciencia en Colombia, estaba conformada por tres secciones: Ciencias Naturales, Ciencias Exactas y Ciencias Físicas. La más débil de estas secciones era la de Ciencias Exactas y estuvo conformada por ingenieros de la *Universidad Nacional* especialmente interesados en las matemáticas y la física. Pero no hay en la revista de la Academia artículo alguno entre 1936 y 1957 de autores colombianos contemporáneos de nivel matemático. Quizás por eso Jorge Álvarez Lleras, ingeniero y Presidente de la Academia, se propuso republicar los artículos de Julio Garavito (1865-1920), su maestro, aparecidos anteriormente en los *Anales de Ingeniería* y publicar algunos de sus trabajos inéditos.[1] Entre los trabajos más interesantes que se encuentran en la revista en este período está uno del venezolano Francisco J. Duarte [véase: Duarte 1946; Carrizosa 1921 y Albis 1988], sobre las geometrías no euclídeas en el cual muestra los errores de Garavito cuando intenta demostrar el quinto postulado de Euclides; Garavito [1917] rechazó las geometrías no euclidianas y la relatividad en un artículo titulado '¿Bancarrota de la Ciencia?'

Justamente, consciente de este atraso, el ingeniero Julio Carrizosa Valenzuela, académico de la Sección de Ciencias Exactas de la ACCEFYN, funda en 1947 en la *Universidad Nacional* una Facultad de Ciencias para impulsar entre los jóvenes el estudio de las ciencias básicas. La facultad ofrece a partir de 1948 unos cuantos cursos libres sobre matemáticas, física, química, biología, filosofía de la ciencia, entre otros temas, realizados por especialistas en el área [Arias y Sánchez 2006]. A esta facultad llega, en 1948, el matemático y físico italiano Carlo Federici,[2] alumno de Alessandro Padoa, a su vez alumno de Giu-

1. Julio Garavito, ingeniero, profesor de matemáticas y astrónomo, fue uno de los científicos más destacados de su época, particularmente por sus trabajos en astronomía, pero cometió serias equivocaciones en matemáticas, como la de rechazar las geometrías no euclidianas.
2. Sobre Carlo Federici (1906-2005), su papel en el desarrollo de las matemáticas en Colombia, su interés en mejorar la enseñanza de la misma en todos los niveles de enseñanza, y su influencia en la formación de los colombianos de las mas diversas áreas de las ciencias básicas y humanas se han hecho varias publicaciones [véase: Granés y Camelo 2004; IDEP o Sánchez 2005].

seppe Peano. Federici hablará a los profesores y alumnos de la Facultad de Ingeniería de temas novedosos, como eran los 'famosos postulados de Peano' o el 'cálculo proposicional'. Apenas tres años después, en 1951, Federici y sus alumnos de la Facultad de Ciencias fundaron la carrera de matemáticas como una especialización en Matemáticas Superiores con la que se podía obtener el título de Licenciado en Ciencias Matemáticas. Los aspirantes debían tener conocimientos de matemáticas del nivel de los cursos más avanzados de la carrera de ingeniería. Al año siguiente la carrera se convirtió en una carrera profesional de cinco años a la cual podían acceder los bachilleres. Desde sus comienzos, la carrera ya marcaba sus grandes diferencias con las matemáticas en ingeniería. Con el propósito de dar una idea de los cursos ofrecidos entre 1952 y 1954, podemos mencionar los cursos 'Fundamentos de Matemática', 'Cálculo Operacional' (transformaciones de Laplace y Fourier), 'Ecuaciones diferenciales ordinarias', 'Funciones de una variable compleja', impartidos por Federici; 'Teoría de la Medida' (Lebesgue), 'Espacios de Hilbert' y 'Ecuaciones diferenciales parciales', impartidos por J. Horváth (a quien dedicamos una sección más adelante), 'Álgebra moderna', 'Geometría Diferencial', 'Topología General' por Pablo Casas.[1] A finales de la década de los cincuenta y principios de la de los sesenta, se dictaron entre otros los siguientes cursos: 'Metodología matemática', 'Análisis integral', 'Lógica matemática' y 'Ecuaciones integrales', por Federici; 'Topología' por Hiroshi Uehara[2] y 'Análisis diferencial' y 'Álgebra abstracta' por Serge Bischler.[3] Todos estos cursos necesitaban de la teoría de conjuntos, de modo que ésta debió, por lo menos, ser parte introductoria de los mismos, o como efectivamente ocurrió, los estudiantes debieron aprenderlas de alguna otra manera.

La lógica estuvo ligada en este país, como era usual en casi todo el mundo, a los estudios de Filosofía y Derecho. Naturalmente se trataba de la lógica aristotélica. El primer artículo, que hemos encontrado, sobre un tema de lógica matemática lo encontramos en la *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias* en 1941. Se trata del artículo 'El *Tertium non datur*' en la matemática actual de Francisco Vera [1941a], en el cual el autor hace una presentación histórica de las paradojas de la

1. El primer egresado de la carrera y quien hizo algunos estudios de posgrado en la *Universidad de Princeton*, gracias a los contactos de Mario Laserna con Solomon Lefschetz.
2. Estudiante de Teiji Takagi. Llegó a la Universidad de los Andes en 1955 [véase: Schotborgh 2004].
3. Llegó a la Universidad de los Andes en 1955 [véase: Schotborgh 2004].

teoría de conjuntos y las soluciones propuestas por las escuelas filosóficas de la matemática a comienzos del siglo XX: el logicismo, el intuicionismo y el formalismo. El segundo es de Federici [1949] y se titula 'Sobre una ley de dualidad en lógica', publicado en la *Revista de la Universidad Nacional* en 1949, en el cual hace una analogía entre ciertas propiedades de la geometría proyectiva y propiedades de los conectivos lógicos, particularmente la disyunción y la conjunción. Un tercer artículo es de Rodrigo Noguera Barreneche quien, tomando como punto de partida la traducción francesa del libro de W. Sierpinski, *Leçons sur les Nombres Transfinis*[1] y sus lecturas de los libros de lógica matemática escritos por J. Barkley Rosser[1953] y Bertrand Russell [1918], discute la ley de tricotomía y su (aparente, para él) dependencia del axioma de elección y sus equivalencias y cree haber encontrado una demostración de esta ley con independencia de este axioma [Noguera 195x].

Federici había llegado al país el 8 de abril de 1948 con la intención de dedicarse al estudio y difusión de la lógica matemática. En sus primeros cursos trató de los postulados de Peano y del cálculo proposicional como ya anotamos. Sin embargo, sus tareas para formar los primeros matemáticos colombianos le hicieron diversificarse y enseñar, entre otros, cursos de análisis, álgebra, geometría elemental o geometría proyectiva. De los cursos de Federici sobre lógica y metodología en las universidades, Nacional, Pedagógica, o Javeriana de Bogotá han quedado algunas publicaciones.[2] En estos cursos, además de temas básicos de lógica matemática (cálculo proposicional y algunas nociones sobre cuantificadores), Federici quería mostrar la diferencia entre la matemática clásica y la moderna y las aplicaciones de esta en otras ramas del conocimiento, particularmente en la física. Es de anotar que, entre 1958 y 1960, trabajó en la Facultad de Medicina de la *Universidad Nacional* en un proyecto de neurología con el doctor Fernando Rosas. Entre los estudiantes que se beneficiaron de este trabajo estaba Rodolfo Llinás,

1. W. Sierpinski. 1928. *Leçons sur les Nombres Transfini*s. Gauthier-Villars: Paris. Traducción de Emile Borel. 1ª. edición. 4ª. edición: 1950. Este libro fue el No. 1 de la famosa colección de monografías dirigida por Borel. En su comentario, Whyburn [1930] dice que al no usar Sierpinski un sistema complicado y extensivo de símbolos hace que su libro sea muy legible.
2. *Curso de metodología y lógica matemática*, Bogotá [s.n.] 1967; *Fundamentos de lógica de física y de matemática elementales*. Bogotá Universidad Pedagógica Nacional, 1964; *Elementos de lógica y de metodología*. Bogota, Universidad Nacional de Colombia. Facultad de Ciencias Humanas. Fondo Especial de Publicaciones, 1960. *Lógica matemática*. Bogota Universidad Pontificia Javeriana. Publicaciones, 1960. *Elementos de lógica y de metodología.* Universidad Nacional de Colombia (Medellín). Facultad de Minas, 1968.

estudiante de la *Universidad Javeriana*, quien actualmente es un reconocido investigador del Departamento de Fisiología y Neurociencias de la Universidad de Nueva York y reconoce en Federici influencia sobre su formación.[1] Sobre lógica propiamente dicha, Federici se limitó a la enseñanza del cálculo proposicional con un método inventado por él y que llamaban el 'método de los palitos'. Con él Federici quería manipular las fórmulas del cálculo proposicional de tal manera que se pudiera demostrar que una fórmula era equivalente a otra de manera casi mecánica. Ese método ya lo encontramos en su artículo de 1949, pero se publicó formalmente apenas en [Federici] 1998 como un homenaje de sus alumnos, de las más diversas áreas del conocimiento, por sus cincuenta años de labor en Colombia. Entre las fuentes de Federici encontramos el célebre libro de Peano, *Formulario Mathematico* [1895-1908], en el cual además de un primer capítulo sobre lógica, Peano presenta su axiomatización de los números naturales y utiliza su nuevo lenguaje en otras áreas de la matemática como el análisis o la geometría.

Solo en 1975, por sugerencia del profesor Hernando Pérez, se instituyó un seminario de lógica matemática en la *Universidad Nacional* para estudiar el libro de Enderton [1972]. Todos aquellos profesores del Departamento de Matemáticas que habíamos sido 'tocados' por la lógica de Federici, y algunos otros, asistimos al seminario y la lógica se instituyó como curso obligatorio de la carrera a partir de 1980.[2] Es de anotar que antes de esto las nociones de lógica y teoría de conjuntos eran suplidas a nivel elemental con el libro de Allendoerfer y Oakley, *Fundamentals of Freshman Mathematics* [1959].

Mención especial debemos hacer de los artículos de Ewald Burger [1963 y 1965] 'Problemas algorítmicos de las matemáticas' y 'La axiomatización y los números naturales'. En el primero trata, en dos entregas, de las máquinas de Turing, tema completamente novedoso para nuestro país, y en el segundo la construcción axiomática de los números naturales en la teoría de Cantor-Zermelo. Este es un artículo de carácter divulgativo de gran interés y novedad para la naciente comunidad matemática colombiana. Una 'Introducción a la teoría de

1. En comunicación personal dada en 1994, Llinás afirmaba: Mi tesis se relacionaba con el sistema visual, y en particular con la manera como los circuitos de la retina, el tálamo y el área 17 del córtex podían simularse a través de circuitos lógicos en los que se involucraban diagramas de Venn basados en una notación de la lógica que Federici había desarrollado para el tratamiento de las funciones lógicas.
2. Entre los que asistieron al seminario se encontraba Xavier Caicedo, uno de los primeros matemáticos de la Universidad de los Andes, quien se especializó en el área en Estados Unidos y Canadá. Caicedo ha formado un buen número de estudiantes de las universidades Nacional y de los Andes.

modelos' de Ralph Kopperman [1966], la encontramos en el octavo volumen de la *Revista de Matemáticas Elementales*. Como su nombre lo indica es una presentación introductoria de la teoría de modelos.

El Departamento de Matemáticas de los Andes y la visita de von Neumann y Lefschetz

Como hemos mencionado, la *Universidad de los Andes* fue fundada por iniciativa de Mario Laserna el 16 de noviembre de 1948 apoyado por un grupo de jóvenes intelectuales del país. Se quería una universidad privada de carácter laico, independiente de cualquier ideología de los partidos políticos en una época caracterizada por la violencia partidista. Los fundadores buscaban formar generaciones que lideraran un nuevo país. Más tarde, Mario Laserna visitó a la *Universidad de Princeton* donde se hizo amigo de grandes personalidades como Albert Einstein, Solomon Lefschetz y John von Neumann con quienes compartió su proyecto. Von Neumann y Lefschetz vinieron a Colombia, invitados por la *Universidad de los Andes*, por aproximadamente tres semanas en agosto de 1950 con el fin de ofrecer unas conferencias en matemáticas y física. Ambos personajes fueron miembros de la Junta Consultiva que respaldó, desde el exterior del país, la creación de la *Universidad de los Andes*. Lefschetz estaba interesado en promover el desarrollo de la matemática en Latinoamérica, como efectivamente lo hizo en México. Otra razón para la visita de von Neumann fue que su primo por línea materna Peter Aldor, reconocido caricaturista del periódico bogotano *El Tiempo*, y a quien apreciaba mucho, se había exilado en Colombia desde 1948. Esta visita ha sido excelentemente documentada en el trabajo de Fabio Ortiz [2008] del cual extraemos la mayoría de la información que sigue.

Inicialmente, von Neumann propuso los temas de constructibilidad de números, según el texto de Courant y Robbins, y la interpretación probabilística de la mecánica cuántica. La primera fue excluida pronto por Laserna ante la 'inesperada coincidencia' de que curiosamente ese tema fue expuesto el año anterior por Peter Thullen [Ortíz 2008], basado en el mismo libro, quien había estado de visita en la Universidad. La segunda tampoco era viable ya que la audiencia debía tener conocimientos, así fuera mínimos de mecánica cuántica, y ese no era el caso en Colombia. Finalmente se acordó que entre 'Geometrías no euclidianas' y 'Teoría de la integración' se prefiriera este último como tema de matemáticas y que en el área de la física tratara sobre 'Bases Experimentales de la teoría de la relatividad, tanto general como especial'.

Las conferencias de von Neumann, doce en total en inglés, se hicieron en la *Universidad de los Andes* y las de Lefschetz, cuatro en los

Andes sobre 'Métodos del álgebra moderna', y una sobre 'topología' en la *Sociedad Colombiana de Ingenieros* (*SCI*); estas últimas tuvieron el apoyo de la Facultad de Ciencias de la *Universidad Nacional* según reza el siguiente anuncio en el Noticiero Cultural de la Radio Nacional. 'Estas conferencias en castellano son auspiciadas por la Universidad Nacional y a ellas puede asistir libremente quien se sienta capaz'.

Laserna contaba que 'a estas conferencias asistieron muy pocos y tal vez no entendieron mucho'. Entre los asistentes se encontraba José Ignacio Nieto, uno de los primeros matemáticos colombianos en obtener un doctorado, quien recuerda de esta manera la visita de tan importantes personajes: "a Lefschetz le oí hablar en buen castellano y de manera muy didáctica de ciertos resultados de Euler que aún recuerdo (el teorema del poliedro y los siete puentes de Konigsberg), mientras von Neumann nos contó (en inglés) algo que yo oía por primera vez: la integral de Lebesgue y aunque entendí muy poco, estas [conferencias] me dejaron inquietudes y me estimularon mucho."

Suponemos que a la conferencia en la *Sociedad Colombiana de Ingenieros* asistieron, además naturalmente de Federici y sus alumnos, los ingenieros Julio Carrizosa Valenzuela, Leopoldo Guerra, Hernando Morales, Arturo Ramírez Montúfar, Eduardo Caro, Luis I. Soriano LLeras y Gustavo Perry, profesores de la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la *Universidad Nacional* y decididos impulsadores del desarrollo de la matemática en Colombia. Algunos de estos ingenieros asimilaron bastante bien estas enseñanzas.[1] Probablemente otras personas distintas a estas también lo hicieron.

1. El primero de los autores de este trabajo, ingresó, en 1958, al Departamento de Matemáticas de la *Universidad Nacional*, recibiendo de entrada un curso de álgebra dictado, afortunadamente para él, por Luis I. Soriano Lleras, que empezó así: "Vamos a ver cosas que no conocieron en el bachillerato [por alguna razón, pensó que iba hablar de cálculo combinatorio]. Un conjunto es [...]." Luego de esto introdujo, usando los conjuntos, al cálculo combinatorio y las cortaduras de Dedekind para definir los números reales y sus propiedades, pasando luego a estudiar la teoría de las ecuaciones algebraicas usando el primer tomo de las *Lecciones de análisis* de Francesco Severi (que en ese momento se intentaba imponer como el libro de texto para los estudiantes de Ingeniería; naturalmente, estos hicieron sentir su protesta, pues ello representaba una ruptura con la tradición 'cauchysiana' de la enseñanza del cálculo en la Facultad de Ingeniería). Leer este libro fue una delicia. Con toda seguridad Soriano asistió a las conferencias de Vera y leyó sus artículos y los de Bellon. Personalmente, afiné mis conocimientos de teoría de conjuntos, no en el *Fascicule* de Bourbaki, sino en otros libros franceses (influenciados por la corriente bourbakista y las recomendaciones de Royaumont) como los de Claude Berge (topología), Pisot y Zamansky (matemáticas generales), los esposos Dubreil (álgebra) y en el ámbito norteamericano el hermoso libro de C. Hoffman sobre variable real, donde afinó sus conceptos sobre la integral de Lebesgue.

Durante esta visita, Lefschetz le sugirió a Laserna contratar al joven matemático húngaro John Horváth para dirigir el Departamento de Matemáticas de los Andes [*vide infra*]. Cabe mencionar que, curiosamente, en 1949, en la *Universidad de los Andes*, existía un programa de matemáticas en cuyo cuarto año había un seminario sobre 'Teoría de conjuntos'. Este programa como tal nunca funcionó satisfactoriamente. Sólo en 1964 se inició formalmente un sólido programa de formación de matemáticos en la *Universidad de los Andes* [Schotborgh 2004].

John Horváth y la matemática moderna en Colombia

La vinculación de Horváth a la *Universidad de los Andes* es relatada así por él mismo: " […] supe por Leray [quien era mi director en el Centro de Investigaciones Científicas en París] que Lefschetz tenía un puesto para mí en Suramérica. En 1950 hicimos un contrato con Laserna y en 1951 pasé por Princeton en donde conocí a Pablo Casas y a su señora y llegué a Bogotá el 21 de mayo de ese año" [Horváth 1993].

El Departamento de Matemáticas de los Andes debía impartir todos los cursos de matemáticas en la Universidad, particularmente para la carrera de ingeniería, y los del ciclo básico al estilo de las universidades norteamericanas, en el cual los cursos de matemáticas son esencialmente iguales para todos los programas curriculares de pregrado. Como estos cursos eran todos de nivel elemental, Horváth se vinculó también a la *Universidad Nacional* donde había un grupo de profesores y estudiantes interesados en las 'matemáticas superiores'. Como vimos, impartió cursos avanzados para la recién fundada carrera de matemáticas. Hay que destacar que para el curso de 'teoría de la medida' usó el libro de integración de Bourbaki como él mismo relata: "Aunque el primer volumen sobre integración de Bourbaki no había salido todavía, Dieudonné me mandó las pruebas [de galeras] del libro, pues yo le había manifestado mi proyecto en París" [Horváth 1993]. Fue por tanto a través de él que la matemática al estilo de Bourbaki llegó a la Nacional desde los comienzos de la carrera de matemáticas; con los libros de álgebra y topología de Bourbaki y, en particular, para el caso de la teoría de conjuntos, del *Fascicule des Résultats* de su libro de teoría de conjuntos, aprendieron estas disciplinas los primeros matemáticos, por lo menos hasta los años setenta.

Pero Horváth no se limitó a sus tareas de Director en los Andes y a sus cursos avanzados en la Nacional sino que participó muy activamente en la construcción de la incipiente comunidad matemática colombiana. Así, por ejemplo, impulsó la primera revista especializada en matemáticas en Colombia, la *Revista de Matemáticas Elementales* (RME),[1] publicada en colaboración por las Universidades Nacional y de los Andes y facilitó la llegada de importantes matemáticos extranjeros al país [véase: Sánchez 1994]. Con el canje que se obtuvo de la revista se comenzó la colección de revistas que tuvo la Biblioteca Leopoldo Guerra Portocarrero, quizás la mejor del país en matemáticas, estadística y física en su momento.[2]

Los contactos de Horváth permitieron, en las décadas de los cincuenta y sesenta, que a nuestro país llegaran matemáticos de la talla de Jean Dieudonné, Laurent Schwartz, Marie-Hélène Schwartz y Marc Krasner, dieran una serie conferencias del más alto nivel y dejaran testimonio de ellas, como indicamos a continuación. La conferencia de Dieudonné, 'Lógica y matemática', de 1952, en la *Universidad de los Andes*, apareció en el segundo volumen de la *RME*. En 1953, los esposos Schwartz visitaron Colombia (del 17 de agosto al 2 de septiembre). Él ofreció, en la Facultad de Ciencias de la *Universidad Nacional*, las siguientes conferencias: 'La teoría de las distribuciones y sus aplicaciones' (19, 24, 26 y 28 de agosto), 'Análisis y síntesis armónicos' (29 y 31 de agosto) y 'Producto tensorial topológico' (1 y 2 de septiembre). En esta última expuso los recientes resultados de Alexander Grothendieck sobre el tema. En la *Universidad de los Andes* dictó las siguientes: 'La enseñanza de la geometría euclídea' (20 de agosto), 'La creación matemática' (25 de agosto) y 'Espacios matemáticos y espacio físico' (27 de agosto). Además, los esposos Schwartz, al regresar a Colombia en 1956, dictaron en la *Universidad Nacional* los cursos siguientes: Laurent Schwartz: 'Ecuaciones diferenciales parciales elípticas' y 'Variedades analíticas complejas' (de julio a octubre de 1956) y M. H. Schwartz: 'Espacios fibrados' (de julio a septiembre). De estos cursos se publicaron sendas notas mimeografiadas, redactadas por Horváth, que fueron prontamente traducidos al ruso.[3] En esta última visita, L. Schwartz participó en el *Primer Seminario Colombiano sobre enseñanza de las Matemáticas en el nivel universitario*, patrocinado por el Fondo Universitario Nacional, donde expuso las condiciones necesa-

1. Esta revista, por iniciativa de Víctor Albis, se convirtió en 1968, en la *Revista Colombiana de Matemáticas*, que ha circulado regularmente desde entonces.
2. Hoy hace parte de la nueva Biblioteca de Ciencia y Tecnología inaugurada en la *Universidad Nacional de Colombia* en 2009.
3. Las notas del curso sobre espacios fibrados fueron republicadas por la *Universidad Nacional* y la *Sociedad Colombiana de Matemáticas* como la Monografía No. 1 de la *Revista de Matemáticas Elementales* (1963) y las del curso sobre ecuaciones diferenciales elípticas como la Monografía No. 13 de la *Revista Colombiana de Matemáticas* (1973).

rias para hacer investigación en matemáticas en el país: creación de departamentos de matemáticas (ese año se fundó el de la Universidad Nacional), permanente contacto con las comunidades universitarias y académicas a través de intercambios y publicaciones (en 1952 se creó la *Revista de Matemáticas Elementales*) y la formación de un cuerpo de jóvenes investigadores, que en la *Universidad Nacional* se inició en 1968 con el envío de algunos de sus profesores a realizar sus estudios doctorales, programa auspiciado por la *Fundación Ford*, mediante un convenio, con la creación simultánea de la maestría en 1968.

Horváth tuvo gran influencia en la formación de los primeros matemáticos colombianos y en la introducción de la matemática moderna en Colombia a pesar de su corta permanencia en el país; en 1956 se vinculó a la *Universidad de Maryland*. Sin embargo, ha vuelto varias veces y en 1998 se le hizo un homenaje especial en la *Universidad de los Andes*. En 1961, por ejemplo, dictó dos cursos, uno sobre 'álgebra conmutativa' usando el libro de Zariski & Samuel, y otro sobre 'espacios vectoriales topológicos', basado en una preedición mimeografiada de la *Universidad de Maryland*, de su libro de 1966.[1] A estos cursos asistieron los estudiantes de la carrera de Matemáticas de la *Universidad Nacional* y los profesores del Departamento de Matemáticas de la *Universidad de los Andes*. Esta visita de Horváth tuvo como consecuencia importante la salida de estudiantes de la *Universidad Nacional* a obtener sus doctorados: Jaime Lesmes en la Universidad de Heidelberg,[2] y los hermanos Carlos y Germán Lemoine en la *Universidad de Maryland*.[3] Cabe mencionar que ellos obtuvieron, en 1961, los tres primeros títulos de matemático que se otorgaron en el país, además de titularse como ingenieros civiles.

En 1964, estuvo como profesor visitante el matemático belga Paul Dedecker, quien realizó unos cursillos sobre grupos de Lie, variedades diferenciales y espacios fibrados, teoría de categorías y teoría de la homotopía. Sobre estos últimos temas se redactó un conjunto de notas [Dedecker 1964]. Como consecuencia de esta visita, Carlos Ruiz viajó a la *Universidad de Lille* a hacer su doctorado con Dedecker.[4] Las visitas de profesores extranjeros se incrementaron a partir de los años sesenta

1. [Horváth 1966], el libro, dedicado a Dieudonné, Grothendieck y Schwartz.
2. Dirigido por Gottfried Köthe.
3. Dirigidos John Horváth y Umberto Neri, respectivamente.
4. Carlos Ruiz Salguero. Es uno de los primeros (el sexto) egresados de la carrera de matemáticas. Obtuvo su título en 1963 y el Premio Nacional de Matemáticas en 1994. Pensaba en algún momento así: "hacer matemáticas en Colombia es como sembrar margaritas en el desierto". ¡Es un milagro! Estudió topología de manera autodidacta con su compañero Jaime Perea (q.e.p.d) con el texto de Bourbaki.

impulsadas por convenios entre las Universidades de los Andes y Nacional con diversos gobiernos y fundaciones internacionales.

Yu Takeuchi y la enseñanza del análisis

Entre los extranjeros que influyeron en la formación de los primeros matemáticos colombianos y la introducción de la matemática moderna en el país debemos mencionar a Yu Takeuchi, físico japonés, que llegó el 15 de diciembre de 1959 gracias a una convocatoria que había realizado Mario Laserna como rector de la *Universidad Nacional* (1958-1960). Además de él, otros tres japonenses habían sido seleccionados por el Consejo Directivo de la Universidad, de un grupo de treinta escogidos por el gobierno japonés, para apoyar las labores de la enseñanza de las matemáticas y la física en la Universidad Nacional de Colombia: Y. Eda, S. Hosoi, y Y. Yoshida. Su primer curso en la Universidad fue un curso avanzado de análisis vectorial para los estudiantes de matemáticas y física. Poco a poco dejó la física y se dedicó por completo al estudio y enseñanza del análisis matemático. A él se debe la publicación de textos de cálculo, de análisis, ecuaciones diferenciales y variable compleja, entre otros, de muy bajo costo para uso en las universidades colombianas. Varios de estos textos los hizo con la colaboración de colegas colombianos de la Universidad. Ha viajado por todas las regiones colombianas capacitando profesores para la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. Ha publicado más de veinte libros, y más de doscientos artículos tanto especializados como de divulgación. Dirigió igualmente numerosos trabajos de grado y tesis de maestría. Su trayectoria en el país y su contribución al desarrollo de las matemáticas en Colombia han sido reconocidos ampliamente por la comunidad matemática y el gobierno colombianos [Castro 2005].

Conclusiones

En su estudio de 1990, Alonso Takahashi [1990, 79] considera cuatro etapas en el desarrollo e inserción de la matemática en Colombia: la matemática en Colombia antes de 1960; los años sesenta como la década de los pregrados; los años setenta como la década de los posgrados y los años ochenta como la década de la dispersión. En su análisis de la primera etapa, califica los años cincuenta como la 'década heroica' porque es la época de la ruptura del desarrollo de la matemática en Colombia dado que en aquel tiempo se dieron las condiciones para la existencia de la matemática como disciplina independiente de la ingeniería en nuestro país. Gracias a un puñado de ingenieros colombianos, profesores de matemáticas en la *Universidad Nacional*, a Mario Laserna, fundador de la *Universidad de los Andes*, y al selecto grupo de matemáticos extranjeros que nos visitaron desde la década de los cuarenta, se dio un 'salto heroico' a los estudios de la matemática moderna en Colombia, tal como hemos querido dejar testimonio en este trabajo. En una segunda parte por venir, destacaremos el trabajo de los primeros matemáticos colombianos para promover el estudio de la carrera de matemáticas en Colombia, y de los Licenciados en Educación que introdujeron la matemática moderna en los niveles básicos y medio de la educación en el país: es la década de los sesenta.

Agradecimientos
Debemos agradecer de manera especial a nuestras asistentes de investigación Deisy Camargo y Luz Amparo Carranza, por su apoyo en la localización de buena parte del material usado en esta investigación. Igualmente debemos agradecer a José I. Nieto, Jaime Lesmes y Jesús H. Pérez por numerosas indicaciones valiosas. A la señora Margot Fuchs, directora del archivo de la *Universidad Técnica de Munich* por su oportuna colaboración. Finalmente a la *Universidad Nacional de Colombia* y a la Dirección de Investigación de Bogotá por el tiempo y el soporte dado a la realización de esta investigación.

Bibliografía

ALBIS, Víctor. 1988. "Vicisitudes del postulado euclídeo en Colombia". *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* **21**: 73-79.

ALLENDOERFER, Carl Barnett y Oakley, Cletus O. 1959. *Fundamentals of Freshman Mathematics.* New York: McGraw-Hill.

ÁLVAREZ, Jairo. 2000. "Entrevista con el profesor J. Horváth". *Matemática. Enseñanza Universitaria* **8**: 189-204.

ÁLVAREZ, Jairo. 2002. "Entrevista al doctor Mario Laserna". *Matemática. Enseñanza Universitaria* **10**: 107-121.

ARIAS, Jorge y Sánchez, C. H. 2006. "Antecedentes de la Facultad de Ciencias", contenido en Germán Cubillos (editor). *Facultad de Ciencias: Fundación y consolidación de comunidades científicas*. Universidad Nacional de Colombia. Págs. 15-58.

BARKLEY Rosser, J. 1953. *Logic for Mathematicians*. New York: McGraw-Hill.

BELLON, Waldemar. 1945. "Cantor, el conquistador del infinito". *Universidad Nacional de Colombia. Revista Trimestral de Cultura Moderna* **3**: 353-373.

__________. 1946. “Nuevas perspectivas en la matemática moderna”. *Universidad Nacional de Colombia. Revista Trimestral de Cultura Moderna* No. **5**: 363-366.

BEHNKE, H. 1934. *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*. Berlín: Springer.

BREGER, Herbert. 1995. “A restoration that failed: Paul Finsler’s theory of sets”, contenido en Donald Gillies (editor) *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press. Págs. 249-264.

BURGER, E. 1963. “Problemas algorítmicos en las matemáticas. I.” *Revista de Matemáticas Elementales* 5_4 : 21-30.

__________. 1964. “Problemas algorítmicos en las matemáticas. II.” *Revista de Matemáticas Elementales* $6_{1\text{-}2}$: 3-15.

__________. 1965. “La axiomatización y los números naturales. I.” *Revista de Matemáticas Elementales* 7_1: 1-18.

CARRIZOSA, Julio. 1921. “Las geometrías no euclídeas y las objeciones de Garavito”. *Universidad* Nos. 19, 20, 21. Bogotá

CARTAN, Henri. 1932. “Zur Theorie der Singularitäten der Funktionen mehrerer Komplexen Veränderlichen”. *Mathematische Annalen* **106**: 607-647.

CASTRO, Iván. 2005. “Semblanza del maestro. Palabras en homenaje al profesor Takeuchi.” *Matemática: Enseñanza Universitaria* (N.S.) 13_2: i-v.

COBOS BUENO, José M. y Pellecín Lancharro, Manuel. 1997. “Francisco Vera Fernández de Córdoba, historiador de las ideas científicas”. *Llull* 20_{39}: 507-528.

COBOS BUENO, José M. y Vaquero Martínez, José M. 1999. “Matemáticas y exilio: la primera etapa americana de Francisco Vera”. *Llull* 22_{45}: 569-588.

DAUBEN, Joseph. 1990. *Georg Cantor His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton: Princeton University Press.

__________. 1995. “Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge (1984)”, contenido en Donald Gillies (editor) *Revolutions in Mathematics*. Oxford: Clarendon Press. Págs. 49-71.

DEDECKER, Paul. 1964. *Aplicaciones de las categorías y los functores*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia / Sociedad Colombiana de Matemáticas. (Monografías matemáticas 2) Facultad de Matemáticas. Notas redactadas por Felipe Ruiz Silva y Víctor Albis.

DELGADO PÉREZ, Branly. 2004. *Contribución al estudio de la enseñanza de la matemática en la Escuela normal Superior de Colombia, 1936-1951*. Trabajo de grado. Cali: Universidad del Valle.

DUARTE, Francisco J. 1946. "Sobre las geometrías no euclidianas. Notas históricas y bibliográficas". *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* Nos. 25-26: 63-80.

ENDERTON, Herbert B. 1972. *A mathematical introduction to logic*. New York:Academic Press.

FEDERICI, Carlo. 1949. "Sobre una ley de dualidad en lógica". *Universidad Nacional. Revista Trimestral de Cultura Moderna*, No. 14 (abril de 1949): 231-238.

__________. 1998. *Arquitectura matemática de la lógica de las proposiciones categóricas*. Bogotá: Instituto Leonardo Da Vinci / Convenio Andrés Bello.

FERRATER MORA, José. 1949. "El infinito: esquema para una historia de su idea". *Universidad Nacional de Colombia. Revista Trimestral de Cultura Moderna* No. 14: 9-23.

GARAVITO, Julio. 1917. "Bancarrota de la Ciencia". *Anales de Ingeniería* 25: 101-107; 203-215.

GÓMEZ, Antonio María. (*s. f.*, pero probablemente después de 1944.) *Conferencias de Análisis, I*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. [Editadas por Eduardo Llano y David Godoy].

GRANÉS, Magdalena y Camelo, Alfredo (editores). 2004. *Carlo Federici Casa, navegante del océano de los números*. Bogotá: IDEP.

HORVÁTH, John. 1966. *Topological Vector Spaces and Distributions, I*. Addison-Wesley, Reading.

__________. 1993. "Recuerdos de mis años en Bogotá". *Lecturas Matemáticas* 14: 119-128.

JARAMILLO URIBE, Jaime. 1989. "La educación durante los gobiernos liberales, 1930-1946", contenido en *Nueva Historia de Colombia*. Vol. IV, págs. 87-110. Bogotá: Planeta.

KOPPERMAN, R. 1966. "Introductory notes on model theory." *Rev. Colombiana Mat*. 8 (3-4): 19-31

MAUROLICO, Francesco. 1575. *Arithmeticorum libri duo.*

NIETO, José I. 1996. "Mis años de estudiante en Bogotá". *Lecturas matemáticas* 17: 95-104.

NOGUERA BARRENECHE, Rodrigo. 195x. "Demostración de la ley general de tricotomía". *Studia*: vol.: 149-171.

ORTIZ, Fabio. 2008. "La visita de John von Neumann y Solomon Lefschetz a la Universidad de los Andes en 1950. La correspondencia Mario Laserna - John von Neumann". Manuscrito inédito.

__________. 2009. "Peter Thullen y las matemáticas en los inicios del seguro Social en Colombia". Aceptado para su publicación en *Lecturas Matemáticas*.

OSPINA, Juan Manuel. 1984. "La Escuela Normal Superior: círculo que se cierra". *Boletín Cultural y Bibliográfico, Banco de la República* 21 (2): 3-16.

PECELLÍN LANCHARRO, Manuel. 1988. *Francisco Vera Fernández de Córdoba*. Departamento de Publicaciones Excma. Diputación Provincial de Badajoz.

PÉREZ REPIZO, Agustín. *ca*. 1990. "Comunicación personal".

RESTREPO, Manuel. 1990. "Revista de las Indias, un proyecto de ampliación de fronteras". *Boletín Cultural y Biográfico*, Banco de la República 27 (23): 25-41

RUSSELL, Bertrand. 1918. *Introducción a la filosofía matemática*. Buenos Aires: Editorial Losada. Traducción de Juan B. Molinari.

SÁNCHEZ, Clara H. 1993. "Forjadores de la matemática en Colombia. Juan Horváth". *Lecturas Matemáticas* 14: 115-117.

__________. 1994. "Algunos aspectos del patrimonio matemático colombiano. *La Revista de Matemáticas Elementales*. 1952-1967". *Mathesis* 10: 313-330.

__________. 1995. "Forjadores de la matemática en Colombia. Otto de Greiff". *Lecturas Matemáticas* 16: 119-127.

__________. 1996. "Forjadores de la Matemática en Colombia. José I. Nieto". *Lecturas Matemáticas* 17: 93-94

__________. 1998. "Forjadores del desarrollo de la matemática en Colombia. Una charla con Mario Laserna". *Lecturas Matemáticas,* 19: 53-61.

__________. 2002. "100 años de historia de la matemática en Colombia 1848-1948". *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 26_{99}: (239-260.

__________. 2005. "Carlo Federici Casa. In Memoriam". *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 24_{113}: 600-605.

__________. 2006. "El Departamento de Matemáticas y su impacto en el desarrollo de las matemáticas en el país", contenido en *La Facultad de Ciencias: fundación y consolidación de comunidades científicas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Págs. 221-256.

__________. 2007. "Los cuadernos de Julio Garavito. Una antología comentada". *Rev. Acad. Colomb. Cienc.* 31 (119): 253-266.

SCHOTBORGH, Alberto E. 2004. *El Departamento de Matemáticas de la Universidad de los Andes. 1949-2003*. Universidad de los Andes: Bogotá.

SCHWARTZ, Laurent. 1956a. *Ecuaciones diferenciales parciales elípticas. Revista Colombiana de Matemáticas*. Universidad Nacional de Colombia: Bogotá. Segunda edición: 1973a. Monografías

Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia y Sociedad Colombiana de Matemáticas.

SCHWARTZ, Laurent. 1956b. *Variedades analíticas complejas.* Universidad Nacional de Colombia: Bogotá.

SCHWARTZ, Marie-Hélène. 1956. *Espacios fibrados*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. Segunda edición: 1963. *Revista de Matemáticas Elementales*, Monografías Matemáticas. Universidad Nacional de Colombia y Sociedad Colombiana de Matemáticas.

SIERPINSKI, W. 1950. *Leçons sur les nombres transfini*s. Paris: Gauthier-Villars. Traducción de Emile Borel. 4ª. edición.

STURM, Charles. 1888. *Cours d´analyse.* París: Gauthier-Villars.

TAKAHASHI, Alonso. 1990. "Estudios sobre el Estado de Desarrollo y de Inserción de las Disciplinas y Áreas del Conocimiento. Matemáticas", contenido en *La Conformación de Comunidades Científicas en Colombia*. Misión de Ciencia y Tecnología. Bogotá: MEN, DNP, FONADE. Págs. 75-216.

TAKEUCHI, Yu. 1977. "Formación de matemáticos en Colombia". *Matemáticas. Enseñanza Universitaria* N° 3: 3-46.

VERA, Francisco. 1941a. El *tertium non datur*. *Rev. Acad. Colomb. Cienc*. 4 (14): págs.236-239.

__________. 1941b. *Tratado de geometría proyectiva*. La Habana: Cultural.

__________. 1942. "Metodología de la Matemática elemental". *Educación* No. 4 (junio-julio): 427-440.

__________. 1943a. *Principios fundamentales de geometría*. La Habana: Cultural.

__________.1943b. *Nociones de aritmética moderna*. Bogotá: Instituto Gráfico.

__________. 1943c. *La historia de las ideas matemáticas*. Sociedad Colombiana de Ingenieros, Bogotá: Editorial Centro.

__________. 1948. *Introducción a la Teoría de Conjuntos.* Buenos Aires: Editora y Distribuidora del Plata .

VILLEGAS, Graciela. 1992. *Sobre el curso de cálculo diferencial e integral 'à la Cauchy' de Julio Garavito, 1912*. Tesis de maestría. Cali: Universidad del Valle.

WHYBURN, G. T. 1930. "Book Review. W. Sierpinski. Leçons sur les nombres transfinis". *Bull. Amer. Math. Soc*. 36*:* 175-176.

Mathesis **III 4$_2$** (2009) 295 - 414.

El arquitecto práctico, civil, militar y agrimensor.
(Libro I, proposiciones I a XXXVI)

Antonio Plo y Camin

EL ARQUITECTO PRACTICO,

CIVIL, MILITAR, Y AGRIMENSOR, DIVIDIDO EN TRES LIBROS.

El I. contiene la Delineacion, Transformacion, Medidas, particiones de Planos, y uso de la Pantómetra.

El II. la práctica de hacer, y medir todo genero de Bobedas, y Edificios de Arquitectura.

El III. el uso de la Plancheta, y otros instrumentos simples, para medir por el ayre con facilidad, y exactitud, y nibelar regadìos para fertilizar los Campos.

COMPUESTO

POR DON ANTONIO PLO Y CAMIN, Profesor de estas Ciencias.

QUIEN LO DEDICA AL M. ILᵉ SEÑOR FR. DON ANTONIO MARIA Bucareli, &c.

CON PRIVILEGIO.

EN MADRID: En la Imprenta de Pantaleon Aznar. Año de 1767.

AL M. IL.e SEÑOR FREY DON ANTONIO Maria Bucareli y Ursua, Henestrosa, Laso de la Vega, Villacis y Cordova, Cavallero Comendador de la Bobeda de Toro, en el Orden de San Juan, Mariscal de Campo de los Reales Exercitos, Capitan General de la Isla de Cuba, y Governador de la Ciudad de San Christoval de la Habana, &c.

M. IL.e SEÑOR.

TOdos los Escritores buscan hombres grandes, à cuyas sombras se amparen sus producciones literarias , y aunque no logren por este respeto librarse del todo de la censura de los ignorantes, no obstante éstos se contienen por veneracion al escudo que autoriza su Obra ; la mia solo sirve para mostrar con ella mi gratitud à tanto favor como he recibido de la persona de V.S. y para poder en algo dàr un público testimonio de mi respeto.

Corresponde mucho el argumento de esta Obra al alto empleo , que ha confiado S. M. à la persona de V.S. entregando á su vigilancia , y valor el gobierno de una Plaza , que es el antemu-

ral

ral de un nuevo mundo. Es esta Obra una instruccion para los Profesores de Arquitectura Civil, y Militar, con muchas, y nuevas observaciones en las prácticas mas esenciales de los Edificios, yá en su construccion, yà en sus medidas, asi accesibles, como inaccesibles, reformando muchas comunes prácticas, en que no dexan de cometerse tal vez bastantes errores, que se verán remediados por la doctrina de este libro.

A V.S. mas que à mi trabajo, se deberà la utilidad de esta Obra, que no viera la luz pública, si no saliera cubierta con el esclarecido blasòn de V. S. en quien se hace patente su debido elogio, con mas claras luces, que pudiera dibuxar mi pluma; pues quien considere el noble proceder, y prendas que adornan la persona de V.S. podrà justamente dudar, si es mayor el lustre que dá à las acciones de V.S. su noble sangre, y gloria de antepasados, ò el esplendor, que con las acciones de V.S. su noble casa se engrandece. Parece que dispuso la Providencia en la persona de V.S. un noble exemplar para el gobierno; la suavidad en el trato; la actividad en la accion, y la vigilancia para el acier-

to.

to. Dignese, pues, V.S. de recibir con su afabilidad innata este obsequio de mis pobres tarèas, para que con tal gracia me aliente á otros trabajos, que sirvan de utilidad à nuestra Nacion Española, y sean del agrado de V.S. cuya vida guarde nuestro Señor los muchos años, que deseo. Madrid, y Noviembre 20. de 1766.

M. IL.^{E} S.^{R}

B.L.P. de V.S. su mas reverente siervo

Antonio Plò y Camin.

¶4 EL

EL REY.

POR quanto Don Antonio Pló y Camin, vecino de Madrid, suplicó à mi Consejo le concediese Privilegio por diez años para que ninguna persona le pudiese imprimir un libro, que havia compuesto, intitulado: *El Arquitecto práctico, Civil, Militar, y Agrimensor*, por el trabajo que le havia costado; y visto por los del mi Consejo, se acordó expedir esta mi Cedula: Por la qual concedo Privilegio al expresado Don Antonio Pló y Camin, para que, sin incurrir en pena alguna, por tiempo de diez años pri-

me-

meros siguientes, que han de correr, y contarse desde el dia de la fecha de ella, pueda, ú la persona que su poder tuviere, y no otra alguna, imprimir, y vender el mencionado libro, intitulado: *El Arquitecto práctico, Civil, Militar, y Agrimensor*, con tal de que sea en papel fino, y buena estampa, viendose antes en mi Consejo, y estando rubricado, y firmado al fin de Don Ignacio Estevan de Igareda, mi Secretario de Camara mas antiguo, y de gobierno de èl: Y mando, que ninguna persona, sin licencia del expresado Don Antonio Pló y Camin, imprima, ni venda el

ci-

citado libro, pena al que lo hiciere de perder todos, y qualesquier libros, moldes, y pertrechos que tuviere, y mas incurra en la de cinquenta mil maravedís para la mi Camara, de los quales sea la tercera parte para ella, otra para el Juez que lo sentenciare, y la otra para el Denunciador: Y cumplidos los dichos diez años, quiero, que ni el referido Don Antonio Pló, ni otra persona en su nombre, usen de està mi Cedula, ni prosigan en la impresion del citado libro, sin tener para ello nueva licencia mia, so las penas en que incurren los Concejos, y personas que lo hacen sin tener-

la:

la : Y mando á los del mi Consejo, Presidentes, y Oydores de las mis Audiencias, y Chancillerìas, Alcaldes, Alguaciles de la mi Casa, Corte, y Chancillerìas, y à todos los Corregidores, è Intendente, Asistente, Gobernadores, Alcaldes Mayores, y Ordinarios, y qualesquier otros Jueces, Justicias, Ministros, y personas de todas las Ciudades, Villas, y Lugares de estos mis Reynos, y Señoríos; y à cada uno, y qualquier de ellos en su distrito, y jurisdiccion vean, guarden, cumplan, y executen esta mi Cedula, y todo lo en ella contenido; y contra su tenor, y forma

no

no vayan, ni pasen, ni consientan ir, ni pasar en manera alguna, baxo la pena de otros cinquenta mil maravedìs para la mi Camara. Dada en Aranjuez à siete de Junio de mil setecientos sesenta y siete. = YO EL REY. = Por mandado del Rey nuestro Señor, D. Joseph Ignacio de Goyeneche.

IN-

INDICE

DE LOS LIBROS, Y CAPITULOS que contiene esta Obra.

LIBRO PRIMERO.

Cap.

LIBRO SEGUNDO.

Bo-

LIBRO TERCERO.

ERRA-

ERRATAS.

Paginas.	*Lineas.*	*Dice.*	*Lease.*
204	23	*VL*	VB
386	22	*NLMC*	NLMQ
395	23	*hasta*	Paralelas á HV hasta
404	19	*Q R*	qR
439	27	*à la*	à las
452	5	*menores*	mayores

IN-

INTRODUCCION.

ES la Mathematica el tronco universal de todas las Ciencias: su raíz, y fundamento es la Geometría, que juntamente con la Arithmetica, dispone, pesa, mide, y arregla todas las cosas naturales.

Para ponderar la nobleza, y utilidades de la Mathematica, era preciso escribir un volumen separado; por lo que basta decir, que de sus Profesores ha havido Emperadores, Pontifices, y Santos; y generalmente deben ser Mathematicos todos los Sabios, y grandes Señores.

Para cultivo de la Juventud Noble, y Plebeya tienen establecidas todos, ó los mas Monarcas de Europa distintas Academias, las que son dirigidas por los Varones mas cientificos de sus Reynos, los que con methodo breve, facil, y gustoso desbastan, industrian, y habilitan á sus discipulos, hasta ponerlos en la carrera que desean.

Otros muchos hay, que desean saber, pero pocos los que se quieren aplicar; y de los que se aplicarian, faltan los mas, por hallarse en paises retirados de las Academias, como á mi me ha sucedido; lo que ahora me hace falta para ser un suficiente Mathematico. Disculpame el no serlo, y el prudente lector me disimulará quanto en esta Obra encontrare mal ordenado; (defecto de mi poco estudio, que solo ha sido la práctica de construír, y obrar por mí, y en concurso de otros, varios edificios de toda clase de Arquitectura) y segun mi limitado ingenio, he podido alcanzar las partes, que contiene este volumen, las quales todas son prácticas; pero las considero suficientes para desterrar algunos errores, que se cometen en toda suerte de medidas, como tambien para instruír á los principiantes, y á los que por seguir el trabajo corporal, mantenerse con él, hallarse lejos de las citadas Academias, y con pocos medios de alcanzar los libros que necesitan, les servirá éste para las principales operaciones, que se les puedan ofrecer.

Las

INTRODUCCION.

Las prácticas de que se trata en el discurso de esta Obra, son las mas precisas, que deben obrar los Agrimensores, y Arquitectos Civiles, y Militares. Los primeros hallarán quanto pueden desear, para obrar sus operaciones con acierto, facilitarán las construcciones de formar sus planos sobre el papel, por medio de la Geometría Práctica, y por el uso de la pantómetra, ó compás de proporcion, que es el tratado del Libro primero de esta Obra, con el que se hallará instruìdo un Profesor de Arquitectura Civil, y Militar, para obrar quantas medidas de lineas, y superficies se le encargaren: delineará, transformará, y dividirá, ò partirá todo genero de figuras planas, tanto regulares, como irregulares, de donde pasará á comprehender con facilidad el Libro segundo; con cuyas prácticas medirá los edificios de Arquitectura, tanto superficiales, como sólidos. Delineará, y obrará quantas colunas se le ofrecieren, á excepcion de sus basas, capiteles, y cornisamentos, que estos los dá á luz la Real Academia de San Fernando, con todo lo demás correspondiente à la Arquitectura Ornamentaria, y Tignaria, y con el tiempo, es regular, dará la Lapidaria, que es la obra mas deseada de todos los Profesores Arquitectos; pero aunque en esta Obra se carece de aquellas partes, no se carece de las medidas de ellas, dispuestas por los méthodos mas seguros, que se han podido descubrir, sin dependencia de la Trigonometrìa, y se prueban los errores, y perjuicios que se cometen en las medidas, como se verá en sus respectivos lugares. En quanto á trazar Bobedas de todo genero, cortar quantas cimbras se ofrecieren, y vencer todas las dificultades, que en esta clase pueden ocurrir, y obrar con acierto todas sus medidas, por dificiles que sean, creo no desagradará, ni aun á los mas inteligentes. Dáse fin al segundo Libro, demonstrando la delineacion, que debe hacerse para dár las estribaciones correspondientes á los arcos: materia, que los mas que tratan de ella lo hacen con mucha variedad.

Pasando al tercero, y ultimo Libro, se halla la práctica de medir por el ayre todas las distancias, profundidades, y alturas de quantos edificios, montañas, y valles se presentaren á la vista, sin necesitar de

Arith-

Arithmetica, ni de mas basa, que una sola, sea esta orizontal, ò vertical, pues de qualquiera de ellas se miden todas las sobredichas lineas, con solo el instrumento de la plancheta, sin que se cometan las equivocaciones, que padecen los mas que obran tales operaciones, de las que tengo muchas hechas, y vistas hacer; y por conocer lo mal fundado de ellas, he conseguido el medio de hacer las verdaderas medidas, con varias prácticas, que he hecho á costa de mi desvelo, trabajo, y especulaciones, de las que se seguirá (segun entiendo) mucha utilidad al Real servicio, y bien comun de todo el Público. Despues de las medidas de la plancheta, se ponen otras semejantes sin ella, por medio de mas simples instrumentos, como verá el curioso en su respectivo lugar; y se dá fin á la Obra con una ligera práctica de nivelár regadíos, para cultivo de las tierras, &c.

Me ha movido á componer esta Obra el vér la poca inclinacion que tienen los inteligentes, que con mas fundamentos que los mios, tanto por su caracter, como por su estudio, podian dár á luz otras de mas consecuencia; por cuyo defecto me he alentatado á dár esta al Público, la que considero suficiente para los que solo se quieren contentar con la práctica, aunque en la realidad, sin ella de nada sirve la teorica, ni el mucho estudio. Yo quisiera poder instruír con mas perfeccion; pero no alcanzando mas mi insuficiencia, suplico á los lectores me disimulen, y perdonen mis muchos defectos.

DI-

DIVISION DE ESTA OBRA,

Y EXPLICACION

DE LAS CITAS.

TOda esta Obra se divide en tres Libros, en lugar de tratados: cada Libro, desde su principio al fin, en Proposiciones, separando sus materias con Capitulos, sin que estos interrumpan la seguida de las Proposiciones, desde el principio al fin de cada libro.

Las citas se expresan del modo siguiente. Qualquiera numero, que se halláre semejante á este (3), se ha de entender la Proposicion tres de aquel mismo Libro; y quando se halle esta cifra (4. L. 1.), significa la Proposicion quarta del Libro primero, ó del que el numero señaláre; y en las demás citas, para las demonstraciones, que en las Proposiciones omito, nombraré el Autor, y lugar donde se haya de probar. Las Proposiciones todas, ò las mas son problemas.

LI-

LIBRO PRIMERO.

DE LA PRACTICA de Agrimensores.

LA práctica, que contiene este Libro primero, es un principio para la que necesitan los Profesores de Arquitectura Civil, y Militar, á los que precisa comprehender esta, para entrar con facilidad en la de los libros siguientes; pero para los que solo desean ser Agrimensores, les basta con la de este; y creo no les dañará, si se aplican á mucha parte de los restantes, donde comprehenderán las medidas por el ayre, que se les pueden ofrecer en muchas ocasiones, por algunos embarazos que suele haver en los campos, y montes, yá sea por aguas, ò yá por espesuras de bosques; en cuyos lances se hacen las medidas

por

por el ayre, y con mas seguridad, que mecanicamente.

Para exercer estas facultades de medir, deben ser los operantes medianos Geometras, delineando en papel los planos, que huvieren de medir, ó huviesen yá medido, por cuyo medio se logra tener presentes las medidas en todo tiempo, y dár puntual razon de ellas á quien fuere necesario; y para los que no tuvieren práctica en el uso del compás, les servirá la instruccion de las Proposiciones del capitulo primero, no pasando á la segunda Proposicion sin tener bien entendida la primera, lo que se consigue con aplicacion, y cuidado, haciendo las mismas delineaciones de las figuras en un papel, obrando con cada una de ellas segun se vaya explicando en la Proposicion; y obrando asi, quedará señoreado qualquiera principiante, por rudo que sea, sin valerse de Maestro.

CAPITULO I.

(*ESTAMPA I.*)

EN este primer capitulo se trata de la práctica correspondiente á lineas, angulos, y otros principios fundamentales, que haviendolos entendido el principiante, con poco trabajo, y en breve tiempo se habilitará para lo demás que contiene esta Obra.

PROPOSICION I.

Examinar si una regla es derecha, ó tuerta para tirar lineas rectas (Figur. 1.).

Para hacer en papel qualquiera delineacion exacta, no basta tener buenos compases, ni otros instrumentos, que se necesitan, si la regla con que se han de tirar las lineas rectas no está perfectamente derecha, la que se probará con la siguiente operacion. Haganse dos puntos muy sutiles, y sean el uno en A, y el otro en B, y, que diste uno de otro tanto como la regla fuere de larga. Ajustense los extremos de la re-

regla á los puntos A B: de modo, que asentada sobre C, se tire la linea A B: mudese la regla á la otra parte, asentandola en D por el mismo asiento que tuvo en C, y ajusten sus extremos en los mismos puntos de antes A B, y tirese otra vez la linea A B; y si esta pasáre por la que se tiró primero, sin conocerse mas que una sola linea, dirémos que la regla es buena; pero si en su medio tiene algun teso, ó vacío, por qualquiera de estos dos defectos formará una superficie, semejante à la que se demuestra en la figura; y estos defectos, ó qualesquiera otros, que puede tener una regla, los remediará qualquiera inteligente, sea Carpintero, Ensamblador, ò Evanista.

PROPOSICION II.

Tirar una linea recta por dos puntos, que estén cerca uno de otro, y alargarla lo que se quisiere sin error (Fig. 2.).

En muchas ocasiones sucede haver de alargar una linea corta á mayor longitud, ó distancia, ò que por dos puntos dados, poco distantes entre sí, se haya de ti-

tirar una recta muy larga; lo que está muy expuesto á error, y nó lo havrá obrando en esta forma. Sean los puntos dados, ó linea, que se ha de alargar C D: tomese qualquiera abertura en el compás, que sea mas que la mitad de la linea C D, ò que sea igual á ella; y desde los puntos C D, como centros, describanse à una, y otra parte unos arcos, que se cruzan en los puntos E F. Desde estos puntos se harà otra vez la misma operacion con mayor abertura de compàs, formando otros arcos, que se cruzarán en un punto, como G. Tirese la C G, y se havrà alargado la C D hasta G, cogiendo los tres puntos C D G.

Si esta linea se huviere de alargar mas, se harà otra vez desde los puntos C G la misma operacion, que de los C D.

PROPOSICION III.

Tirar una linea perpendicular á otra en diferentes casos (Fig. 3. 4. 5. y 6.).

Caso primero. Si el punto dado C (Figur. 3.) estuviere fuera de una linea dada, como en la A B, pongase el pie del com-

compàs en el punto dado C, extendiendo el otro pie, hasta que con un arco, que se forme desde el punto, como centro, corte la linea dada en qualesquiera dos puntos, como A B; y con la misma abertura, ò qualquiera otra mayor que la mitad de A B, haganse centros A B, y desde ellos se cortaràn unos arcos, que se cruzan en el punto D. Tirese la C D, y serà la perpendicular que se pide.

Caso 2. (Fig.4.) Quando el punto estuviere en V, y no se pudiere hacer la operacion à la otra parte de la linea dada P Q, tomese en el compás qualquiera abertura mayor que la mitad de P Q, y desde V cortense los puntos P Q, desde los quales con otra abertura mayor en el compás se haràn otros arcos mas altos, que se cruzan en O. Tirese la recta O, V, y serà perpendicular á P Q, juntandose con ella en angulos rectos en Z.

Esta misma operacion, y la antecedente se obran del mismo modo sobre qualquiera plano de pared, ò suelo, sirviendose de un hilo, ò cordel en lugar de compàs, en esta forma. Sea una linea P Q, (Fig.4.) y tenga por caso 20. pies, y se pide que se le se tire una perpendicular, que la divida en dos partes iguales. Esta operacion se puede hacer de dos modos.

1. En cada extremo de la propuesta linea P Q clavese un clavo: tómese un cordel, haciendose en uno de sus cabos un anillo: este se meterà en qualquiera clavo P; y señalando en el cordel un punto, como à distancia de 15. pies, que es mas que la mitad de P Q, tirese el cordel ácia O, y con el señal à los 15. pies, poniendo en él un otro clavo, ó lapiz, se señalarà con este un arco en V. Hagase lo mismo á la otra parte desde el clavo Q, formando otro arco, que corte al primero en el mismo puuto V: hagase la misma operacion con mayor distancia en el cordel, desde los mismos puntos P Q, haciendo otros dos arcos, que se cruzan en O: tirese con qualquiera renglon, ò cordel la O V, y serà la perpendicular, que se pide, dividiendo la P Q en dos partes iguales en el punto Z.

Esta operacion serà mas segura, si en lugar de cordel se sirve de una regla, ò vara derecha, y larga, travesandole cerca de sus extremos un clavo en cada uno, para que

que el uno se pueda fijar en los centros P Q, y con el otro se describan los arcos O V.

2. Por este medio se harà la misma operacion con el cordel con mas brevedad. Tómese un cordel, ò hilo, que sea mas largo que la linea P Q: dividase este cordel en dos partes iguales (lo que se hace breve solo con doblarlo) : en el punto de la division atese un cabo de otro cordel: atense los extremos, ò cabos à los clavos P Q; pero de modo, que queden las dos partes iguales, desde los clavos al señal de la division. Luego se tirarà del cabo atado al medio del cordel, y asentarà por caso en el punto V, donde se harà una señal sutíl: hagase otra vez la misma operacion con otro cordel mas largo, tirado de los mismos clavos P Q; y haviendo obrado como antes, se hallará el punto O. Tirese la O V, y serà la perpendicular que se desea, como lo ha sido antes.

Caso 3.(Fig.5.) Si el punto dado fuere R, extremo de la linea propuesta, sobre el qual se ha de echar la perpendicular, abrase el compàs en una distancia arbitraria; y sentando un pie de èl sobre el extremo R, sien-

sientese el otro en qualquiera punto V; pero que cayga sobre la linea propuesta: hagase centro en V, y con la misma abertura del compàs se harà un arco sobre la linea propuesta, que la corta en el punto T. Tirese la T V, alargandola à discrecion por S. Cortese V S igual à T V; y tirando la recta S R, serà perpendicular à la propuesta T R, formando las dos el angulo recto en R. A este angulo llaman los Carpinteros escuadra en rincon.

Caso 4. (Fig. 6.) Quando el punto dado cayere fuera de la linea propuesta, como L, que cae fuera de H M, tirese de L una linea recta, que corte à la H M en qualquiera punto de ella, ò en su extremo H: Dividase H L en dos partes iguales en el punto C. Desde éste, como centro con la distancia C L, hagase á discrecion el arco L N; y porque este no corta la H M, alarguese esta hasta que corte al arco en algun punto N. Tirese la L N, y esta serà perpendicular à H M, aunque cayga fuera de ella.

Si por algun embarazo no se pudiera alargar hasta N la H M, se levantarà una perpendicular del extremo M, como se hizo de R en la Figura antecedente: y sacando del punto L una linea paralela à la perpendicular, que se huviere levantado del punto M, será la paralela L N, y queda hecha la misma operacion como antes.

La práctica de tirar lineas paralelas se expresa en las Proposiciones de las Figuras 10. 11. y 12.

PROPOSICION IV.

THEOREMA.

Si el angulo opuesto à el mayor lado de un triangulo fuere recto, las lineas de los dos lados menores serán perpendiculares una á otra (Fig. 7.).

Sobre este noble Theorema se funda la mayor parte de todas las Mathematicas (como puede vèr el curioso por la Prop. 47. del Libr. 1. de Euclides): por èl se probarà, si una linea es, ó no perpendicular à otra; y porque esto consiste en que en el punto donde se juntan las dos lineas, formen angulo, ò angulos rectos, serà bueno queden difinidos los tres especies

cies de angulos rectilineos, que son los que se forman de lineas rectas. Para que los principiantes tengan conocimiento de ellos, todos los Mathematicos dividen el circulo en 360. partes iguales, à las que dàn el nombre de grados, y cada grado le dividen en 60. minutos: cada minuto en 60. segundos, y cada segundo en 60. terceros, procediendo asi infinitamente; y esta division se hace en la circunferencia del circulo, tirando de cada grado una linea recta á su centro; pero regularmente se valen de la mitad del circulo, que es el semicirculo de la Fig. 22. dividiendole en 180. grados, como parece en la Figura, y de 10. à 10. de ellos sacan una linea recta al centro M, valiendose de este instrumento para muchas operaciones, que con èl se haràn adelante; y ahora solo nos servirèmos de èl para la definicion de los angulos rectilineos, dexando los curvilineos, y mixtilineos para otro lugar.

Siendo, pues, la medida de todos los angulos los grados que coge un arco, que se describe del mismo angulo, como centro, hasta tocar las lineas que lo forman, lo tenemos todo bien patente en la Figura 22. que se explica en esta forma:

La linea H M 180, es diametro del semicirculo H 90, 180, formado del centro M con la mitad de su diametro, ò distancia M H. La linea 90 M divide en dos partes iguales à la circunferencia en el punto 90; y al diametro en el punto M, centro del semicirculo: luego aqui se prueba, que con las dos lineas se han formado dos angulos rectos, el uno es H M 90, y el otro es 180 M 90, y la linea 90 M es perpendicular à la H M. Sabido, pues, que qualquiera angulo recto es la quarta parte de un circulo, ò mitad de un semicirculo, el angulo agudo serà el que coja menos de la quarta parte, que son los 90 grados; y qualquiera linea que salga del centro M, hasta la circunferencia en el numero que cortare, señalarà los grados, que vale aquel angulo: de modo, que no llegando à 90. serà agudo: si corta justamente los 90. serà recto; y si corta mas de los 90. serà obtuso; y para nombrar qualquiera angulo se ponen tres cifras, y la que se halla en medio es la que està en el angulo, como por exemplo: el angulo HM 50. se forma acuto en M, y vale 50 grados (Fig. 22.)

El angulo H M 90, ò el 90. M 180. son rectos en M, y qualquiera de ellos vale 90. grados. El angulo H M 130 es obtuso en M, porque pasa de 90. grados; y este vale 130. grados, y por este orden se pueden hacer infinitos angulos, y saber los grados, que cada uno vale; pero no puede haver angulo, que llegue à 180. grados; porque este es el valor del semicirculo (linea recta de su diametro).

Para probar si un angulo es recto, ò si dos lineas rectas son perpendiculares una à otra, sean en la (Fig. 7.) Y F, la una recta, y Y P la otra, tómese en el compàs qualquiera abertura proporcionada; y desde el punto Y con la tal abertura, cortense tres partes iguales en qualquiera de las dos lineas, y sea en la Y F. Tómense quatro de las mismas partes en la otra linea de Y à P. Si tirada la recta F P, tuviera esta cinco de aquellas partes, el angulo Y será recto, y las dos lineas seràn perpendiculares una à otra. Si la linea F P no llegáre à cinco partes justas, el angulo Y serà agudo; y si tuviere mas de las cinco partes, serà obtuso: de que se infiere, que con tres reglas, ò varas derechas, que la una tenga tres pies de largo, ò tres partes iguales: otra, que tenga quatro; y la otra cinco: si estas se tienden en qualquiera plano, y se ajustan los extremos de las unas à los de las otras, se formarà con ellas un angulo recto, ò escuadra, que podrà servir para la práctica de algunas operaciones en el campo; y à no haver reglas, se harà lo mismo con un hilo, ò cuerda, clavando tres clavos, uno en cada señal de las divisiones de tres, quatro, y cinco partes iguales, que se huvieren hecho en la cuerda despues de haver unido los cabos de ella.

Por esta misma regla se prueba, que el quadrado, que se hiciere sobre la linea opuesta al angulo recto de qualquiera triangulo rectangulo, será igual en superficie, ò area à los dos quadrados, que se hicieren sobre los otros dos; esto es, que si el primero tuvo 100. varas de superficie, los otros dos juntos tendràn otras 100. varas. Todo lo contenido en esta Proposicion es conveniente lo tenga bien entendido el principiante, para practicar muchas operaciones, que se le ofreceràn despues; por cuya causa he sido bastante largo en esta explicacion.

PRO-

PROPOSICION V.

Hacer un angulo igual à otro angulo dado (Fig. 8.).

Sea dado el angulo S A O: se pide que se haga otro igual á èl.

OPERACION.

Tómese en el compás qualquiera abertura, como no sea mayor que la linea mas corta de las que forman el angulo. Sea la distancia A S: hagase con ella desde A el arco SO; y sin variar la abertura del compàs, sientese el un pie de él en qualquiera punto M, y con el otro pie hagase el arco V C, cortandolo igual à O S; y tirando las rectas MV, MC, será el angulo M igual al angulo A.

Si se pidiere tambien, que el angulo A se dividiese en dos partes iguales, no hay mas que hacer, que tomar en el compàs qualquiera abertura, y desde los puntos O S, como centros, hacer mas adelante de ellos unos arcos, como los que se hicieron en G (Fig. 2.) desde los puntos E F; y del punto en que estos se crucen se tirarà una recta al punto A, y quedarà hecha la operacion que se pide.

PROPOSICION VI.

Hallar el centro de donde se describió qualquiera arco (Fig.9.).

Sea una porcion de circunferencia el arco D X Z. Tómese en el compàs qualquiera abertura; y sentando un pie de él en qualquiera punto D de la circunferencia del arco, describanse à una, y otra parte otros arcos en R, y B. Hagase la misma operacion desde otro qualquiera punto X, cortando con otros arcos los que se formaron desde D, y serán los puntos R B. Tirese por ellos la oculta B R, larga á discrecion. Elijanse à la otra parte del arco, que se le busca el centro, otros nuevos puntos, sean X, y Z. Desde estos, como centros, con la misma abertura del compàs, ò qualquiera otra, haganse otros arcos, que se cortaràn en los puntos EV. Tirese por estos la oculta VE, y cortará à la antecedente BR en el punto P, y este es el cen-

centro de donde se describiò arco el DXZ.

Por esta misma operacion se cogen con una circunferencia tres puntos dados en qualquiera plano (como no estèn todos en linea recta), haciendo desde ellos las mismas operaciones, que se han hecho para hallar el centro P del arco D X Z; porque si estos puntos fueran los dados, el arco D X Z, descrito del centro hallado P, pasaria por ellos; y si esta operacion se hiciere en algun plano, en el campo, ò en alguna pared, se obrará con una cuerda en lugar de compàs.

Tambien se obrarán las mismas operaciones para coger con un circulo los tres angulos de qualquiera triangulo; y siendo los tres angulos lo mismo que los tres puntos dados, queda yá explicado arriba; pero hay que reparar, que esta operacion, à mas del juego que tiene à varios usos, sirve para conocer de què especie es qualquiera triangulo; y aunque no hemos llegado à la fabrica de triangulos, no serà perjudicial al principiante quedar enterado de estas advertencias. Sea el triangulo, que se quiere saber de què especie es, D X Z (Fig. 9.), que se halla formado de lineas

de

de puntos; y porque cae su centro P, para coger los tres angulos con la circunferencia, fuera del triangulo, se ha de advertir, que el tal triangulo es obtusangulo, o ambligonio. Si el centro P huviere caìdo en la linea D Z, ò qualquiera de las otras dos D X, ò X Z, seria triangulo rectangulo, ú ortogonio. Si el centro P huviere caìdo, ò cayere dentro del triangulo, en este caso sería acutangulo, ú oxigonio: estos nombres toman por razon de sus angulos; porque el obtusangulo tiene un angulo obtuso, opuesto à su mayor lado; el rectangulo lo tiene recto; y el acutangulo lo tiene acuto: aunque todos los tres angulos de esté son acutos, unos mas, y otros menos.

Los triangulos, por razon de sus lados, se nombran de otro modo, que son equilatero, isosceles, y escaleno. Equilatero es el que tiene sus tres lados, y angulos iguales: isosceles, es el que tiene dos lados iguales, y uno desigual, y los dos angulos, que se forman con este lado, son iguales; pero cada uno de ellos es mayor que el otro, quando las dos lineas son mayores que la desigual; pero quando las dos iguales son menores, el angulo, que de ellas se forma,

es

es mayor que qualquiera de los otros dos angulos iguales.

Triangulo escaleno, es el que se forma de tres lineas, y tres angulos, unas, y otros todas desiguales. Con esto quedan difinidos los triangulos rectilineos.

PROPOSICION VII.

Varios modos de tirar lineas paralelas (Fig. 10. 11. y 12.).

Modo primero. Si sobre la recta A B (Fig. 10.) se pidiere, que se tire otra linea paralela á ella, tan distante como la longitud, ò largura de la linea M, tómese ésta en el compàs; y haciendo centro en qualquiera punto A de la dada A B, hagase un arco C, y con la misma abertura del compás elijase otro punto en la linea AB. Sea el punto B: hagase desde B el arco D, y tirese la linea tangente C D, que serà paralela à la A B. Linea paralela es qualquiera, que dista de otra igualmente, tanto por sus extremos, como por su medio; y por mucho que estas se alargaren por ambos extremos, jamás se vendràn à juntar

tar las dos en un punto. Linea tangente se llama qualquiera recta, que se tira por la circunferencia de un arco, sin cortarlo; y al punto donde se toca el arco con la recta se nombra punto del contacto: tales son los puntos C D.

Modo 2. Si sobre una recta dada D E (Fig. 11.) se diere algun punto P, del qual se pide, que se saque una linea paralela á la D E, tirese del punto P qualquiera recta, que corte un punto V, formando qualquiera angulo DVP; y haciendo desde V los arcos DPEQ (5) iguales, se tirarà la recta por los puntos P Q, y esta es la paralela que se pide con D E.

Modo 3. Si fuere una linea dada O L (Fig. 12.) à la que se huviere de tirar otra linea paralela de un punto dado B, se podrà hacer sin variar la primera abertura, que se tomáre en un compàs. Abrase, pues, éste algo mas que el intervalo, que huvieren de distar una linea de otra, como por exemplo del punto dado B à qualquiera otro punto O: de la dada O L tirese la B O, alargandola á discrecion ácia A: cortese O A igual à B O, que es la misma abertura del compás; y sentando un pie de èl

en

en el punto A, vease dónde alcanza el otro en la O L, que serà el punto L: desde éste, como centro, sin que se haya movido la abertura del compàs, hagase el arco C; y tirando por los puntos A L la recta A L C, cortarà al arco C en el punto C: por éste, y el dado B, tirese la recta B C, y serà la paralela que se pide.

Si estas lineas se huvieren de tirar en algun suelo, ò pared, se obraràn con cuerdas, ò varas en lugar de compàs.

Otros modos hay de tirar lineas paralelas, y perpendiculares; pero con las que llevo expresadas tiene bastante qualquiera Profesor para su práctica.

PROPOSICION VIII.

Hallar el punto donde se juntaràn dos lineas, que no son paralelas (Figur. 13.).

Sucede muchas veces, quando se levanta un plano sobre algun terreno, ó quando en papel se forma un angulo muy agudo, que no se puede hallar el punto fijo donde se juntan, à causa de caminar las dos lineas juntas por algun trecho; y para ha-

hallar este punto se obrarà como se sigue.

Sean las dos lineas VO, NH: por los extremos de las dos tirese la N V, y à qualquiera distancia de NV tirese una paralela à N V, como H O De los puntos O V saquense otras dos lineas à discrecion: de modo, que formando qualquiera angulo, como en V, y en O, sean V P O Q paralelas, ò equidistantes entre sì. Tómese en el compàs la distancia N V, y señalense con ella las partes iguales, que se quisiere en la V P, como por caso se han señalado tres partes de V à P iguales á N V. Tómese ahora la distancia H O, y se pasaràn otras tres partes iguales à ella, desde O hasta Q. Tirese la oculta P Q, y esta continuada cortarà el punto S, haviendo alargado antes qualquiera de las lineas dadas V O, ò N H; y qualquiera linea, que se tirase por los puntos de las divisiones de V P à sus correspondientes en O Q, alargandolas ácia S, todas concurriràn al mismo punto S.

Esta práctica tiene mucho uso en la delineacion de los planos, la que debe tener el principiante muy bien estudiada, para el acierto de sus operaciones.

CA-

CAPITULO II.

EN este capitulo segundo se comprehende la division de las lineas, para formar las escalas Geometricas, que son las medidas de superficies, y sólidos, à las que los Franceses llaman comunmente pitipie : aplicanse tambien à otros varios usos, como se verà adelante.

PROPOSICION IX.

Dividir una linea en qualesquiera partes iguales. (Fig. 14.)

Pidese, que la linea A B se divida en tres partes y media iguales.

OPERACION.

Del extremo de ella A tirese una recta A C, que forme qualquiera angulo C A B : abrase el compàs en qualquiera distancia, como A F, y con esta se cortaràn tres partes iguales, comenzando del extremo A, señalando en la AC los puntos FGS. Tómese en el compàs la mitad de una de ellas,

ellas, (3) y pasese de S à C. Del punto C, que es donde finalizan las tres partes y media iguales, tirese al extremo B de la linea dada la oculta CB, y se halla formado el triangulo ABC. De los puntos señalados en la AC, saquense las lineas SH, GE, FD, (7) paralelas à C B, y con los puntos, que estas cortan en la AB, queda ésta dividida en las tres partes iguales, y media mas. Si en lugar de media se pidiere un tercio, quarto, &c. se dividiria una de las tres partes en otras tres, quatro, ò el quebrado necesario, obrando con qualquiera de las tres partes AF lo mismo que se ha hecho para la division de la A C, y poniendo la parte de S à C.

Si para obrar con mas seguridad se quiere tirar del extremo B la linea B D, hagase el angulo A B D igual al angulo B A C (5), y la B D serà paralela à la CA: pasense las partes, que se hallaren en la CA de B à D, tomando en el compàs la distancia CS, y poniendo la de B á H, y la distancia de S à G se pasarà de H à E, y de E à D; y tirando las ocultas FD, GE, SH, con estas tres lineas queda la AB dividida en las tres partes y media iguales, que se pidieron.

Pa-

Para la demonstracion de estas operaciones se ha de probar, que las partes que dividen la AB,son proporcionales á las que se han cortado en la linea AC, lo que se consigue por la 2. Proposicion del 6. libro de Euclides.

PROPOSICION X.

Dadas muchas lineas, aunque sean todas desiguales, dividirlas en un numero de partes iguales, cada una en sus correspondientes con una operacion (Figur. 15).

Pidese, que las dos rectas C, y D se dividan en tres partes iguales cada una.

OPERACION.

Tirese aparte la recta AN à discrecion, y con qualquiera abertura de compàs cortense en ella las tres partes, como señalan los numeros 1, 2, 3; y haciendo centro en el punto 3, con la misma abertura del compás, hagase el arco 2, SN; y haciendo centro en el extremo A con la distancia A 3 hagase el arco 3 S, que corta al arco antecedente en el punto S. Tirese la recta AS larga á discrecion, y se ha formado un angulo PAN; con el qual se dividiràn en tres partes iguales quantas lineas se quisieren, como se sigue. Tómese en el compàs la linea C; y haciendo centro en el angulo A, hagase el arco PN, y su cuerda, ò substensa serà una de las tres partes de la linea C. (cuerda, ò substensa es la linea recta, que se tira del punto donde mueve un arco, al otro punto donde finaliza.)

Para saber qual es la tercera parte de la recta D, tómese lo largo de ella en el compàs, y hagase desde A (como antes) el arco V 2, y la cuerda de este serà la tercera parte de dicha linea D.

Si huviere muchas mas lineas, se harà la misma operacion con cada una de ellas, hallando la tercera parte en la cuerda del arco, que con toda su longitud se describiere en el angulo PAN.

Si como se ha hecho esta division en tres partes iguales, se huviere de hacer en quatro, se haria el semicirculo de el punto quatro, como se ha hecho aqui del tres; y si fuere de cinco, en el cinco, y asi en las demàs partes.

Es-

Estas operaciones hacen el mismo efecto, que las lineas de las partes iguales en la pantómetra, ò compàs de proporcion: su demonstracion es la misma, que la de la Proposicion pasada.

PROPOSICION XI.

Dividir una recta en las mismas partes semejantes, que estuviere dividida otra, mayor, ò menor (Fig. 16.).

Aunque esta Proposicion se puede colegir bastantemente de la práctica de la Figur. 14. (9) la pongo separada para mejor inteligencia del principiante, por algunas excelencias que tiene. Pidese, pues, que la recta PQ se divida en las partes desiguales, correspondientes à las que tiene la TL en los puntos OV.

OPERACION.

Tómese la PQ en el compás, y juntese un extremo suyo en T, y vaya el otro à E, formando qualquiera angulo ETL. Tirese la LE, y se ha formado el triangulo ETL: de los puntos O, y V, tirense à la TE las rectas OC, VS, paralelas à LE, y en los puntos CS queda hecha la division de PQ, trasladada à TE en las mismas partes iguales, ò desiguales, que estuviere dividida la TL. La demonstracion de esta práctica es la misma que las de las dos Proposiciones antecedentes.

Este problema debe tenerlo presente todo Arquitecto, para la division de muchos repartimientos, y en especial para delinear qualquiera de las cinco ordenes de Arquitectura sobre una altura dada, o todas cinco bajo dos paralelas, lo que se practicarà del modo siguiente. *Se pide que* sobre una altura, que sea tanto, como la linea TE (que se imagina levantada à plomo sobre un plano vertical) se delinee una de las cinco ordenes con pedestal; y porque segun Bignola, se dà al pedestal el tercio de la altura de la coluna, incluso en esta su basa, y capitel, y al cornisamento, que carga sobre ella, se le dà la quarta parte de dicha coluna; lo que se consigue dividiendola en 12 partes iguales, y debajo de ella se ponen quatro partes, que es el tercio para el pedestal, y encima 3, que es el quarto para el cornisamento, y todas juntas hacen 19 partes iguales; se dividen con brevedad con esta Operacion. Sea el punto

T

T donde ha de cargar el pedestal. Tirese la TL larga à discrecion ; de modo, que saliendo del extremo T, forme en èl qualquiera angulo ETL ; y porque la division de la altura ha de ser en 19 partes, tómese en el compàs una abertura proporcionada, para que todas se puedan señalar en la TL (sin que se gaste toda su largura con las 19 partes) : ponganse 4 de ellas de T á O, 12 de O á V, y 3 de V à L (sin hacer caso de lo que sobráre en la linea TL) : tirese la LE, formando el triangulo ETL. Luego de los puntos O, V, saquense las lineas OC, VS, que cortan à TE en los puntos CS, y se ha dividido la TE en las partes que se desea : TC 4 partes, tercio de 12, que tiene CS, y SE 3 partes : quarto de C S : con que yà tenemos repartida la altura del orden, que se quisiere delinear : TC altura del pedestal, CS altura de la caña de la coluna, S E altura del cornisamento.

El pedestal se divide en otras tres partes, para su basa, cimasa, y neto, que se queda entre las dos. La coluna se divide en basa, caña, y capitel : el cornisamento se divide en alquitrabe, friso, y cornisa.

Todos estos miembros se dividiràn por el mismo método, que la division que acabamos de hacer; pero es necesario para el buen arreglo de todos los miembros de qualquiera orden, tener entendido à Bignola, ò tener presente alguno de sus libros quando se estè delineando, por ser la doctrina de este Autor la mas bien recibida de todos los Profesores de Arquitectura Ornamentaria.

Si todos los cinco ordenes se huvieren de delinear entre dos paralelas, se tirarà una linea perpendicular á ellas en qualquiera de sus extremos: de modo, que ésta toque en las dos, y en ella se haràn las divisiones como en la TE; y tirando otras cinco paralelas à la perpendicular en los parages que fuere necesario para colocar cada orden, se cortaràn todas cinco lineas en los puntos necesarios para sus pedestales, colunas, y cornisamentos, sacando de los puntos CS unas perpendiculares à TE, ò paralelas á las dadas en los extremos TE, que corten à las cinco verticales, las que serviràn de exes, ó catetos, cada una para su orden. Los pedestales, colunas, y cornisas, en todos los cinco ordenes deben guar-

guardar una misma proporcion en altura, aunque no la guardan en gruesos, ni miembros menudos.

Me ha parecido conveniente explicar aqui esta práctica, por no haverla visto en Autor ninguno, y haver observado en muchos Delineantes, que para delinear las cinco ordenes de Arquitectura, bajo dos paralelas propuestas, se ha gastado mucho tiempo en ajustar las 19 partes de su altura, por andar tentandola con varias aberturas de compàs; y con la operacion expresada se ajustan con sola una abertura de èl, sin tener que hacer otra ninguna operacion; y quedando prevenido el Arquitecto de los Autores, que necesita tener presentes para delinear los cinco ordenes, concluyo la Proposicion.

PROPOSICION XII.

Dividir qualquiera linea dada en partes iguales, y progresion Arithmetica (Figur. 17).

Progresion Arithmetica es, quando los numeros se vàn excediendo en una cantidad igual, como 1. 2. 3. 4. &c. ò

2. 4. 6. 8. &c. Progresion Geometrica es, quando los numeros se vàn aumentando en doblada cantidad, como 2. 4. 8. 16. &c. Y para dividir qualquiera linea en progresion Arithmetica no es otra cosa, que señalarla en tales partes, que quando se necesite tomar en un compàs algun numero de ellas, se halle éste separado de las otras, lo que se consigue con la delineacion siguiente.

OPERACION.

En el paralelogramo NH, CP, se pide que se divida la linea VC. Tirese por uno de sus extremos C la recta CN perpendicular á VC, y con qualquiera abertura de compàs señalense en ella nueve partes iguales, como señalan los numeros (Figur. 17.), las que finalizan en el punto N: tirese la VN, y se ha formado un triangulo NVC: tirense por los puntos, que señalan los numeros en la linea CN, lineas paralelas á la VC, hasta que toquen en la NV, y queda hecha la division que se pide: de modo, que si se ofrece tomar en el compàs 5 partes de las 9, que tiene VC, VC, se buscarà el numero 5; y puesto un pie de èl en el punto 5, se abrirá el otro por aquella linea, hasta el punto, que corta en la NV, y se tendràn en el compás 5 partes de las 9 iguales, que tendrà la VC; y asi se obrará con los demàs numeros de la NV.

Si fuere necesario tomar en el compás cinco partes y media de las dichas, dividase la distancia de 5 à 6 por medio en dos partes iguales; y tirando del punto de esta division una paralela à la VC, la distancia que tuviere esta ultima linea, que se tiráre, serà 5 partes y media de las 9, que tiene VC; y si como son 5 y media, huvieren de ser 5 y un tercio, quarto, ò quinto, &c. se dividiria la distancia de 5 à 6, ó qualquiera de entre otros dos numeros en 3, 4, ò 5 partes, y por la correspondiente à la parte de la parte que se pidiere quebrada se tiraria la paralela con V C, y aquella seria la que se busca.

Si como la VC se ha dividido en su perpendicular CN en 9 partes iguales, se pidiere en 18, ò en otro numero mayor, ò menor, se haria en la NC el numero de las partes que se pidieren; y obrando como se se ha hecho, se lograrìa el mismo efecto.

Semejante à la misma division se hace de otro modo para dividir los miembros de los cinco ordenes de Arquitectura; y porque à qualquiera de ellas se le dà en su planta à la coluna sobre su basa dos módulos, que es el diametro de ella, se divide este diametro en dos partes iguales, y cada una de las dos es un módulo; y si este hũviere de servir para qualquiera de los dos primeros ordenes, que son Toscano, y Dorico, se divide en 12 partes iguales; pero si fuere para el orden Jonico, Corintio, ò Compuesto, que son los tres restantes, se hace la division del módulo en 18 partes iguales.

Sea, pues, la mitad del diametro de una coluna la linea HN (Fig. 17.), que se ha de dividir en 18 partes iguales.

OPERACION.

De los extremos NH tirense las rectas NC, HP, largas à discrecion; pero paralelas una à otra (7): tómese qualquiera abertura de compàs; y comenzando por la una del extremo N, se señalaràn hasta C 9 partes iguales: hagase lo mismo de H

HàP, como señalan los numeros en la Figura, y por los puntos 9 tirese la CP paralela à NH: dividase CP por medio en V, y tirese la VN; y tirando de los puntos que señalan los numeros en la NC lineas rectas à los correspondientes en la HP, queda hecha la operacion que se pide, cuyas partes necesarias se tomaràn de la Figura; como si fuere necesario tomar 15 partes de las 18, que tiene NH, busquese el numero 15, y la distancia, que hay de este à la obliqua NV, son las 15, que se toman; y las tres que faltan hasta 18, se notan con el numero 3 en la NC, que es la distancia desde el 3 hasta la NV. Si se huvieren de tomar algunas partes, y quebrado de otra, se obrarà como queda dicho arriba.

PROPOSICION XIII.

Dividir qualquiera linea, por corta que sea, en partes centesimas, ò milesimas (Fig. 18.).

Para quando se levantan planos sobre el terreno es preciso que la escala, ò pitipie sea de partes muy menudas, por ser ne-

necesario tener que medir en el papel algunas lineas, de una, ó mas leguas de largo; para cuyas operaciones es preciso que se entienda la práctica de la division siguiente.

Pidese, que la linea AB (Fig. 18.) se divida en trescientas partes iguales (estas pueden ser pies, varas, ò toesas, que cada toesa es dos varas, y cada vara tres pies).

OPERACION.

Dividase la AB en tres partes iguales en los puntos EH : tirense à discrecion por estos puntos, y los extremos AB las lineas AC, EF, H 200 BD, perpendiculares à la propuesta AB; y por las dos lineas de los extremos AC, BD con qualquiera pequeña abertura de compás, señalense 10 partes iguales, por las que se tiraràn las 10 lineas paralelas à la AB, como se demuestra en la figura, y señalan los numeros en la linea AC. Dividanse las porciones AE, CF (que son iguales, y tercio del paralelogramo ABCD) en otras 10 partes iguales; y por los puntos de la una division à los de la otra opuesta, tirense lineas transversales, como parece en la Fi-

Figura, y se havrà dividido el tercio de la AB, que es AE en 100 partes iguales, que se cuentan desde A, en esta forma. El numero 1 es una parte de las 300. El 2 es dos partes; y asi los demàs numeros hasta C, que son allì 10 partes, desde el numero 9 hasta el punto C; y desde este punto hasta F son 100 partes: con que toda la CD tiene las 300 partes iguales à las que se piden en AB, como todo se demuestra en la Figura con los numeros correspondientes à las partes, que en ellos señalan; y para usar de este pitipie en las medidas de los planos en papel, ò delineacion de ellos, se obrarà en la forma siguiente.

Para tomar en el compàs 8 partes, busquese en la AC el numero 8; y sentando un pie del compàs en el punto 8, estiendase el otro pie hasta la transversal A 10, y esta abertura serà ocho partes de las 300, que se dividieron en AB.

Si fuere necesario tomar 73 partes, cuentense siete partes en la AE, que son las decenas que hay desde A hasta S; y porque las 7 partes de las 10, que hay de A à E, son cada una 10 partes de las 300 de AB, y que de A à S hay 70 de ellas, y se han

han de tomar 73, busquese en el lado AC el numero 3; cuya linea, que de este sale, y se junta con la que sale de S en O, tómese en el compàs O 3, y seràn las 73 partes que se piden; y si fuere necesario tomar en el compás 227 partes de la escala, ò pitipie, se obrarà de este modo. La linea AB, ò CD tiene 300 partes; y porque solo se necesitan tomar de ella 227, se restaràn de las 300 las 227, y quedaràn 73. Estas 73 se quitaràn de la linea AB, contando en la AE 70 partes, que son de A á S en la AB; y porque en las paralelas à esta, segun vàn bajando, se ván hallando las partes, que se necesitan, de modo, que en el triangulo A 10 C, la parte que señala el numero 1 en su misma linea serà en el triangulo opuesto VEF 9 partes, que es el cumplimiento hasta 10, y donde hay 3, será à la otra parte 7, y asi en las demàs partes de AC; y porque se han de quitar 73 partes, y tenemos 70 de A à S, busquese el numero 3 en AC, y vease donde se junta la linea que de èl sale, con la que baja de S, que serà en O: tómese la distancia OZ, y ésta serà las 227 partes que se piden. La razon de esto es, porque la li-

linea que vá de Z al numero 3, corta desde Z hasta el encuentro de EF 200 partes; y desde este encuentro hasta el de la VF hay 7 partes, y de VF hasta O hay 20 partes, que juntas las tres partidas, son las 227, que se buscan; y por la misma orden se pueden tomar quantas se quisieren.

Si fuere necesario tomar en las lineas algunas distancias de miles de partes, es facil su inteligencia, pues con tomar en el compàs 100, ò 200 de la escala, se irán señalando en cada linea los millares de partes, que se quisieren; porque cada 10 distancias, como CF son mil, y 5, como FD, tambien son mil, poniendolas seguidamente en linea recta.

PROPOSICION XIV.

Dadas dos lineas rectas, hallar una media proporcional geometrica entre ellas (Fig. 19.).

La media proporcional Arithmetica entre dos lineas propuestas, es lo mismo que las progresiones de numeros, que se han tratado en la Proposicion (12); y para hallar una media proporcional Arithmemetica entre dos lineas dadas, no es otra cosa, que partir la suma de las dos juntas en dos partes iguales; como si fueren dadas dos lineas, que una tuviese 3 pies, y la otra 7 juntas las dos en una recta, tendria 10 pies: partida en 2 partes iguales, tendria 5 cada una; y qualquiera de las dos partes será media proporcional entre 3, y 7. Pero una media proporcional Geometrica, es muy distinto, como se entenderà por esta práctica.

Pidese, que entre las dos lineas A y B (Fig. 19.) se halle una media proporcional entre ellas.

OPERACION.

Ponganse las dos en una recta, y sea la A de C à V, y la B de V á S: hagase sobre toda la CS el semicirculo CLS; y del punto V, donde se han juntado las dos lineas dadas. levantese la perpendicular VL, que cortarà la circunferencia en el punto L, y esta linea VL es la media proporcional, que se pide entre las A y B.

Por esta misma regla se saca la raíz quadrada de qualquiera numero, quando no se le puede hallar por via de Arithme-

ti-

tica, lo que se logra por via de linea en la forma siguiente.

Pidese la raiz quadrada de 27; y porque este numero no la tiene perfecta, ni por Arithmetica se le puede hallar numero, que multiplicado por sì, monte 27, se hallarà una linea, que si sobre ella se hace un quadrado perfecto, tendrá la superficie, ò area contenida dentro de èl, la cantidad de 27. pies, ò varas, ò la medida que fuere; para lo qual se han de buscar dos numeros, que multiplicado uno por otro, hagan 27: y porqùe para esto no se hallan otros, que el 9, y el 3, ò el mismo 27, y el 1, nos servirèmos de qualesquiera dos de ellos, y sean los primeros. Tirese, pues, una linea recta à discreccion, y sea CVS: tómese en el compàs qualquiera abertura, y señalense de C à V 9 partes iguales, y de V à S 3, que son los numeros, que multiplicados uno por otro, hacen 27. Sobre la CVS hagase el semicirculo CLS; y del punto V, donde se juntan las dos lineas de 9, y 3, partes iguales, levantese la perpendicular VL, que corta la circunferencia en el punto L. Digo, que la linea LV es la raiz quadrada de 27, que es lo que se pide;

y si sobre ella se hace un quadrado, que sean sus quatro angulos rectos, y sus quatro lados iguales à la VL, tendrà de area 27 partes iguales. Si como nos hemos servido de los numeros 9, y 3, que multiplicados uno por otro, montan 27, nos huvieremos valido del 27, y el 1, que multiplicados, como los otros, hacen 27, tambien saldria la misma linea LV; porque el semicirculo se haria sobre una linea de 28 partes de las 12, que tiene CVS, y la perpendicular se sacaria del punto que se juntaren las 27 con la 1; y aunque el semicirculo fuera mucho mayor que el de la Figura, la linea de èl seria siempre igual à la LV. Con lo explicado aqui basta para entender, que de qualquiera numero se puede sacar raíz quadrada, lo que se puede probar con qualquiera numero, que la tenga justa, como son el 9, y el 16, que eligiendo el 16, se hallan tres numeros, que le multipliquen, que son dos quatros, 8, y 2, el mismo 16, y el 1. Hagase la misma operacion con qualesquiera dos de ellos, y se verà, que por qualquiera parte tiene la media proporcional 4, que es raìz de 16. La razon de todo esto consta de la Propoposicion 47. del lib. 1. de Euclides.

PROPOSICION XV.

A dos rectas dadas, hallar la tercera proporcional (Fig. 20.).

Aunque la Figura 20 se ha delineado para la siguiente Proposicion, nos servirèmos para la presente por escusar figuras.

Pidese, que à las rectas LO, LM se les busque la tercera proporcional.

OPERACION.

Juntense las dos, de modo, que con el extremo de cada una formen qualquiera angulo L: tirese la MO: alarguese LO hasta R: de modo, que OR sea igùal à la segunda LM: tirese la RS paralela á OM, y cortará à la LM, continuada en S. Digo, que la MS es la tercera que se busca; y que la proporcion que hay de LO á LM, es como la de LM à MS. (Consta de la Prop. 2. del 6. de Euclides.)

Si como esta linea se ha hallado en continua proporcion de mayor longitud, se hu-

huviere de hallar de diminucion, se tomaria la LM por primera, y la LO por segunda; y juntando LO en M, hasta donde alcanzáre ácia S, la que se bajáre de aquel punto paralela à MO, cortaria la OR menor que LO; y la proporcion que guarda LM con LO, guardaria LO con la cortada en OR.

PROPOSICION XVI.

A tres rectas dadas, hallar la quarta proporcional (Fig. 20).

Pidese, que à las tres rectas dadas C, B, A se les busque una quarta proporcional.

OPERACION.

Tómese la primera, que es la menor C, y pongase de L á O: juntese la segunda B de O á R, que las dos juntas forman la recta LOR: tómese la mayor A, y pongase de L á M, y tirese la O M: saquese del extremo R la recta RS paralela à OM, y cortarà à la LM, alargada en S; y la MS es la quarta proporcional, que se busca. Si como ésta se ha bus-

buscado en proporcion mayor, que la mayor linea de las tres dadas, se buscáre en menor, que la menor de ellas, se obrarà como se previene en la Propos. pasada.

PROPOSICION XVII.

A dos rectas dadas, hallar dos medias proporcionales (Fig. 21.).

Este es el noble problema para aumentar, ò disminuir los sólidos, o cuerpos cubos; y aunque célebres Autores han inventado varios modos de resolverle, se tiene por uno de los mejores el presente, cuyo inventor, segun Moya, fue Nicolàs Tartaglia; y segun otras opiniones de varios Autores, fue Philon. Sea quien fuere, se debe estimar la invencion de tan preciso problema; pues aunque éste, y todos los demàs carecen del rigor Geometrico, es de los mejores para la práctica.

Sean las dos lineas dadas VN de 8 pies, y NM de un pie, à las que se les buscan otras dos medias proporcionales à ellas.

OPERACION

De los extremos de la VN, levantense las perpendiculares NM, VE (3) á la VN, y tirese la EM paralela á la VN: alarguese à discrecion la NM ácia H: tirense las diagonales VM, EN, y se cruzan en O, que es el centro del paralelogramo EMNV (Este centro se asegura con la práctica de la Fig. 13.): sientese el un pie del compàs en el centro O, y se estenderà el otro pie hasta que en la NH, NV, continuada por P, se hallen dos puntos tales, que la recta, que saliere de ellos, como HP, pase justamente por el angulo E. (Los dos puntos PH no se ha hallado otro modo de encontrarlos hasta ahora, que tentando con varias aberturas de compàs). Hallados, pues, los puntos HP (con las dichas circunstancias), tirese la PEH, y se tienen las dos medias proporcionales, que se buscan: la una es PV, doblada que VE; y la otra es MH, mitad de EM: las dos son mayores que la menor NM, ò su igual VE; pero menores que EM, y todas quatro son excedidas en continua proporcion, como se demuestra en ellas mismas; porque VE es es mitad de VP, y VP mitad de MH; y ésta, mitad de EM, ò su igual VN; y tomadas al contrario, son la mitad unas de otras: luego las VP, HM son medias entre NM, y NV, y estas son las extremas de aquellas.

Por este problema se saca raiz cubica de qualquiera numero, lo que no puede ser por Arithmetica, quando son numeros irracionales, que se obrarà en la forma siguiente.

Supongase, que como el numero 8. tiene raiz cubica perfecta (que es 2.), fuere otro, que no la tuviese. Sea, pues, el sólido, de que se ha de sacar una linea, que multiplicada por tres dimensiones, haga un sólido igual al paralelepipedo EMNV, que se supone macizo de un pie por cada lado, y 8. pies de largo, ò alto: hagase un paralelogramo EVNM, que sea igual en largo, y ancho à uno de los lados iguales del sólido: levantese la NM à discrecion: y del mismo modo se alargarà el lado NV por P, observando siempre el angulo recto N. Tómese el centro de la Figura O; y sentando en este centro una punta del compàs, se hallaràn los puntos HP, como se ha hecho antes; y tirando la HP, que toque en el angulo E, corta la VP de dos partes de las 8 del sólido: luego multiplicando el 2 por èl mismo, son 4, y este otra vez por el 2, son 8, que es el sólido de quien es raíz PV.

Advertencias sobre este Problema.

1. Para sacar la raìz cubica de qualquiera numero, se ha de fingir un sólido en figura de qualquiera paralelogramo (pero quadradas sus basas menores), porque de otra figura es imposible poderse practicar, como si se pidiese la raìz cubica de 27ÿ. Busquese qualquiera numero, que se pueda hacer de èl un quadrado, sin quebrados: sea por exemplo el numero 20, que multiplicado en sì, forma un quadrado de 400. Supongase que estos 400 sean pies, y que sobre esta basa se và à formar un pilar quadrado, que llegue hasta 27000 pies cubicos: partanse los 27000 à los 400, y vendrán à la particion 67 y medio, y esta serà los pies de altura, que havia de tener el tal pilàr. Tómense, pues, dos lineas, una de 20, y otra de 67 y medio, que se

se sacaràn de un exacto pitipie, como el de la Figura 18: hagase con ellas un paralelogramo, que sus dos lados mayores sean iguales á los 67 pies y medio; y los otros dos lados menores iguales à los 20 pies (lado del quadrado de la basa, ó basas del sólido: hagase la misma operacion de antes, levantando el lado NM por H á discrecion, y alargando NV por P arbitrariamente; y hallando el centro O, busquense los puntos HP, segun se ha obrado para hallar la raiz cubica de 8; y tirando la HP, que pase tocando el angulo E, la porcion que cortáre de V à P, seria la raìz cubica de 27000, como lo es de 8 en la Figura; sobre cuya linea se formaria un sólido de tres dimensiones iguales, como son largo, ancho, y alto. Si dicha linea PV se midiese en el pitipie, se hallaria que su longitud cortaba 30 pies: luego ésta será la raìz cubica de 27000, como se prueba, multiplicando el 30 por sus tres dimensiones, que produce los mismos 27000. Con el exemplo siguiente saldrá mas de la duda qualquiera principiante.

Elijase qualquiera cubo, cuya raìz sea conocida, como lo es 4 de 64. (Para hacer

la

la prueba valgome de la Fig. 87. Estamp. 4. por ser la mas demonstrable para este exemplo) Sea un sólido MDBL todo cuadrado de 64 pies cubicos: hallese su centro, que serà en medio de la diagonal DL, desde el qual se hallaràn los puntos NP, y la linea que se tira de N á P corta el sólido quadrado en su angulo M, y al lado BD le corta alargado en P: con que la DP es la raìz cubica del sólido MDBL, cuyos lados son de 4 pies, como lo es tambien la DP: luego multiplicando esta en sì, que es 4 por 4, seràn 16; y estos por otros 4, hacen 64, que son los mismos que tiene el sólido MDBL. Pruebase aqui tambien la proporcion de unas lineas á otras; porque buscando las medias proporcionales entre LB, y BD por ser estas iguales, lo son tambien las DP, LN: luego todas son continuas proporcionales en igualdad.

Por este Problema se forman cajones, que sean de doblada, tresdoblada, &c. cabida uno de otro, ò que sea de la mitad, tercio, quarto, &c. Pero como el fin de esta Obra no es para medir trigo, ni otras especies de granos, omito la explicacion de esto: el que lo necesite vea á Moya, Geo-

Geometrìa Práctica, libr. 4. fol. 249.

CAPITULO III.

EN este Capitulo se trata de la graduacion del circulo, ò su division en 360 grados, ò partes, y de algunas operaciones, que se practìcan con este instrumento.

PROPOSICION XVIII.

Dividir el circulo en 360 *partes iguales, ò grados.* (Fig. 22.).

Aunque en la Propos. 4. se ha tratado algo sobre la práctica del circulo graduado, se pone en ésta el modo de construìrlo, que se obrará como se sigue.

Tómese qualquiera abertura de compàs MH, y del punto M, como centro, hagase un circulo; pero basta con la mitad, que se formarà sobre la rècta H M 180, y esta linea serà el diametro. Formese, pues, del centro M el arco H 90, 180, y con la misma abertura del compàs MH, que es el radio, ò semidiametro del circulo, comenzando de qualquiera extremo H, se dividirà la cir-

circunferencia en tres partes iguales en los puntos 60, 120, 180. Dividase cada una de ellas en otras tres partes iguales, y cada una de estas en dos, y quedarà dividido el arco en 18 partes iguales, y cada una de ellas serà 10 grados, que se iràn anotando con sus propios numeros 10, 20, 30, siguiendo asi hasta el otro extremo, que se le asentaràn 180, mitad de los 360, en que se divide todo el circulo, como parece en la Figura. De cada numero de ellos tirese una recta al centro M, que podràn parar en qualquiera otro arco, que se haga, como VTZ, para no confundir el centro M con el concurso de tantas lineas. Hecho esto, se dividirá cada parte de las 18 en otras dos, y queda el arco dividido en 36 partes iguales, y cada una tendrá 5 grados, que se notaràn con los numeros 5, 15, 25, &c. Hecho todo esto, se dividirà cada una de las 36 partes en 5, y quedará hecha la division de todo el arco mayor en 180 grados, obrandolo todo como parece en la Figura, la que es suficiente para qualquiera operacion de las Proposiciones siguientes, y para otras, que se haràn adelante, como se verá en el discurso de esta Obra.

PRO-

PROPOSICION XIX.

Formar un angulo de qualquiera numero de grados (Fig. 22.).

Pidese, que se haga el angulo A de 130. grados.

OPERACION.

Tirese qualquiera recta AD, y vease en el semicirculo graduado dónde se halla el numero de los grados, que se piden, que en este exemplo serà en la linea MS 130. Sientese el compàs en el centro M; y tomando en él la distancia M 130, se describirà del punto A un arco igual al H 130; y tirando de los extremos de él las rectas D, y B al centro A, quedarà formado el angulo DAB de 130 grados.

Si la operacion se quisiere hacer con qualquiera abertura de compás, se obrarà de este modo. Vease què numero de grados se pide para formar el angulo; y porque se pide de 130, busquese este numero en el semicirculo, y tirese de èl al centro M la recta 130 SM. Abrase el compàs en qualquiera abertura MV, y con esta, desde de el centro M, hagase el arco VS, que corta à la recta, que baja del numero dado al centro del semicirculo en el punto S: con la misma abertura del compàs sobre qualquiera centro A hagase el arco DB igual al VS; y tirando por sus extremos D, y B al centro A las rectas BA, AD, queda formado el angulo A de 130 grados.

PROPOSICION XX.

Hallar los grados que vale qualquiera angulo dado. (Fig. 22.)

Pidese quántos grados de los 360 que vale el circulo, corresponden al angulo BAD. Tómese en el compàs qualquiera abertura AD; y desde A hagase el arco DB, y con la misma abertura desde M, centro del semicirculo, hagase otro arco à discrecion, como VTS. Tómese ahora con el compàs la cuerda del arco del angulo A, que es la distancia BD; y cortando en el semicirculo la distancia VS igual à la BD, saquese del centro M la recta MS, que alargada cortarà en el semicirculo el numero 130; y asi dirèmos, que el angulo BAD vale 130 grados.

Del

Del mismo modo que se ha practicado esta operacion, y la antecedente, se obrarà con qualquiera otro numero de grados, tirando de èl al centro M una recta; y el arco que entre ella, y la MH se hiciere, darà los grados, que se pidieren.

Si se pidiere algun numero de grados, y minutos, serà preciso hacer el semicirculo tan grande, que cada grado de los 180 de la Figura se pueda dividir en 60 minutos, que tiene cada grado.

PROPOSICION XXI.

Hallar el valor de los angulos en qualquiera triangulo, ò figura de muchos lados, y saber quántos angulos rectos contiene qualquiera figura rectilinea. (Fig. 22.)

Pidese el valor de los tres angulos del triangulo PQE.

OPERACION.

Sientese un pie del compás en qualqui ra angulo Q; y abierto el otro pie en qualquiera distancia QF, hagase desde Q el arco FC: con la misma desde E se harà el el arco 50, y de P el 40. Vayase con la misma abertura del compàs al semicirculo graduado; y desde su centro M hagase el arco VTZ. Hecho esto, se tomarà en el compàs la cuerda del arco del angulo Q, que es la distancia CF; y sentando un pie del compàs en el punto V, vease en què parte corta el otro al arco VTZ, y será en el punto T. Tirese por MT la recta M 90, que corta al semicirculo graduado en el numero 90; y por tanto dirèmos, que el angulo Q vale 90 grados, y por consiguiente es recto, por tomar la mitad de los 180 grados del semicirculo.

Hagase la misma operacion con las cuerdas de los angulos E, y P, y se hallarà, que la cuerda del arco del angulo E corta 50 grados, y la del P corta 40 en los puntos O 50 O 40.

Con las operaciones de este triangulo se prueba, que los tres angulos de qualquiera triangulo valen tantos grados como dos angulos rectos, como se verà sumando los 90 del angulo Q, los 50 de E, y los 40 de P, que todos juntos montan 180, que partidos á 90, que vale cada recto, toca à 2 angulos rectos. Para saber los angulos rec-

rectos de qualquiera figura regular que se forma, ò es formada dentro de un circulo, dán todos, ò los mas Autores de Architectura Militar la regla siguiente.

REGLA PARA SABER LOS ANGULOS rectos que vale qualquiera figura regular, ò irregular.

Figura regular es qualquiera, que formada de lineas iguales, son tambien sus angulos iguales. Figura irregular es la que carece de uno, ò otro, ù de todo. Para saber, pues, los angulos rectos que vale qualquiera figura, sea irregular, ò la que fuere, se sabrà de este modo.

Sea un qualquiera triangulo; y porque este tiene tres angulos, doblense, y seràn seis: de estos seis restense quatro, y los dos que quedan, son los rectos, que vale el tal triangulo. En todas las demàs figuras se obra lo mismo, doblando sus angulos; y restando siempre quatro, los que quedaren seràn los rectos que vale la figura, como si es quadrado, 4, y 4, son 8: restando 4, quedan otros 4, valor del quadrado regular, ò irregular. Si fuere de 5 lados, y 5 angulos, como es el pentagono, doblados, seràn 10, quitando 4, quedan 6. Estos son los 6 angulos rectos que valen los 5 angulos del pentagono: el exagono valdrà 8 rectos: el eptagono 10: el octagono 12; y asi en todas las demàs figuras. Todo esto conviene lo tenga bien estudiado el principiante, para caminar con algun conocimiento en sus operaciones.

CAPITULO IV.

(*ESTAMPA II.*)

TRata de la delineacion de las figuras planas rectilineas, y curvilineas, y de las prácticas, que sobre ellas suelen ofrecerse à toda clase de Arquitectos.

PROPOSICION XXII.

Sobre una recta dada describir un triangulo equilatero en diferentes casos (Fig. 23.).

Caso 1. Sea la recta dada LF, cuya longitud se tome en el compàs; y desde sus extremos, como centros, haganse los arcos LA (desde F), y AF (desde L), que se se cruzan en A: tirense las rectas AL, AF, y queda delineado el triangulo equilatero LAF.

Caso 2. Con qualquiera abertura de compás hagase el mismo equilatero sobre la misma recta dada. Sea por caso el compàs abierto la distancia FP: hagase desde F el arco OP, y con la misma abertura desde P el arco OF, cuyos arcos se cruzan en el punto O: tirese por FO la recta FOA igual á FL; y tirando la AL, queda hecha la delineacion que se pide.

Del mismo modo se haria construyendo sobre la recta LF qualquiera triangulo, equilatero PFO; y sacando del extremo L la recta LA, paralela al lado OP, hasta que se junte en A con el lado OF; y si en el extremo L se formase otro triangulo, como POF, continuando el lado FO, y el correspondiente al otro extremo, concurririan en A, formando siempre el equilatero sobre la recta dada LF.

Los triangulos escalenos, que son de tres lados desiguales, se delinean tomando uno de estos por basa; y luego tomando en el compàs qualquiera de los otros dos lados, se describe un arco con la distancia del lado tomado desde un extremo de la basa; y haciendo lo mismo con el que falta desde el otro extremo, se cruzarán en un punto, que serà cuspide del triangulo: cuya práctica se comprehenderà mejor en la Figura 38. de esta Estampa. Los triangulos isosceles, que son de dos lados iguales, y uno desigual, se forman poniendo el desigual por basa; y sirviendo de centros los extremos de ésta, desde ellos se hace el triangulo isosceles, tomando en el compàs qualquiera de los lados iguales, cuya operacion es semejante à la del equilatero propuesto.

PROPOSICION XXIII.

Sobre una recta dada, formar un quadrado, ò paralelogramo (Fig. 24.).

Sea la recta dada MN: levantense las perpendiculares MH, NE (por la Prop. 3. de este Libro); y tirando la HE paralela á MN, queda hecha la operacion que se pide.

Si fuere quadrado perfecto, seràn sus quatro lados iguales, y los quatro angulos rectos; pero si los quatro angulos fueren rec-

rectos, y los dos lados fueren menores, que los otros dos, serà paralelogramo; y para probar si los quatro angulos son rectos, ò no, sea en quadrado, ò paralelogramo, se tiran las diagonales ME, HN, que se cruzan en el centro V, las que se mediràn con el compàs; y siendo iguales las dos, seràn rectos los quatro angulos de la figura. Y se sabrà si es quadrado, ò paralelogramo, asentando el un pie del compàs en el centro V; y con qualquiera abertura VE describir un circulo, el qual pasarà tocando su circunferencia en los quatro angulos; y si las quatro porciones de circunferencia de los quatro lados de la figura fueren iguales, serà quadrado; y si los dos lados opuestos fueren iguales, pero mayores, ò menores, que los otros dos, serà paralelogramo.

Nota, que una figura de quatro lados iguales se nombra elmoain, ó rombo, y es la que los dos angulos opuestos son obtusos, y los otros dos agudos, y la una diagonal es mayor que la otra; y si acontece lo mismo con los lados del paralelogramo, se nombra elmoarife, ò romboide; y si alguno de los lados de un quadrilatero fuere mayor, ó menor que los otros tres, ò todos quatro desiguales, se nombra la tal figura trapecia, ò trapecio; pero el nombre siempre se toma de los lados, y angulos que la componen, como triangulo de tres lados, y tres angulos, quadrado de quatro, pentagono de cinco, y asi infinitamente. Los Ingenieros llaman poligonos á toda figura rectilinea.

PROPOSICION XXIV.

Sobre una recta dada, construir un pentagono. (Fig. 25.).

Sea la linea dada AB: levantese la perpendiculár A*e* (3): con el intervàlo AB, desde A hagase el arco BF à discrecion: dividase B*e* en 5 partes iguales, y saquese una de ellas de *e* à F; y tirando la FA, se tienen dos lados del pentagono FA, AB, y un angulo A. Hagase desde B con la distancia BA el arco AM igual á FB; y desde M, y F, como centros, y sin variar la abertura del compàs, haganse los arcos que se cruzan en *r*: tirense las rectas F*r*, *r*M, MB, y queda perfeccionado el propuesto pentagono. Si se quisiere hallar el centro del cir-

circulo, que pase por todos sus angulos, tómese la mitad del arco FB en S, y tirese la AS, que continuada cortarà el lado *r*M en dos partes iguales, y por consiguiente toda la figura. Del punto L (medio de la linea dada) levantese la perpendicular L*r*, y cortarà la AS en S, y este punto S será el centro del circulo que se busca.

PROPOSICION XXV.

Sobre una recta dada, describir el exagono (Fig.26.).

Esta es la figura que con mas facilidad se delinea; porque con la misma abertura de compàs, que se describe un circulo, se divide su circunferencia en 6 partes iguales, de la que resulta la mayor parte del uso de la pantómetra en las lineas de las cuerdas, y poligonos. Sea la recta dada BD, de cuyos extremos, como centros, con su misma longitud, tomada en el compàs, se formaràn los arcos BA, DA, que se cruzan en A, cuyo punto serà el centro del circulo, que pasarà por sus 6 angulos; y descrito como parece, se cortaràn los 5 lados iguales à la propuesta linea BD; y tirando rectas de unos á otros, quedará formado el propuesto exagono.

Si de los angulos de él se tiran lineas rectas al centro A, se hallaràn construìdos dentro de la figura 6 triangulos equilateros todos iguales.

PROPOSICION XXVI.

Sobre una recta dada, construir un eptagono, ò figura de 7 lados (Fig. 27.).

Este problema no se halla puesto en práctica por este metodo, cuya operacion es de este modo. Sea la linea dada EX: abrase el compás en qualquiera abertura arbitraria XD: del punto X, extremo de la linea propuesta, hagase el arco DS á discrecion, y cortese con la misma abertura del compás desde D el punto S: de los puntos DS describanse los arcos que cortan el punto *r*, y tirese á discrecion la oculta X*r*, y cortarà el arco DS en dos partes iguales: levantese del extremo E la perpendicular EZ, y cortarà la X*r* en O. Hagase OZ igual à EO, y desde E, con la distancia EZ, hagase un arco de Z ácia S con la misma abertura del compàs: desde X con otro arco cor-

cortese el punto V, y será el centro de circulo sobre quien se halla la linea dada EX para un lado del eptagono, en cuya circunferencia se iràn cortando los restantes lados iguales à èl, y quedará formado, como parece en la figura, que se perfeccionará tirando rectas de unos puntos à otros.

La demonstracion de este problema es clara; porque varios Autores, que enseñan à construir todos los poligonos hasta el de 12 lados dentro de un circulo, conforman (y prácticamente se halla sin diferencia sensible) que la mitad de uno de los tres lados del triangulo equilatero, que se inscribe dentro del circulo, tocando sus tres angulos en la circunferencia de èl, la mitad de uno de estos tres lados divide la dicha circunferencia en 7 partes iguales, como sucede en la fig. 30. de esta Estampa, en la que para hallar el lado del triangulo equilatero, que se huviere de inscribir en el circulo con su mismo radio EK, desde qualquiera punto K de su circunferencia, se cortan en ella los puntos CZ, cuya linea tirada de uno á otro es lado del triangulo equilatero de aquel circulo, y su mitad FZ es lado del eptagono, que corta

su

su circunferencia en 7 partes iguales: luego si se tirasen unas rectas del punto Z à los puntos EK (Fig. 30.) se formarìa otro triangulo equilatero EKZ, cuya perpendicular seria ZF, que corta en dos partes iguales el lado EK en el punto F: luego es esta la misma operacion que la que se ha hecho sobre la linea dada EX. (Fig. 27.)

PROPOSICION XXVII.

Sobre una recta dada, construir el octagono (Fig. 28. y 29.).

Sea la linea dada A*b* (Fig. 28.): dividase en 5 partes iguales: aumentese una de ellas por cada extremo, como AD, *b*C: construyase sobre la DC el equilatero CHD; y desde H, como centro, con la distancia HA, ò H*b* formese el circulo, como parece en la figura, cuya circunferencia pasarà precisamente por los extremos de la linea dada A*b*, con la qual se cortarà la circunferencia, como parece señalada; y tirando rectas de unos puntos à otros, se perfeccionarà el propuesto octagono.

Sucede muchas veces à los Arquitectos (Fig. 29.) haver de reducir un quadrado do à poligono de 8 lados, para formar alguna bobeda esquilfada, cuya operacion no tiene mas dificultad, que tirar un cordel, ó linea oculta de un angulo al otro su opuesto, y con la mitad de la linea, como por exemplo CI, ó qualquiera otra mitad de las diagonales AD, CB, desde los angulos del quadrado se obrarà de este modo: Desde el angulo C con la distancia dicha, que será CI, cortense los puntos RS, y desde el angulo D los TO: desde B los EF, y desde A los LV; y tirando rectas de unos à otros, cortaràn las diagonales perpendicularmente, como parece en la Figura; y por consiguiente quedarà formado el poligono, sin diferencia notable.

PROPOSICION XXVIII.

Delinear dentro de un circulo todos los poligonos, desde el triangulo equilatero, hasta el de 12 lados (Fig.30.).

Formado el circulo HB, KO, dividase con los dos diametros BO,HK, que se crucen en angulos rectos en el centro E; y tomando en el compàs qualquiera diametro OB, desde sus extremos, como centros, cor-

cortese el punto A, el qual será universal para todas las operaciones.

Para formar el triangulo equilatero, dividase el diametro OB en 3 partes iguales; y por el punto L, que divide las dos de O á L, tirese de A la AL, hasta que corte en la circunferencia el punto N, y se hallará, que la linea tirada de O á N, es el tercio de la circunferencia de todo el circulo, como se puede probar cortando desde K con el radio del circulo los puntos CZ, cuya linea es tambien lado del triangulo, como se ha dicho antes; y midiendo la distancia ON con la CZ, se hallaràn iguales.

Por el mismo orden se formaràn todos los poligonos que se quisiere dentro del circulo, aunque sus lados sean infinitos, pares, ó impares, dividiendo siempre el diametro en tantas partes iguales, como lados huviere de tener el poligono; y tirando desde A por la segunda division proxima á O una recta; lo que esta cortáre en la OK, será lado del tal poligono: como por exemplo: Se quiere delinear un quadrado dentro del propueto circulo; y porque el quadrado debe tener quatro lados,

dos, dividase OB en 4 partes iguales; y por la segunda division, que será precisamente el centro E, tirese la AE, que corta la circunferencia en K; donde se vè claramente dividida la circunferencia en quatro partes iguales; y tirando lineas rectas de K á B, y à O, y de H à B, y á O, queda perfeccionado el quadrado. Del mismo modo se formará qualquiera otro; como si se pidiere el eptagono, se dividirà el diametro OB en 7 partes iguales, y por el punto S, que divide dos de ellas, desde O se tirarà la AS, y cortarà el punto D, y la distancia DO serà uno de los 7 lados que se piden; lo que se probarà midiendo la DO con FZ, que tambien es lado del eptagono, como se ha dicho en la Proposicion 26; y se hallarà que DO, y FZ son iguales.

Para el poligono de 12 lados se dividirà la OB en 12 partes iguales; y por las dos proximas á O se tirarà la AO, que corta en C, y CO serà uno de los 12 lados, que se probarà ajustandose desde K á N, ó de N à Z, por ser cada una de estas partes mitad del exagono; y asi se obrarà con qualesquiera otros poligonos de mas, ò me-

menos lados, siendo esta regla universal para todos, cuya práctica es bien recibida de muchos Autores, y Profesores Geometras, aunque todas estas operaciones no vienen precisamente ajustadas al rigor Geometrico; pues en algunos poligonos sobra circunferencia, y en otros les falta; y el que necesitáre de toda la exactitud para qualquiera de ellos, se debe servir del semicirculo graduado (Fig. 22.) partiendo los 360 grados à los lados que huviere de tener el tal poligono, ò bien dividir la circunferencia, tentando mecanicamente.

PROPOSICION XXIX.

Delinear qualquiera Elipse à punto determinado de varios modos (Fig. 31.).

1 Pidese, que sobre la recta dada AB, diametro mayor, y la HV, diametro menor, se forme una Elipse (à quien los practicos comunmente llaman Ovalo): dispónganse los dos diametros de modo, que sus medios se crucen en angulos rectos en el punto Z: cortense por sus extremos arbitrariamente las partes HD, AT, BS: tirese la TD, y de su medio O saquese la per-

perpendicular OV (3), hasta que corte al diametro HV, que serà en V: tirense de V las rectas VS, VT largas à discrecion; y sentando un pie del compàs en V, como centro, con la distancia VH describase el arco PHQ; y desde T, y S, como centros, con la distancia TA, ó SB los pequeños arcos QB, PA, y queda descrita la mitad de la Elipse, que obrando lo mismo á la otra parte opuesta, quedarà concluída; y porque los Arquitectos solo necesitan la mitad, para la descripcion de arcos, y bueltas rebajadas, se omite formarle entero.

2 (Fig. 32) De otro modo se describe la Elipse, y sale (al parecer) mas agradable à la vista su circunferencia; y es como se sigue: Crucense como antes los dos diametros mayor, y menor por sus medios en angulos rectos en el centro L: tómese la distancia del semidiametro menor LX, y pasese de L á D en el semidiametro mayor: dividase en tres partes iguales la diferencia de los dos semidiametros, que es la porcion de linea DA, y quatro de estas partes se pondrán de L á M, y de L á D, con la distancia MH, desde M hagase

el

el arco HB; y sin variar la abertura del compàs, desde H cortese el arco HB, y hagase á la otra parte la misma operacion. Desde los puntos D, y A, cortando el arco AC, tirese la XB, y de su medio O saquese la perpendicular OE, que cortará el diametro menor continuando en E: hagase centro en E, y con la distancia EX hagase el arco CXB, y queda delineada la mitad de la Elipse; y asi puede obrarse á la otra parte para su conclusion:

3 (Fig. 33.) Esta práctica, y la siguiente, es la que mas comunmente siguen todos los Profesores prácticos. A esta llaman remontar, y rebajar por tranquiles; cuya operacion es como se sigue.

Ofrecese muchas veces haver de sujetar una bobeda á que levante á igualar con la altura de otra, aunque el diametro sea mayor, ò menor, de que resulta haverla de subir mas que el semicirculo de su diametro, si este fuere menor que la que se ha de acompañar; ò ser mas baja, si dicho diametro fuere mayor: y de qualquiera modo siempre se obra una misma operacion.

Sea, pues, sobre el diametro AB formamado un arco esferico, que sea mitad de su circulo. Sea BD otro diametro mayor, ó menor, que en este exemplo es mayor que AB: juntese con AB la linea AM igual á BD, que forme angulo en A: dividase la circunferencia AVB en las partes iguales que se quisiere: mientras mas fueren, será mas exacta la operacion, no importando que sean pares, ò impares: (En este exemplo se halla en 6 partes en los puntos C, G, V, *h*, Y.) bajense de estos puntos lineas perpendiculares al diametro AB, que lo cortan en los puntos 1, 2, T, 3, 4: por los extremos de los dos diametros AB, AM tirese la oculta BM, y se havrá formado el triangulo ABM. De los puntos de las divisiones del diametro AB tirense lineas ocultas paralelas á BM, y cortarán á la AM en los puntos 5, 6, 7, 8, 9: pasense estos por su orden al diametro BD, como parece en la figura, y levantense sobre BD las perpendiculares 9 Q, 8 P, 7 E, 6 F, 5 L, largas á discrecion, que se cortarán iguales cada una á su correspondiente con las de AVB; y por los puntos B, Q, P, E, &c. se conducirá la curva por la práctica de la Figur. 9. Estamp. I. y quedará descrita la media Elipse, sea remontada, ò rebajada; y del mismo modo sucederá aunque el arco, que haya de servir de fundamento, sea eliptico, cuya regla es universal para todo genero de arcos, ò porciones de ellos, como resulta para los cerchones, ò cimbras, quando se arman en bovedas de crucería, lunetas, y demás clases.

4 (Figur. 34.) Para delinear la Elipse á buelta de cordel se obra de este modo. Sea el diametro mayor MN, y el menor AC, que se cruzan en angulos rectos en el centro B: tómese la distancia BM, ò BN, pues son iguales, y ajustese desde qualquiera extremo C del diametro menor AC, hasta donde alcanzáre á una, y otra parte del diametro mayor, que será en los puntos D, y F: clavense tres clavos, uno en B, donde se atará un cordel: otro en C, sobre el que se tirará el cordel sin atarlo; y otro en F, atando el cordel en este, como en D; y soltando el clavo C, con este mismo se irá describiendo la Elipse, llevandolo por el plano de modo, que vaya siempre pasando el cordel tirante sobre el clavo C; pero sin soltarlo de los dos D, ni F. (Aqui se advierte, que las dos li-

lineas, que forma el cordel DC, CF juntas, son iguales al diametro mayor MN.)

De otro modo se pueden hallar los puntos D, F, obrando en esta forma. Sobre el diametro mayor MN hagase el semicirculo MON, y por el extremo del diametro menor C tirese la recta ECG paralela al diametro MN; y de los puntos E, G, que cortan la circunferencia del semicirculo MON, tirense las ED, GF paralelas al diametro AC; y los puntos D, F seràn los mismos que se cortaron antes sobre el diametro MN, à los quales llaman focus.

5 (Fig. 35.) De otro modo se describe la Elipse, segun el P. Tosca, tom. 3. Estamp. IV. Fig. 38. cuya operacion se hace con el compàs, y sale la circunferencia muy semejante à la de buelta de cordel; y porque en el citado lugar la trahe su Autor con alguna confusion para los que no son inteligentes, la explico aqui con mas facilidad, obrando como se sigue.

Dispuestos los dos diametros, que se crucen en angulos rectos en su centro, como los antecedentes, que en esta figura son el mayor MD, y el menor AB, hallenllense los focus OV por qualquiera de las reglas antecedentes. Se elegirà qualquiera de ellos, y sea V: sientese un pie del compàs en V; y de este punto, como centro, con distintas aberturas de compás arbitrarias (y quanto mas numero de ellas será mejor), haganse à discrecion los arcos 1, 2, 3, 4, 5, 6: hecho esto, alarguese por la otra parte el diametro mayor de modo, que DZ sea igual á DO; y para cortar los arcos en los puntos, que corresponden à la circunferencia, tómese del diametro mayor en el compàs la distancia Z 1, y con ella desde el focus O cortese el arco que saliò de 1: tómese la distancia Z 2; y desde O cortese el 2: con la Z 3 desde O el 3; y asi continuando hasta el 6, cortandolos todos desde O, luego se guiará la curva por los puntos cortados en los arcos por la Proposicion de la Figur. 9. y quedarà delineada la mitad de la Elipse; y haciendo las mismas operaciones à la otra parte DAN, se perfeccionará la otra mitad, y se havrà concluìdo con la operacion.

6 (Figur. 36.) Tambien puede ofrecerse por necesidad haver de hacer una Elipse irregular, sobre cuyo plano se pueda cons-

truír

truír qualquiera Boveda ; cuya delineacion es facilisima, haviendo entendido las antecedentes ; porque esta solo se diferencia de aquellas, en que es compuesta de dos, ò mas partes de distintas Elipses. Puede delinearse por qualquiera de las reglas dadas ; y así como nos podemos servir de qualquiera otra, nos servirémos de la Figur. 32, de donde resulta, que del centro E, cortado con la linea que sale de O, se describiò el arco XB ; y la BH se describiò de M: con que asimismo en la presente Figur. 36. con la linea sacada de B se corta el punto V, desde el qual se forma el arco H Z ; y desde S el arco ZMD (como en la Figur. 32. de D, y M las porciones AC, BH.) : luego haciendo DA igual à HZ, queda delineada la parte HMA sobre el diametro HA : luego con esta operacion hemos delineado una Semielipse, cuya basa es el diametro menor, la qual se cierra con otra Semielipse HNA, cuyo diametro HA, sirviendo en la antecedente de menor, servirà en la presente de mayor: luego esta descripcion no tiene diferencia alguna con la de la Fig. 32. Porque E es centro del arco CXB (Fig. 32.), D es del arco

AC, y M de BH: con que por el mismo orden en esta Fig. 36. K es centro del arco ENL: C es de HE; y O es centro de AL: luego tenemos explicadas estas delineaciones de figuras; de que se infiere no havrá dificultad para delinear qualesquiera otras por irregularidades que se ofrecieren.

PROPOSICION XXX.

Hallar el centro, y echar los diametros à qualquiera Elipse (Fig. 37.).

Sea una Elipse NOMZ: pidese se le halle el centro, y se le echen los diametros.

OPERACION.

Tirense dentro de èl qualesquiera dos lineas, distantes una de otra, que estén paralelas, y sean ND, QM: dividanse por medio en los puntos B, y C: tirese la BC hasta que toque en la circunferencia, que serà en los puntos I, S: hallese su medio, que será el punto L, y este serà el centro: sientese el un pie del compàs en L; y abriendole mas que el semidiametro menor NM, y menos que el mayor OZ, hagase qualquiera arco QP, que cortarà la cir-

circunferencia de la Elipse en los puntos P, y Q: tómese su medio en Z; y tirando la ZL à discrecion, se halla formado el diametro mayor ZLO. Para echarle el diametro menor se sacará del centro L la NM perpendicular á OZ, lo que se harà con brevedad, tirando de los puntos P, Q la recta P Q, y del centro L la NM paralela à la PQ. y quedan hechas las operaciones.

CAPITULO V.

DE LA TRANSFORMACION de las Figuras.

ESte Capitulo expresa el metodo de transformar los Planos en otras figuras de iguales superficies, con otras prácticas correspondientes al asumpto.

PROPOSICION XXXI.

Trasladar qualquiera plano del terreno al papel; ò delineado en papel, marcarlo sobre el terreno, y copiar un plano de un papel à otro papel (Fig. 38.).

1 Sea el plano de una heredad en la

campaña la Fig GbEF, que se ha de tomar en papel: formese en dicho papel à vulto toscamente la Figura ABCD, semejante à la del terreno, ò poco mas, ó menos, como tenga el mismo numero de lados, y angulos: midanse los lados de la Figura en el terreno, y tenga por caso EF 60 varas, Fb 94, bG 54, GE 70: notense los mismos numeros, conforme se fueren midiendo sobre el terreno, en la figura del papel, cada partida en su correspondiente lado, como se expresa en *ella*: tirese en la figura del terreno qualquiera linea diagonal, que son las que ván de un angulo á otro su opuesto, y sea por caso GF, que medida se supone tener 80 varas: tirese su semejante en el papel, notandole su numero 80, y con esta operacion se havrá desocupado el Artifice en la campaña, y en su casa podrá delinear la figura con toda exactitud, formando un exacto pitipie por qualquiera de los metodos de las Figuras 14, 17, 18 de la antecedente Estampa; y luego podrà ir delineando el edificio, que se le huviere encargado; ò si fuere Agrimensor, la tendrà presente para sus medidas. Y se advierte, que este metodo es el mas exacto para to-

tomar las figuras de los terrenos, quando no hay embarazo; que para quando lo huviere se tratará adelante. Si como esta figura es quadrilatera, fuere de mas lados, y tuviere angulos, que entrasen ácia su centro, no por eso es mas dificil su delineacion, porque esta la facilita formando todos los triangulos, que cupieren dentro de ella, y del mismo modo formarlos en el papel.

2 Si formado en el papel el plano ABCD, se huviere de marcar sobre el terreno, se elegirá la linea que se huviere de asentar primero; y siendo la correspondiente à DC, se fijará un piquete en E, y otro en F, que disten los centros de ellos 60 varas uno de otro, valor de la linea DC: luego se atarà una cuerda en F, y á distancia de 80 varas, que es la diagonal del papel AC, se hará una señal; y tirando por G, se marcarà una porcion de arco en el suelo por la señal del cordel; y desde E con el mismo cordel, ò qualquiera otro, con la distancia de 70 varas se marcarà otro arco, que se cruzarà con el antecedente en G: pongase otro piquete en G; y tomando en la cuerda 54 varas, se tendrà el un cabo

bo en G, y con el otro se harà un arco por *h*: tómense ultimamente 94 varas en la cuerda, con cuya distancia desde F se cortarà en el arco antecedente el punto *h*; y tirando rectas de unos puntos à otros, quedarà cerrada la figura EFG*h*.

Nota, que aunque esta operacion parece buena, puede tener error, por darse, ó encogerse la cuerda, y se harà mas ajustada, sin dependencia de la diagonal FG, asentando en el suelo las cuerdas de los lados, y sobre ellos se iràn midiendo con dos varas largas las que huviere de tener cada uno de ellos, formando sobre cada linea los angulos iguales à los correspondientes en el papel, como son el angulo E igual al D, el F al C; y asi de los demás. Estas operaciones se hacen por la Proposicion de la Fig. 8. ò la Fig. 22. de la Estampa antecedente.

3 Si se quisiere copiar la figura ABCD à otro lugar, elijase para basa qualquiera de sus lados, y sea DC, trasladado à EF: tómese en el compás la distancia DA, y con ella desde E hagase el arco G: tómese la distancia CA; y desde F con otro arco cortese el punto G: vuelvase à tomar desde

de D la distancia DB; y desde E con la misma hagase un arco por *b*: tómese ultimamente la distancia CB, y con ella desde F cortese sobre el arco antecedente el punto *b*; y tirando rectas de unos puntos à otros, queda copiada la figura: y esta regla es universal para qualquiera rectilineo, y aunque sea mixtilineo.

PROPOSICION XXXII.

Sobre una recta dada, describir qualquiera rectilineo semejante à otro propuesto (Figur. 39.).

Pidese, que sobre la recta dada CD se forme el rectilineo ABCD, semejante al EHGF.

OPERACION.

Tirese à discrecion aparte la linea MK; y porque la linea del rectilineo, que ha de servir de modelo semejante á la dada DC, es FG, pongase esta en la MK de M á L, y por este orden se iràn poniendo las de los demás lados FE de L á R, EH de R á I, y HG de I à K: tirese del extremo M otra recta à discrecion MN, que forme qualquiera angulo en M, y pongase en ella la li-

linea dada DC, cuya distancia será de M à V: tirese la VL, y se havrà formado un triangulo MLV. De los puntos R, I, K tirense paralelas con la LV, y cortaràn en la MN los puntos P, Q, N, en los quales se hallan los lados correspondientes al rectilineo EHGF, que se irá formando de este modo. La linea dada es DC igual à MV: tómese en el compàs la VP, y pongase de D á A, haciendo el angulo D igual al angulo F por la Proposicion de la Fig. 8. Estamp.I. Por el mismo orden se harà el lado menor CB igual á QN, y sin mas operacion se tirarà la AB, y saldrà igual á la PQ de la linea MN. Esta operacion se puede hacer tambien sin dependencia de formar los angulos iguales, solo con poner en la MK desde K hasta donde alcanzáre qualquiera diagonal EG del rectilineo EHGF, obrando la misma operacion de la Proposicion antecedente; y es regla universal para qualquiera rectilineo de muchos mas lados, como se puede inferir de esta práctica, la que sirve lo mismo para mayores, que para menores.

PRO-

PROPOSICION XXXIII.

Aumentar, ò disminuir qualquiera rectilineo en una razon dada (Fig 40.).

1 Pidese, que se aumente el triangulo ABC de modo, que tenga tres tantos de area.

OPERACION.

Tirese aparte la DEG, de manera, que DE sea igual à qualquiera de sus tres lados; (en este exemplo lo es con AB) y porque se pide triplo, alarguese la recta DE hasta G, haciendo la EG como tres veces DE: formese sobre ella el semicirculo DFG, y del punto E levantese la perpendicular EF, que es media proporcional entre DE, y EG; y el rectilineo, que se hiciere sobre ella, semejante al que sirve de modelo, será como tres en area: tómese, pues, la EF, y pongase de A à M: tirese la MN paralela á la BC; y alargando el lado AC, se cerrarà la figura en N, y queda hecha la operacion.

2 Pidese que se haga un rectilineo, que sea subtriplo de otro dado (que es el tercio.)

OPE-

OPERACION.

Sea dado RKV : tómese qualquiera de sus lados (sea RK): pongase aparte de G á E: alarguese ED, que sea un tercio de EG: hagase el semicirculo DFG : del punto E levantese la perpendicular EF (como se hizo antes), y el rectilineo hecho sobre ella será el que se pide: tómese, pues, EF; y pongase de R à H : tirese la HI paralela à KV, y se havrá formado un triangulo RHI, cuya area superficial es el tercio del triangulo RKV.

3 Si fueren circulos, se harà la operacion con sus diametros, y la prueba es medir las superficies de las figuras.

PROPOSICION XXXIV.

Convertir qualquiera triangulo en paralelogramo; ò el paralelogramo en triangulo (Figur.41.).

Pidese que el triangulo escaleno MNO se convierta en paralelogramo.

OPERACION.

1 Elijase qualquiera de sus lados para ba-

basa, y sea el lado MN: tómense los medios de los dos lados restantes en los puntos L, F, de los quales se tiren las rectas QLR, PFS, perpendiculares à la basa MN, alargandolas à discrecion por los extremos P, Q; y del angulo O tirese la QOP paralela à la basa MN, y queda formado el paralelogramo RSPQ igual al triangulo MNO.

2 Si de este paralelogramo se quisiere hacer un triangulo escaleno, dividanse qualesquiera de sus dos lados opuestos, como PS, QR, por sus medios en los puntos L, F, y de qualquiera punto de uno de los otros lados PQ, por exemplo del punto O: tirense las rectas OL, OF, hasta que corten al otro lado opuesto RS, alargado en los puntos M, N, y se havrá formado el triangulo escaleno MON igual al propuesto paralelogramo. La demonstracion es facil de probar por la Propos. 17. del Libr. 6. de Euclides, y el que quiera lo hará midiendo los triangulos MRL, LOQ, y los hallarà iguales; porque el que se quita por la una parte, se aumenta por la otra, sucediendo lo mismo al otro lado opuesto con los otros dos triangulos.

No-

Nota, que si el punto O se eligiere en medio del lado, el triangulo sería isosceles; y si fuere en alguno de sus lados mayores, el angulo O sería obtuso en vez de que aqui es agudo, de que se ha tratado bastante en la Propos. 5.

PROPOSICION XXXV.

Convertir un triangulo equilatero en quadrado, ò en paralelogramo, y el quadrado en triangulo equilatero, ò qualquiera otro (Figur. 42.).

1 Para convertir el equilatero PVQ en quadrado, dividase qualquiera de sus lados PQ en 6 partes iguales (Moy. Geom. Práct. Lib. 1. Cap. 41.); y entrandose una de ellas por cada extremo à los puntos Z, N., las quatro que quedan ZN, seràn lado del quadrado que se pide, que se formarà por la Proposicion de la Figura 24, y será en esta ZNMH.

2 Si el quadrado se quisiere convertir en triangulo equilatero, no hay mas que dividir qualquiera de sus lados Z, N en 4 partes iguales; y aumentando en linea recta una por cada extremo, hasta P, y Q, con la

la distancia PQ, desde Q, y P, como centros, se cortarà el punto V; y tirando las rectas VP, VQ queda hecha la operacion, que se probarà midiendo los tres triangulos PZD, NQC, B OV, y la suma de sus tres areas será igual à la que tuvieren los dos triangulos DBM, OCH.

3 Si el propuesto quadrado se quisiere convertir en otro qualquiera triangulo, se levantarà de qualquiera punto de uno de sus lados ZN una perpendicular NL, cuya longitud sea doblada de qualquiera de sus lados; y tirando de sus extremos L las rectàs LZ, LN, se hallarà hecha la operacion: advirtiendo, que si el punto L cayere sobre MH, sin cortar ningun angulo H, las dos rectas, que se tirasen de L, havian de cortar por medio los lados MZ, HN, cuya práctica queda declarada sobre la Figur.41.

4 Si qualquiera de los dos triangulos, que se representan en la figura iguales al quadrado, se huvieren de convertir en paralelogramo, està hecho con tomar los puntos de los medios en qualesquiera dos de sus lados; y tirando por estos puntos una recta paralela al lado que quedáre li-

bre, se levantaràn de los extremos de este lado dos perpendiculares à el mismo; las que encontrando con la paralela antecedente, dejaràn formado el paralelogramo que se pide.

Son tantas las operaciones, que pueden resultar de las que se han explicado sobre esta figura, que qualquiera que se haya enterado de estas, podrà conocer las inumerables, que faltan. La demonstracion es por los mismos terminos, que la de la Proposicion pasada sobre la Fig.41.

PROPOSICION XXXVI.

Convertir qualquiera paralelogramo en quadrado, y qualquiera quadrado en paralelogramo (Fig.43.).

1 Sea el paralelogramo QSLM, que se ha de convertir en quadrado.

OPERACION.

Sobre qualquiera de sus lados mayores QS alarguese en linea recta uno de sus menores, como SR igual à SM: hagase sobre QR el semicirculo QKR, y alarguese el lado MS, hasta que corte la circunferenrencia en el punto K, que será la recta SK perpendicular à QR, y media proporcional entre QS, y SR: hagase el quadrado A, cuyos lados sean iguales, cada uno à la media proporcional SK, que se obrarà por la Proposicion de la Figur. 24; y se concluye diciendo, que el quadrado A es de igual superficie, que el paralelogramo LSQM.

2 Si se pidiere, que sobre una recta dada se corten los dos lados de un paralelogramo, cuya superficie sea igual al quadrado A, se ha de advertir, que si la propuesta linea fuere menor que dos lados juntos del quadrado, no puede hacerse. Si fuere igual á ellos, serà otro quadrado igual al quadrado A; porque la media proporcional, cortaria á la dada en dos partes iguales, y cada una igual á ella. Luego es preciso que la recta dada, sobre que se pide la operacion, sea mayor que dos lados del propuesto quadrado.

Sea, pues, la QR: describase sobre ella el semicirculo QKR: tómese qualquiera de los lados del quadrado A, y pongase en el extremo R, levantado á V; de modo, que RV sea perpendicular á QR.

Tirese la VK paralela á RQ, y cortarà el arco en el punto K: tirese la KS paralela à la VR, y cortarà à la RQ en S. Digo, que QS serà lado mayor del paralelogramo que se pide; y SR serà el lado menor, con los quales se perfeccionarà el paralelogramo QSLM, y este serà igual al propuesto quadrado A.

Nota, que esta operacion no es otra cosa, que hallar la division de dos lineas extremas, puestas en una recta, con la media proporcional, que se dà conocida, asi como quando se dàn conocidas las dos extremas, y se busca la media proporcional.

PROPOSICION XXXVII.

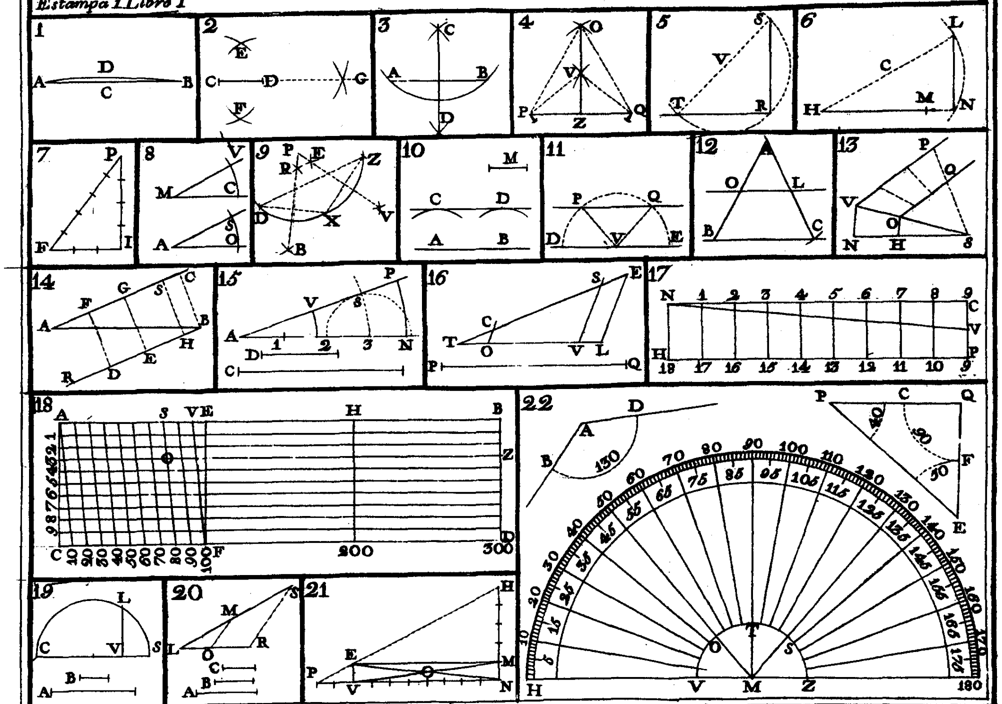
Convertir qualquiera circulo en paralelogramo, ò triangulo; y qualquiera de estos en quadrado, y el quadrado en circulo. (Fig. 44.)

(*ESTAMPA III.*)

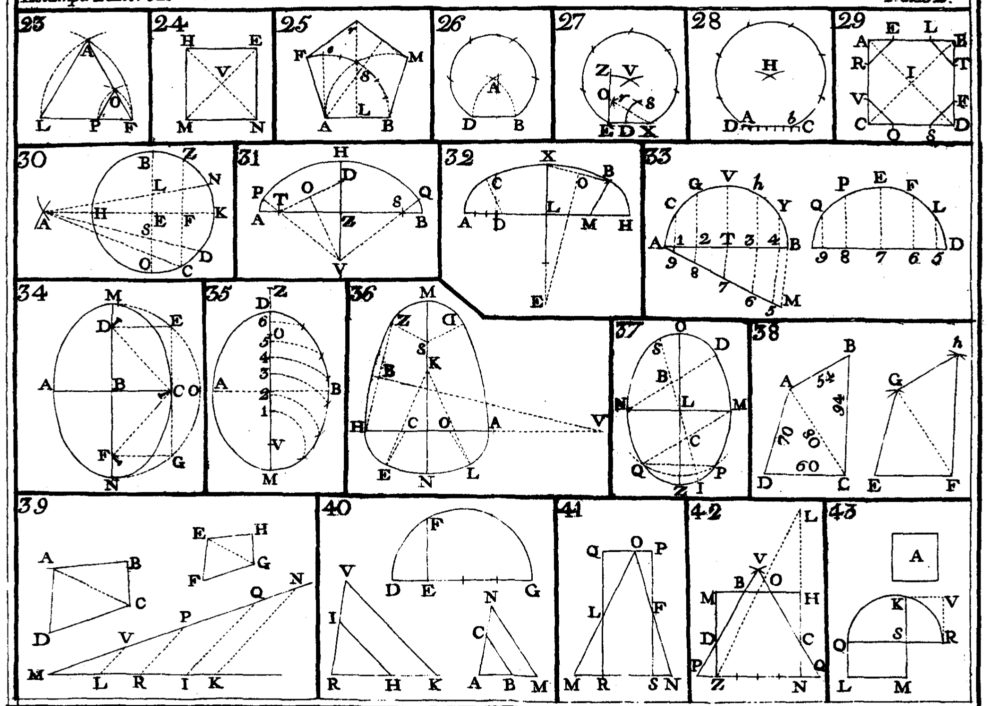
1 Sea el circulo, que se ha de convertir en paralelogramo, MN: hallese su centro O, y echesele el diametro MON; y de qualquiera de sus extremos N tirese la NL, que se cortarà igual à tres semidiametros,

tros,

Estampa 1 Libro 1



J. M. f.



J. S. M. ft

Mathesis **III 4$_2$** (2009) 415 - 430.

Particiones, probabilidad y combinaciones en *Sopra le scoperti dei dadi* de Galileo Galilei

*César Guevara Bravo**
Abel García Gutiérrez

Introducción

El objetivo es presentar el trabajo de Galileo Galilei *Sopra le scoperti dei dadi*[1] en una versión facsimilar junto con su traducción al español. Para poner en contexto la aportación de Galileo se exponen dos trabajos previos, uno del siglo XIII y otro del XVI.

Antecedentes

No es extraño encontrar que algunos paradigmas de la ciencia hayan tenido su punto de partida sobre terrenos totalmente especulativos, azarosos o filosóficos, y que al agregarles elementos extraídos de lo experimental pueden transformarse en representaciones más cercanas de lo que concebimos como un modelo científico.

Una disciplina que emergió con estas características es la teoría de la probabilidad, y junto con ella se generó la necesidad de crear formas de conteo y de representación de enteros positivos como suma de otros enteros positivos, esto es, las particiones. Así, estas áreas se vinculan en tanto sus características inherentes son similares, pues todas conciernen a conjuntos de enteros que se interrelacionan. Las particiones y la teoría del azar tomarían posteriormente su propio perfil dentro de la matemática.

---

* Agradecemos a Víctor M. Martínez Zavaleta sus valiosas sugerencias para el texto preliminar.
1. Que significa: Concerniente a una investigación sobre dados.

Respecto al origen de los juegos de azar existen registros de datos Egipcios que datan del año 1500 años a. C.; así mismo, la cultura hindú ha aportado la historia de Nala sobre la cosmovisión de esta sociedad; desde alguna de las islas griegas, Homero (o la construcción cultural conocida como Homero[1]) describe en la *Iliada* el destino del hijo de Anfidamante a consecuencia del juego de dados;[2] las obras escritas de la cultura romana muestran la gran afición del emperador Claudio por los juegos, pasión que lo llevó a escribir *Tabula*.

Fue hasta el siglo XIII cuando aparece citada una obra titulada *De Vetula,* que se caracterizó en tratar el tema de los dados de una manera más esquemática y con tendencia a una posible modelación matemática. No se sabe si su autor fue Ovidio o un seguidor suyo; así, al padre de esta obra se le conoce como seudo-Ovidio [1662]. El libro ofrece un modo de clasificar las particiones que generan los dados, con éstas, se puede saber de manera ordenada qué números tienen más posibilidades de aparecer cuando se juega. Posteriormente se conocieron el *Liber de Ludo Aleae* y el *Sopra le Scoperti dei Dadi,* cuyos autores son Cardano [1966] y Galileo [1746], respectivamente.

De Vetula[3]

La obra está estructurada a manera de poema y forma parte de una biografía de Ovidio. Como ya se mencionó, la autoría de la obra no ha quedado bien definida, dentro de las posibilidades que existen está la de que el autor sea Richard de Fournival, lo que la ubicaría en el siglo XIII.[4]

El juego de dados fue abordado en la obra de manera marginal, toda vez que los temas centrales son de corte moral. En ésta se muestra la manera como Ovidio transformó su vida al pasar de los placeres mundanos a la aceptación de la fe cristiana: en la primera parte se describe la juventud de Ovidio, sus amores y algunos de sus pasatiempos; en la segunda parte el lector puede atestiguar la desilusión de Ovidio por los placeres del amor y

1. Es conocida la llamada 'cuestión homérica' que refuta la existencia de Homero o, si se quiere, su autoría respecto a estos dos poemas épicos. En todo caso, no hay registros lo suficientemente sólidos en alguno de los dos sentidos.
2. "[…] juntos [el alma de Patroclo le dice a Aquiles] nos hemos criado en tu palacio, desde que Menecio me llevó de Opunte a vuestra casa por un deplorable homicidio —cuando encolerizándome en el juego de la taba maté involuntariamente al hijo de Anfidamante—, y el caballero Peleo me acogió en su morada, me crió con regalo y me nombró tu escudero […]" Homero (aproximadamente siglo VI a. C.) la *Ilíada*.
3. Una traducción del título sería 'la anciana' o 'la viuda'. La obra fue conocida desde el siglo XIII, algunas de las primeras referencias las podemos encontrar en el *Opus Maius* de Roger Bacon, escrita entre 1266 y 1269 (ver [Robathan, 1968] y [Westacott, 1953]).
4. Véase el artículo de Bellhouse [2000], además del estudio histórico, ahí se encuentra una traducción al inglés de la mencionada sección del juego de dados.

su incursión en actividades filosóficas; la tercera y última parte muestra su fascinación y posterior conversión al cristianismo.

La reducida sección que corresponde al juego de dados no es mayor a sesenta renglones de texto, junto con tres tablas que esquematizan la información. Ésta quedó como parte de una reflexión sobre los vicios, juegos y el regreso a la actividad filosófica. Desde estas directrices se puede entender que el autor no haya tenido la idea de ahondar más en el aspecto matemático.

Por sus características, lo común fue ver en *De Vetula* sólo su perfil humanista, inclinado a los temas morales; lo que refiere a los elementos vinculados a la combinatoria, particiones y probabilidad fueron apreciados por los historiadores de la ciencia hasta después del siglo XIX.[1]

La sección del juego de dados se podría dividir en tres partes: i) listar todas las particiones que se puedan lograr con los tres dados (sin considerar las permutaciones de cada una); ii) reordenar los resultados anteriores en las siguientes categorías:

I) Las tres caras iguales.
II) Dos iguales y una distinta.
III) Todas distintas continuas.
IV) Todas distintas discontinuas.
V) Todas distintas con dos continuas y una discontinua.

Tabula II.

Omninò similes.					
666	555	444	333	222	111
Duo Similes et tertius dissimilis.					
665	664	663	662	661	
556	554	553	552	551	
446	445	443	442	441	
336	335	334	332	331	
226	225	224	223	221	
116	115	114	113	112	
Omninò Dissimiles continui.					
654	543	432	321		
Discontinui.					
642	531	641	631		
Duo Continui et tertius discontinuus.					
653	652	651	621	521	421
542	541	643	431	632	532

Con esta clasificación se tienen cincuenta y seis casos posibles (ver figura [que es la tabla II del original]); iii) se cuentan todos los casos, donde ya se considera el orden, por ejemplo 6+6+5, 6+5+6 y 5+6+6 se toman como casos distintos. Entonces, de los cincuenta y seis casos que se tenían originalmente para las particiones de los números del 3 al 18, ahora se tienen doscientos diez y seis en total para los mismos números.

Liber de Ludo Aleae (El libro de los juegos de azar)

Girolamo Cardano (1501-1576) era un conocedor de los juegos de azar; lo fue desde la posición de un observador que analiza las posibilidades de cada contendiente, hasta la de ser víctima de las pasiones que despierta el juego. Conoció las trampas y desigualdades que esto encerra-

1. A finales del siglo XIX Guerry [1864] publicó uno de los primeros trabajos en el que se mostraba que *De Vetula* sí era un texto que podría aportar elementos al cálculo combinatorio y probabilístico. En la misma dirección se puede consultar a: Todhunter [1865], Kendall [1956] y David F. N. [1962].

ba, seguramente también las padeció. En su obra *Mi Vida* [1991, p.149] escribe lo siguiente:

> Durante años he estado jugando a esos juegos —más de cuarenta años al ajedrez y alrededor de veinticinco a los dados— y en esos años cada uno de esos días, ¡vergüenza me da decirlo! Así pues he estado haciendo desperdicio de mi honra, de mi hacienda y de mi tiempo.
> Tales son las razones de aquella infame holganza. Prueba de ello fue que en cuanto pude llevar una vida digna, dejé el vicio. Por tanto no fue afición al juego la mía ni ansias de dinero, sino amargura y escapatoria.

Aunque contaba con plenas capacidades para hacer un análisis más profundo sobre las particiones y las posibilidades que se tenían para cada número en el juego de dados no lo hizo. Su interés al abordar estos asuntos fueron principalmente canalizados a la reflexión sobre la igualdad de oportunidades en cualquier juego de azar y, por tanto, en la justicia para todos los jugadores. En el *liber de ludo aleae* señala la diferencia entre los juegos de azar y aquéllos en los que interfieren otros elementos; un ejemplo de lo anterior es el juego de dados que se practica de manera abierta (en el juego de cartas éstas no son visibles a los otros jugadores) y el éxito sólo depende de los futuros aciertos, fortuitos, del jugador (en las cartas, amén del factor azar al repartirlas, sólo se requiere tomar decisiones sobre las que tiene el jugador). En consecuencia, el juego de cartas no depende sólo del azar, sino que también contará la habilidad y la mesura de las decisiones del jugador, espacio donde se llegan a dar las trampas o abusos.

Ahora, se comprende que los cálculos que realizó Cardano para conocer las particiones de cada número llevaban como principal finalidad contribuir a que se conocieran las posibilidades que se tenían al jugar, y con ello poder tener un mayor grado de igualdad y justicia.

De manera explícita, Cardano se alineó al pensamiento aristotélico cuando reflexionó sobre lo fundamental que es la equidad en los juegos. Escribió [ver Bellhouse 2005, 188]:

> Otras preguntas deberán ser consideradas más sutilmente, ya que los matemáticos también pueden ser engañados, pero de forma distinta. Yo he deseado que este asunto no quede oculto, ya que mucha gente, al no entender a Aristóteles,[1] han sido engañados y con pérdidas. Así que hay una regla general, a decir, que debemos considerar al circuito completo,

1. Aristóteles en la Etica (Libro V, Capítulo III, De la justicia que consiste en los repartimientos) define lo que es injusto como aquello que es desigual y lo justo como lo que es igual:

> "[…] un acto justo involucra necesariamente al menos cuatro condiciones: dos personas para los que es de hecho justo, y dos partes a compartir en que su justicia está expuesta. Y habrá la misma igualdad entre las partes como entre las personas, porque las partes a compartir tendrán la misma proporción entre ellas, como entre las personas; pues si las personas no son iguales, no tendrán entonces partes compartidas iguales; y es cuando personas iguales tienen, o se les asigna, partes compartidas diferentes, o bien, cuando las personas que no son iguales, tienen iguales partes compartidas, es entonces que se suscitan discusiones y reclamos".

> y al número de aquellos repartos que representan de cuántas maneras el resultante favorable puede ocurrir, y comparar con tal número el resto del circuito, y de acuerdo a tal proporción deberán ser las pagas correspondientes, para que uno compita en términos iguales.

Cardano pudo usar elementos más avanzados para el estudio del juego de dados, por ejemplo, para calcular las particiones de los dados con caras diferentes pudo usar el triángulo aritmético de Tartaglia [1556] —que seguramente conocía—, pero no lo hizo porque su interés se centró en la parte ética y moral.

Las dos obras comentadas, *De vetula* y *Liber de ludo aleae* tienen finalmente muchos paralelismos, y en lo correspondiente al juego de dados la principal diferencia entre ellas se encuentra, primordialmente, en cómo se expone en cada una el tema. El autor de *De Vetula* proporciona una tabla para mostrar cada una de las diferentes sumas que proveen las caras. Por su parte, Cardano es menos explícito en su manera de presentar los datos de las sumas.

Para terminar, cabe recordar que el juego de dados no fue la parte central en ninguna de las dos obras; por ello, no sería justo pensar que *De Vetula* es una obra superior a la de Cardano sólo por la presentación de los datos. A las dos obras se les debe ver como complementarias, porque ambas atienden a épocas y paradigmas diferentes; son, en ese sentido, un par de eslabones en el conocimiento matemático.

Sopra le Scoperti dei Dadi
(*Concerniente a una Investigación sobre Dados*)

El año de 1654 es frecuente encontrarlo como fecha significativa para situar los inicios de la teoría de la probabilidad, fue entonces cuando inició la correspondencia entre Fermat y Pascal respecto al cálculo de las posibilidades que se tenían en determinados juegos de azar. Este intercambio terminó aproximadamente en 1660.

Entre las primeras cartas se mencionan los problemas de Chevalier de Méré asociados con los juegos de azar; uno de ellos versa sobre todos los casos posibles del juego de dados (tres generalmente); y el otro sobre la repartición de las apuestas cuando el juego se interrumpe prematuramente.

Las cartas entre Fermat y Pascal pueden ser como un cimiento matemático de lo que sería el cálculo de la probabilidad, pero ello no significa que antes no existieron algunas reflexiones al respecto. Ya se mencionaron los trabajos del seudo-Ovidio y Cardano, que si bien no son considerados unánimemente como los inicios de la probabilidad, sí lo pueden ser del cálculo combinatorio y las particiones. Pero al que sí se le podría ver como uno de los iniciadores de la modelación matemática de los juegos de azar es a Galileo Galilei (1564-1642).

Todo se originó cuando el Duque de Toscana, Fernando I de Medici (1549-1609), le pidió a Galileo que le resolviera un problema sobre juegos de azar. Se trataba del juego de dados llamado *Pasadiez*, que consistía en lanzar tres dados y que la tirada ganadora era aquella cuya suma de los puntos fuese mayor a diez y la perdedora el caso contrario. La interrogante que tenía el Duque iba en el sentido de por qué al arrojar esos tres dados resulta que, desde un punto de vista experimental, el número once aparecía con más frecuencia que el doce, y el diez con más frecuencia que el nueve, lo cual sucedía a pesar de que cada uno de estos cuatro números puede representarse con seis particiones, donde cada una tiene tres sumandos.

La respuesta de Galileo se encuentra en el documento *Sopra le scoperti dei dadi*, escrito posiblemente entre 1613 y 1623, y que no sería conocido sino hasta la publicación de sus obras de 1718, donde tenía como título *Considerazioni sopra il giuoco dei dadi*. Galileo seguramente le informó al Duque sus reflexiones sobre su encargo, pero éste no vio ninguna de las dos versiones escritas pues murió en 1609.

Galileo [1746, p. 436] trató de escribir no sólo para responder el encargo del Duque "[…] sino también para abrir el camino de poder divisar precisamente las razones por las cuales todas las posibilidades del juego han sido con gran cuidado y juicio repartidas por igual". Ahora, respecto a la interrogante inicial, Galileo manifestó que si bien la observación es correcta (el número once sale con más frecuencia que el doce, y el diez con más frecuencia que el nueve), no así el razonamiento del mismo (a pesar de que cada uno de estos cuatro números pueden obtenerse como la suma de seis tercias distintas) que da lugar al problema que se le plantea. Galileo [1746, p. 436] advierte entonces que "Que en el juego de los dados algunos números son más ventajosos que otros […] depende de poderlos formar con más variedad de números". Al considerar el Duque sólo las seis particiones omitió la variedad de casos que cada tercia puede generar.[1]

Galileo inició con las siguientes consideraciones: cuando se tienen uno, dos o tres dados, se pueden lograr 6, 6^2, 6^3 tiradas diferentes, respectivamente. Para el caso de los tres dados Galileo sabe que de entre las doscientos cincuenta y seis particiones los números que pueden

1. Tal omisión es frecuente en el cálculo combinatorio, y le sucedió incluso a Leibniz (1646-1716), al no considerar el orden en la observación de cada uno de los casos. Por ejemplo, sin el cuidado adecuado se puede asumir que el orden no cuenta y llegar a considerar que 3+2+1 es igual a 2+3+1, siendo que son particiones de orden diferente.

aparecer son 3, 4, 5,…, 18, entonces le faltaría encontrar cuántos casos corresponden a cada número de ellos. Menciona que le bastaría con conocer lo que sucede del tres al diez, ya que “aquello que pertenezca a uno de estos números también pertenecerá a su opuesto”, es decir, que el comportamiento de las tiradas es simétrico.[1]

Galileo, a diferencia de Cardano y seudo-Ovidio, consideró desde un inicio el orden de los sumandos de cada partición y procedió a analizar el número de permutaciones de cada una de las categorías de las tiradas, a decir: cuando todas las caras son iguales, cuando dos son iguales y una diferente, y cuando son todas diferentes.

De manera esquemática, él dará una clasificación de las diferentes tiradas de los tres dados. Empezó por listar cada una de las combinaciones que generan a cada número del 3 al 10, las clasificó según la suma de sus elementos y señaló el número de permutaciones de cada una de ellas. Finalmente, sumó las cantidades para encontrar el número buscado que nos dice de cuántas maneras diferentes se puede lograr tal o cual número, considerando el orden.

Entonces, al igual que Cardano y seudo-Ovidio, obtuvo que hay –sin tomar en cuenta las permutaciones de cada uno de ellos– a) seis diferentes tiros cuando las caras son iguales (por ejemplo (2, 2, 2)); b) treinta tiros con dos caras iguales y una diferente (por ejemplo, (1, 1, 2)) y c) veinte tiros con las tres caras diferentes (como (1, 4, 3)). Para el caso a) muestra que no hay más permutaciones para cada tirada; en el caso b), como tiene treinta formas diferentes de generar ternas con dos caras iguales y una diferente; entonces, con cada una de ellas puede calcular las permutaciones si considera que tiene dos elementos repetidos. Éste es un caso particular de uno general que permite calcular las permutaciones de n elementos, donde hay grupos de r, s, t,…, k elementos repetidos entre los n.[2]

1. Una forma directa de comprender esto es que pensemos en las caras opuestas de las tiradas resultantes. En un dado la suma de las caras opuestas es siempre 7; por ejemplo, si el resultado fuese 1, 3, 5, con suma 9, las caras opuestas serían 6,4,2, con suma 12; luego entonces, lo que se conozca de suma 9, será lo mismo de la suma 12. Y así en todos los otros casos.
2. Así, se tiene que las permutaciones distintas de n elementos tomadas de n en n, en donde hay un primer tipo de r objetos iguales entre sí, s objetos iguales entre sí de un segundo tipo, y así sucesivamente hasta k objetos iguales entre sí, tienen la representación,

$$\frac{n!}{r!s!t!\cdots k!}$$

y para nuestro caso particular, que son las permutaciones de tres elementos, con dos de ellos repetidos, es 3!/2!

Este tipo de razonamientos no era nuevo para las épocas de Cardano y Galileo, pero ninguno de los dos lo usó. En el caso de Galileo quizá fue por las características del lector que le pidió la investigación.

Para terminar el caso de las treinta formas diferentes que se tenían para sumar dos caras iguales y una diferente, y considerando que cada una se puede permutar de tres formas, entonces son noventa maneras de generar estas sumas con los tres dados.

En el caso c), cuando los tres sumandos son diferentes se logran seis maneras para cada una de las tiradas (sumas). En este caso, Galileo —al igual que Cardano— está usando elementos del cálculo de combinaciones para poder encontrar las de tres elementos tomados de seis, que en nuestra terminología actual sería:

$$\frac{6!}{3!(6-3)!} = 5\times 4$$

Seudo-Ovidio y Cardano no explican cómo enfrentaron el caso c), ellos simplemente se hicieron a la tarea de contarlos y dar un resultado.

Así, teniendo las veinte combinaciones diferentes y multiplicándolas por las permutaciones obtiene las 20 × 3! = 120 formas de sumar las caras con tres elementos diferentes.

Finalmente, de los casos a), b) y c) obtiene las 6 + 90 + 120 = 216 particiones diferentes para representar a los números entre el 3 y el 18, como suma de tres enteros iguales o diferentes tomados de las caras de los tres dados convencionales.

Galileo no presenta más sobre este análisis, pero es claro que no sólo se limitó a responder las dudas del Duque, sino que trató de abrir camino para entender cómo se dan las posibilidades en el juego.

Ahora se presenta el facsimilar y la traducción del trabajo *Sopra le scoperti dei dadi*. La edición que se usó del año 1746 es la que pertenece a la Biblioteca de la Universidad Complutense de Madrid, sección Biblioteca Histórica, y se pudo obtener gracias a los recursos electrónicos del catálogo Cisne.

Sopra le scoperti dei dadi
Galileo Galilei

119

CONSIDERAZIONE
DI GALILEO GALILEI
SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.

CHe nel gioco de i dadi alcuni punti ſieno più vantaggioſi di
altri, vi ha la ſua ragione aſſai manifeſta, la quale è, il poter
quelli più facilmente, e più frequentemente ſcoprirſi, che que-
ſti, il che depende dal poterſi formare con più ſorte di nume-
ri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un ſol modo ſi poſ-
ſon con tre numeri comporre, cioè queſti con *6. 6. 6.* e quel-
li con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili ſono a ſcoprirſi,
che v. g. il *6.* o il 7. li quali in più maniere ſi compongono,
cioè il *6.* con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2. e con 1. 1. 4. ed il 7. con 1. 1. 5., 1.
2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorchè il *9.* e il 12. in altrettante manie-
re ſi compongano in quante il 10. e l' 11. perlochè d' egual uſo dovriano eſſer
reputati; ſi vede nondimeno, che la lunga oſſervazione ha fatto da i giuocatori
ſtimarſi più vantaggioſi il 10. e l' 11. che il *9.*, e il 12.

E che il *9.* e il 10. ſi formino (e quel che di queſti ſi dice intendaſi de' lor
ſoſſopri 12. e 11.) ſi formino dico con pari diverſità di numeri, è manifeſto;
imperocchè il *9.* ſi compone con 1. 2. *6.*, 1. 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4.,
3. 3. 3. che ſono ſei triplicità, ed il 10. con 1. 3. *6.*, 1. 4. 5., 2. 2. *6.*, 2. 3. 5.,
2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur ſon ſei combinazioni. Ora io
per ſervire a chi m' ha comandato, che io debba produr ciò, che ſopra tal dif-
ficoltà mi ſovviene, eſporrò il mio penſiero, con ſperanza, non ſolamente di
ſciorre queſto dubbio, ma di aprire la ſtrada a poter puntualiſſimamente ſcorger
le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco ſono ſtate con grande
avvedimento, e giudizio compartite, ed aggiuſtate. E per condurmi colla mag-
gior chiarezza che io poſſa al mio fine, comincio a conſiderare, come eſſendo
un dado terminato da *6.* faccie, ſopra ciaſcuna delle quali gettato, egli può in-
differentemente fermarſi; ſei vengono ad eſſere le ſue ſcoperte, e non più, l'
una differente dall' altra. Ma ſe noi inſieme col primo getteremo il ſecondo
dado, che pure ha altre ſei faccie, potremo fare *36.* ſcoperte tra di loro diffe-
renti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarſi con ciaſcuna del ſe-
condo, ed in conſeguenza fare *6.* ſcoperte diverſe; onde è manifeſto tali com-
binazioni eſſer *6.* volte *6.* cioè *36.* E ſe noi aggiugneremo il terzo dado, per-
chè ciaſcuna delle ſue faccie, che pur ſon ſei, può accoppiarſi con ciaſcuna del-
le *36.* ſcoperte delli altri due dadi, averemo le ſcoperte di tre dadi eſſere *6.*
volte *36.* cioè 21*6.* tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti de i tiri di
tre dadi non ſono ſe non 1*6.* cioè 3. 4. 5. ſino a 18. tra i quali ſi hanno a com-
120 partire le dette 21*6.* ſcoperte, è neceſſario, che ad alcuni di eſſi ne tocchino mol-
te; e ſe noi ritroveremo quante ne toccano per ciaſcheduno, averemo aperta
la ſtrada di ſcoprire quanto cerchiamo, e baſterà fare tale inveſtigazione dal 3.
ſino al 10. perchè quello, che converrà a uno di queſti numeri, converrà anco-
ra al ſuo ſoſſopra.

Tre particolarità ſi debbon notare per chiara intelligenza di quello, che re-
ſta: la prima è, che quel punto de i tre dadi, la cui compoſizione riſulta da
tre numeri eguali, non ſi può produrre, ſe non da una ſola ſcoperta, ovvero ti-
ro

CONSIDERACIONES DE GALILEO GALILEI SOBRE EL JUEGO DE DADOS

Que en el juego de los dados algunos números son más ventajosos que otros tiene su explicación de manera clara, la cual se da en el sentido de que poder encontrar unos números más fácilmente que otros, depende de poderlos formar con más variedad de números: por eso el 3 y el 18, son números [puntos de los dados] que se obtienen sólo de un modo usando tres números [determinados], es decir, uno con el 6. 6. 6., y otro con 1.1.1., y de ningún otro modo. Estos [3 y 18], son más difíciles de obtener que por ejemplo el 6 ó el 7, los cuales pueden ser obtenidos de más formas, esto es, el 6 con 1. 2. 3., con 2. 2. 2. y con 1. 1. 4.; y el 7 con 1. 1. 5. con 1. 2. 4. con 1. 3. 3. y 2. 2. 3. Sin embargo, el 9 y el 12 pueden ser obtenidos con la misma cantidad de maneras que 10 y el 11, por lo que deben de ser considerados de uso equivalente. Se nota sin embargo, que la extensa observación ha hecho considerar a los jugadores que el 10 y el 11 son más ventajosos que el 9 y el 12.

El 9 y el 10 (y lo que se diga de ellos entiéndase también para 12 y 11) se pueden obtener con una cantidad [semejante] de ternas, y lo afirmo ya que el 9 es obtenido por 1.2.6, 1.3.5, 1.4.4, 2.2.5, 2.3.4, 3.3.3, que son seis ternas; el 10 con 1.3.6, 1.4.5, 2.2.6, 2.3.5, 2.4.4, 3.3.4, y de ninguna otra forma, que también son seis combinaciones.

Ahora, por servir a quien me encargó desarrollar aquello que se me ocurra acerca de tal problema, expondré mis ideas, [y lo haré] con la esperanza no sólo de resolver tal duda, sino también para abrir el camino de poder divisar precisamente las razones por las cuales todas las posibilidades del juego han sido con gran cuidado y juicio repartidas por igual.

Y para conducirme con la mayor claridad que me es posible para tal objetivo, comienzo por considerar un dado que tiene seis caras, donde cada una cuando [el dado] es arrojado puede aparecer indistintamente. Seis tiradas pueden ser logradas, y no más, cada una diferente de la otra.

Pero si junto con el primer dado arrojamos un segundo, el cual también tiene seis caras, entonces podremos lograr 36 tiradas diferentes entre ellas, y es porque cada cara del primer dado puede combinarse con cada una del segundo, donde es claro que tales combinaciones son 6 veces 6, *i.e*. 36. Si añadimos un tercer dado, y ya que cada una de sus 6 caras puede ser combinada con cada una de las 36 de los otros 2 dados, podremos encontrar que las tiradas de los 3 dados son 6 veces 36, *i.e.* 216, y todas diferentes entre ellas. Pero debido a que los números [diferentes de las sumas de las ternas] al tirar los 3 dados no son sino 16, esto es, 3, 4, 5, 6 ... hasta 18, y entre los cuales se repartirán las mencionadas 216 tiradas, entonces es necesario que muchas tiradas deban pertenecer a algunos [de estos números]; y si se encuentran cuántas [tiradas] pertenecen a cada uno, habremos preparado la manera para encontrar lo que queremos saber, y bastará hacer tal investigación desde el 3 hasta el 10, porque aquello que pertenezca a uno de estos números también pertenecerá a su opuesto.

Tres particularidades deberán ser mencionadas para un claro entendimiento de lo que procede: la primera es que [aquella suma de] los números de 3 dados, que está compuesta de 3 números iguales, puede ser sólo lograda de una forma, ro di dadi, e così il 3. non ſi può formare ſe non dalle tre faccie dell' aſſo, ed il *6.* quando ſi doveſſe comporre con tre dui, non ſi ſarebbe ſe non da una ſola ſcoperta. Seconda: il punto, che ſi compone da i tre numeri, due de' quali ſieno i medeſimi, e il terzo diverſo, ſi può produrre da tre ſcoperte, come v. g. il 4. che naſce dal 2. e dalli due aſſi, può farſi con tre cadute diverſe, cioè quando il primo dado ſcuopra 2. e il ſecondo, e terzo ſcuoprano aſſo, o ſcuoprendo il ſecondo dado 2., e il primo e il terzo aſſo; o ſcuoprendo il terzo 2., ed il primo e ſecondo aſſo. E così v. g. l' 8. in quanto reſulta da 3. 3. 2. può produrſi parimente in tre modi; cioè ſcuoprendo il primo dado 2. e li altri 3. per uno, o ſcuoprendo il ſecondo dado 2. ed il primo, e terzo 3. o finalmente ſcuoprendo il terzo dado 2. ed il primo, e ſecondo 3. Terza: quel numero di punti, che ſi compone di tre numeri differenti, può produrſi in *6.* maniere, come per eſempio, l' 8. mentre ſi compone da 1. 3. 4. ſi può fare con *6.* ſcoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. il ſecondo 3. e il terzo 4. ſeconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il ſecondo 4. e il terzo 3. terza, quando il ſecondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4. quarta, facendo il ſecondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3. quinta, quando facendo il terzo dado 1. il primo faccia 3. e il ſecondo 4. ſeſta, quando ſopra l' 1. del terzo dado, il primo farà 4. e il ſecondo 3. Abbiamo dunque ſin qui dichiarati queſti tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle ſcoperte de i tre dadi, che ſi compongono da tre numeri eguali, non ſi producono ſe non in un modo ſolo; ſecondo, che le triplicità, che naſcono da due numeri eguali, e dal terzo differente, ſi producono in tre maniere; terzo, che quelle, che naſcono da tre numeri tutti differenti, ſi formano in ſei maniere. Da queſti fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante ſcoperte differenti ſi poſſon formare tutti i numeri de i tre dadi, il che per la ſeguente tavola facilmente ſi comprende, in fronte della quale ſono notati i punti de i tiri dal 10. in giù ſino al 3. e ſotto eſſi le triplicità differenti, dalle quali ciaſcuno di eſſi può reſultare, accanto alle quali ſon poſti i numeri, ſecondo i quali ciaſcuna triplicità ſi può diverſificare, ſotto i quali è finalmente raccolta la ſomma di tutti i modi poſſibili a produrre eſſi tiri, come per eſempio

1
3
6
10
15
21
25
27
108
108
216

10		9		8		7		6		5		4		3	
6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3		3		1
5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1		6				
5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3		10						
4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3		15								
4 3 3	3	3 3 3	1		21										
	27		25												

nella prima caſella abbiamo il punto 10. e ſotto di eſſo *6.* triplicità di numeri, 121
con i quali egli ſi può comporre, che ſono *6.* 3. 1., *6.* 2. 2., 5. 4. 1., 5. 3. 2., 4. 4. 2., 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità *6.* 3. 1. è compoſta di tre numeri diverſi, può (come ſopra ſi è dichiarato) eſſer fatta da *6.* ſcoperte di dadi differenti; però accanto ad eſſa triplicità *6.* 3. 1. ſi nota *6.* ed eſſendo la ſeconda *6.* 2. 2. compoſta di due numeri eguali, e di un altro diverſo, non può produrſi ſe non in 3. differenti ſcoperte, però ſe gli nota accanto 3. la terza triplicità 5. 4. 1. compoſta di tre numeri diverſi può farſi da *6.* ſcoperte, onde ſi nota

esto es, al arrojar los dados el 3 no se puede obtener sin que las tres caras sean un as [uno]; y el 6, debe estar formado con 3 [números] dos, y no puede obtenerse [con tres caras iguales] si no es sólo de esta manera. La segunda, [corresponde] a la suma que se forma de 3 números, en los cuales dos son iguales y el tercero diferente; éstas pueden ser producidos por 3 tiradas; por ejemplo, el 4 que está formado de un 2 y de los dos ases, puede ser obtenido por 3 diferentes tiradas, esto es, cuando el primer dado muestra 2 y el segundo y el tercero muestran el as; cuando el segundo muestra un 2 y el primero y el tercero el as; el tercero muestra un 2 y el primero y el segundo un as. Otro ejemplo, el 8 cuando está formado por 3.3.2, puede también lograrse de tres maneras: cuando se tiene el primer dado con un 2 y los otros un 3 cada uno; cuando el segundo dado muestra al 2 y el primero y el tercero un 3; finalmente cuando el tercero muestra un 2 y el primero y el segundo un 3. La tercera**,** que la suma de los números está formada por tres números diferentes, puede ser lograda de 6 maneras; por ejemplo, el 8 que está formado por 1.3.4, puede ser [también] logrado con 6 tiradas distintas [usando los mismos números]: primero, cuando el primer dado muestra al 1, el segundo 3 y el tercero 4; segundo, cuando el primer dado muestra al 1, pero el segundo 4 y el tercero 3; tercero, cuando el segundo dado muestra 1, el primero 3 y el tercero al 4; cuarto, cuando el segundo es 1, y el primero 4 y el tercero 3; quinto, cuando el tercero muestra 1, el primero muestra 3, y el segundo 4; sexto, cuando el tercero muestra 1, que el primero sea 4 y el segundo 3.

Hemos expuesto aquí tres casos: el primero, que las ternas (esto es, la suma de las tiradas de los 3 dados) que están formadas por tres números iguales pueden ser obtenidas sólo de una forma; segundo, que las ternas que están formadas por dos números iguales y el tercero diferente, son logradas de tres maneras; tercero, que aquellas ternas que están formadas de tres números diferentes son obtenidas de 6 maneras. De estos casos fácilmente deducimos de cuántas maneras, o dicho de otro modo, con cuántas tiradas diferentes pueden ser formados todos los números [que son suma] de tres dados. Lo anterior puede ser fácilmente comprendido a partir de la tabla siguiente: en la parte superior están indicados los números de las tiradas desde el 10 hasta al 3, y debajo de ellos [se presentan] las diferentes ternas que pueden resultar para cada uno [de los números entre 3 y 10]; al lado de ellos, se encuentra indicado el número de maneras en que cada terna puede ser permutada y bajo ellos está finalmente indicada la suma de todas las posibles formas de producir estas tiradas. Por ejemplo,

1 3	10		9		8		7		6		5		4		3	
6	6 3 1	6	6 2 1	6	6 1 1	3	5 1 1	3	4 1 1	3	3 1 1	3	2 1 1	3	1 1 1	1
10	6 2 2	3	5 3 1	6	5 2 1	6	4 2 1	6	3 2 1	6	2 2 1	3		3		1
15	5 4 1	6	5 2 2	3	4 3 1	6	3 3 1	3	2 2 2	1		6				
21	5 3 2	6	4 4 1	3	4 2 2	3	3 2 2	3		10						
25	4 4 2	3	4 3 2	6	3 3 2	3		15								
27	4 3 3	3	3 3 3	1		21										
108		27		25												
108																
216																

en la primera columna tenemos al número 10, y debajo de él hay 6 ternas de números con los cuales se puede formar [el 10], y son 6.3.1., 6.2.2., 5.4.1., 5.3.2., 4.4.2., 4.3.3. Ahora, como la primera terna 6.3.1 está compuesta por tres números diferentes, entonces puede (como arriba se menciona) ser obtenida por seis tiradas diferentes de los dados, y al lado de la terna 6.3.1 se encuentra el 6. La segundo terna es 6.2.2. que está formado de 2 números iguales y otro diferente, y puede ser lograda únicamente mediante 3 tiradas diferentes, [por ello] al lado se escribe un 3. La tercera terna 5.4.1, formada de tres números diferentes, puede ser lograda por 6 tiradas como

VARJ PROBLEMI

nota col numero *6.* e così dell' altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle ſcoperte è raccolta la ſomma di tutte: dove ſi vede, come il punto 10. può farſi da 27. ſcoperte di dadi differenti, ma il punto *9.* da 25. ſolamente, e l' 8. da 21., il 7. da 15., il *6.* da 10., il 5. da *6.*, il 4. da 3., e finalmente il 3. da 1. le quali tutte ſommate inſieme aſcendono al numero di 108. Ed eſſendo altrettante le ſcoperte de i ſoſſopri, cioè de i punti 11. 12. 13. 14. 15. *16.* 17. 18. ſi raccoglie la ſomma di tutte le ſcoperte poſſibili a farſi colle faccie de i tre dadi, che ſono 21*6*. E da queſta tavola potrà ognuno ch' intenda il giuoco, andar puntualiſſimamente miſurando tutti i vantaggi per minimi che ſieno delle zare, degl' incontri, e di qualunque altra particolar regola, che in eſſo giuoco ſi oſſerva.

se indica [en la columna de al lado] con un 6. Y así con todas las otras [ternas].

Para terminar, al final de la columna se encuentra la suma de todos los números de las tiradas. Para el caso del número 10 se ve que puede ser obtenido de 27 tiradas diferentes de los dados, pero el número 9 únicamente por 25, el 8 por 21, el 7 por 15, el 6 por 10, el 5 por 6, el 4 por 3 y, finalmente, el 3 por 1; sumados todos juntos se obtiene el número 108. Y siendo de igual cantidad las tiradas de los opuestos, esto es, para los números 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, se agrupa la suma de todas las posibles tiradas que pueden ser logradas con las caras de los tres dados, y es 216. Y de esta tabla, cualquiera que entienda el juego puede medir, con gran exactitud, todas las ventajas, por pequeñas que puedan ser, del *zare*, del *incontri*, y de cualquier otra regla especial observada en este juego.

Referencias

Aristóteles 1952. *The Nicomachean Ethics*. Traducido por: W. D. Ross. The Great Books, Encyclopaedia Britannica. Vol. 9.

Bellhouse, David. 2000. "*De Vetula*: a medieval manuscript containing probability calculations". *Int. Statist. Rev*. **68**: 123–136.

__________. 2005. "Decoding Cardano's *Liber de Ludo Aleae*". *Historia Mathematica* **32**: 180–202.

Cardano, G., 1953. *The Book on Games of Chance*. Traducido por: S. H. Gould. Holt, Rinehart and Winston, New York.

__________. 1966. "Liber de ludo aleae". En: *Opera Omnia*. Edición facsimilar de 1663. Friedrich Frommann Verlag, Stuttgart/Bad Cannstatt.

Cardano, Girolamo. 1991. *Mi vida*. Madrid: Alianza Editorial.

David, F. N. 1962. *Gods, Games and Gambling*. London: Griffen.

Galileo. 1746. *Opere di Galileo Galilei*. Divise in quattro tomi. Tomo terzo. Padua.

Guerry, A. M. 1864. *Statistique Morale de Angleterre Comparee avec la Statistique Morale de la France*. Paris: Bailliere et Fils.

Kendall, M.G. 1956. *The Beginnings of a Probability Calculus*. Biometrika 43, 1-14. Reimpreso en: Studies in the History of Probability and Statistics, Volumen 1, 1970, Eds. E.S. Pearson & M.G. Kendall. London: Griffen.

Pseudo-Ovid. 1662. *Brunellus Vigelli & Vetula Ovidii. Seu: Opuscula Duo Actorum Incertorum*. Wolfenbiittel, Stern.

Robathan, D. M. 1968. *The Pseudo-Ovidian De Vetula*. Amsterdam: Hakkert.

Todhunter, I. 1865. *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace*. Cambridge University Press. Reimpreso en 1965, por Chelsea Publishing, New York.

Westacott, E. 1953. *Roger Bacon in Life and Legend*. Londres: Rockliff. Reimpreso por: Folcroft Library Editions, 1974.

Mathesis **III 4$_2$** (2009) 431 - 433.
Impreso en México. (ISSN 0185-6200)

Ilustración Latinoamericana

Mauricio Beuchot

Alberto Saladino García. 2009. *La filosofía de la Ilustración latinoamericana*. Toluca: Universidad Autónoma del Estado de México. 2009. 247 pp.

El libro que ahora nos ofrece el Dr. Saladino es muy amplio. No solamente recoge los autores ilustrados mexicanos, sino de toda Latinoamérica. Comienza hablando de la Ilustración en cuanto tal, reuniendo ahí tanto a los europeos y estadounidenses como a los latinoamericanos. Para la definición de la Ilustración da preferencia a Kant, con su idea de que consiste en la libertad del hombre saliendo de una incapacidad culpable. Aporta muchos nombres de ilustrados, de diferentes lugares y facciones ideológicas. Incluso menciona varios que se opusieron a la Ilustración, los anti-ilustrados. Y no deja de señalar la trascendencia que la Ilustración tuvo, la cual es para todos evidente.

Viene después el tema de la recepción de la Ilustración. Es importante esto, porque la teoría de la recepción se ha colocado como una de las vertientes de la hermenéutica. En cuanto a la recepción de la Ilustración, Saladino muestra el papel que tuvieron tanto los religiosos como los laicos en esto. Aunque los religiosos fueron en muchos casos los principales anti-ilustrados, también en varias ocasiones fueron los introductores de la modernidad, porque eran los instruidos y tenían el control de la cultura. Se distinguieron en ello tanto europeos como criollos, pero estos últimos alcanzaron a tener el protagonismo principal. A pesar de que fueron muchos de los venidos de Europa quienes difundieron la modernidad, también hubo una respetable nómina de ilustrados criollos, que Saladino se encarga de poner.

En cuanto a los filósofos de la Ilustración latinoamericana, Saladino estudia su formación y su producción. Siempre es de interés revisar las condiciones de la docencia en los centros de estudios durante la colonia. Se observa que la universidad tuvo más bien un papel conservador, y que los colegios tuvieron el papel de recepción y promoción de la modernidad.

Ya que aborda estas condiciones materiales del trabajo filosófico, nuestro autor pasa a considerar el papel de la filosofía y el del filósofo. De él nos dice: “Como se visualiza, el filósofo es percibido como prototipo de intelectual al encarnar la praxis de una actitud hipercrítica, signo de la centuria, la cual sirve de fundamento para identificar el siglo XVIII latinoamericano también como de la filosofía” [p. 96]. En ese entonces la filosofía y los filósofos tenían más incidencia en la vida social que ahora. Eran una especie de consejeros de la sociedad, y se les escuchaba, sobre todo a través de ágiles publicaciones periódicas, esto es, de gacetas de ilustrados.

Uno de los aspectos principales de esta filosofía ilustrada era la teoría del conocimiento. No en balde se ha hablado de que la modernidad comporta el giro epistémico del pensamiento. Ya la filosofía no se centra tanto en la ontología, como antes, sino en la crítica del conocimiento y en la metodología, que entiende como lógica aplicada. Pero la lógica moderna estaba más del lado de la ciencia, incluía en su epistemología la experimentación y el uso de las matemáticas, lo cual no hacía la escolástica. Por eso hubo reacciones de filósofos escolásticos en defensa de una lógica demasiado formal y despegada de los nuevos requerimientos de la ciencia. Un ejemplo de la respuesta escolástica a la filosofía moderna fue la de Francisco Cigala. De hecho, Saladino recalca que la filosofía de esta época fue en mucho filosofía de la ciencia, pues era la gran conquista del momento, y requería de sus servicios.

Pero estos filósofos tenían también una metafísica. Es clásica la división que hace el racionalista Christian Wolff, en metafísica general u ontología, y metafísica especial, seccionada en cosmología, psicología y teología natural o teodicea. Asimismo, se señala esa crítica que se hizo al uso de la metafísica, pues la Ilustración también tuvo rasgos muy críticos, a veces casi escépticos. Dice el autor:

> El cuestionamiento de los filósofos modernos sobre los temas de la metafísica tradicional está sustentado en el interés por mostrar la inutilidad, lo limitado y la infertilidad a la que se había orillado su enseñanza. Con esto se observa que la reforma de la enseñanza y la concepción de la metafísica estuvieron orientadas a convertirla, como toda la filosofía, en saber comprometido con el desarrollo de la nueva ciencia [p. 153].

La filosofía había cambiado; ahora estaba en relación con ese nuevo fenómeno que era la ciencia.

Siguiendo esa revisión por materias o asignaturas filosóficas, Saladino pasa a la filosofía práctica o ética, que está basada en los valores. Los ilustrados latinoamericanos asociaron los valores con las virtudes y con los deberes. En concreto, la virtud era la finalidad principal de la filosofía, pues ella estaba concernida con la enseñanza de la vida buena. Mas, por otra parte, la función de los valores fue la de dar sustento a la sociedad, ya que son lo que más motiva a actuar y a vivir.

Capítulo muy interesante es el que Saladino dedica a la antropología filosófica. Porque en verdad en ella se fundamentan las empresas humanas. Por ejemplo, allí se ven los temas principales del hombre, como el de su libertad, que después repercutirá en las luchas de independencia. Asimismo, se ve la acerba crítica que hicieron muchos ilustrados al hombre americano, como las de Buffon, Raynal y De Pauw, las más de las veces sumamente injustas, y que suscitaron la defensa por parte de los latinoamericanos, por ejemplo la de Francisco Xavier Clavijero. Esas polémicas sirvieron para estudiar la identidad latinoamericana y algunos aspectos nacionalistas.

La obra termina con un capítulo sobre la dialéctica de la filosofía de la ilustración y la revolución, que no puede dejar de recordarnos la dialéctica de la Ilustración, estudiada por Horkheimer y Adorno. Pero aquí no se queda en la dialéctica del movimiento ilustrado, sino en cómo repercutió en los procesos de revolución, esto es, de emancipación e independencia. Sin duda los ilustrados influyeron en los próceres insurgentes, pero también fueron usados los escolásticos, como Vitoria, a través de Bartolomé de las Casas, al que estudió mucho fray Servando Teresa de Mier. Usaron varias teorías para justificar la independencia, pero por supuesto que estuvieron presentes las doctrinas de la Ilustración, con sus ideales de libertad y autonomía, como expuso Kant de manera muy clara. Señala el autor:

> Las luchas preindependentistas e independentistas ampararon sus proclamas en las ideas de la Ilustración, la cual se erigió en ideología emancipatoria, en promotora ya no sólo de agitación intelectual, sino bandera para la conquista de la libertad, al haber desparramado sus afanes de esclarecimiento de la situación colonial y los derechos de todos los seres humanos, bases con las cuales se fomentó la conciencia americana y canalizó el amor patrio [p. 209].

Esto está bien, a condición de que no se olvide la parte que tocó a la escolástica en la justificación de la Independencia.

Es un libro, pues, de mucha utilidad, para nuestros estudiantes y estudiosos de la filosofía latinoamericana, sobre todo en esa época que a veces se tiene en poco, que es la colonial. Pero un libro como éste, del Dr. Saladino, nos recuerda que no podemos dejar de lado esa etapa, tan rica en nuestros países y que nos ha marcado profundamente. Por eso la debemos estudiar.

Mathesis **III 4$_2$** (2009) 435 - 442.

Libros impresos en América, 1554 – 1700

Marco Arturo Moreno Corral

Bruce Stanley Burdick. 2009. *Mathematical Works Printed in the Americas, 1554-1700.* The Johns Hopkins University Press. 374 pp con 29 ilustraciones. (ISBN 978-0-8018-88230).

El texto se ocupa de un aspecto poco estudiado de la historia de las matemáticas, pues trata sobre los libros de esta disciplina, la mayoría de ellos desconocidos para el lector moderno, que fueron impresos en el continente americano desde que se introdujo la imprenta a la Nueva España en 1539, hasta el fin del siglo XVII, cuando esa invención ya se había establecido en algunas de las más importantes poblaciones americanas. El libro está formado por dos partes principales y varios apéndices, además de una extensa bibliografía. La primera parte se ocupa de los trabajos matemáticos excluyendo almanaques, mientras que la segunda trata precisamente sobre los almanaques, efemérides y lunarios. En cuanto a los apéndices son tres; el A, que es una guía a los símbolos astrológicos, que aunque el autor los catalogó como tales, seguramente debido a que se originaron en la Antigüedad, en realidad son los usados en Astronomía para identificar las doce constelaciones zodiacales, así como los que se utilizan para denotar al Sol, la Luna, los planetas y a algunos de los principales asteroides; el B que menciona los libros sobre cometas impresos durante el siglo XVII en el Nuevo Mundo, mayoritariamente salidos de las prensas de la Nueva España; y el C, donde comenta el papel de la Lógica en Matemáticas.

Un primer hecho que debe destacarse sobre esta obra, es que desde la Introducción, su autor acepta una postura pan-americana, que ciertamente no es común en los escritores anglosajones. Este enfoque no es una pose, ya que a lo largo del libro, presenta información relevante sobre los textos matemáticos publicados en Hispanoamérica y analiza su contenido en forma conjunta con el material que se originó en las colonias inglesas de nuestro continente. No incluyó trabajos producidos en Canadá, porque la imprenta fue introducida en ese vasto territorio hasta el siglo XVIII.

El trabajo de investigación fue exhaustivo, por lo que Burdick reunió información de gran interés sobre los trabajos matemáticos publicados en América durante los siglos XVI y XVII, información que si bien ya había sido abordada por algunos investigadores de habla inglesa como Smith [1921] y Karpinski [1980], a los que frecuentemente citó nuestro autor, éste fue más allá, por lo que su texto aporta información nueva y proporciona al lector datos difíciles de conseguir en otras fuentes como, por ejemplo, los acervos bibliográficos donde actualmente se encuentran los ejemplares sobrevivientes y las ediciones que se hicieron de esas obras de nuestro pasado científico.

Desde la Introducción, Burdick hace una presentación en forma de listado, de los textos que reseñará, de donde resulta que veintitres fueron publicados en México, catorce en Perú y dos en lo que actualmente son los Estados Unidos, lo que resalta el papel que jugó la imprenta novohispana en la América de los siglos XVI y XVII, lo que reconoce explícitamente nuestro autor, cuando se adhiere a lo que Herbert Eugene Bolton[1] dijo en 1932 sobre este particular; "cerca del final del siglo dieciocho ni Boston, ni New York, ni Charleston, ni Quebec, sino la ciudad de México era la metrópolis del entero Hemisferio Occidental".

En esta obra, Burdick también listó un número importante de almanaques impresos en ese periodo en el Nuevo Mundo, publicaciones que consideró porque para su elaboración, los autores requerían un cierto grado de conocimientos matemáticos. De los doscientos veinte que reportó, noventa y cinco salieron de las prensas novohispanas, veintisiete de las peruanas y noventa y ocho de las principales colonias inglesas de Norteamérica: Massachussets (Cambridge cincuenta y dos, Boston veintiocho), Pennsilvania (Filadelfia nueve) y Nueva York (nueve).

El libro de Burdick comienza con la presentación de dos textos que fray Alonso de la Veracruz escribió para uso de los alumnos de la Real Universidad de México; la *Recognitio Svmularum* y la *Dialectica Resolutio*, ambos publicados en latín en la ciudad de México en 1554. Esas obras, que tradicionalmente han sido consideradas como obras filosóficas, y como tales las han estudiado muchos investigadores, especialmente los mexicanos [Beuchot, Frost *et al* 1986 y Beuchot, Raimond *et*

1. Historiador estadounidense que a través de sus trabajos mostró la influencia hispana en el desarrollo histórico de su país, ya que en sus investigaciones adoptó un enfoque integral sobre la historia del continente americano.

al 1992], reciben un enfoque diferente por parte de nuestro autor, que señala que la primera sirvió para que aquel fraile agustino introdujera los fundamentos de la Lógica Modal en América y el uso del diagrama del Cuadrado de Oposición y Equivalencia Modal, utilizado para determinar la forma en que se relacionan lógicamente cuatro proposiciones de un sistema dado, mientras que en la segunda presentó algunos conceptos geométricos fundamentados en proposiciones hechas por Euclides referentes a los triángulos. La información bibliográfica que Burdick proporciona sobre esas dos obras es amplia y seguramente será útil para quienes se interesan en conocer las bibliotecas del mundo donde actualmente se encuentran ejemplares de ellas.

El siguiente texto del que se ocupa, es el *Sumario Compendioso*, obra reconocida como el primer libro matemático americano. Escrito por Juan Díez Freyle, se publicó en español en la capital novohispana en 1556. Al comentarlo, Burdick hizo una relación muy interesante de los escasos ejemplares que sobreviven y donde se encuentran actualmente, todos ellos fuera de México. Menciona también los principales trabajos publicados sobre este texto, desgraciadamente no parece conocer la edición facsimilar que la *Universidad Nacional Autónoma de México* publicó en el 2008.[1] El libro de Díez Freyle contiene gran número de tablas, muy usadas en su época por los mercaderes, que así se ayudaban para determinar en forma sencilla porcentajes, equivalencias entre las distintas monedas que circulaban en el mundo hispánico y el valor de las diferentes ligas de oro y plata. Esta obra además, contiene una sección de aritmética que seguramente es de interés para los estudiosos de la historia de las matemáticas. Sin embargo, lo que sin duda es más notable en este primer texto matemático americano, es su sección algebraica, donde se resuelven problemas expresados mediante ecuaciones de segundo grado. La importancia del *Sumario* en el contexto de las obras reseñas por Burdick, se refleja en que le dedica un extenso estudio, donde además de comentar lo poco que se sabe sobre el autor, analiza el uso que se hizo en el mundo hispánico del siglo XVI, de tablas de conversión y de porcentajes como las que acompañan la obra de Díez Freyle. En particular es interesante el estudio que hizo de la parte aritmética, donde, en poco más de nueve páginas, analiza los conceptos que sobre esa disciplina manejó aquel autor.

1. *Sumario compendioso de las cuentas de plata y oro que en los reinos del Perú son necesarias a los mercaderes y a todo género de tratantes. Con algunas reglas tocantes a la Aritmética.* Juan Díez Freyle. Edición facsimilar. Estudio histórico de Marco Arturo Moreno Corral. Estudio del contenido matemático César Guevara Bravo. México: UNAM. (Col. Bibliotheca Mexicana Historiae Scientiarum). 2008.

A continuación se ocupa de la *Physica Speculatio* también escrita por Alonso de la Veracruz en latín, pero publicada en México en 1557. Este es un texto de filosofía natural, donde su autor comentó diversos trabajos de Aristóteles. Burdick lo considera como una obra matemática, debido a que contiene como apéndice el *Tractatus de Sphera* escrito en el siglo XIII por Giovanni Campano de Novara, en el que ese astrónomo y matemático italiano manejó conceptos geométricos como punto, línea y superficie y dio sus definiciones tomadas del texto de Euclides sobre geometría. También se ocupó de círculos, diámetros, epiciclos y la esfera, todo ello para explicar la estructura del cosmos y el movimiento de los astros.[1]

Los dos siguientes textos que trata Burdick, salieron de las prensas mexicanas en 1578, debido a la necesidad que los jesuitas del Colegio Máximo de San Pedro y San Pablo de la capital novohispana, tuvieron de contar con libros para los alumnos de esa institución. Esa es la razón por la que son reediciones de obras publicadas con anterioridad en Europa. La primera es la *Introductio in Dialecticam Aristotelis*, escrita por el jesuita Francisco Toledo y que vuelve a ser considerada entre los libros con contenido matemático, por la parte de Lógica Modal que contiene. *De Sphaera. Liber unus* de Francisco Maurolico es el otro, que fue incluido entre esos textos, por presentar diversos conceptos geométricos, utilizados en la discusión sobre los movimientos de los cuerpos celestes.

Burdick continúa su análisis con dos textos de 1583 y 1587, publicados en la ciudad de México por Diego García de Palacio. Se trata de los *Diálogos Militares* y de la *Instrucción Náutica*, que son libros de tipo técnico. En la primera de estas obras su autor trató entre otros temas, el uso de instrumentos de medición, que permitían la solución práctica de problemas trigonométricos mediante el uso de triángulos similares. Igualmente se ocupa de presentar combinaciones de reglas aritméticas y geométricas, mediante las que podía determinarse qué distribución deberían adoptar los escuadrones de soldados, cuando el número de ellos variaba y se quería que las formaciones tuvieran una adecuada forma geométrica. Además de otros temas de carácter naval, en la segunda obra introdujo reglas aritméticas para realizar diversos cálculos como los necesarios para determinar el ángulo de declinación del Sol, en grados y minutos, a lo largo del año, o los que había que hacer para elaborar calendarios. También se ocupó de dar información

1. Para obtener mayor información sobre el contenido científico de estos dos trabajos, véase Moreno Corral [2004].

para calcular en forma práctica, el volumen de diferentes tipos de barcos e incluyó una tabla de secantes y tangentes.

Más adelante, Burdick considera el *Libro de las reducciones de plata y oro*, escrito por Juan de Belveder y publicado en Lima, Perú en 1597. Este primer texto matemático sudamericano, contiene un número importante de tablas para el uso de los mercaderes, pero se ha modernizado en la notación, pues ya no están escritas con números romanos, como era común en muchos de los libros de aritmética mercantil que entonces circulaban, incluso en el ya referido *Sumario Compendioso*. La parte matemática del texto de Belveder está integrada por las reglas aritméticas necesarias para construir las tablas de cambios de moneda y de cálculo de porcentajes como el quinto real y el diezmo. También incluye el uso de la regla de tres y de la falsa posición.

Todos esos textos forman parte de lo que los especialistas han llamado los incunables americanos, que son todos aquellos libros impresos en nuestro continente en el periodo comprendido entre 1539 y 1600. Precisamente por esa característica de ser producto de la primera producción tipográfica americana, es que en esta reseña los hemos comentado de manera un tanto individual. En el *Mathematical Works Printed in the Americas, 1554-1700* no fueron tratados así, pues se les dio la misma importancia a todos, que por cierto son presentados en orden cronológico.

Durante el siglo XVII se fueron estableciendo imprentas en otras partes del continente americano, como en Cambridge, Massachussets en 1639, en Puebla en 1640 y en Guatemala en 1660. Sin embargo, el grueso de la producción matemática, tal y como la considera Burdick, siguió saliendo de las prensas novohispanas y limeñas hasta bien avanzada esa centuria. De acuerdo a ese investigador, fue hasta 1672 cuando vio la luz el primero texto de ese tipo en las colonias anglosajonas de Norteamérica. Se trató de un libro sobre lógica publicado en Cambridge, escrito por John Eliot y cuyo título fue *The Logick Primer.* Esta obra trata sobre el uso de los silogismos y esa es la razón por la que el autor de la obra que aquí se reseña la consideró como un texto matemático, y justificó este hecho en el ya mencionado apéndice C. El segundo fue de 1697 y se debió a Jacob Taylor quien con el título *Tenebrae in … or, the eclipses of the Sun & Moon Calculated for Twenty Years*, lo publicó en Nueva York. Esta obra incluye tablas con datos de los eclipses comprendidos entre 1698 y 1717. Contiene una sección que el autor tituló *A Compendium of Mensuration*, donde se dan métodos para resolver triángulos.

Entre todas las obras que Burdick comenta para el periodo del siglo XVII queremos destacar la *Libra Astronómica y Philosofica* publicada en la ciudad de México en 1690, pero que Carlos de Sigüenza y Góngora escribió desde 1682, como un estudio del cometa que fue observado a simple vista en buena parte del mundo entre 1681 y 1682. Esta obra la escribió como una réplica al texto que el jesuita italiano Francisco Eusebio Kino publicó igualmente en la capital novohispana en 1681 sobre el mismo objeto celeste, titulado *Exposición Astronómica de el Cometa* y que Burdick incluyó debido a que presenta algunos conceptos geométricos. La polémica que dio origen al libro de Don Carlos es bien conocida, por lo que aquí no se comentará.[1] Lo que sí debe resaltarse es que la *Libra* es ya un texto moderno de astronomía, al menos por lo que respecta a la interpretación natural del origen de los cometas. Escrito en español, el lenguaje que su autor utilizó es claro y preciso. En varias partes del texto hizo uso de relaciones de trigonometría esférica para determinar la trayectoria que siguió el cometa en la bóveda celeste, y esa es la razón por la que fue considerado como un texto matemático.

La segunda parte de la obra de Burdick está dedicada a presentar y analizar escritos menores de periodicidad anual, utilizados para dar en primer lugar información sobre el calendario, pues indicaban las fechas importantes tanto civiles como religiosas, pero además informaban sobre fenómenos astronómicos regulares, como las fases lunares, la ocurrencia de eclipses solares y lunares, conjunciones planetarias, ortos y ocasos del Sol, la Luna, los planetas y algunas estrellas brillantes, así como el inicio de las estaciones. Proporcionaban igualmente información sobre el clima; en particular las temporadas de lluvia y sequía y pronosticaban si un año sería bueno o malo para la agricultura. Con frecuencia incluían datos sobre los días que, de acuerdo a las ideas vigentes, eran adecuados para aplicar vomitivos y sangrías, dos de las más socorridas prácticas médicas de aquellos años. La inclusión de este tipo de publicaciones conocidas como Almanaques, Efemérides, Pronósticos o Lunarios en el *Mathematical Works Printed in the Americas, 1554-1700*, obedece a que para elaborarlos, sus autores requerían cierta preparación matemática, que les permitía hacer cálculos diversos, como la determinación de fenómenos celestes visibles en la localidad, o usaban reglas aritméticas para determinar la letra dominical, la epacta, el número áureo o ciclo lunar y la indicción romana, todos necesarios para el cómputo del calendario. Un mérito de estas publicaciones es que

1. Para mayor información sobre esa confrontación, puede consultarse la presentación que escribió José Gaos a la edición moderna que hizo Bernabé Navarro [México: UNAM. 1984] de la *Libra Astronómica y Filosófica.*

eran calculadas específicamente para el meridiano de la población en la que se venderían, lo que igualmente indica una preparación matemática de sus autores más allá de la común.

Burdick nos presenta doscientas veinte publicaciones de este tipo, varias de ellas no conocidas hasta ahora. Nuevamente un número considerable (noventa y cinco) salieron de las prensas novohispanas, aunque la producción conjunta de las cuatro ciudades coloniales inglesas de Norteamérica que contribuyeron al gran total, ya fue de noventa y ocho. La información referente a los almanaques novohispanos la tomó del trabajo de José Miguel Quintana [1969] sobre astrología y así lo ha hecho notar, pero nuestro autor investigó más sobre el particular y por ejemplo presenta una discusión interesante sobre la paternidad de *El lunario, Regimiento de Salud y Pronóstico de temporales, del Año venidero de 1676*, que le permite demostrar que esa obra en realidad se debe a Feliciana Ruiz y no a Feliciano como afirmara Quintana. De esta mujer dice que posiblemente fue la primera autora de un libro publicado en toda América. Sobre este particular presenta un facsímil, tomado del *Archivo General de la Nación* (México), donde en efecto consta que Feliciana solicitó permiso al Tribunal del Santo Oficio para publicar esa obra.

Para concluir esta reseña debe mencionarse que el grueso de las obras registradas en el *Mathematical Works Printed in the Americas, 1554-1700*, aunque este título pudiera hacer pensar lo contrario, no contienen ecuaciones o fórmulas matemáticas, pues este lenguaje simbólico estaba en desarrollo y no se habían aceptado o ideado muchos de los símbolos que ahora se manejan. Sin embargo, no hay duda que esos textos incluyeron conceptos matemáticos, sobre todo expresados en forma retórica, o de manera geométrica, pues en aquellas fechas, seguía vigente y con gran fuerza la escuela de pensamiento griega que hizo de la geometría la disciplina matemática por excelencia. Para el lector que se interesa por la historia de las matemáticas, el libro de Burdick aportará información valiosa que es difícil encontrar en otros textos sobre ese tema, que casi por completo se ocupan solamente de lo que ocurrió en el Viejo Mundo y nada, o casi nada dicen sobre las obras producidas en América durante las centurias del XVI y XVII, periodo que por lo que respecta a la disciplina de los números, ha sido poco estudiado para el mundo americano, por lo que este libro resulta doblemente interesante, ya que además de informar sobre obras poco conocidas, muestra que durante el tiempo que se desarrolló la Revolución Científica en algunos países de Europa, en nuestro continente hubo gente que se ocupó de los conocimientos matemáticos y que incluso algunos de aquellos americanos, tuvieron una cultura matemática equivalente a la de sus pares europeos.

Sin duda la lectura del *Mathematical Works Printed in the Americas, 1554-1700* escrito por Burdick proporcionará al lector información valiosa y le mostrará una arista de la gran riqueza cultural que hubo en la América colonial. El libro es de fácil lectura y con frecuencia informa de hechos que bien podrían ser parte de una novela de detectives, como por ejemplo cuando se discute sobre personajes como Juan Díez Freyle o Feliciana Ruiz. Por todo lo anterior recomendamos ampliamente este libro y pensamos que debe estar en nuestras bibliotecas, pues buena parte de su contenido tiene que ver con una historia de la cultura hispanoamericana que aún no ha sido escrita.

Referencias

BEUCHOT, Mauricio; FROST Elsa Cecilia; GÓMEZ ROBLEDO, Antonio; y, ZAVALA, Silvio. 1986. *Homenaje a fray Alonso de la Veracruz en el cuarto centenario de su muerte (1584 - 1984).* UNAM. México.

BEUCHOT, Mauricio; RAIMOND, Walter y CAMPOS, Juan Manuel. 1992. *Fray Alonso de la Veracruz. Antología y Facetas de su Obra.* Morelia.

KARPINSKI, Louis C. 1980. *Bibliography of Mathematical Works Printed in America Through 1850.* New York: Arno Press.

MORENO CORRAL, M. A. 2004. “La *physica speculatio,* primer libro de física escrito y publicado en el continente americano”. *Revista Mexicana de Física* E $\mathbf{50}_1$: 74 - 80.

QUINTANA, José Miguel. 1969. *La Astrología en la Nueva España en el siglo XVII (De Enrico Martínez a Sigüenza y Góngora).* México: Bibliófilos Mexicanos.

SMITH, David Eugene. 1921. *The Sumario Compendioso of Brother Juan Diez, the Earliest Mathematical Work of the New World.* Boston: Ginn and Company.

Mathesis. Departamento de Matemáticas, 026. Facultad de Ciencias, UNAM. Ciudad Universitaria. 04510 México D. F., México. Tel.:(5255) 56 22 48 58. Fax: (5255) 56 22 48 59. Correo-electrónico: mathesis@servidor.unam.mx.. Diseño: Isauro Uribe Pineda. Certificado de Licitud de Título número 5132. Certificado de Licitud de Contenido número 3905. Impresión: *S y G Editores*, Cuapinol No. 52, Santo Domingo de los Reyes, Coyoacán 04369, México, D. F., Tel.: 56 17 56 10.

Los artículos que aparecen en esta revista son resumidos y clasificados en: *Current Mathematical Publications*, *Historical Abstracts*, *America*: *History and Life*, *Historia Mathematica*, *Isis*: *Current Bibliography*, *Mathematical Reviews*, *MathSci* y *The Philosophers Index*. *Mathesis* aparece en el índice de Revistas Científicas Mexicanas de Excelencia del CONACyT (convocatoria 1995).

El costo de la suscripción anual en México es de \$200.00 (para individuos) y \$400.00 (para instituciones); en el extranjero es de \$35.00USD (para individuos) y \$70.00USD (para instituciones), sujetos a cambio sin previo aviso. Las órdenes, acompañadas del pago correspondiente, deben hacerse a nombre de:

Mathesis

y ser enviadas a:

Mathesis
Departamento de Matemáticas, 026.
Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria, UNAM
04510 México, D. F.
MÉXICO

El pago de la suscripción con tarjeta de crédito
se realiza a través de la dirección:
www.mathesis.unam.mx

o

Teléfono: (5255) 56 22 48 58
Fax: (5255) 56 22 48 59

Correo electrónico: mathesis@servidor.unam.mx
Página web: http://www.mathesis.unam.mx

** Cualquier reclamo de ejemplar extraviado debe hacerse *inmediatamente* al recibir el subsiguiente**

INFORMACIÓN PARA AUTORES MATHESIS

Los trabajos (original y dos copias) deben ser sometidos para publicación a los editores de Mathesis a la siguiente dirección:

Departamento de Matemáticas, cubículo # 026
Facultad de Ciencias, Ciudad Universitaria
Universidad Nacional Autónoma de México
04510 México D. F.
México

Se sugiere a los autores conservar una copia para su propia referencia. Todo ensayo inédito se recibe bajo la condición de que éste ha sido sometido a publicación *únicamente* a *Mathesis*. El autor deberá indicar específicamente la sección de la revista (*e.g.* 'artículos', 'notas educativas', 'proyectos de trabajo', 'noticias y avisos', etc.) que considere más apropiada para su ensayo, con la única excepción de las secciones 'ensayo-reseña' y 'reseñas', cuyos trabajos son requeridos directamente por los directores.

Los originales deben presentarse con letra grande y clara, y escritos a doble espacio. Los márgenes han de ser más anchos que lo normal a fin de permitir espacio suficiente (una norma aproximada sería: sesenta y cinco golpes por línea y venticinco líneas por cuartilla) para anotar instrucciones que los directores indican a los impresores.

Mathesis recurre a la asesoría de árbitros, quienes indican la pertinencia de publicar o no dicho ensayo; por esta razón el nombre, afiliación y dirección del autor deben *aparecer únicamente* en la cubierta o carátula del ensayo para que su identidad se mantenga confidencial. Una vez dictaminado el ensayo, los editores sugerirán el mínimo de cambios (generalmente relacionados con el formato y estilo de la propia revista) para acelerar la impresión de éste.

El idioma *oficial* único de *Mathesis* es el español, aunque algunas reseñas (en número limitado) pueden ser presentadas a los editores en otras lenguas. Sin embargo, todos los autores deberán incluir, junto con su ensayo, un breve resumen del objetivo de su artículo, en los idiomas español e inglés de una extensión *máxima* de doscientas palabras cada uno de ellos. Los autores también deberán anexar una ficha curricular (*máximo* de cincuenta palabras) donde anotarán su afiliación, formación académica, área de trabajo, títulos de algunas de sus publicaciones más recientes y el tema de su proyecto actual de investigación.

Los autores tienen completa libertad en cuanto a la posible extensión del ensayo —en algunos casos, tal vez, sea necesario dividir el ensayo original en dos o tres partes debido a una longitud poco usual—. Las notas a pie de página deben estar numeradas en orden consecutivo y deberá reiniciar en cada página. La numeración de las notas dentro del texto central deberá aparecer con superíndices, por fuera de la puntuación.

Dentro de lo posible, en el caso de aquellas obras que ya hayan sido traducidas de otras lenguas al español, el autor deberá citar la obra en español, la que quizá se encuentra más fácilmente a disposición de la mayoría de los lectores. La información bibliográfica relacionada con citas textuales ha de incluirse a través del texto entre corchetes de la siguiente manera: [Galileo 1975c II, 119], para indicar la cita tomada de la página 119 del segundo tomo de la obra de Galileo publicada en 1975. Añadimos siempre a la fecha de la publicación un caracter alfabético minúsculo para distinguir entre aquellas obras publicadas por un mismo autor en un mismo año.

La lista completa de referencias bibliográficas aparecerá al final del artículo en una única relación alfabética ordenada por autores y, dentro de este orden, observará un suborden cronológico. En el caso de libros, la referencia bibliográfica deberá contener los siguientes datos: Nombre completo del autor, primero su apellido paterno en mayúsculas, enseguida su nombre de pila; año de publicación con su propio caracter alfabético; título completo del libro subrayado (itálicas); lugar de edición (seguido por dos puntos) y nombre del editor (o casa impresora); a continuación, entre paréntesis, se puede incluir información adicional (*e.g.*, el nombre de la colección a la que pertenece el texto, número de edición —en caso de *no* ser la primera— y año de publicación de ésta, entre otros). Todos y cada uno de estos datos deberán estar seguidos por un punto y seguido, con excepción del lugar de la edición.

En caso de ser una traducción deberá tratarse, dentro de lo posible, de indicar inmediatamente la fuente original (entre corchetes y conteniendo los mismos datos, pero cambiando y normalizando el orden de los nombres del autor y trasladando el año de publicación a la posición final). Por ejemplo:

> POINCARÉ, Henri. 1944a. *Ciencia y Método*. Madrid: Espasa Calpe. (Col. Austral # 409. Tercera edición, 1963). [Henri Poincaré. *Science et Méthode*. Paris: Flammarion. 1908].

En el caso de un artículo contenido en una revista, la referencia debe contener los siguientes datos: Nombre del autor; fecha de publicación; título del artículo, entre comillas; título de la revista subrayado (itálicas); número del volumen, (en negritas), seguido por dos puntos; y, finalmente, el número de las páginas entre las que está comprendida la mencionada referencia. Por ejemplo:

> PALTER, Robert. 1987a. ''Saving Newton's text: Documents, Readers, and Ways of the World''. *Studies in History and Philosophy of Science* **18**: 385-439.

Para el caso de un ensayo contenido en un libro o colección de ensayos deberá seguirse el modelo indicado por el siguiente ejemplo:

> DAUBEN, Joseph. 1984a. ''El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana'', contenido en: Ivor Grattan-Guinness (editor). *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica*. Madrid: Alianza Editorial. (Col. Alianza Universidad # 387. Traducción de Mariano Martínez Pérez). Pp. 235-282. [Ivor Grattan-Guinness (editor). *From Calculus to Set Theory, 1630-1910. An Introductory History*. London: Duckworth. 1980].

Es también importante marcar con claridad —a fin de evitar al impresor cualquier tipo de confusión— todos aquellos símbolos, ecuaciones y fórmulas matemáticas; alfabetos poco usuales; fórmulas químicas y físicas, caracteres especiales y acentos diacríticos. También es publicable un reducido número de dibujos o esquemas, los cuales deben ser reproducibles directamente de la copia enviada por el autor; en este caso sólo es posible imprimir motivos a línea en blanco y negro y no en medio tono. El material gráfico deber estar separado del texto con la respectiva indicación, señalando dónde ha de ser incluido cada uno de los diagramas.

Una vez aprobada, revisada y corregida, el autor debe enviar la versión final de su ensayo impresa, y capturada en disco o CD, utilizando alguno de los siguientes procesadores de palabras para IBM-PC: Microsoft Word, Word Perfect; o enviar un archivo 'adjunto' dentro de un mensaje electrónico a la dirección: mathesis@servidor.unam.mx

Finalmente, ya publicada la revista, el autor recibirá veinticinco sobretiros de su trabajo, sin cargo alguno, para su uso personal.

MATHESIS
Enseñanza, pero no sólo aquella que se da,
sino también aquella que se busca.
Acto de introducir las cosas en nuestro conocimiento.
Mathesis es enseñar y aprender.

MATHESIS

filosofía e historia de las ideas matemáticas

Con el patrocinio de:
Coordinación de la Investigación Científica, UNAM
Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, UNAM

MATHESIS

filosofía e historia de las ideas matemáticas

FINALIDAD Y NATURALEZA: *Mathesis* busca promover la creación de nuevo conocimiento que sea relevante —a través de la publicación de ensayos de investigación original y de proveer un foro de discusión abierta— en historia y filosofía de las ideas matemáticas. El enfoque multidisciplinario, internacional y multiétnico propone estrechar las relaciones académicas de un espectro muy amplio de colegas provenientes de una gran variedad de formaciones sociales. *Mathesis* no está comprometida con escuela o método alguno. No define una perspectiva, sino una disciplina. *Mathesis* está abierta a todos los puntos de vista, a todos los enfoques, a todos los métodos y a todos los aspectos de la historia y filosofía de las ideas matemáticas. *Mathesis* subyace dentro de un marco conceptual lo más amplio posible que contempla el estudio de la historia de las ideas matemáticas en todos los países del mundo (tanto las matemáticas occidentales tradicionales como las no tradicionales) y en todas las épocas (desde el origen del hombre hasta nuestros días), incluyendo etnomatemáticas, arqueoastronomía, matemáticas puras y aplicadas (y el desarrollo de los usos de ambas), escuelas de pensamiento, estilos matemáticos, estadística, probabilidad, enseñanza, ciencias actuariales, investigación de operaciones, ciencias de la computación (incluyendo política administrativa, 'hardware' —desde el ábaco hasta la computadora— y 'software' —*e.g.*, algoritmos, lenguaje, notación y tablas—), cibernética, comunicación de las matemáticas (sistemas de información y bibliografías, entre otras), biografías de matemáticos, historiadores y filósofos, organizaciones e instituciones, historiografía, y cualquier aspecto que ilumine el desarrollo de las ideas matemáticas dentro de un contexto intelectual, cultural, político, económico y social. Desde el punto de vista filosófico, *Mathesis* comprende el estudio de la lógica, del método y el análisis de los conceptos matemáticos. Por su carácter multidisciplinario, *Mathesis* contempla el estudio de la historia y la filosofía de otras disciplinas —*e.g.*, ciencias del hombre (antropología, psicología, pedagogía, entre otras), ciencias exactas (física, astronomía, química, y demás), ciencias naturales (biología, medicina, etc.), ciencias sociales (sociología, teoría política, relaciones internacionales, entre otras), humanidades (filosofía, leyes, etc.) y artes (literatura, pintura y escultura, y demás)— cuando su análisis, ya sea histórico o filosófico, arroje nueva luz sobre el entendimiento de los conceptos que conforman el ámbito matemático. En breve, a través de *Mathesis* se intenta estrechar más el apoyo mutuo entre los aspectos humanísticos de las ideas matemáticas y toda disciplina académica en la búsqueda común por una mejor comprensión del mundo que nos rodea. La revista se publica, primordialmente, en lengua vernácula, como se acostumbra en la disciplina, en un intento por profesionalizar estos estudios en los países de habla española.

PERIODICIDAD: la revista se publica dos veces al año, en los meses de junio y diciembre. Cada volumen anual contiene un número aproximado de quinientas páginas.

ESTRUCTURA: la revista está integrada por las siguientes secciones, que no necesariamente aparecen en todos los fascículos:

Artículos. Incluye ensayos originales y panorámicos, tanto en historia como en filosofía. Los artículos históricos y filosóficos deben incluir nuevos datos provenientes de fuentes primarias, análisis inéditos de datos ya conocidos, reseñas de trabajos históricos y filosóficos previos, evaluaciones de trabajos recientes de investigación histórica y filosófica, manuscritos originales inéditos, traducciones o reimpresiones de materiales inaccesibles al común de los lectores y bibliografías anotadas y comentadas.

Clásicos matemáticos. Presenta traducciones al español de trabajos pasados que se consideran paradigmáticos en la disciplina. Estas traducciones (*e.g.* Descartes y Cantor, entre otros) se realizan directamente del lenguaje original y están precedidas por textos introductorios que explican la naturaleza y relevancia de su contenido.

Nuestros fundamentales. Presenta traducciones al español de trabajos históricos y/o filosóficos 'recientes' que se consideran primordiales —ya sea por su originalidad, trascendencia y/o relevancia— en la formación de nuestra comunidad.

Notas educativas. Comprende la publicación de breves artículos, notas y noticias sobre diversos programas y cursos en las dos áreas mencionadas. En esta sección se incluyen ensayos que discuten los usos de la historia y la filosofía en educación matemática.

Proyectos de trabajo. Contiene información de proyectos académicos en preparación o en pleno desarrollo, incluyendo temas de tesis, retos, preguntas y respuestas.

Noticias y avisos. Informa a los lectores de congresos, reuniones, conferencias, invitaciones, notas necrológicas y otros eventos de interés que realice la comunidad de filósofos e historiadores.

Ensayo-reseña. Presenta reseñas extensas que intentan, en detalle, inspeccionar trabajos contemporáneos y pasados. Los ensayos están dedicados a algunas obras que se consideran clásicas en estas disciplinas.

Reseñas. Presenta revisiones críticas de obras, tanto pasadas como actuales, que conforman estas materias.

Fuentes. Informa a los lectores de los acervos de bibliotecas y archivos de instituciones de países hispanohablantes para facilitar la localización de libros y revistas. También propone describir el contenido de las distintas revistas que se publican o se han publicado en lengua española (*e.g*., *Matemáticas y Enseñanza*, *Ciencia y Desarrollo*, *Investigación Científica*, *Historia Mexicana*, *Naturaleza*, *Revista de Occidente*, etc.).

Información bibliográfica. Ofrece a los lectores la información bibliográfica que les permita mantenerse al día en el conocimiento de las más recientes publicaciones.