



Las imágenes como herramientas epistémicas

Axel Arturo BARCELÓ



RESUMEN

El objetivo de este artículo es establecer algunas distinciones fundamentales para el estudio de las representaciones epistémicas, y en particular, de las representaciones epistémicas visuales. Para ello, presento tres distinciones estrechamente relacionadas: La primera es una distinción entre las restricciones impuestas a una herramienta por la tarea (que se busca nos ayude a realizar), y aquellas impuestas por nuestras características como usuarios. La segunda es una distinción entre la función estrecha de una representación (que no es sino representar) y su objetivo más amplio, el cual puede ser epistémico, estético, litúrgico etc. La tercera es una distinción entre la interpretación y la aplicación de una representación, es decir, entre determinar cómo las cosas son de acuerdo a la representación, y determinar si realmente las cosas son como son representadas. Ilustro la utilidad de estas distinciones aplicándolas a un par de ejemplos: un caso de “final de fotografía” y un diagrama en geometría euclidiana.

PALABRAS-CLAVE • Representación. Diagramas euclidianos. Final de fotografía. Imágenes científicas. Interpretación. Ergonomía. Fotografía. Modelos. Representación pictórica. Inferencia visual.

INTRODUCCIÓN

Muchas de las discusiones filosóficas actuales sobre representación científica, argumentación visual, comunicación no verbal etc. están plagadas de confusiones que podrían evitarse fácilmente si se pusiera más esfuerzo en trazar algunas distinciones fundamentales. Por ejemplo, me parece fundamental establecer las siguientes tres distinciones. Primero, hay que hacer una distinción clara entre dos fuentes de restricciones que definen el diseño de una herramienta: aquellas que responden a la tarea que pondremos a la herramienta a realizar y aquéllas que le impone su usuario. Esta distinción no es específica de las representaciones visuales o incluso de las representaciones en general, sino que se aplica a cualquier tipo de herramienta. Será una de mis hipótesis de trabajo que es provechoso pensar en las representaciones como un tipo particular de herramientas, por lo que esta distinción se aplica a ellas también. La segunda es una distinción entre la función estrecha de una representación – es decir, su representar algo – y su propósito más amplio, el cual podría ser epistémico,

estético etc. Por último, la tercera es una distinción que se aplica principalmente a lo que llamaré representaciones epistémicas, es decir, al tipo de representaciones que desarrollamos y utilizamos para alcanzar nuestros objetivos epistémicos. Esta es la distinción entre interpretar y aplicar una representación. Interpretar una representación es determinar su contenido, es decir, inferir, a partir del aspecto de la representación (y otra información contextual) cómo son las cosas según ella, mientras que aplicar una representación es inferir a partir de cómo son las cosas de acuerdo a una representación (y otra información contextual) cómo son las cosas realmente. Ilustro la utilidad de estas distinciones mediante su aplicación a un par de ejemplos: un caso de final de fotografía y un diagrama de la Geometría Euclidiana.

I REPRESENTACIONES COMO HERRAMIENTAS

Cuando usamos una representación para realizar una inferencia – por ejemplo, cuando usamos un diagrama para probar un resultado geométrico, una fotografía para respaldar una afirmación empírica, una caricatura para argumentar en contra de una posición política etc. –, utilizamos la representación como herramienta para realizar una tarea. Como tal, puede ser fructífero situar nuestras teorías de las representaciones epistémicas dentro del marco de las herramientas y su filosofía. En este sentido, las representaciones no son muy diferentes de otras herramientas como martillos, tractores o lámparas. Para explicar cada uno de estos objetos, es decir, para explicar por qué existen, y por qué son como son, hay que relacionarlos con su función, es decir, con el papel que desempeñan en la realización de las tareas particulares que nos ayudan a ejecutar. Por ejemplo, es imposible explicar los tractores sin hablar del arado y la agricultura. De un modo similar, para explicar por qué los martillos son como son, es imposible no tomar en cuenta su función. Sería imposible explicar por qué un martillo tiene la forma que tiene y está hecho del material que está hecho, sin mencionar para qué sirve. Consideren los mangos del martillo. ¿Por qué son tan largos como son? ¿Por qué no son más cortos? La explicación es simple una vez que nos damos cuenta de que los martillos, cuando se usan para introducir clavos, trabajan como palancas de tercera clase. En palancas de este tipo, el esfuerzo se coloca entre la carga y lo que se llama el “*fulcrum*”. En el caso de los martillos, la muñeca humana sirve como *fulcrum*, el esfuerzo se aplica a través de la mano y la resistencia del material en el que se clava es la carga. Para que palancas de tercera clase puedan ser de alguna utilidad, el esfuerzo debe recorrer una distancia corta y ser superior a la carga. Por lo tanto, un mango de una longitud más corta de la tradicional no potenciaría el esfuerzo lo suficiente como para introducir fácilmente el clavo en su lugar. En otras palabras, los martillos con

mangos más cortos no serían capaces de cumplir su función y, en consecuencia, serían inútiles.

Es también casi imposible explicar por qué nuestras herramientas son la manera que son, independientemente de la forma en que somos nosotros mismos. Es una perogrullada decir que un martillo para alienígenas probablemente sería muy distinto a un martillo humano. Las bases de los mangos de martillo son ovaladas y no cuadradas o rectangulares, por ejemplo, porque las esquinas los harían incómodos para las manos humanas, mientras que los mangos ovals proporcionan un confort óptimo y evitan lesiones y estrés. Un martillo con un mango cuadrado podría ser tan eficaz para introducir clavos como lo son los martillos con mangos ovalados; sin embargo, sería menos ergonómico. En general, al explicar las características de nuestras herramientas, a veces no es suficiente apelar a la función de la herramienta, sino también es necesario mencionar quién lo usará: No tiene sentido tratar de explicar por qué los martillos tienen la forma y dimensión que tienen sin hacer referencia al tamaño de nuestros brazos y manos. Incluso si alienígenas hubiesen desarrollado martillos, es muy poco probable que éstos tuviesen formas similares a las de los nuestros si ellos mismos no fueran también similares a nosotros en forma y fisiología.¹ Por lo tanto, así como las tareas restringen el tipo de objeto que se puede utilizar para llevarlas a cabo, nosotros como usuarios también restringimos qué tipo de herramientas podemos utilizar con eficacia y eficiencia.

Nótese que esta distinción es principalmente una distinción en los factores que dan forma a nuestra tecnología, no una distinción de características. No estoy afirmando que algunas de las características de las herramientas se explican apelando a las tareas y otras apelando a los usuarios. Factores relacionados con las tareas podrían pesar más en la explicación de algunas características y factores relacionados con el usuario podrían ser más importantes en la explicación de otras, pero lo más probable es que la mayor parte de las características de nuestras herramientas sean el resultado de la influencia de factores de ambos tipos. En general, nuestra tecnología está fuertemente moldeada, entre otros factores, por la forma en que somos sus usuarios y lo que podemos hacer o no, así como qué metas deseamos lograr a través del uso de dichas herramientas. Esto no debe ser objeto de controversia.

Las representaciones son herramientas. Al igual que los martillos, también son dispositivos que usamos para realizar ciertas tareas. Las representaciones nos ayudan a comunicarnos, sí, pero también nos ayudan a entender y navegar en el mundo, a trabajar y a jugar, a hacer el arte y la guerra etc. Casi toda actividad humana explota algún tipo de representación para hacer nuestras tareas más fáciles, simples, divertidas, be-

¹ Por supuesto, no estoy afirmando que estos son los únicos dos factores que configuran una tecnología. Sin embargo, son estos dos tipos de factores que serán importantes para nuestros objetivos en este artículo.

llas etc. Como tales, nuestras teorías de la representación no deben ser muy diferentes de nuestras teorías sobre otras herramientas humanas. En particular, al explicar por qué nuestras representaciones son la manera que son, hay que tener en cuenta para qué las desarrollamos, así como la forma en que se ajustan a nuestra condición humana, a nuestras fortalezas y debilidades. Al igual que es una perogrullada decir que un martillo para alienígenas probablemente sería muy distinto de un martillo humano, las representaciones alienígenas también serían probablemente muy distintas de las representaciones humanas.

Algunas personas podrían pensar que es un error hablar de los usos de la representación en plural. Después de todo, podría parecer que para que algo sea una representación, no debe cumplir sino una sola función fundamental, a saber, *representar*. Todas las representaciones se utilizan para representar, y cualquier cosa que se utiliza con un propósito distinto no podría ser una representación (cf. Sherry, 2009; Giardino, 2012; Knuuttila, 2011). Hay algo de razón detrás de esta crítica, y por ello cuando se habla de los usos de las representaciones, hay que tener en cuenta tanto su función estricta —representar— como los múltiples y más amplios roles que cumplen en nuestras vidas. Por ejemplo, los iconos fuera de los baños públicos segregados por sexo tienen la función de representar a un hombre y a una mujer; pero también debe ser obvio que están allí con el propósito de ayudar a los usuarios a identificar cuál baño está asignado a cada sexo. La primera función —la de representar los dos sexos— es su función figurativa estricta, mientras que el segundo es su propósito más amplio. La mayoría, si no todas las representaciones tienen un propósito que va más allá de simplemente representar algo. Haciendo eco de la máxima de John L. Austin, podemos decir que hay muchas cosas que hacemos con las representaciones, además de representar.

La importancia de considerar el objetivo más amplio de las representaciones, en lugar de enfocarse sólo en su función figurativa estrecha debe ser obvia una vez que consideramos ejemplos específicos. Por ejemplo, debe ser incontrovertible que cualquier análisis de las obras de arte figurativo que se ocupe sólo de su contenido figurativo — es decir, de qué representan — sin tener en cuenta su finalidad artística, sería severamente miope. Algo similar puede decirse de las imágenes de propaganda política: su sentido depende no sólo de su contenido figurativo, sino también de sus objetivos políticos. No tomar en cuenta ambos nos dejaría con una imagen muy limitada de su naturaleza.

Por otra parte, hay que recordar que para cumplir con su función figurativa, las representaciones deben insertarse en un contexto participativo de uso, el cual muchas veces es comunicativo (cf. Eraña & Barceló, 2017). Esto significa que, muchas veces, el funcionamiento de la representación involucra al menos dos tipos de usuarios: transmisores y receptores. En cierto sentido, ambos son usuarios de la representación, y las

representaciones exitosas deben satisfacer las necesidades de ambos de una manera eficiente, es decir, sin desperdiciar demasiados recursos. Así, continuando con el ejemplo anterior, con el fin de explicar por qué los iconos de los baños son de la manera en que son, a veces puede ser que se necesite apelar a su función figurativa (representar un hombre y una mujer), y otras veces a su propósito más amplio (ayudar a identificar los baños para hombres y para mujeres); puede ser que a veces necesitemos apelar a la forma en que toman en cuenta las necesidades y limitaciones de aquellos a los que les podría servir la información de cual baño es para hombres y cual es para mujeres y otras veces, a las de aquellos que buscan comunicarles esta información. Por ejemplo, para dar cuenta de por qué la parte central de las figuras en los baños de mujeres es trapezoidal (en contraste con la forma rectangular de las figuras correspondientes en los baños de hombres), probablemente sea necesario mencionar que dichas figuras buscan representar una persona usando falda, y luego explicar por qué, a pesar de que no todas las mujeres usan faldas, ni todos los que usan falda son mujeres, el público al que van dirigidas estas imágenes asocia el uso de de faldas con las mujeres. También será necesario explicar cómo el uso de estas imágenes explota dicha asociación entre mujeres y faldas para comunicar información sobre quién debe usar cada baño.

No espero que estos sencillos ejemplos ilustren completamente la importancia teórica de hacer estas distinciones. Por el contrario, el objetivo principal de este artículo es ilustrar dicha importancia mediante el desarrollo detallado de un par de ejemplos. En particular, voy a tratar con un subconjunto particular de representaciones que han atraído mucho interés filosófico en las últimas décadas, especialmente en la filosofía de la ciencia: las así-llamadas representaciones epistémicas, es decir, representaciones que nos ayudan en tareas tales como obtener nuevos conocimientos, hacer inferencias etc. En lo que sigue, voy a tratar de mostrar que, cuando se trata de representaciones de este tipo, puede ser útil distinguir entre la cuestión de cómo nuestros objetivos epistémicos dan forma a las representaciones que utilizamos, y la cuestión de cómo estas representaciones se complementan, explotan, y extienden nuestras capacidades cognitivas – lo que voy a llamar su dimensión ergonómica. En otras palabras, cuando se trata de representaciones epistémicas exitosas, la pregunta de por qué las usamos implica dos cuestiones diferentes pero estrechamente relacionadas: en primer lugar, ¿por qué es ventajoso para nosotros usarlas?, y en segundo lugar, ¿por qué estamos justificados en hacerlo? Debemos determinar tanto lo bien que la representación se ajusta a la tarea, como lo bien que se ajusta a nosotros; tenemos que evaluar tanto su eficiencia como su eficacia. No hace falta decir que los filósofos se han centrado casi exclusivamente en su valor estrechamente epistémico y han ignorado la también importante dimensión ergonómica. Espero con este texto, empezar a revertir esta tendencia.

2 FOTOGRAFÍAS COMO REPRESENTACIONES EPISTÉMICAS

En 2007, en uno de los momentos más dramáticos en los deportes de invierno, el biatlonista francés Raphaël Poirée participó en lo que había anunciado públicamente sería la última competencia de su ilustre carrera: la carrera de salida en masa de la Copa Mundial de Holmenkollen. Sin embargo, mientras cruzaba la línea de meta, su viejo contrincante Ole Einar Bjørndalen, de Noruega, se mantenía corriendo a su lado. Afortunadamente, la cámara de la meta había fotografiado los momentos finales de la carrera. A partir de estas fotos, el jurado determinó que Poirée no pudo terminar su carrera con una victoria, pues Einar Bjørndalen había cruzado la línea apenas instantes antes que el francés.

Además de su carácter dramático, el episodio antes descrito es de interés filosófico porque ilustra muy bien el papel central que desempeñan representaciones como las fotografías en la obtención de conocimiento. En este respecto, lo que nos interesa como filósofos es determinar qué ventajas epistémicas obtenemos con el uso de representaciones, y por qué estamos justificados a hacerlo. En otras palabras, ¿por qué, para llegar a ciertas conclusiones sobre ciertos aspectos del mundo, en lugar de observar directamente aquello que nos interesa, preferimos usar representaciones? y cuando las usamos, ¿por qué aceptamos las conclusiones que alcanzamos a través de ellas? es decir, ¿por qué les creemos? Por ejemplo, ¿por qué los jueces de Holmenkollen tuvieron que usar una fotografía para determinar quién ganó la carrera, cuando sucedió justo delante de sus propios ojos?, y en segundo lugar, ¿por qué confiar en que ella nos dirá quién ganó realmente? Cada pregunta requiere un tipo diferente de respuesta. Responder a la primera pregunta probablemente requeriría decir algo acerca de los límites de nuestro sistema perceptual y por qué no somos capaces de detectar a simple vista pequeñas diferencias que suceden muy rápido frente a nosotros etc. En contraste, dar respuesta a la segunda pregunta requeriría decir algo acerca del proceso causal detrás de la fotografía y quizás también algo acerca de la ubicación de las cámaras en relación con la línea de meta.

Para ilustrar la diferencia entre ambas preguntas, profundicemos en lo que ocurrió ese día en Holmenkollen y tratemos de extraer un patrón general que podamos generalizar a otros usos similares de representaciones. En un primer lugar, existe una situación de la que queremos obtener cierta información, en este caso, la carrera de esquí. Además, hay algo que queremos saber acerca de ella, a saber, quién cruzó la línea en primer lugar. Con el fin de responder a esta pregunta, producimos una representación de la situación: una que no la representa en su totalidad, pero sí representa (al menos algunos de) sus aspectos relevantes de una forma manejable (o, por lo menos, más manejable de lo que serían si no usáramos la representación). Lo que quere-

mos es una representación que contenga suficiente información relevante, sin añadir demasiado ruido (es decir, sin incluir demasiados elementos irrelevantes o confusos). Solo así podemos responder nuestra pregunta original a través de la extracción de información de la representación. En nuestro ejemplo, respondemos nuestra pregunta sobre (lo que no pudimos ver en) la carrera – ¿quién cruzó la línea primero? – a partir de (lo que sí podemos ver en) la fotografía quién se ve cruzar la línea primero en ella.² Si el sistema funciona correctamente, la información que obtengamos de la representación nos dará la respuesta correcta a esa pregunta (cf. Barwise, 1993; Suárez, 2004).

Al usar la imagen para obtener información acerca de la carrera, realizamos dos diferentes – e igualmente importantes – inferencias: la *interpretación*, que va de las características de la imagen a lo que la imagen representa, y la *aplicación*, que va de lo que la imagen representa a la manera en que el mundo es. En el primer tipo de inferencias, partimos de información sobre la imagen – principalmente, cómo se ve, pero también cuál es su contexto (cf. Barceló, 2012) – y llegamos a información sobre su contenido, es decir, sobre cómo es el mundo *según* la representación. Por ejemplo, a partir del patrón de colores y formas que se muestra en la fotografía (además de información sobre cuándo y cómo se tomó la foto, quiénes estaban corriendo y cómo se veían etc.) concluimos que, en la imagen, se ve a Bjørndalen cruzar la línea de meta antes que Poirée.

Para interpretar una imagen, a veces, lo único que necesitamos es verla. Otras veces, sin embargo, extraer la información que necesitamos no es tan sencillo, y se hace necesaria cierta manipulación de la representación. Por ejemplo, en situaciones de final de fotografía, es una práctica común dibujar sobre la fotografía una serie de líneas, paralelas a la línea de meta, que marquen el borde de cada corredor más cercano a la línea de meta. Así es más fácil ver quién cruza la línea primero. En otros casos – tal vez la mayoría – es necesario también combinar la información que provee la representación con cierto conocimiento previo sobre la propia situación representada. Cuando se utiliza un mapa para conducirse por una ciudad, por ejemplo, es habitualmente necesario hacer coincidir la información del mapa con la información disponible en el contexto de uso para determinar qué ruta tomar, o incluso para identificar dónde se encuentra uno. En otras palabras, muchas veces, la interpretación de una imagen suele requerir un ir y venir entre la representación y el mundo.

Una vez que hemos interpretado la imagen y sabemos lo que representa, es necesario luego determinar si el mundo es de hecho como la imagen lo representa.³

² O, para ser más precisos, si la parte de la imagen que representa el pie de uno de los esquiadores toca la parte de la foto que representa la línea de meta, mientras que la parte que representa el pie del otro esquiador no lo hace.

³ A veces, lo que necesitamos no es resolver cuestiones sobre el mundo real, sino más bien, sobre situaciones hipotéticas, o ficticias, o idealizadas etc. Sin embargo, el proceso es básicamente el mismo. Por ello, y por razones de

Para esto, una vez más, es esencial apelar a información contextual sobre la representación y la manera en que se ha creado. Continuando con el ejemplo de lo que sucedió en Holmenkollen, si confiamos en la fotografía, podemos concluir que Bjørndalen efectivamente cruzó la línea de meta antes que Poirée, no sólo de acuerdo a la imagen, sino también *en el mundo real*. En este sentido, la imagen no sólo representa Bjørndalen superando a Poirée, sino que *lo muestra*. A esto es a lo que he llamado *aplicar* la representación al mundo.

En general, cuando usamos una representación para obtener información sobre el mundo, tenemos que realizar ambos tipos de inferencias: interpretación y aplicación. Después de todo, la información contenida en una representación es inútil si no se extrae de ella y se aplica al mundo. Cada uno de estos dos pasos corresponde a lo que he identificado antes como la función estrecha y el objetivo más amplio de una representación epistémica, respectivamente. Recordemos que una representación epistémica tiene como función estrecha representar algo y como su objetivo más amplio obtener información sobre el mundo. Como he insistido, ambos factores son igualmente fundamentales.

A pesar de que la mayoría, si no todas las representaciones tienen una función secundaria además de representar, sólo algunos de ellas tienen una función secundaria epistémica. Para éstas, tiene sentido preguntarse si se puede confiar en ellas, es decir, si podemos dar por sentado que la información que nos ofrecen es fiel, precisa y útil. Presumiblemente, esta misma pregunta es irrelevante para otros tipos de representaciones hechas con diferentes propósitos, tales como obras de arte surrealistas o motivos decorativos. No tiene mucho sentido preguntarse, por ejemplo, si el estampado de una camisa hawaiana representa fielmente la flora y fauna de dicha región. Asimismo, diferentes representaciones se interpretan de manera distinta. Cómo interpretamos un texto es significativamente diferente a la forma en que interpretamos un mapa o cómo un radiólogo interpreta una imagen de rayos X. Igualmente, confiamos en diferentes tipos de representaciones epistémicas por diferentes razones. Confiamos en lo que vemos en una fotografía tomada por nosotros mismos por razones distintas que aquellas por las que confiamos en los mapas que encontramos en un atlas o por las que confiamos en lo que nos dice la pantalla de un GPS. Cuando se habla de imágenes, la diversidad es la norma.

En todos los casos, el proceso involucrado en el uso de una representación de este tipo (epistémico) es bastante complejo: implica, no sólo la creación de la representación, sino también su interpretación, manipulación, aplicación y evaluación. Todo

simplicidad, voy a seguir escribiendo como si nuestro uso epistémico de representaciones siempre tuviera como objetivo obtener información factual sobre el mundo.

esto para llevar a cabo una inferencia que, al menos en principio, podría haberse realizado de manera más directa, es decir, sin pasar por el intermediario de la representación. Después de todo, tiene sentido utilizar una representación para hacer una inferencia sólo cuando su uso tiene alguna ventaja, en perspicacia, certeza, accesibilidad etc. Esto significa que lo que hace que una representación sirva para realizar cierta inferencia no es sólo su precisión al representar su objetivo o su fiabilidad en la producción de inferencias válidas, sino también su utilidad: su maleabilidad, accesibilidad, claridad etc. Como ya he mencionado, una buena representación epistémica es la que nos ayuda a alcanzar nuestros fines epistémicos. En otras palabras, no sólo debe ser eficaz al darnos la información que necesitamos, sino que también debe hacerlo de una manera eficiente; como tal, debe permitirnos superar nuestras limitaciones y sacar partido de nuestras capacidades (cf. Giardino, 2012; Kulvicki, 2010; Blackwell, 2008). Por ejemplo, una representación nos puede permitir ver lo que no podríamos de otra manera, como la fotografía en Holmenkollen permitió a los jueces ver algo —el último instante de la carrera— que les era imposible ver de otra manera, a pesar de que ocurrió justo delante de sus propios ojos. En este sentido, se puede decir que la fotografía amplía las capacidades de nuestros ojos (cf. Canales, 2009).

3 DIAGRAMAS GEOMÉTRICOS COMO REPRESENTACIONES EPISTÉMICAS

Permítanme pasar ahora a un ejemplo diferente: los diagramas geométricos puros.⁴ Mi opinión es que, respecto a las consideraciones anteriores por lo menos, los diagramas geométricos no son muy diferentes de otras representaciones epistémicas: se usan para adquirir conocimiento geométrico que sería difícil — si no es que imposible — obtener sólo pensando directamente sobre los objetos geométricos (cf. Novaes, 2013; Macbeth, 2014). Una vez más, existe una situación de la que queremos obtener cierta información, sólo que en este caso, la situación es geométrica. Con el fin de obtener esta información, producimos un diagrama que no representa la situación geométrica en su totalidad, pero sí representa al menos algunos de sus aspectos relevantes de una forma manejable (o, por lo menos, más manejable de lo que sería si no usáramos el diagrama). A veces, con el fin de obtener el resultado que queremos, sólo necesitamos analizar el diagrama, aunque la mayoría de veces es necesario transformarlo hasta que el resultado deseado sea visible (cf. Hintikka & Remes, 1974; Mumma, 2012). Solo así

⁴ El adjetivo “puros” significa que se excluyan los diagramas de geometría diferencial o algebraica como los desarrollados por David Mumford (1999). A partir de ahora, cuando hable de los diagramas geométricos me referiré a este tipo de diagramas exclusivamente.

podemos obtener información geométrica a abstracta a partir de la observación, el análisis y la manipulación de un diagrama. Si estoy en lo cierto en este respecto, los diagramas geométricos no son muy distintos de otras representaciones epistémicas.

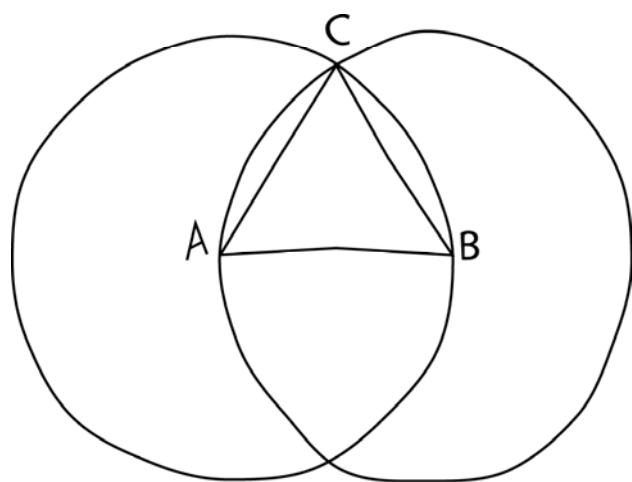


Figura 1. Euclides I.1.

Veamos un ejemplo sencillo: el famoso diagrama usado en la prueba de Euclides I.1. para la construcción de un triángulo equilátero a partir de un segmento de línea dado (ver fig. 1). El primer paso es representar diagramáticamente el segmento de línea dado. Esto se logra dibujando un segmento de línea horizontal corta, y más o menos recta. ¿Por qué hacemos esto? Uno podría pensar que es fácil ver por qué el segmento de línea tiene que ser más o menos recto, pero ¿por qué horizontal? ¿y por qué corto? Una buena teoría de diagramas geométricos debería ser capaz de responder a estas preguntas. Desafortunadamente, una teoría que sólo se ocupe de los aspectos

lógicos o epistémicos de la prueba diagramática tiene pocos recursos con que responderlas. Está claro que podríamos haber hecho el segmento de línea más corto o más largo; vertical, horizontal o en un ángulo, y la validez lógica de la prueba no habría cambiado (cf. Manders, 2008; Mumma, 2010). Sin embargo, no lo hacemos. Sabemos que si dibujamos el segmento de línea demasiado corto o demasiado largo, los diagramas perderían, no su validez, pero sí su utilidad. Necesitamos que el diagrama sea interpretable y manejable por nosotros, seres humanos, y eso añade restricciones adicionales a la mejor manera de representar, por ejemplo, un segmento de línea.

Una vez que el segmento de línea está en su lugar, con el fin de identificarlo en la prueba y en el diagrama, se utilizan dos índices. Escribimos una letra “A” en uno de sus extremos y una “B” en el otro. Utilizamos estos índices para identificar, en la parte textual de la prueba, tanto los extremos del segmento de línea como al segmento mismo. Estos índices son esenciales para la interacción entre diagrama y texto (cf. Netz, 1998). Dado que el objetivo es dibujar un triángulo equilátero cuyos lados sean de la misma longitud que el segmento AB recién dibujado, sabemos que uno de los aspectos que serán relevantes sobre el segmento AB será su longitud; pero en esta etapa de los *Elementos*, sabemos muy poco sobre longitudes. Sabemos, por ejemplo, que los radios de un círculo son todos de la misma longitud. Y también sabemos que, dado un segmento de línea recta, podemos construir un círculo que tenga tal segmento de línea

como radio. Así, podemos utilizar esta información para enriquecer nuestro diagrama. Lo hacemos mediante el trazado de una curva más o menos circular con el punto A más o menos en su centro y el punto B sobre su perímetro. Al igual que no es necesario dibujar un segmento de línea perfectamente recto para representar un segmento de línea recta, así tampoco necesitamos dibujar un círculo perfecto para representar uno. Simplemente tiene que ser lo suficientemente similar. Y podemos hacer lo mismo en el otro extremo. Como es bien sabido, las curvas resultantes se cortan en dos puntos, uno por encima del segmento AB y otro por debajo. Tomemos uno de estos puntos. Una vez más, no hay ninguna diferencia lógica entre cuál de ellos se tome, pero por lo general se toma el de arriba. Una vez más, esta es una característica del diagrama que no puede explicarse desde un punto de vista puramente lógico o epistemológico. La explicación ha de tener en cuenta nuestras características cognitivas, como el hecho de que preferimos nuestros triángulos apuntando hacia arriba (Friedenberg, 2012). La diferencia no es lógica, sino ergonómica (ver fig. 2).

Tomamos este punto, lo etiquetamos con una letra “ C ” y dibujamos un segmento de línea más o menos recto desde él hasta el punto A , y otro segmento de línea desde él al punto B . La figura resultante se ve más o menos como un triángulo, y representa uno. ¿Cómo sabemos que es equilátero? No porque podamos ver que sus lados son más o menos de la misma longitud (cf. Manders, 2008), ya que nuestra capacidad de comparar longitudes visualmente no es nada fiable (cf. Sedgwick, 1986; Gogel, 1990), sino que lo sabemos porque lo probamos. Y esta prueba se lleva a cabo tanto en la página, como en el diagrama. Sabemos que el segmento AB y BC son de la misma longitud, no sólo por lo que vemos en la figura, sino porque ambos son radios de un mismo círculo. Sabemos que AB es un radio del círculo con centro en A , porque así es como hemos construido el círculo, y sabemos que AC es también un radio de este mismo círculo porque es así como construimos el punto C . Una línea simétrica de razonamiento nos lleva al conocimiento de que CB es también de la misma longitud que AB . Por transitividad, obtenemos que AB , BC y AC son todos de la misma longitud y, por consiguiente, el triángulo ABC es equilátero.

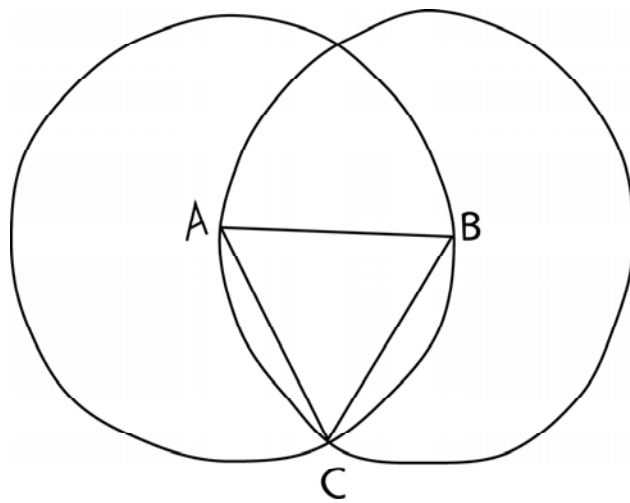


Figura 2. Inverso de Euclides I.1.

Si estoy en lo cierto, una filosofía adecuada del razonamiento diagramático en la geometría debe abordar no sólo la cuestión de por qué (y cuándo) son los diagramas puramente geométricos un medio fiable para hacer inferencias sobre el reino geométrico (cf. Mumma, 2010; Krummheuer, 2009; Kulpa, 2009; Brown, 2008; Guaiquinto, 2007; Lomas, 2002; Norman, 2006; Shimojima, 1996), sino también por qué son útiles para hacerlo. Algunas características de los diagramas pueden explicarse mejor apelando a criterios epistémicos y otros a criterios ergonómicos. A veces, lo importante será determinar cómo cierta propiedad de los diagramas contribuye a la validez (o falta de validez) de la prueba en la que ocurre, mientras que en otras ocasiones puede requerirse tomar en cuenta también nuestra constitución cognitiva y cómo ésta afecta la manera en que interpretamos imágenes, en general, y diagramas en particular. En otras palabras, cualquier análisis comprensivo de los diagramas debe reconocer la importancia tanto de los factores lógicos como de los ergonómicos. En otras palabras, debe ser consciente de que nuestros diagramas geométricos son como son, en parte por como son los objetos matemáticos que representan, y en parte por cómo somos los matemáticos que los usamos.

Veamos otros dos ejemplos para ilustrar la diferencia entre estos dos tipos de factores. En primer lugar, consideremos los diagramas de la figura 3 que representan las relaciones lógicas entre tres conjuntos:

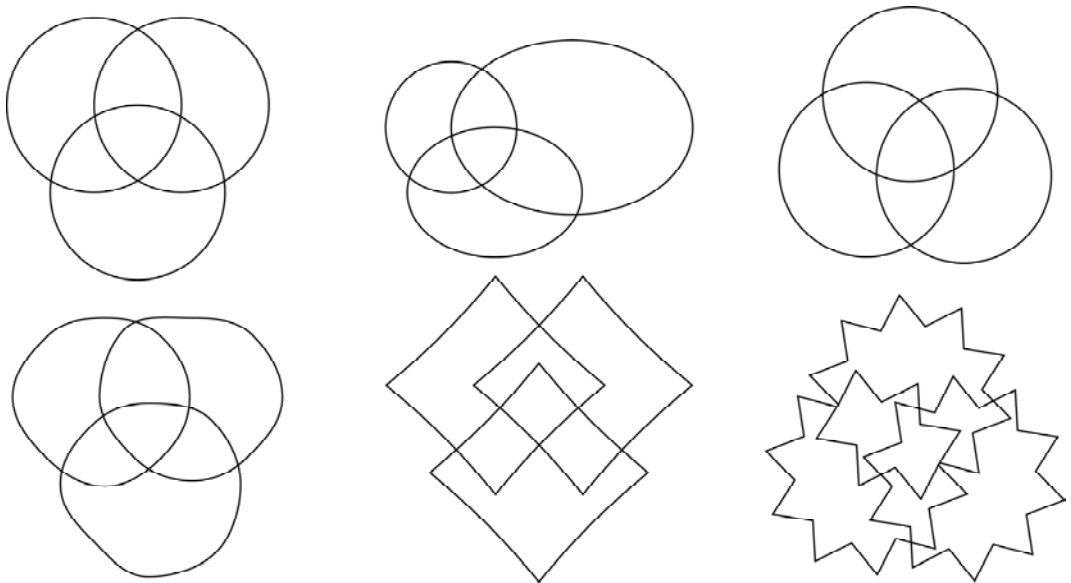


Figura 3. Diagramas de Venn isomórficos.

A pesar de que todos ellos comparten las propiedades topográficas relevantes necesarias para representar de manera fiable las relaciones lógicas entre tres conjuntos (cf. Shimojima, 1996), algunos de ellos son más adecuados para esta tarea que otros. Algunos son más claros, otros son más confusos; algunos son más fáciles de dibujar y otros más complejos; algunos parecen más bellos, otros son feos. Y estas diferencias no son lógicas, sino del tipo que he llamado, siguiendo a Blackwell (2008), “ergonómicas” ya que no dependen sólo de las características internas de los diagramas, sino también de las capacidades de sus usuarios (y otros factores externos, tales como las restricciones materiales asociadas a las prácticas en las que se utilizan).

Consideremos ahora un ejemplo diferente de un área diferente de las matemáticas. Como es bien sabido, para los niños pequeños (menores de tres años) es muy difícil adquirir los significados de las expresiones numéricas básicas, es decir, les cuesta mucho trabajo aprender a usar las palabras “uno”, “dos”, “tres” etc. Por un lado, aprenden fácilmente a recitar la secuencia de palabras “uno, dos, tres etc.” y también les es fácil correlacionar dicha secuencia con otras secuencias de objetos, de modo que, por ejemplo, cuando se les pide “contar” cuántos juguetes se encuentran en un grupo, tienen pocos problemas para ir uno por uno asignándoles los nombres de los números en la secuencia habitual: “uno” para el primero, “dos” para el segundo etc. Sin embargo, pese a ello, les cuesta mucho trabajo comprender que los números en la secuencia representan una cantidad exacta. Si le pides a estos mismos niños pequeños, por ejemplo, que te den “tres juguetes”, no pueden entender que les estás pidiendo que te den exactamente tres juguetes (en lugar de sólo unos pocos, o muchos).

La mayoría de los psicólogos toman esto como evidencia de que los conceptos numéricos son difíciles y que por eso nos toma tanto tiempo adquirirlos. Sin embargo, recientemente han salido a la superficie nuevos resultados empíricos que desafían esta hipótesis. Estudiando a niños mientras aprenden el Lenguaje Mexicano de Señas [LMS], Mathieu Lecorre ha encontrado que pueden aprender fácilmente que los signos asociados con los números uno, dos, tres, cuatro y cinco (que consisten en levantar el número correspondiente de dedos) representan esas cantidades exactas. Es muy poco probable que los conceptos numéricos que estos niños están aprendiendo sean sustancialmente diferentes de los conceptos numéricos que los otros niños aprenden. Por ello, parece que la diferencia entre usar palabras o señas no es lógica o epistémica. Lo que los niños están haciendo en ambos casos no es lógica ni epistemológicamente diferente. Ambos están aprendiendo a asociar signos con cantidades. Sin embargo, desde un punto de vista ergonómico, las tareas son radicalmente diferentes. Los niños que no usan LMS están aprendiendo una asociación que es completamente arbitraria y convencional. No hay nada que guíe su aprendizaje de que la palabra “dos” representa al número dos, el cual es el sucesor del número representado por la palabra

“uno”. Sin embargo, en el caso de los niños que aprenden LMS, el homomorfismo que existe entre los dedos que se levantan en cada señal y el número correspondiente guía el proceso de aprendizaje. Esto no cambia la naturaleza epistémica de la tarea o de la representación, pero sí hace una enorme diferencia a nivel ergonómico.

Si tengo razón al subrayar que aspectos epistémicos y lógicos dan forma a nuestras representaciones epistémicas, hay que esperar que lo que hace útil a un diagrama geométrico para una prueba dada no sea sólo su precisión y fidelidad, sino también su manejabilidad, perspicacia, claridad etc. Como en el ejemplo de la figura 3, esto también significa que diferentes representaciones pueden estar a la par en el nivel epistémico, pero diferir sustancialmente al nivel ergonómico. De hecho, esto es lo que sucede en el caso de los diagramas de la geometría Euclideana. Su ventaja principal con respecto a otras representaciones matemáticas – como símbolos y fórmulas – no se da tanto al nivel epistemológico o lógico, sino al ergonómico. Se suele dar por supuesto que los diagramas geométricos son sustancialmente diferentes a las palabras y las fórmulas matemáticas; que los diagramas son imágenes, mientras que las fórmulas y las palabras son símbolos, y que en consecuencia, las matemáticas que usan diagramas son sustancialmente diferentes de las matemáticas que sólo usan fórmulas y palabras. Durante mucho tiempo, los filósofos de las matemáticas han tratado de dilucidar en dónde radica esta diferencia. Como era de esperarse, han tratado de trazar la línea a nivel epistémico, lo que explica el reciente debate sobre si las pruebas diagramáticas son tan fiables, rigurosas etc. como las pruebas puramente formales. Sin embargo, creo que esto ha sido un error, y que la diferencia principal no se encuentra en el nivel epistémico, sino en el ergonómico. Como he afirmado anteriormente en este artículo, cuando se trata de representaciones epistémicas – y eso es lo que los diagramas geométricos son – podemos identificar dos inferencias diferentes e igualmente importantes: una que busca determinar lo que la imagen representa, es decir, cómo es el mundo *de acuerdo* a la representación; y uno segundo que va de lo que la imagen representa a la forma en que *en realidad* es el mundo. Los filósofos se han centrado generalmente en esta segunda inferencia, haciendo caso omiso de la primera; en otras palabras, han centrado sus esfuerzos en teorizar sobre la fiabilidad epistémica de las representaciones, sin tener en cuenta la cuestión de cómo interpretamos nuestras representaciones. Sin embargo, la diferencia principal entre diagramas y fórmulas en geometría tiene poco que ver con qué tan fiables son cada una, sino en la forma en que las interpretamos. Es a este nivel que nuestra intuición de sentido común tiene razón: los diagramas geométricos son imágenes, no símbolos.

Como he mencionado, en el uso adecuado de una representación con un fin epistémico, es importante ser capaz de identificar lo que se está representado. Por lo tanto, en igualdad de condiciones, es deseable que los referentes de las representacio-

nes sean fáciles de identificar (cf. Paraboni *et al.*, 2007). Diferentes tipos de representaciones utilizan diferentes mecanismos para fijar sus referentes y para hacerlos fácilmente identificables. Uno de los mecanismos más comunes de fijación de referencia es el establecimiento de una convención a través de algún tipo de “bautismo” (cf. Kripke, 1980), pero hay otros. Por ejemplo, se ha argumentado que, al menos algunos modelos científicos basan su relación semántica con el mundo en su similitud con lo que representan (cf. Giere, 1988, 2004; Teller, 2001). Esta similitud puede ser estructural o de apariencia (o una combinación de ambas).

Las representaciones que visualmente se asemejan a lo que representan tienen una ventaja cognitiva clara sobre otros tipos de representaciones: a la hora de determinar lo que representa algo, ayuda mucho si la representación se ve como su referente. Consideremos otra vez el ejemplo de final de fotografía de la sección anterior. Veremos que a pesar de que podría haber otros mecanismos que podrían informar con precisión quien cruzó la línea primero, el final de fotografía se ha convertido en un mecanismo estándar en parte debido a sus ventajas prácticas y cognitivas. Las fotografías se parecen a aquello que representan. Lo que vemos en una foto de final de fotografía es bastante similar a lo que habríamos visto si pudiéramos ser capaces de observar el instante final de la carrera congelado en el tiempo. Esto hace que la información que la imagen contiene sea de fácil acceso, y su fiabilidad sea muy vívida. Si tengo razón, esto significa que parte de la razón por la que utilizamos de manera epistémica fotografías en casos como éste es precisamente porque se ven como lo que representan.⁵

Esto parece ser cierto también sobre al menos algunos diagramas geométricos, como el de Euclides I.1. Ellos también se parecen a los objetos geométricos que representan y eso podría ser parcialmente la razón por la que los usamos. Si esto último es verdad o no es una cuestión controversial cuya discusión dejaré para una ocasión futura. Sin embargo, vale la pena señalar que, si bien es probable que la semejanza visual sea un ingrediente importante en la interpretación de diagramas como los de Euclides, puede que no sea cierto en otros casos de diagramas matemáticos. Uno debe analizar los diferentes tipos de diagramas caso por caso. En algunos de ellos, como los diagramas proyectivos de la teoría de nudos o algunos diagramas en topología (como el del *torus*), la respuesta probablemente será que sí, es decir, es muy probable que sí explotan la semejanza visual para fijar sus referentes (cf. Brown, 2008). Sin embargo, es muy poco probable que lo mismo se pueda decir de otros casos. Diagramas lógicos como los de Peirce, Venn o Euler, por ejemplo, no parecen explotar la similitud visual al fijar sus

⁵ Por supuesto, esto no lo sabemos comparando lo que vemos en la imagen con lo que ella representa. Después de todo, el final de fotografía tiene sentido precisamente porque no podemos ver de otra manera quién ganó la carrera —el movimiento de los esquiadores es demasiado rápido. Pero confiamos en la imagen para mostrarnos lo que no puede ser visto directamente.

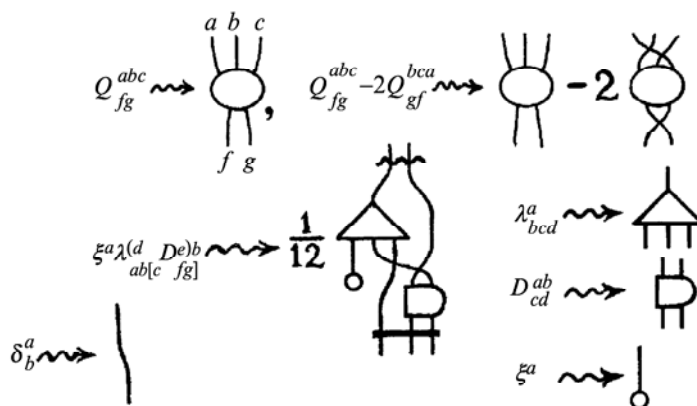


Figura 4. Notación gráfica del tensor de Penrose (2004, p. 241, fig. 12.17).

referentes. La intersección de círculos no se *ve* como la intersección de conjuntos, si tal cosa siquiera se ve como algo. De manera similar, los llamados diagramas de la notación gráfica de tensores de Penrose (1971) (ver fig. 4) tampoco se parecen visualmente a sus referentes. Después de todo, una de sus convenciones es el uso de una línea recta para representar simetrización y una línea ondulada para representar anti-simetrización; sin embargo, no hay nada recto en la simetrización que sea ondulado en la anti-simetrización. Por lo tanto, los factores ergonómicos y lógicos que contribuyeron a dar forma a los diagramas de la geometría euclidiana probablemente sean sustancialmente diferentes de los que han dado forma a los tipos de diagramas más prevalentes en la práctica matemática actual, como la notación esquemática de la teoría cuántica de grupos, las huellas de pájaro de Cvitanoviæ, los diagramas de cuerdas para las categorías monoidales, las álgebras planares etc.

CONCLUSIONES

En este artículo he introducido tres distinciones que considero fundamentales para entender lo que se han llamado “representaciones epistémicas”, es decir, aquellas que utilizamos para perseguir objetivos tales como hacer una inferencia, justificar una afirmación, obtención conocimiento nuevo etc. Cada distinción se basa en la anterior y es más específica. La primera, y más general, se aplica a todas las herramientas. Al explicar por qué nuestras herramientas son de la forma en que son, debemos apelar a dos tipos diferentes de factores: factores relacionados con el propósito o función de la he-

herramienta, y factores relacionados con las limitaciones y capacidades del usuario (lo que he llamado “factores ergonómicos”). Esto también se aplica a las representaciones, ya que en su mayoría son también herramientas: se crean y desarrollan con algún propósito o función más allá del mero representar algo (de ahí la importancia de hacer una distinción entre la función estrecha de una representación – representar – y su propósito más amplio). Por lo tanto, cuando de representaciones se trata, es importante tener en cuenta no sólo la forma en que son moldeadas por su función, sino también la manera en que nuestras propias limitaciones y capacidades como usuarios potenciales influyen en darles forma.

Por último, también es importante hacer una distinción entre dos inferencias involucradas en el uso epistémico de representaciones: la interpretación y la aplicación. En la primera – la interpretación – nos interesa determinar el contenido de la representación – es decir, cómo son las cosas en el mundo de acuerdo con ella, mientras que en el segundo – la aplicación – inferimos cómo es el mundo de acuerdo a lo que nos dice la representación. Ambas inferencias imponen restricciones (epistémicas y ergonómicas) a nuestras representaciones, como se ilustra en los dos casos históricos considerados en este artículo: cómo se utilizó una fotografía de decidir una apretada carrera de esquí en 2007 y cómo se utilizó un diagrama para demostrar un teorema geométrico en la antigua Grecia. Espero que estos ejemplos ilustren cómo diferentes factores ergonómicos y epistémicos dan forma a nuestras representaciones epistémicas: cómo afectan tanto la manera en que las interpretamos, como si (y qué tanto) confiamos en ellas para decirnos algo sobre el mundo real. Una teoría de representaciones adecuada debería, por lo tanto, atender a ambos tipos de factores y ambos tipos de inferencias. En el caso de las representaciones epistémicas, esto significa atender tanto a las condiciones lógicas y epistemológicas que les permiten ser fuentes fiables de información como a las exigencias de carácter ergonómico necesarias para que la representación pueda ser útil para nosotros, sus usuarios potenciales. ☞

Axel Arturo BARCELÓ

Instituto de Investigaciones Filosóficas,
 Universidad Nacional Autónoma de México.
abarcelo@filosoficas.unam.mx

Pictures as epistemic tools

ABSTRACT

The goal of this article is to lay some foundational groundwork in the study of epistemic representations in general, and visual epistemic representations in particular. To this goal, I introduce three helpful and closely related distinctions: The first one is a distinction between the constraints imposed on a tool by the task it is intended to help perform, and the constraints imposed by its intended user. The second is a distinction between a representation's narrow representational function (to represent something), and its wider purpose, which could be epistemic, aesthetic etc. Finally, the third one is a distinction between interpreting and applying a representation, that is, between determining how things are according to the representation, and determining whether things actually are as they are represented to be. I illustrate the usefulness of these distinctions by applying them to a couple of examples: a case of photo finish and a diagram of Euclidean Geometry.

KEYWORDS • Representation. Euclidean diagrams. Photo finish. Scientific images. Interpretation. Ergonomics. Photography. Models. Depiction. Visual inference.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARCELÓ, A. Words and images in argumentation. *Argumentation*, 26, 3, p. 355-68, 2012.
- BARWISE, J. Heterogenous reasoning. In: BARWISE, J. & ALLWEIN, G. (Ed.). *Working papers on diagrams and logic*. Bloomington: Indiana University Logic Group preprint no. IULG-93-24, 1993. p. 1-13.
- BARWISE, J. & ALLWEIN, G. (Ed.). *Working papers on diagrams and logic*. Bloomington: Indiana University Logic Group preprint no. IULG-93-24, 1993.
- BLACKWELL, A. Cognitive dimensions of notations: understanding the ergonomics of diagram use. In: STAPLETON, G.; HOWSE, J. & LEE, J. (Ed.). *Diagrammatic representation and inference*. Berlin: Springer, 2008. p. 5-8.
- BOFF, K. R.; KAUFMAN, L. & THOMAS, J. P. (Ed.). *Handbook of perception and human performance. Sensory processes and perception*. New York: Wiley-Interscience, 1986.
- BROWN, J. R. *Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures*. 2 ed. New York: Routledge, 2008.
- CANALES, J. *A tenth of a second*. Chicago: The University of Chicago Press, 2009.
- ERAÑA, A. & BARCELÓ, A. Por lo que sabemos. *Tópicos*, 52, p. 9-36, 2017.
- FRIEDENBERG, J. Aesthetic judgment of triangular shape: compactness and not the golden ratio determines perceived attractiveness. *I-perception*, 3, p. 163-75, 2012.
- GIAQUINTO, M. *Visual thinking in mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2007.
- GIARDINO, V. Towards a diagrammatic classification. *Knowledge engineering review*, 28, p. 237-48, 2012.
- GIERE, R. *Explaining science: a cognitive approach*. Chicago: University of Chicago Press, 1998.
- _____. How models are used to represent reality. *Philosophy of science*, 71, supplement, p. 742-52, 2004.
- GOGEL, W. A theory of phenomenal geometry and its applications. *Perception and psychophysics*, 48, p. 105-23, 1990.
- HINTIKKA, J. & REMES, U. *The method of analysis: its geometrical origin and its general significance*. Dordrecht: Reidel, 1974.
- KNUUTTILA, T. Modelling and representing: an artefactual approach to model-based representation. *Studies in history and philosophy of science*, 42, p. 262-71, 2011.
- KRIPKE, S. *Naming and necessity*. New Haven: Harvard University Press, 1980.

- KULPA, Z. Main problems of diagrammatic reasoning. Part I: The generalization problem. *Foundations of science*, 14, p. 75-96, 2009.
- KULVICKI, J. Knowing with images: medium and message. *Philosophy of science*, 77, p. 295-313, 2010.
- LOMAS, D. What perception is doing, and what it is not doing, in mathematical reasoning. *British journal for the philosophy of science*, 53, p. 205-23, 2002.
- MACBETH, D. *Realizing reason: A narrative of truth and knowing*. Oxford: Oxford University Press, 2014.
- _____. Diagrammatic reasoning in Euclid's *Elements*. In: VAN KERKHOVE, B.; DE VUYST, J. & VAN BENDEGEM, J. P. (Ed.). *Philosophical perspectives on mathematical practice*. London: College Publications, 2010. p. 235-67.
- MANMDERS, K. The euclidean diagram. In: MANCOSU, P. (Ed.). *The philosophy of mathematical practice*, Oxford: Oxford University Press, 2008. p. 112-83.
- MANCOSU, P. (Ed.). *The philosophy of mathematical practice*, Oxford: Oxford University Press, 2008.
- MUMMA, J. Proofs, pictures and Euclid. *Synthese*, 175, p. 255-87, 2010.
- _____. Constructive geometrical reasoning and diagrams. *Synthese*, 186, p. 103-19, 2012.
- NETZ, R. Greek mathematical diagrams: Their use and their meaning. *For the learning of mathematics*, 18, p. 33-9, 1998.
- NORMAN, J. *After Euclid: visual reasoning & the epistemology of diagrams*. Stanford: CSLI Publications, 2006.
- NOVAES, C. D. Mathematical reasoning and external symbolic systems. *Logique et analyse*, 221, p. 45-65, 2013.
- PANZA, M. The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry. *Synthese*, 186, p. 55-102, 2012.
- PARABONI, I.; VAN DEEMTER, K. & MASTHOFF, J. Generating referring expressions: Making referents easy to identify. *Computational linguistics*, 33, p. 229-54, 2007.
- PENROSE, R. *The road to reality: a complete guide to the laws of the universe*. London: Jonathan Cape, 2004.
- PLATON. *The republic*. Translation B. Jowett. Boston: The MIT Press, 1982.
- SEDGWICK, H. Space perception. In: BOFF, K. R.; KAUFMAN, L. & THOMAS, J. P. (Ed.). *Handbook of perception and human performance. Sensory processes and perception*. New York: Wiley-Interscience, 1986. p. 1-57.
- SHERRY, D. The role of diagrams in mathematical arguments. *Foundations of science*, 14, p. 59-74, 2009.
- SHIMOJIMA, A. Reasoning with diagrams and geometrical constraints. *Logic, language and computation*, 1, p. 527-40, 1996.
- STAPLETON, G.; HOWSE, J. & LEE, J. (Ed.). *Diagrammatic representation and inference*. Berlin: Springer, 2008.
- SUÁREZ, M. An inferential conception of scientific representation. *Philosophy of science*, 71, p. 767-79, 2004.
- TAISBAK, C. M. ΔΕΔΟΝΕΜΑ. *Euclid's data or the importance of being given*. Copenhagen: Museum Tusulanum Press, 2003.
- TELLER, P. Twilight of the perfect model, *Erkenntnis*, 55, p. 393-415, 2001.
- VAN KERKHOVE, B.; DE VUYST, J. & VAN BENDEGEM, J. P. (Ed.). *Philosophical perspectives on mathematical practice*. London: College Publications, 2010.

