ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XVI / 1994, s. 87–99*

John D. BARROW

MATEMATYKA NOWEJ ERY[†]

Nasze kategorie myślenia są często pod wpływem pewnych tendencji kulturowych i, w związku z tym, nasze obrazy Wszechświata mają tendencję do korzystania z modnych pojęć, które okazały się użyteczne w bardziej przyziemnych przypadkach. Jeśli w czasach starożytnych napotykamy na obraz Wszechświata jako organizmu, to w epoce Newtona i użytkowników wynalezionego wówczas zegara wahadłowego dominował obraz świata podobnego do pracowni zegarmistrza; dla wiktorianów rewolucji przemysłowej maszyna parowa stała się dominującym paradygmatem, a obecnie komputery i mikroprocesory rządzą codziennym życiem. Podejmując dziś próbę zrozumienia Wszechświata trudno oczekiwać, aby można było zignorować paradygmat komputera.

Komputer zachęca do wyabstrahowania swej istoty; raz ogołocony ze swych podstawowych komponentów i określonych programów nie jest czymś innym jak tylko maszyną Turinga, to znaczy przyrządem opracowującym informacje: serią korelacji pomiędzy skończonymi szeregami liczb całkowitych. Możemy potraktować ten obraz w duchu Kuhnowskiego zdrowego rozsądku i uznać go za najnowszy z nieskończonego ciągu mód, które w chwili następnej rewolucji technologicznej zostaną odrzucone. Chociaż świadomie takiej możliwości nie możemy wykluczyć, przyjmijmy, że matematyka związana z komputerami nie ma wartości tylko przelotnej. Możemy zatem zapytać, czy istotniejsze jest rozumienie ewolucji i struktury Wszechświata jako rachunku czy też jako konsekwencji praw Natury. Możemy też — łącząc te dwa pojęcia — zapytać, czy te ostatnie winniśmy pojmować jako rodzaj programu opracowującego materialną treść naszego świata. Jeżeli bardzo lubiany przez fizyków obraz praw natury jako symetrii i niezmienników w sposób natu-

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[†]Poniższy tekst jest tłumaczeniem IV rozdziału książki J. D. Barrowa *Perchè il mondo è matematico?*, Editori Laterza, Roma — Bari 1992, ss. 83–102.

ralny łączy się z platońską wizją rzeczywistości matematycznej, to obraz komputacyjny (*l'immagine computazionale*) w sposób naturalny zbliża się do bardziej ograniczonej wizji konstruktywistycznej.

Najowocniejszy wynik obrazu komputacyjnego Natury wyraża się w tym, że odsłania on najgłębsze motywy, dzięki którym sama Natura jest zrozumiała, wyjaśnia dlaczego nauka jest możliwa i dlaczego matematyka jest tak skuteczna przy opisie świata fizycznego.

Postawieni przed ciągiem liczb lub symboli jesteśmy prawdopodobnie w stanie zastąpić go jakąś skróconą formułą o tej samej treści informacyjnej: w ten sposób nieskończony ciąg liczb $2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ mógłby być zastąpiony formułą potrzebną do wygenerowania liczb parzystych. W tym przypadku mówimy, że nasz ciąg jest *algorytmicznie ścieśnialny*. Ciąg przypadkowy charakteryzuje się natomiast tym, że nie istnieje krótsza formuła, która by go zawierała. Ciągi rzeczywiście przypadkowe nie mogą być wyrażone w formułach uproszczonych i dlatego są określane jako *algorytmicznie nieścieśnialne*: nie mogą być określone przez nic innego niż one same.

Interesującym aspektem twierdzenia Gödla jest jego stosunek do idei przypadkowości. Na pierwszy rzut oka ten stosunek jest raczej zaskakujący, ale później okazuje się dość głęboki. Nie tylko pozwala dostrzec, że pytanie, czy jakiś ciąg liczb jest przypadkowy czy nie, jest logicznie nierozstrzygalne, ale formułując to samo pytanie w sposób właściwy otrzymujemy rozjaśniający dowód twierdzenia Gödla, który tłumaczy ograniczenia systemów aksjomatycznych. Załóżmy, że mamy dwie listy liczb, które rozpoczynają się w następujący sposób:

$$\{3, 56, 6, 23, 78, \ldots\} \quad \text{i} \quad \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$$

Co uczynimy, aby zrozumieć do jakiego stopnia te ciągi są przypadkowe? Ze względów praktycznych najpierw przekształcamy w taki sposób te liczby w systemie binarnym, używanym przez komputer, że nowe ciągi odpowiadają seriom zer i jedynek. Następnie pytamy, jaka byłaby długość najkrótszego programu, który mógłby wygenerować każdy ciąg. Podana w bitach długość najkrótszego programu określa *złożoność* ciągu. Jeśli jakiś ciąg jest przypadkowy i nie zawiera żadnej szczególnej reguły dla wygenerowania jakiejś liczby na podstawie innej (jak w naszym pierwszym przykładzie) najkrótszy program będzie się składał z samego ciągu. Jeśli jednak ciąg jest uporządkowany, program konieczny do jego wygenerowania będzie znacznie krótszy od ciągu początkowego, który ma długość nieskończoną. W naszym drugim przykładzie program da listę liczb parzystych:

```
{PRINT 2N, N=1, 2, 3,... etc.}
```

Ciąg jest *przypadkowy*, gdy jego złożoność jest równa długości samego ciągu. W takim przypadku potrzebna jest kompletna lista dla jego określenia. Konsekwentnie, jeśli mamy jakiekolwiek dwa przypadkowe ciągi o różnej długości, ciąg dłuższy zostanie uznany za bardziej złożony. Jeśli rozważymy wielką ilość ciągów, na przykład numerów telefonicznych, zauważymy, że większość z nich będzie się charakteryzować wysokim stopniem złożoności i będzie trudno napotkać szeregi o niskim stopniu złożoności.

Pamiętając o pojęciu złożoności, wyobraźmy sobie, że dajemy komputerowi, którego programy zawierają wszystkie symbole i operacje arytmetyki, następującą instrukcję:

```
Wydrukuj taki ciąg, aby można było udowodnić, że
jego złożoność jest większa od tego programu.
```

Komputer nie może nam odpowiedzieć. Jakikolwiek ciąg wygenerowany przez niego musi, na mocy definicji, mieć złożoność mniejszą od jego własnej: komputer może tylko stworzyć ciąg przypadkowy, który będzie *mniej* złożony od jego programu. Teraz jesteśmy w stanie wykorzystać ten dylemat, aby udowodnić, że muszą koniecznie istnieć sformułowania niemożliwe do rozstrzygnięcia. Wybierzmy jakiś ciąg przypadkowy, powiedzmy R, którego złożoność przewyższa złożoność systemu komputerowego. Pytanie typu:

czy R jest ciągiem przypadkowym?

jest niemożliwe do rozstrzygnięcia dla komputera. Złożoność obydwu sformułowań „R jest przypadkowy" i „R nie jest przypadkowy" jest zbyt wielka, by mogła być przełożona na język komputerowy: nie można udowodnić ani jej prawdziwości ani fałszywości. To zaś dowodzi twierdzenia Gödla.

Wydawało się jeszcze niedawno, że łańcuch odkryć zapoczątkowany przez Gödla utknął w martwym punkcie. Studnia tego, co niemożliwe do rozstrzygnięcia, wydawała się wyschnięta pozostawiając swe wielkie odkrycia odsłonięte jakby wierzchołki górskie, podczas gdy fala matematyki przesuwała się w innym kierunku. Pod koniec lat osiemdziesiątych zostały jednak odkryte nowe i prostsze sposoby dowodzenia i wyrażania twierdzeń Gödla, które dzięki temu zostały na nowo sformułowane jako wyrażenia na temat informacji i przypadkowości.

Możemy połączyć pewną ilość informacji z aksjomatami i normami rozumowania, które definiują określony system aksjomatyczny, i ustalić, że jego zawartość informacyjna ma rozmiary programu, który poszukuje wszystkich możliwych łańcuchów dedukcyjnych i dowodzi wszystkich możliwych twierdzeń. Takie ujęcie prowadzi do wniosku, że nie można udowodnić przypadkowości żadnej liczby, której złożoność przewyższy złożoność systemu aksjomatycznego. Gdyby spróbować ominąć te trudności przez dodanie następnych aksjomatów lub reguł inferencyjnych w taki sposób, aby powiększyć zawartość treściową systemu, zawsze pozostaną liczby większe, których przypadkowość nie może zostać udowodniona: istnieje zatem realna granica mocy matematyki.

Amerykański matematyk Gregory Chaitin przebadał konsekwencje takiego sposobu myślenia w kontekście sławnego problemu matematycznego. Jeśli zapiszemy równanie, które łączy dwie (lub więcej) zmienne, powiedzmy x i y

$$x + y^2 = 1$$

i nie ograniczymy wartości x i y do liczb całkowitych, to będziemy mieć do czynienia z nieskończoną ilością par (x, y), które będą rozwiązaniem tego równania (na przykład, $x = 3/4$ i $y = 1/2$). Załóżmy jednak, że interesują nas tylko te rozwiązania, w których x i y są liczbami całkowitymi dodatnimi. Jest to tak zwany „problem diofantyczny” na cześć Diofanta z Aleksandrii, największego badacza algebry w starożytności, który jako pierwszy zastosował w sposób systematyczny symbole algebraiczne, używając specjalnych symboli dla niewiadomych, ich odwrotności i potęg. Trudności te przedstawiają coś więcej niż możliwe rozwiązanie. W naszym elementarnym przykładzie równania diofantycznego jedynymi rozwiązaniami (x, y) są $(1, 0)$ lub $(0, 1)$.

Możemy utworzyć inne równanie diofantyczne, zawierające jakąś zmienną q, która mogłaby przyjmować jakąkolwiek wartość całkowitą $1, 2, 3, 4, \ldots$ i tak dalej; na przykład

$$x + y^2 = q$$

które prowadzi do poprzedniego przykładu jeśli $q = 1$. Załóżmy teraz, że tworzymy równanie diofantyczne bardziej złożone, które oprócz stałej q zawiera N różnych zmiennych $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$, zamiast tylko dwóch x i y. Chaitin pytał się, czy, biorąc pod uwagę wszystkie możliwe wartości q ($q = 1, 2, 3, \ldots$ i tak dalej), równanie tego typu będzie miało skończoną czy nieskończoną liczbę rozwiązań utworzonych z liczb całkowitych.

Początkowo wydaje się, że takie postawienie pytania stanowi niewielką zmianę w stosunku do pytania tradycyjnego: czy dla każdej wartości q równanie to ma rozwiązanie składające się z liczb całkowitych. Sprawa jest jednak nieskończenie bardziej złożona; wydaje się, że nie ma żadnego sposobu określenia odpowiedzi. Odpowiedź jest przypadkowa w tym sensie, że w celu jej podania konieczna jest większa ilość informacji od zawartej w samym problemie; nie można jej też zredukować do innych faktów i aksjomatów matematycznych. Chaitin przedstawiał sytuację formułując liczbę „ω", której cyfry są utworzone z ciągu symboli binarnych 0 i 1, wybranych na podstawie następującego kryterium: bierze się wartości q jedna po drugiej i zapisuje się 0, jeśli równanie diofantyczne ma skończoną liczbę rozwiązań, i 1 gdy liczba rozwiązań jest nieskończona. Jako rezultat otrzymuje się serię jedynek i zer, na przykład

$$\omega = 0010010101001011010\ldots$$

(aż do nieskończoności), która określa liczbę rzeczywistą. Chaitin udowodnił, że ω jest prawdziwą chmurą niewiadomych: żaden komputer nie może obliczyć jej wartości; żaden program, nie ważne jak bardzo złożony, nie może uczynić więcej jak tylko określić skończoną część liczby nieskończonej, konieczną do wskazania ω. Ograniczenia te powstają ponieważ każda cyfra określająca ω rodzi się, z logicznego punktu widzenia, w sposób całkowicie niezależny od wszystkich innych. Żadna maszyna, realizująca zadaną regułę czy program, nie posiada elementu nowości, koniecznego do stworzenia liczby następnej. Na koniec Chaitin przepisał tę liczbę stawiając przecinek na początku:

$$\omega = 0{,}0010010101001011010\ldots$$

w ten sposób liczba daje możliwość, że wybrany przypadkowo program, w którym znalazły się dane przypadkowe, zatrzyma się po dokonaniu skończonej liczby operacji. Jej wartość jest zawsze liczbą pomiędzy (ale nie równą) 0 i 1. Przy wartości 0 wszystkie programy zatrzymałyby się, podczas gdy w drugim ekstremalnym przypadku, przy wartości 1, żaden by się nie zatrzymał.

Interesujący wniosek tej zmiany polega na tym, że dla wartości q w równaniu diofantycznym podobnym do naszego przykładu, jeśli wybierzemy liczbę całkowitą bardzo dużą, nie ma sposobu rozstrzygnięcia czy q–ta cyfra binarna liczby ω będzie jedynką czy zerem. Taka sytuacja powtarza się w nieskończoność niezależnie od wyboru wartości q. Umysł ludzki nigdy nie znajdzie odpowiedzi na postawione wyżej pytanie. Odpowiedź na tego typu pytanie nie znajduje wsparcia w żadnym twierdzeniu jakiegokolwiek systemu formalnego. Każdy z nieskończonych szeregów cyfr, które określają ω, odpowiada faktowi arytmetycznemu niemożliwemu do rozstrzygnięcia.

Nawet arytmetyka zawiera przypadkowość. Niektóre jej prawdy mogą być ustalone tylko drogą badania doświadczalnego. Widziana w takim świetle zaczyna upodabniać się do nauki doświadczalnej.

Pokazana w tym przykładzie nieunikniona niemożliwość rozstrzygnięcia o pewnych stwierdzeniach powstaje z faktu, że system logiczny komputera, oparty o arytmetykę, nie jest wystarczająco złożony, by zarządzać całą gamą sformułowań, które można otrzymać na bazie jego alfabetu. Konsekwentnie, nie ma sposobu rozstrzygnięcia, czy program używany do spełnienia szczególnego zadania jest najkrótszym ze wszystkich możliwych.

Rezultaty podobne do tego wyznaczają pewne ograniczenia ważności jakiegokolwiek podejścia do badania praw Natury opartego na samej tylko prostocie. Metodzie formalistycznej w matematyce odpowiada w nauce analogiczna idea, że jednym, wszystko ogarniającym, matematycznym prawem można opisać jakikolwiek ciąg obserwacji Natury. Być może istnieje różnorodność praw zdolnych do wygenerowania takiego ciągu danych, ale niektóre z nich będą wyjątkowo sztuczne i nienaturalne. Naukowcy zwykle wolą prawo wyrażające najniższy stopień złożoności w sensie wyżej opisanym, tzn. takie które przedstawiałoby najbardziej zwięzłą kodyfikację informacji w algorytmie. Czasem taką procedurę nazywa się „brzytwą Ockhama”. Rozumiemy natychmiast, że takie podejście nigdy nie pozwoli nam dowieść, iż jakieś sformułowane przez nas prawo, zawiera pełny opis Natury, gdyż zawsze będą istnieć sformułowania nierozstrzygalne, podpadające pod jego zasięg; używając terminów ogólniejszych, najbardziej ekonomiczna kodyfikacja faktów nigdy nie może być dowiedziona. Oznacza to, że nigdy nie można wiedzieć, czy zagadka Wszechświata została odkryta czy nie, lub czy pozostająca do zrobienia konieczna redukcja jest sprawą małej wagi czy gigantycznym przedsięwzięciem.

Nauka istnieje, gdyż świat naturalny wydaje się algorytmicznie ścieśnialny. Formuły matematyczne, zwane przez nas prawami Natury, są ekonomicznymi redukcjami ogromnych ciągów danych o zmianach stanów świata: oto co rozumiemy przez *zrozumialność świata (intelligibilność)*. Możemy też przedstawić sobie świat, którego wszystkie zjawiska są chaotyczne i przypadkowe (dokładnie w taki sposób niektóre z nich się jawią); w takim przypadku jego własności mogłyby być opisane tylko przez sporządzenie listy niezliczonych ciągów zjawisk obserwowanych w czasie. Uprawianie nauki byłoby trochę podobne do obserwowania pociągów a badane zjawiska posiadałyby jedność, którą odkrywamy w świecie sztuki i twórczości. Jeśli Wszechświat jest obiektem jedynym i koniecznym, być może nie będziemy zaskoczeni odkrywając, że w całości idzie o obiekt, który nie jest algorytmicznie ścieśnialny, że nie może być wyrażony w jednej skróconej formule, ale może być określony przez kompletny opis ciągu zdarzeń. Poszukiwanie jakiejś Teorii Wszystkiego jest ekstremalnym wyrazem naszej wiary w redukowalność (ścieśnialność) algorytmiczną Natury.

Wiemy, że w świecie istnieją określone procesy chaotyczne, które są algorytmicznie nieredukowalne, podobnie jak istnieją niewykonalne działania matematyczne. Ta właśnie nietrwała wizja przypadkowości sugeruje nam obraz świata, który mógłby być całkowicie nieredukowalny. Jego naukowcy nie byliby matematykami, lecz bibliotekarzami, katalogującymi fakty jeden za drugim, bez jakiegokolwiek związku między nimi; nieszczęście polega na tym, że fakty jak to już raz ktoś zauważył — są niewiarygodnie liczne.

Traktujemy naukę jako próbę algorytmicznej redukcji świata doświadczenia, a poszukiwanie jedynej Teorii Wszystkiego, będącej w stanie tłumaczyć wszystkie zjawiska, jako ostateczny wyraz głębokiego przekonania niektórych naukowców, że struktura Wszechświata w jego złożoności jest algorytmicznie redukowalna. Przyznajemy jednak, że umysł ludzki odgrywa znaczną rolę w tej ocenie. Zdolność umysłu ludzkiego do przeprowadzania redukcji jest przedziwnie związana z wyraźną redukowalnością algorytmiczną świata. Trwający proces selekcji naturalnej przynajmniej w części wyostrzył nasze umysły i doprowadził je do obecnego stanu ewolucyjnego. Wrażliwość umysłu na środowisko i zdolność przetrwania jest oczywiście związana z umiejętnością przeprowadzania redukcji algorytmicznych. Im bardziej organizm jest zdolny do gromadzenia i kodyfikowania swego doświadczenia świata naturalnego, tym bardziej jest w stanie pokonać rodzące się w środowisku niebezpieczeństwa, które w przeciwnym razie byłyby nieprzewidywalne. W ostatniej fazie historii *homo sapiens* ta zdolność osiągnęła nowe, bardzo wyrafinowane poziomy. Jesteśmy zdolni myśleć o samym akcie myślenia. Zamiast zwykłego czerpania z doświadczenia, jak to zawsze się działo w procesie ewolucyjnym, potrafimy symulować lub wyobrażać sobie możliwe rezultaty naszych działań. Tym sposobem nasz umysł symuluje przeszłe doświadczenia wewnątrz nowych sytuacji. Aby to robić poprawnie, konieczne jest, aby mózg był specyficznie nastrojony: jest oczywiste, że zdolność umysłowa musi być wyższa na pewnym poziomie, aby móc wygenerować skuteczną redukcję algorytmiczną, a nasze zmysły muszą być receptorami dość wrażliwymi, by zebrać znaczącą ilość informacji ze środowiska. Łatwo wyczuwamy jednak, dlaczego nie staliśmy się w tym zbyt sprawni. Gdyby bowiem nasze zmysły były wyczulone na zbieranie wszystkich możliwych informacji o rzeczach widzianych i odczuwanych — ze wszystkimi szczegółikami ustroju atomowego — nasz umysł byłby przepełniony informacjami. Opracowanie byłoby wolniejsze, odstępy reakcji dłuższe i potrzebna byłaby cała seria dodatkowych obwodów dla przesiania i rozdzielenia informacji na różne poziomy głębokości i intensywności.

Fakt, że nasz umysł akceptuje ograniczenia przy gromadzeniu informacji i ich opracowaniu, oznacza, że mózg dążyłby do algorytmicznej redukcji dotyczącej Wszechświata, nawet gdyby nie był on w swej istocie ścieśnialny. W praktyce mózg dokonuje tej operacji metodą odcinania. Bez dodatkowej pomocy nasze zmysły są zdolne do przyswojenia sobie w najlepszym wypadku pewnej tylko ilości informacji, do pewnego tylko poziomu wrażliwości. Nawet gdy w celu rozszerzenia zakresu naszych zmysłów używamy takich sztucznych sensorów jak teleskopy czy mikroskopy, nie potrafimy uniknąć bardzo podstawowych ograniczeń. Dość często ten proces odcinania zostaje sformalizowany i staje się dziedziną wiedzy stosowanej. Dobrym przykładem jest statystyka. Studiując zjawisko szerokie i bardzo skomplikowane, często staramy się zredukować algorytmicznie posiadane informacje opierając się na selektywnej próbce. Ci, których zadaniem jest zbadanie opinii publicznej na temat mających się odbyć wyborów, teoretycznie powinni zapytać każdego mieszkańca danego kraju, na kogo zamierza głosować. W praktyce jednak zaciągają opinii reprezentatywnej części społeczeństwa i stale otrzymują zaskakująco dobre przewidywanie złożonych wyników wyborów.

Przyjąwszy, że świat jest algorytmicznie ścieśnialny, matematyka jest użyteczna do jego opisu: jest w rzeczywistości językiem skracania ciągów. Umysł ludzki pozwala nam wejść w kontakt z tym światem, ponieważ mózg posiada zdolność ścieśniania w jednej krótszej formule złożonych ciągów danych zmysłowych. Te skrócenia sprawiają, że istnieją myślenie i pamięć. Naturalne granice zmysłowości nałożone przez Naturę na nasze organy sensoryczne bronią nas przed przeładowaniem informacjami na temat świata. Granice te spełniają funkcję wentyli bezpieczeństwa w odniesieniu do umysłu. Jednak wszystko zależy od wyjątkowej zdolności mózgu do wykorzystywania algorytmicznej redukowalności świata. Najbardziej zaskakującą rzeczą jest to, iż mózg jest w stanie bardziej złożonym i przeobrażonym niż sam świat, którego złożoność — mimo iż nie zna dobrze swej własnej — stara się wyrazić.

Nasze rozważanie o matematyce i świecie związało się coraz bardziej z paradygmatem komputacyjnym. Rozwój przemysłu informacyjnego i rozpowszechnienie się małych i tanich komputerów, z ogromnymi możliwościami przedstawień graficznych, odegrały oczywiście fundamentalną rolę przy pojawieniu się obrazu, który dzisiaj mamy o świecie z jego złożonością, ale też poszerzyły gamę problemów, które jesteśmy w stanie rozwiązywać. Przez prawie tysiąc lat naukowcy posługiwali się skutecznie matematyką do badania szczególnego podzbioru własności Wszechświata: regularności i jednolitości Natury, ponieważ do tego wystarczają proste opisy matematyczne, równania do których rozwiązania potrzebne są kartka, ołówek i myślenie. Upodobanie dla aspektów symetrycznych i przewidywalnych w zakresie nauk matematycznych przenika nasze programy szkolne. Studentom przedstawia się problemy linearne fizyki, rozwiązywalne równania matematyczne, tak że dość szybko dochodzą do przekonania, iż wszystkie równania mają jakieś rozwiązanie. Nic bardziej odległego od prawdy. Podczas gdy odkryte prawa Natury są proste pod wieloma względami i opierają się na zachowaniu jakiejś głębokiej symetrii, nie można powiedzieć ogólnie, że wszystkie rezultaty działań praw Natury ukazują te same symetrie. Sprawia to, że wyraźnie złożony świat, w którym żyjemy, jest rządzony we wszystkich swych różnych aspektach przez ograniczoną liczbę praw prostych i symetrycznych. Wyobraźmy sobie, że usiłujemy zostawić bez podparcia ołówek stojący na ostrym końcu w stanie równowagi. *Prawa*, które rządzą ruchem we Wszechświecie, nie sprzyjają żadnemu szczególnemu kierunkowi (w tym sensie są doskonale symetryczne), ale ołówek raz pozostawiony samemu sobie, lub dotknięty, upadnie zawsze w *jakimś jednym* kierunku, potwierdzając w ten sposób zjawisko zachowujące prawo ciężkości, którego symetria wewnętrzna zostaje złamana. To złamanie symetrii jest odpowiedzialne za złożoność świata, który nas otacza.

Gdy naukowcy nie mieli do dyspozycji prostych komputerów, woleli badać konsekwencje proste, symetryczne i rozwiązywalne praw natury, gdyż własności wyników asymetrycznych są zwykle zbyt skomplikowane do studiowania. Ale komputery pozwalają symulować wyniki „barokowe” i badać je sposobem doświadczalnym. Jednym z najważniejszych punktów, które przyciągnęły uwagę tych badań doświadczalnych, stał się ten aspekt złożoności niezorganizowanej, który obecnie jest znany jako „teoria chaosu”. Mówiąc prosto, systemy chaotyczne to takie systemy, które wykazują wielką wrażliwość na małe zmiany. Jeśli stan aktualny systemu chaotycznego zmieni się, choćby w sposób niezauważalny, w krótkim czasie będzie się on zachowywał w sposób całkowicie różny od tego, który przyjąłby w stanie niezakłóconym. Wiele znanych nam rzeczy pasuje do tego opisu: pogoda atmosferyczna, systemy ekonomiczne, równowaga ekologiczna i stosunki ludzkie. To właśnie dlatego, że nigdy nie jest możliwe poznanie *dokładne* i w każdym miejscu stanu aktualnego jakiegokolwiek systemu fizycznego, niejasność w krótkim czasie przekształca się w niepewność, która ogarnia wszystko. Z tego powodu, chociaż w teorii znamy ścisłe prawa Natury rządzące ewolucją zjawisk atmosferycznych, w praktyce nie jesteśmy w stanie podać dokładnych prognoz, na sto procent, jaka pogoda będzie, nawet jutro, ponieważ w rzeczywistości nie znamy dokładnie sytuacji dzisiejszej. Wiemy tylko to, o czym informują nas stacje meteorologiczne, rozstawione w odległości 50 lub 100 kilometrów jedna od drugiej. Możliwe zmiany pomiędzy jedną stacją a drugą, różnice wzniesień, sprawiają, że przepowiednie są bardzo różne nawet w przypadku prognoz na jeden dzień.

W okresie ostatnich 10 lat byliśmy świadkami rozkwitu badań systemów chaotycznych, możliwych dzięki rozpowszechnieniu się małych komputerów. Systemów takich nie można badać w sposób szczegółowy dysponując myślą i rozwiązywalnymi równaniami, gdyż są zbyt trudne. Stąd pojawiła się nowa dziedzina, „matematyka doświadczalna”, która obserwuje zachowanie się systemów złożonych, symulowanych w komputerze. Sądzę, że w przyszłości jej wpływ rozciągnie się na wszystkie dziedziny matematyki, także na te dziedziny matematyki czystej, które wydają się być od niej odległe.

Jeśli wyobrazimy sobie wszystkie prawdy matematyczne zebrane na mapie w taki sposób, że najłatwiejsze, czyli te, których dowody są krótkie, zjawiają się blisko, a najtrudniejsze, czyli te, których dowody są długie — daleko, matematyka bez żadnej pomocy może osiągnąć tylko minimalny ułamek tych prawd. Najgłębsze, i stąd być może najbardziej interesujące, prawdy matematyczne mogłyby być tymi, które znajdują się poza zasięgiem rachunku ludzkiego, które mają promień setek, tysięcy, czy też miliardów lat. Mieliśmy przykłady matematyków, którzy wykorzystali pomoc komputerów do zbadania struktury abstrakcyjnego świata matematyki przy pomocy nowych i niezwykłych systemów odzwierciedlających sposób, w jaki technologia informacyjna wkroczyła do królestwa symulacji i rzeczywistości wirtualnych. W celu ustalenia, czy jakiś twór matematyczny posiada jakąś szczególną własność, tworzy się przy pomocy komputera rzeczywistość wirtualną — symulacje jak wyglądałyby geometria i logika w takim hipotetycznym świecie, a potem bada się ją, aby ustalić drogą obserwacji, czy posiada interesujące własności matematyczne. Nowe odkrycia najprawdopodobniej zderzą się z wrażliwością wielu matematyków, ale czy sytuacja jest tak różna od tej, która normalnie ma miejsce w nauce? Nie możemy udowodnić prawa ciężkości. Ciągłe potwierdzenia naszych przepowiedni wzmacniają naszą ufność. Jabłka zdają się ciągle spadać z drzew zgodnie z prawem ciężkości Newtona, ale to nie daje pewności, że pewnego dnia nie zaczną czynić coś zupełnie innego, zostawiając nas osłupiałych, kontemplujących wyniki prawa lewitacji Newtona.

Kończąc, powróćmy do wizji świata jako ogromnego komputera. Możemy wyobrazić sobie prawa Natury jako rodzaj programów używanych przez maszynę zbudowaną z cząstek elementarnych i energii, tworzących nasz świat materialny. Takie wyobrażenie jest dość odległe od sposobu widzenia rzeczy odpowiadającemu obrazowi używanemu przez fizyków. Przez więcej niż 15 lat badacze fizyki cząstek elementarnych uczynili wielkie postępy w patrzeniu na świat jako na wielką symetrię — kalejdoskop wzajemnie się przenikających abstrakcyjnych schematów, której zachowanie równało się potwierdzeniu praw Natury. Poszukiwanie „Teorii Wszystkiego" odpowiada poszukiwaniu jedynej, wszystko rozumiejącej symetrii, ogarniającej jako swe elementy wszystkie, znane już prawa Natury. Ta wizja Wszechświata wznosi się na dwóch fundamentach: wierze w supremację praw symetrycznych (które i tak pozostawiają przestrzeń dla wyników asymetrycznych) i *ciągłości* substratu, który leży u podstaw przestrzeni i czasu.

Paradygmat komputacyjny jest całkowicie odmienny. Nie odwołuje się do symetrii jako prawa pierwszorzędnego i, koncentrując się na opracowaniu „kawałeczków" (*bits*) informacji, przyjmuje dyskretny i nieciągły obraz substratu świata. W przeszłości prawie wszystkie nauki skupiały swe zainteresowania na ciągłości zmiany, ale może się z powodzeniem zdarzyć, że na bardziej mikroskopijnym poziomie substrat przestrzeni i czasu nie tworzy kontinuum. Gdyby tak było, to sądzę, że pozostałaby do odsłonięcia cała puszka Pandory nieoczekiwanych złożoności dotyczących matematycznego ładu świata: rzeczywiście, światy nieciągłe, choć może nas to bardzo zaskoczyć, nie są po prostu bardziej skomplikowane od ciągłych, ale są *nieskończenie* bardziej skomplikowane. Jeśli się pytamy ile jest przekształceń matematycznych pomiędzy wszystkimi liczbami rzeczywistymi i wszystkimi liczbami rzeczywistymi, odkrywamy istnienie nieskończoności rzędu wyższego od liczby funkcji ciągłych. Ciągłość narzuca niewiarygodnie ograniczające brzegi na gamę możliwości zmiany. Być może będziemy musieli porzucić to uproszczenie, jeśli zechcemy widzieć Wszechświat raczej jako szeroki „program" niż wielki „schemat". W końcu będzie chodziło o określenie czy prawa fizyki nakładają jakieś ograniczenia na ostateczne zdolności procesu rachowania, ograniczając jego prędkość, obszar i precyzję, czy też tzw. prawa fizyki są tylko mglistymi ekstrapolacjami ogólnych praw rachunku, które rządzą fundamentalnie nieciągłym Wszechświatem.

Z włoskiego przetłumaczył

Stanisław Wszołek