UMAR AL-KHAYYĀM'S CONTRIBUTION TO THE ARABIC MATHEMATICAL THEORY OF MUSIC.

MICHELE BARONTINI[1] and TITO M. TONIETTI[2]

Abstract.

Here we present the translation[3] of some pages Umar Al-Khayyam devoted to the mathematical theory of music. Our edition is based on a manuscript preserved in the Public Library of Manisa (Turkey). Among other things, it corrects the mistakes detected in an other transcription. In the end, we compare Al-Khayyam's theory either with Arabic theories of music, or with those of different cultures.

[1]michele.barontini@neuf.fr

[2]Dipartimento di matematica, Università di Pisa, tonietti@dm.unipi.it

[3]This is the Italian edition of an English article (with the Arabic text) to be published somewhere. As soon as the issue of the journal will become certain, it will be reported.

1. *The Text: "Al-Qawl 'ala-l Ajnas allati bi-l arba'a" [Discussion on the genera contained in a fourth].*

Il testo è stato ricavato mettendo a confronto il manoscritto conservato nella Il Halk Kutuphanesi di Manisa (Manisa Public Library, Turkey) con l'edizione curata da Jamal Al-Din Humai nell'appendice a *Khayyām-Nāma [Il libro di Khayyām]*.[4] Ringraziamo Amnon Shiloah, il quale aveva già segnalato e descritto il manoscritto,[5] per averci gentilmente fornito la copia a sua disposizione. Ringraziamo anche Soghra Nobakhtian e Jafar Zafarani per averci inviato l'appendice al libro di Humai. Al curatore dell'edizione a stampa va il merito di aver richiamato l'attenzione sulle pagine di teoria musicale attribuite ad Umar Al-Khayyām. Le differenze tra la nostra edizione del manoscritto e quella stampata con i relativi errori vengono segnalate nelle note alla traduzione inglese. La nuova edizione viene fatta in collaborazione tra Michele Barontini, musicista e cultore di scienze umane arabe, e Tito M. Tonietti, storico delle scienze nonché studioso delle loro relazioni con la musica. La traduzione inglese è opera di Ron Packham.

[4] Jamal Al-Din Humai, *Khayyām-Nāma*, (Teheran,1967): 340-344. Le fonti dichiarate dallo studioso iraniano erano le seguenti. "La presente epistola si trova in una collezione di opuscoli copiati contenenti altri lavori matematici di Khayyām al fascicolo 509 e precisamente alle pp. 97-99, presso la Biblioteca Centrale dell'Università di Teheran nel settore dei libri che furono trasferiti a Teheran per interessamento di Fadil Karami Agha dalla Turchia. La data trascritta sul retro dell'originale è secolo VII-VIII Egira [XIV-XV A.D.]. Noi non abbiamo fatto che copiare a nostra volta il testo già copiato presso la Biblioteca Universitaria (e non siamo sicuri della correttezza del medesimo, specialmente riguardo ai numeri) senza tralasciare nulla; comunque abbiamo trascritto anche qualche paragrafo di commenti manoscritti a margine che completano il testo e che dimostrano che almeno la copia qui impiegata costituisce un tutto unico. Molto meglio sarebbe stato se avessimo potuto disporre di un'altra copia dello stesso testo potendo confrontarle e correggerle a vicenda!" Il manoscritto, nella Central University Library di Teheran, veniva citato, da A. P. Youschkevitch & B. A. Rosenfeld, entry 'AL-KHAYYĀMĪ', *Dictionary of Scientific Biography*, (New York, 1981), vol. V: 323-334 p. 332, come "509, fols. 97-99". Una copia di questo manoscritto si troverebbe oggi anche a Tashkent nella Biruni Library; private communication by Amnon Shiloah.

[5] Amnon Shiloah, *The Theory of Music in Arabic Writings*, (München, 1979), pp. 296-297.

"Il rapporto dell'unità-campione più un terzo [4:3][6] si suddivide in tre ulteriori rapporti i quali corrispondono ai tre *ab'ad* [intervalli] confinati entro quattro suoni. Per questo il rapporto dell'unità-campione più un terzo fu chiamato rapporto di quarta [tetracordo]. Questi tre *ab'ad* [intervalli] o non comprendono un intervallo di rapporto maggiore della somma degli altri, oppure essi comprendono un intervallo il cui rapporto è uguale al doppio dei due rimanenti. Il primo fra gli *ajnas* [tra i generi della quarta] fu chiamato *qawi* o *tanin* [forte, diatonico], il secondo *mulawwan* [colorato, cromatico] o *mu'tadil* [moderato, medio], ed il terzo *rikhw* [debole, enarmonico] o *ta'lif* [composto].[7]

La prima delle specie forti è la prima che raddoppia l'intervallo; essa è un intero con un settimo [8:7], un intero con un settimo [8:7], ed un intero più una parte di quarantotto parti di un intero [49:48]. Essa corrisponde ai numeri 64, 56, 49, 48.[8] Si tratterebbe di una specie molto forte e buona, non fosse per quell'intervallo, cioè quello di un quarantottesimo [49:48], un valore molto lontano [dalla pratica].

La seconda delle specie forti è la seconda che raddoppia [l'intervallo]; essa consiste di un intero con un ottavo di intero [9:8], più un intero con un ottavo di intero [9:8] ed un intero con tredici parti di duecentoquarantatré parti [256:243], corrispondenti ai numeri 324, 288, 256, 243.[9] Questa è una specie molto vicina alla pratica, tanto da essere la

[6] Tra le parentesi quadre [ ] esprimiamo le nostre aggiunte le quali aiutano il lettore a comprendere il testo più agevolmente.

[7] Il curatore iraniano Humai propone *taniniyan*, piuttosto che *taninan*, od addirittura *tannan*, che darebbe 'sonoro', mancando la punteggiatura della prima *nun* e della *ya* nel manoscritto di Manisa. L'interpretazione di Humai opta per una lettura più moderna vicina alla terminologia musicale corrente ed al significato di 'diatonico'. Si riprendevano qui i generi greci. Il tetracordo 4:3 ne ammetteva tre. Quello diatonico veniva formato da due toni ed un semitono. Quello cromatico conteneva una terza minore e due semitoni. Il tetracordo enarmonico consisteva in una terza maggiore e due microintervalli simili a quarti di tono. Curt Sachs, *The Rise of Music in Ancient World. East and West*, (New York, 1943), pp. 206-207.

[8] I quattro numeri stanno tra di loro nelle proporzioni indicate. Ad esempio, 56 si ottiene da 49 dividendo per 7 e moltiplicando per 8; 64 si ottiene da 56 nello stesso modo. Le tre proporzioni composte insieme 8:7, 8:7, 49:48 danno 4:3 la quale dunque ne viene divisa in tre parti. I suonatori degli strumenti musicali li accorderebbero, quando seguissero una teoria analoga, collocando secondo quelle proporzioni le note che dividono l'intervallo di quarta. Ad esempio, il *re* ed il *mi* nell'intervallo $do - fa$ della quarta, secondo la notazione italiana moderna. Per preparare il commento del paragrafo seguente, man mano che Al-Khayyām elenca i suoi generi, li confrontiamo con quelli presenti nelle opere di Al-Fārābī e di Ibn Sinā (Avicenne). Tale primo modo di dividere la quarta si trova anche in Ibn Sinā, extrait du *Kitāb al-Šifā [The Book of Healing]*, 'Section des sciences éducatives, chapitre XII, La musique', in *La Musique Arabe* 4 vol., ed. Rodolphe d'Erlanger, (Paris, 1930 and 1935), vol. II, p. 146. Lo riporta anche Al Fārābī, *Kitāb al – Mūsīqā al – kabīr [Grand Traité de la Musique]*, in *La Musique Arabe*, vol. I-II, I p. 109. Tito M.Tonietti, *Eppur si ode*, (to be published), 'Capitolo 4'.

[9] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 109. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 149.

sola [comune] nell'uso della maggioranza dei paesi.[10]

La terza specie è la terza che raddoppia [l'intervallo]; essa consiste in un intero più un nono [10:9], un intero più un nono [10:9] ed in un intero con sei parti di settantacinque [81:75 = 27:25]. I numeri sono 100, 90, 81, 75. Fu trovata da Al-Fārābī e, per quanto posso supporre, ritengo non sia tra le più comuni.[11]

La quarta è la forte e congiunta della prima specie; essa è costituita da un intero più un settimo di intero [8:7], da un intero più un ottavo di intero [9:8] e da un intero con un ventisettesimo di intero [28:27]. I numeri sono 72 62[63] 56 54.[12] Questo è un calcolo molto buono.

La quinta è la forte congiunta della seconda specie ed è costituita da un intero con un ottavo di intero [9:8], da un intero con un nono di intero [10:9] e da un intero con un quindicesimo di intero [16:15]; i suoi numeri sono 180 168[160] 144 165[135].[13] Questa specie è la migliore di tutte secondo la mia opinione.

La sesta, tra le congiunte della terza specie, è costituita da un intero con un nono [10:9], un intero con un decimo [11:10] e da un intero con un undicesimo [12:11]. I suoi numeri sono 220 198 180 165.[14] Ed anche questa è una specie buona.

La settima, la prima disgiunta, è costituita da un intero con un settimo [8:7], un intero con un nono [10:9] e da un intero con un ventesimo [21:20]. I suoi numeri sono 80 60[70] 63 60.[15] Anche questa è buona ed appropriata.

---

[10] Si tratta della tradizione greco-pitagorica. A. Barker, *Greek Musical Writings*, (Cambridge, 1984 and 1989). Tito M. Tonietti, 'The Mathematical Contributions of Francesco Maurolico to the Theory of Music of the 16th Century (The problems of a Manuscript)', *Centaurus*, 48 (2006): 149-200. Tonietti, *Eppur si ode*, 'Capitolo 1'.

[11] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 109.

[12] Se vogliamo conservare le stesse proporzioni come nel testo, il numero 62, presente sia nel manoscritto di Manisa che nell'edizione di Humai, va corretto in 63: perché tanto si ottiene secondo i 9:8 di 56. Se viceversa volessimo conservare il 62 nella successione, allora andrebbero cambiate le proporzioni nel testo. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 111. A questo punto, nella sua edizione, Humai ha dichiarato: "Lo dico senza essere completamente sicuro sulla correttezza dei calcoli per questo argomento e quel che segue. E Allah ne sa di più." La frase ci permette di sospettare che il curatore dell'edizione a stampa non padroneggiasse troppo la teoria greco-araba della musica.

[13] I numeri della successione non corrispondono alle proporzioni nel testo; 168 va corretto in 160, 165 in 135. Nell'edizione di Humai, posto accanto a 18 sotto 1/5 sta un segno di parentesi orizzontale ed un punto. Esso probabilmente deriva dallo zero 0 sormontato da una linea presente nel manoscritto di Manisa. Spesso, nei manoscritti, lo zero veniva scritto come un omicron sopralineato. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 111.

[14] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 111. L'edizione di Humai riporta invece i numeri in parte errati 225 198 18 165LA. Quest'ultimo simbolo LA *lam alif* è probabilmente dovuto alla grafia per lo zero nel manoscritto di Manisa.

[15] L'errore nel manoscritto di Manisa, 60 al posto di 70, veniva aggravato nell'edizione di Humai dai numeri 85 65 63 6?, dovuti sempre probabilmente alla diversa notazione per lo zero. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 112 and 114. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 147.

La specie ottava, seconda tra le forti disgiunte, è costituita da un intero con un ottavo [9:8], un intero con un decimo [11:10] e da un intero con ventitré duecentonovantasettesimi [320:297]. I suoi numeri sono 396 353[352] 320 297.[16] Questa specie è stata scoperta da Al-Fārābī, ma non è appropriata, nonostante che egli vi abbia individuato al suo interno l'intervallo cosiddetto *tanini*.[17]

Un'altra specie fu scoperta dallo Imam of Saviours, Ibn Sinā, ed è di un intero con un ottavo [9:8], un intero con un dodicesimo [13:12], [lacuna][18] e sostenne che essa è composta da un intero con un settimo [8:7], un intero con un tredicesimo [14:13] ed un intero con un dodicesimo [13:12] i cui numeri sono 16, 14, 13, 12. Nella mia opinione, questa specie è lontana dall'essere utilizzabile per l'esigua differenza tra i suoi due intervalli simili. È possibile trovarne altre tra questi [generi] disgiunti; io mi sono limitato a queste poche disgiunte perché [procedendo in questo modo si trovano specie che] non sono in uso e perché lontane da ogni consentita *i'tilaf* [consonanza].[19]

La prima della specie colorata è un intero con un quinto [6:5], un intero con un diciannovesimo [20:19] ed un intero con un diciottesimo [19:18]. I numeri sono 24, 20, 19, 18.[20]

La seconda della specie colorata è costituita da un intero con un quinto [6:5], un intero con un quattordicesimo [15:14] e da un intero con un ventisettesimo [28:27]. I numeri sono 36, 30, 28, 27.[21]

La terza di questa specie è un intero con un quinto [6:5], un intero

[16] 353 va corretto in 352. L'edizione di Humai al posto dello 0 di 320 riporta le lettere arabe per LA.

[17] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 112. Per questo intervallo, equivalente al tono intero pitagorico 9:8, cf. anche Carl Cowl, 'The Risala fi hubr ta'lif al-'alhan of Al-Kindi', *The Consort*, 23 (1966): 129-166.

[18] La lacuna veniva segnalata al margine dal copista nel manoscritto di Manisa, ma essa veniva trascurata nell'edizione di Humai. La successione comunque va completata con "un intero con undici centodiciassettesimi" [128:117], la quale si compone con le altre proporzioni in 4:3. Ma poi si deve partire da 13:12, altrimenti quegli interi non sarebbero divisibili tra di loro. Allora la successione di numeri diventa 156, 144, 128, 117. Ibn Sinā scriveva: "468($\frac{13}{12}$)432($\frac{9}{8}$)384 351"; Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 150. È interessante che anche nell'edizione per Ibn Sinā di Erlanger manchi il rapporto 128:117 tra i due ultimi numeri e che questi nella successione siano multipli di 3 dei nostri. Se anche nelle edizioni arabe più antiche mancasse questo rapporto, ciò non significherebbe forse un peraltro molto plausibile contatto diretto tra questo testo di Al-Khayyām con quello di Ibn Sinā?

[19] Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 148. Con i rapporti nel diverso ordine 8:7, 13:12, 14:13 il genere si trova anche in Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 114.

[20] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 104 and 105.

[21] L'edizione di Humai scrive 35 al posto di 30. Nel copiare, si confondeva spesso il 5 con lo 0? In effetti, ci sono varie versioni dello zero tracciate dai copisti del manoscritto a Manisa, le quali vanno da una specie di gamma greca ad una sorta di *He* araba e fino ad un cerchietto simile all'odierno 5. Non c'è dubbio invece sul cinque: una specie di B rovesciata nelle grafie più antiche. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 107. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 153.

con un trentanovesimo [40:39] ed un intero con un dodicesimo [13:12]. I suoi numeri sono 48, 40, 39, 36. Penso che questa non sia stata trovata da Al-Fārābī e che la seconda e la terza siano lontane dalla pratica, nonostante [i loro rapporti] siano accettabili.[22]

La quarta della specie è un intero con un quinto [6:5], un intero con un ventiquattresimo [25:24] ed una parte di quindici con un intero [16:15]. I numeri sono 60, 50, 8 45 [48, 45].[23] Questa specie è vicina all'uso comune.

La quinta è un intero con un sesto [7:6], un intero con un quattordicesimo [15:14], ed un intero con un quindicesimo [16:15]. I numeri sono 16 15 4[14] 12.[24] Questa specie è buona nonostante che noi abbiamo calcolato la parte maggiore alla fine del gruppo preferendo alleggerirlo, ma questo non disturba troppo.

La sesta è un intero con un sesto [7:6], un intero con un undicesimo [12:11] ed un intero con un ventunesimo [22:21]. I numeri sono 28 24 22 21 ed anche questa è buona.[25]

La settima è un intero con un sesto [7:6], un intero con un nono [10:9] ed un intero con un trentacinquesimo [36:35]. I numeri sono 40 36 35 30.[26] Anche qui abbiamo posto l'intervallo più ampio alla fine, ma si tratta di un insieme lontano dalla pratica.

Quanto alla prima delle specie composte [enarmoniche], essa è un intero più un quarto [5:4], un intero più un trentunesimo [32:31] ed un intero più un trentesimo [31:30]. I numeri sono 40 32 31 30.[27]

La seconda è un intero con un quarto [5:4], un intero con un trentanovesimo [40:39] ed un intero con un venticinquesimo [26:25]. I numeri

[22] La terza infatti non l'abbiamo trovato in Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*.

[23] 458 va completato in 48 45. L'edizione di Humai reca *wa gu'zun min khamsata wa 'asharin kullin* [e una parte di venticinque di intero]. Il manoscritto di Manisa aveva scritto invece *wa gu'zun min khamst 'ashar min kullin* [e una parte di quindici di intero], ma poneva anche due ingannevoli punti sotto la lettera *ra* di *'ashar* tali da segnalare un duale ed indurre in confusione. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 113. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 153.

[24] Nella successione, manca l'1 di 14 e le proporzioni vengono calcolate nell'ordine inverso. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 104. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 152.

[25] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 107. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 152.

[26] Le proporzioni, le quali legano i quattro numeri e si compongono in 4:3, sono invece nell'ordine 10:9, 36:35 e 7:6. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 152.

[27] L'edizione di Humai ha continuato a scrivere la lettera LA invece dello 0 nel 40. Abbiamo già descritto come questo sia derivato dalla versione dello zero assomigliante ad una *lam-alif* araba. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 104-105. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 154.

sono 100 80 78 75.[28] Questa è una buona proporzione.

La terza è un intero con un quarto [5:4], un intero con un trentacinquesimo [36:35] ed un intero con un ventisettesimo [28:27]. I numeri sono 140 112 1[0]8 105.[29] Queste due specie non sono citate nel libro degli antichi maestri *Kutub al Qudama*, nonostante la loro bontà. Non saprei indicarne altra ragione, per spiegare la mancanza, diversa da qualche forma di negligenza [nel copiare i testi].[30]

La quarta specie è un intero con un quarto [5:4], un intero con un ventitreesimo [24:23] ed un intero con un quarantacinquesimo [46:45]. I numeri sono 60 48 47[46] 45.[31] Questa fu trovata [dagli antichi maestri], ma questa specie non è altrettanto consonante come la seconda e la terza. Sarebbe possibile aggiungere altri esempi di queste specie, ma esse non sarebbero usuali.

L'epistola fu compiuta con la lode ad Allah e con il suo buon auspicio fu accolta."

---

[28] Nell'edizione di Humai manca il secondo 0 di 100. In questa successione, il genere non l'abbiamo trovato né in Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, né in Ibn Sinā, *al-Šifā*. Ma Ibn Sinā, a p. 154, aveva dato un diverso ordine ai rapporti ottenendo i numeri: "$80(\frac{40}{39})78(\frac{26}{25})75(\frac{5}{4})60$".

[29] Nel manoscritto manca lo 0 di 108; inoltre la sequenza di numeri si accorda con un diverso ordine di proporzioni: 5:4, 28:27, 36:35.

[30] Il terzo genere composto cioè enarmonico, nell'ordine 5:4, 28:27, 36:35, si trova invece in Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 113. Nella forma "$36(\frac{36}{35})35(\frac{5}{4})28(\frac{28}{27})27$", esso sta anche in Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 154.

[31] Il numero 47 non si accorda con la proporzione 46:45 e va sostituito nella successione con 46. Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 107. Gli errori nei numeri scritti con cifre arabe, presenti nelle successioni sia del testo a Manisa che in quello a Teheran, sono probabilmente dovuti ai copisti ed al curatore. Ma il manoscritto di Manisa ne vanta decisamente meno dell'edizione fatta da Humai. Al paragone, le proporzioni espresse nel manoscritto di Manisa con le parole non ne contengono alcuno.

2. *The Al-Khayyām's text facing Arabic theories of music.*

Trattando la composizione dei rapporti, un altro passo sulla musica Al-Khayyām metteva nel "Terzo libro" del suo *Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide.*[32]

"Quanto alla *ta'lif al nisba* [composizione del rapporto], di cui si fa menzione nella scienza della musica, si tratta di qualcosa di diverso. Essa consiste infatti di *tarkib* [mettere insieme] e di *nuqsan* [togliere]. Il termine *ta'lif* [composizione] è usato in quel caso per una sorta di accordo sottinteso e non per un vero e proprio consenso. Euclide ha trattato la *ta'lif* [composizione] del rapporto in un passo noto del "Libro ottavo", usandolo in una *shakl* [proposizione] di cui poteva fare a meno nel suo libro e tralasciando il significato da noi menzionato [in questo scritto]. Il *tarkib al nisba* [mettere insieme il rapporto], sul quale si fondano alcune parti della musica, è numerico. Euclide ne ha parlato ampiamente nel suo libro ottavo. Quanto al *nuqsan al nisba* [togliere il rapporto], esso non è altro, laddove lo si analizzi e vi si rifletta, che un *sanafun min al tarkib* [categoria derivata dal *tarkib*]. La maniera per conoscere queste cose è, per chi ha uno spirito di osservazione acuto e buona intuizione, la medesima. Abbiamo già ricordato in parte questo tema nello *Sharh el Mushkil min Kitāb al Mūsīqā [L'elucidazione sui passi problematici del 'Libro sulla Musica'].*"[33]

Lo *Sharh el Mushkil min Kitāb al Mūsīqā* purtroppo non si trova più. È lecito credere che la "Discussion on the Genera Contained in a Fourth" presentata sopra ne facesse parte.[34] Su cosa trattasse il libro più ampio, nell'attesa e nella speranza che esso venga ritrovato, possiamo al momento avanzare solo ipotesi. Esse potrebbero venir giustificate qui sia da quanto d'altro conoscessimo sugli scritti e la vita di Umar

[32] Roshdi Rashed & Bijan Vahabzadeh, *Al-Khayyām Mathématicien*, (Paris, 1999), pp. 376-377. Il passo viene riportato nella traduzione di Michele Barontini e Ron Packham.

[33] 'Il "mettere insieme" ed il "togliere" del passo, che per i musicisti significherebbero sommare e sottrarre gli intervalli fra le note, quando trasferiti nei rapporti tra numeri diventano moltiplicare e dividere, perché nella teoria greca i numeri della musica formavano una successione geometrica. Sulla ratio and proportionality in Al-Khayyām, si veda anche Bijan Vahabzadeh, 'Al-Khayyam's Conception of Ratio and Proportionality', *Arabic Sciences and Philosophy*, 7 (1997): 247-263.

[34] Humai, *Khayyām-Nāma*, p. 340.

Al-Khayyām, sia dalle opere sulla musica degli altri studiosi alle quali egli faceva riferimento. È molto probabile che il *Libro sulla musica* da lui citato fosse il trattato di al-Farabi con lo stesso nome dal quale il matematico persiano aveva preso alcuni dei tetracordi elencati nel manoscritto di Manisa.

Khayyām giudicava la validità delle scelte per dividere la quarta anche da come tali note venissero utilizzate dai musicisti del suo tempo e della sua cultura: non solo in teoria, ma anche nella pratica musicale. Purtroppo le notizie su al-Khayyam sono particolarmente scarse e venate da leggende. Le sue famose *Quatrains* hanno riservato al personaggio più popolarità che certezze per gli studiosi. Riuscivano infatti ad aprire su di lui ogni sorta di controversia biografica e religiosa. A quelle note, potremmo aggiungerne un'altra nostra. Visto che si contavano alcune quartine le quali cantavano il *tar*, cioè il liuto persiano dal manico lungo, potremmo domandarci quanta pratica al-Khayyam ne avesse. Dall'edizione di Forūghī, pubblicata a Teheran nel 1942, ne prendiamo ad esempio una che suona.

> "A che cianciare dei cinque Sensi e dei quattro Elementi, o Coppiere?
> Che importa che sia solo il Problema o sian centomila, o Coppiere?
> Polvere siamo tutti noi: porta il liuto, o Coppiere!
> Vento siamo tutti noi: il Vino porta, o Coppiere!"

Dunque possiamo pensare che Khayyām ogni tanto pizzicasse questo strumento musicale classico. Dobbiamo però purtroppo ammettere che non sarebbero sopravvissute testimonianze o tradizioni né scritte, né orali le quali riferissero sulle capacità musicali del celebre poeta e studioso iraniano di scienze matematiche.[35]

[35] Sulla vita di al-Khayyam le fonti principali sono: Nizami-I-Arudi Samarqand, *Chahār Maqāla [Four Discourses]*, ed. Edward G. Browne, (Cambridge, 1921), pp. 71-74 and 134-140; V. A. Zhukovsky, 'Omar Khayyam and the Wandering Quatrains', *Journal of the Royal Asiatic Society*, 30 (1898): 349-366. Per le *Quatrains*, si potrebbero vedere l'edizione di Foroughi (Teheran, 1942); Arthur J. Arberry, *The Rubā'īāt of Omar Khayyām: the Chester Beatty MS*, (London, 1949). Arthur J. Arberry, *Omar Khayyām: a new version*, (London, 1952). Quelle che apprezzano la musica od il *tar*, nel manoscritto più antico (Cambridge's 604H./1207 A.D.), si trovano ai numeri 39, 70, 80, 85, 138, 147, 148, 169, 174, 181, 214, 230. Sulla musica araba in generale possono venir utilmente consultati: Henry George Farmer, 'The Music of Islam', in *New Oxford History of Music*, 11 vol., vol. I (1957): 421-477. Shiloah, *Music in Arabic Writings*; Amnon Shiloah, *Music in the World of Islam*, (Detroit, 1995); Abdallah Chaik-Moussa, 'Considérations sur la littérature d'Adab, présence et effets de la voix et autres problèmes connexes', *Al Qantara*, XVII 1 (2006): 25-62; Amnon Shiloah, 'La scienza della musica negli scritti arabi', in *La civiltà islamica*, ed. Roshdi Rashed, vol. III of *Storia della scienza* 10 vol., (Roma, 2002): 525-538. Amnon Shiloah, *Music and its Virtues in*

L'Islam nascente degli Omayyads in Siria e degli Abbassidi a Baghdad si era consolidato con grande successo attraverso famose e numerose traduzioni dal greco. Tra gli innumerevoli testi scientifici raccolti per ogni dove, passavano anche le teorie della musica di Euclide, di Aristosseno e di Tolomeo, per limitarsi ai maggiori.[36] I più famosi filosofi naturali e teorici arabi della musica, come Al-Fārābī, Ibn Sinā, Safī al-Dīn, partivano regolarmente dagli antichi greci, talvolta citati per nome,[37] ai quali aggiungevano le loro altre diverse e numerose divisioni del tetracordo cioè della quarta.

Probabilmente, la maggior varietà di generi musicali calcolata dagli arabi, rispetto alle tradizioni greche pitagorico-tolemaiche ortodosse, dipendeva da una tradizione assai più complessa. In essa si erano accumulate musiche preislamiche, musiche persiane, egiziane e turche, con tutte le relative varianti dei dervisci e dei sufi. Erano musiche scritte per una ricca varietà di strumenti ciascuno dei quali richiedeva un suo modo diverso di accordare e di suonare. Come sarebbero state tollerate quelle poche greche canoniche divisioni in generi?

Colpisce al proposito che tra gli studiosi arabi mancassero, per quanto appare dai testi conosciuti, seguaci di Aristosseno. Ma il greco, allievo di Aristotele, era stato criticato da Tolomeo perché avrebbe preteso di dividere il tono e l'ottava in parti tutte uguali, senza rapporti numerici ed usando piuttosto l'orecchio.[38]

Quali sarebbero le maggior novità che Ibn Sīnā ed Al-Fārābī avrebbero introdotto rispetto alle teorie pitagorico-tolemaiche greche? Per questi "antichi", come venivano in genere chiamati nei testi arabi, i suoni sarebbero arrivati alle orecchie come "ictus" [colpi] in rapida successione. In tal modo essi avrebbero potuto *in teoria* venir contati e quindi inseriti agevolmente nella teoria discreta dell'aritmetica pitagorica, entrando a far parte del celebre *Quadrivium*. Ma, i buoni pitagorici

Islamic and Judaic Writings, (Abingdon UK, 2007). Umar Al-Khayyām, *Quartine*, ed. Alessandro Bausani, (Torino, 1956), p. 61.

[36] Henry George Farmer, 'Greek Theorists of Music in Arabic Translation', *ISIS*, XIII (1930): 325-333. Roshdi Rashed, 'Dal greco all'arabo: trasmissione e traduzione', in *La civiltà islamica*: 31-49. Amnon Shiloah, 'La scienza della musica negli scritti arabi'. Tonietti, *Eppur si ode*, "Capitolo 4".

[37] Ibn Sinā, *al-Šifā*, pp. 129 e 148.

[38] Aristoxenus, *Aristoxeni Elementa Harmonica*, ed. Rosetta Da Rios, (Roma, 1954). Claudius Ptolemaeus, *Harmonicorum libri tres*, ed. John Wallis, (Oxonii, 1682), pp. 39-50 and 61-62. Barker, *Greek Musical Wiritings*. Tonietti, *Eppur si ode*, "Capitolo 1".

di fatto né potevano pensare di contare veramente i colpi, per non far scadere le loro teorie ideali tra i movimenti reali, né ci avrebbero provato a quanto si sa.[39] Invece, per Ibn S$\bar{\imath}$n$\bar{a}$, i suoni assumevano l'aspetto di onde nell'aria. Una delle cause dell'acutezza era descritta da Ibn S$\bar{\imath}$n$\bar{a}$, tra le altre, come "... une forte compression des couches d'air par le mouvement ondulatoire qui transporte le son."[40] Il modello ondulatorio continuo veniva riproposto nelle *Asbad huduth al-huruf [Cause che producono i suoni della lingua]*, dove per i suoni scriveva di *tamawwuj al-hawā* [onde d'aria].[41]

Eppure, nonostante egli fosse certo stato influenzato dal lato aristotelico del Neoplatonismo, ma diversamente da Aristosseno, anche per lui solo i rapporti tra numeri interi avrebbero potuto produrre consonanze. Ed escludeva quindi come dissonante, per esempio, quello fornito "... par une portion d'une corde dont la tension est indéterminée, et l'autre par cette corde dans toute sa longueur, si ces deux longueurs de corde sont entre elles dans le rapport du côté d'un carré à sa diagonale."[42] Infatti, per i greci, tale rapporto era incommensurabile e non rappresentabile con i numeri, un irrazionale diremmo oggi.

Con lui, la *Dar-al-Islam* [Abode of Islam] poteva giovarsi di una buona variante della teoria greca prevalente. Una sufficiente competenza nella questione Ibn S$\bar{\imath}$n$\bar{a}$ la dimostrava quando scriveva che, per quei numeri posti in successione, nel caso geometrico le differenze tra termini adiacenti non fossero costanti, come nel caso aritmetico.[43] Il mondo

[39]Sarebbe stato Marin Mersenne a riuscirci, come riportato nella sua *Harmonie Universelle* (Paris, 1636), almeno in casi particolari ed inspirato dal pendolo. Tonietti, *Eppur si ode*, "Capitolo 7".

[40]Ibn S$\bar{\imath}$n$\bar{a}$, *al-Šifā*, p. 111.

[41]Alessandro Bausani, *L'enciclopedia dei fratelli della purità*, (Napoli, 1978), p. 196. Diogenes Laertius attribuiva un paragone tra suoni ed onde del mare a Zeno (third century BC), uno degli Stoici. Ma attorno a questi filosofi si scriveva anche che essi "... conjectavere sonum esse corpus, ictum utpote aerem ..." ["... congetturassero i suoni fossero sostanza, colpo, cioè aria ..."] (Charles Burnett, 'Sound and its Perception in the Middle Ages', in *The Second Sense*, eds. Charles Burnett, Michael Fend, and Penelope Gouk, (London, 1991), pp. 43-69, at p. 56; 'Introduction', p. 3.) Non è affatto chiaro tuttavia come essi riuscissero a conciliare le onde coi colpi. Poiché questa sostanza del suono era il loro famoso *pneuma*, sarebbero gli "ictus" i colpi del *pneuma* contro l'orecchio? Inoltre, per quanto se ne sa, le principali tradizioni greche che influenzavano la cultura araba musicale erano quelle di Pythagoras-Ptolemy o di Aristotele. Molto più tardi, Boethius usava un'immagine simile. "... deinde [saxum] maioribus orbibus undarum globos spargit ... Ita igitur cum aër pulsus fecerit sonum, pellit alium proximum et quodammodo rotundum fluctum aeris ciet, ..." ["... quindi [la pietra gettata nell'acqua] diffonde le sfere delle onde in circoli più grandi ... Tanto che allora, quando l'aria facesse il suono dell'impulso, essa spingerebbe l'altra vicina ed in un certo qual modo darà origine alle onde sferiche dell'aria, ..."]. (Sev. Boethius, *De Institutione Musica Libri Quinque*, ed. Godofredus Friedlein, (Lipsiae, 1867), p. 200). Tonietti, *Eppur si ode*, "Capitolo 5".

[42]Ibn S$\bar{\imath}$n$\bar{a}$, *al-Šifā*, p. 116.

[43]Ibn S$\bar{\imath}$n$\bar{a}$, *Danesh-Namā*, ed. Mohammad Achena & Henri Massé, *Avicenne Le Livre de Science*, (Paris, 1986), 2 vol., vol II p. 223.

europeo confrontabile avrebbe invece avuto come modello musicale generale per secoli Severinus Boetius, il quale confondeva piuttosto le successioni geometriche con quelle aritmetiche almeno in un caso delicato.[44] Purtroppo, quando avessero tradotto testi arabi, gli europei dell'epoca avrebbero evitato in genere di trasferire in latino le parti dedicate alla musica.[45] Boetius sarà sembrato loro un surrogato sufficiente ed autorevole di fonti greche ancora assenti.

Al-Fārābī divideva il tetracordo greco, ovvero la quarta 4:3, in una maggiore varietà di modi: sempre numerici, ma anche ispirati alla Persia. Tra di essi possiamo contare infatti: la *mugannab furs* [vicino all'indice persiana] 162:149, la *mugannab Zalzal* [vicino all'indice di Zalzal] 54:49, il *wusta furs* [medio persiano] 81:68 ed il *wusta Zalzal* [medio di Zalzal] 54:44.[46] Dovremmo notare come i, cosiddetti dai greci, rapporti epimorî o superparticolari del tipo $1 + \frac{1}{n}$ cioè n+1:n non fossero adatti alle note persiane.

Dunque le orecchie dei persiani e di Al-Fārābī giudicavano consonanti altri intervalli differenti da quelli greci, i quali si erano limitati in genere a quelli superparticolari o ad i multipli. Di conseguenza, si erano visti costretti ad escludere persino l'intervallo di quarta più l'ottava perché rappresentato dal rapporto 8:3. Eppure esso sarebbe tanto vicino alla quarta che, seguendo l'orecchio, persino Tolomeo aveva deciso di ammetterlo tra le consonanze. Seguendo il famoso alessandrino, anche Al-Fārābī sembrerebbe giudicare male Aristosseno. "Nous avons montré par ce qui précède comment il nous faut envisager les notes et les intervalles pour en déterminer la valeur et la figurer à l'aide de nombres entiers; et aussi à quel point de vue il faut les concevoir pour les figurer à l'aide de nombres fractionnaires. Ce sont là deux manières de voir bien différentes; l'une est celle des Pythagoriciens, l'autre celle des Aristoxéniens. Il est facile d'en conclure quelle est la méthode à suivre en musique."[47] Bisogna capire che qui il teorico arabo-persiano

[44] Severinus Boetius, *De Institutione Arithmetica Libri Duo - De Institutione Musica Libri Quinque*, ed. Godofredus Friedlein, (Lipsiae, 1867). Tonietti, 'The Mathematical Contributions of Maurolico', pp. 153-156.

[45] Charles Burnett, 'Teoria e pratica musicali arabe in Sicilia e nell'Italia meridionale in età normanna e sveva', *Nuove Effemeridi*, III n. 11 (1990): 79-89.

[46] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 172. Cf. Shiloah, *Music in the World of Islam*, p. 112. Shiloah, 'La scienza della musica', p. 535.

[47] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 76.

attribuiva i numeri interi agli Aristoxéniens ed i numeri frazionarî ai Pitagorici. Infatti, una volta che si fosse individuato (con l'orecchio) il semitono od il quarto di tono equabile, qualsiasi intervallo ne conterrebbe per costruzione un numero intero. Mentre le proporzioni pitagoriche producevano di continuo numeri frazionarî.

Ispirandosi sempre a Tolomeo, Al-F$\bar{a}$r$\bar{a}$b$\bar{i}$ stava cercando di riconciliare due atteggiamenti difficili da seguire insieme nella sua epoca e con gli strumenti matematici da lui scelti: l'orecchio e le teorie greche numeriche. Ad esempio: "On ne peut donc connaître les principes fondamentaux de la théorie musicale qu'à l'aide de la sensation, de l'-expérience. [...] Il nous importe seulement de savoir que la pratique musicale est antérieure de beaucoup à la théorie." Criticava o lodava altri arabi, purtroppo senza nominarli. "Parmi ceux qui ont voulu fixer dans des livres le nombre de toutes les notes reproduisibles à l'octave, il nous faut compter les mathématiciens grecs de l'antiquité et les théoriciens de l'empire arabe proche de notre temps. Parmi ces derniers, certains ont suivi la voie des mathématiciens grecs, les autres n'en ont tenu aucun compte; habiles praticiens, rompus à la musique, ils se sont uniquement fiés à leur oreille. [...] Ils sont donc plus près de la vérité que ceux des théoriciens de notre époque qui ont voulu suivre la voie des mathématiciens grecs de l'antiquité. Ils les ont suivis, mais ils ne possédaient pas leur savoir ni l'expérience et le sens esthétique des praticiens plus récents."[48]

Ad un certo punto, doveva abbandonare le proporzioni per considerare invece l'ottava come una quantità unica da dividere in 144 parti: "... nous attribuons à l'octave le valeur 144 (considérant l'octave comme une quantité) ...". Attribuito ad essa questo valore, essa veniva suddivisa in una quarta ed in una quinta di $\frac{60}{144}$ e $\frac{84}{144}$ rispettivamente. La quarta veniva poi distinta in varî modi a seconda dei generi: $\frac{24}{144}$, $\frac{24}{144}$, $\frac{12}{144}$, cioè tono, tono, semitono [genere diatonico]; $\frac{36}{144}$, $\frac{12}{144}$, $\frac{12}{144}$, tono+semitono, semitono, semitono [cromatico]; $\frac{48}{144}$, $\frac{6}{144}$, $\frac{6}{144}$, ditono, quarto di tono, quarto di tono [enarmonico]. È chiaro che egli ora dividesse l'ottava in 12 semitoni od in 24 quarti di tono tutti uguali. Stava forse cercando

[48]Al-F$\bar{a}$r$\bar{a}$b$\bar{i}$, *Kit$\bar{a}$b al-M$\bar{u}$s$\bar{i}$q$\bar{a}$*, I pp. 33 and 51-52.

di mettere in numeri Aristosseno? Allora credeva di dover rinunciare alle proporzioni. Ma perché lo stava tentando? Perché la musica che gli entrava nelle orecchie, sul liuto, usava note non inseribili nella teoria greca ortodossa: quelle note persiane e di Zalzal viste sopra.[49]

Il contesto della cultura musicale araba si sarebbe fatto sentire anche quando Al-Fārābī avesse attribuito ai generi i loro effetti particolari. I primi generi si chiamavano "forts" perché darebbero forti impressioni, gli altri "doux". Tra questi ultimi, "Les genres trop doux produisent une impression faible, superficielle, comparable à celle d'un dessin simplement ébauché; [...] Certains peuples, dans l'antiquité, qualifiaient les genres doux de *féminins*, rappelant la douceur de la femme; par opposition, les genres forts étaient appelés *masculins*."[50]

Ma questo trattamento della teoria sarà sembrato allo studioso persiano, trasferitosi a Baghdad, solo superficiale (femminile?) ed allora lui subito proseguiva "... d'une façon plus approfondie". Alla fin fine, anch'egli si sarebbe affidato meglio alla teoria musicale greca basata sulle proporzioni. "Notre oreille à elle seule ne nous permet pas de définir tous les états d'une note; la théorie de son côté ne nous fournit pas les moyens de reconnaître si une note est naturelle ou non. Il nous faut donc avoir, en même temps, recours à la théorie et à la pratique musicales. [...] En un mot, la théorie et la pratique musicales se complétent l'une l'autre, et leur ensemble constitue la science musicale."[51]

Ora Al-Fārābī divideva il tono pitagorico 9:8 in due parti 18:17 e 17:16 od in quattro come 36:35, 35:34, 34:33, 33:32, le quali con evidenza non sarebbero uguali.[52] È chiaro che egli non volesse usare la media geometrica tra 9 ed 8 cioè $9 : \sqrt{9 \times 8} = \sqrt{9 \times 8} : 8$. Certo poteva calcolarla come tutti e certo sapeva che li dentro si celasse l'incommensurabile $\sqrt{2}$. Continuava allora a seguire l'ortodossia greca che da Euclide a Tolomeo ne avrebbe escluso l'uso, come ben noto. Perché? Eppure, se non lo avesse più fatto, avrebbe trovato il modo più efficace di tutti per conciliare l'udito con la teoria e con la pratica

[49] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 55-59.

[50] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 60-61. Enfasi nella traduzione di Erlanger. Cf. M. Collangettes M., 'Étude sur la musique arabe', *Journal Asiatique*, (Novembre-Décembre 1904): 365-422; (Juillet-Août 1906): 149-190.

[51] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 61 and 66.

[52] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 94-100.

dei musicisti persiani (e non persiani, come si sa). Ma il nuovo modello matematico gli avrebbe tuttavia portato due problemi. Sarebbe uscito dall'ortodossia greca per la matematica che non considerava $\sqrt{2}$ un numero e riteneva tutti i rapporti da esso derivati come insopportabilmente dissonanti nella musica. Avrebbe inoltre dato troppo spazio ai generi "doux", i quali avrebbero certo peggiorato i giudizi degli *ulama* più ortodossi sulla musica.[53] Sono ipotesi queste che possiamo avanzare per spiegare un passaggio mancato, altrimenti relativamente facile e naturale.

Eppure, ciò nonostante, qualcosa di ben diverso dalla tradizione greca libresca il teorico persiano avrebbe comunque offerto. "Le but de toute théorie est de nous faire atteindre la vérité. Or, la vérité est une croyance conforme à la réalité objective." Il mezzo per raggiungerla consisteva nel costruire uno strumento musicale apposito a quindici corde. Su di esso poteva verificare le note: "... leur existence doit donc pouvoir nous être confirmée par la sensation." Giudicava necessario "... décrire un instrument imaginé par un ancien [Ptolemaeus?[54]] et conçu d'une façon générale. Après l'avoir construit et doté des corps susceptibles de produire des notes selon leur rang et avec les qualités que nous leur avons attribuées, on lui fera rendre ces notes, conformément à ce qui a été exposé." Si preoccupava perfino di un eventuale "bourdonnement" che potesse disturbare la prova.[55]

Al-Fārābī ci metteva di fronte ad un apparato sperimentale véritable per verificare se il suo modello matematico per la musica si accordasse con la pratica delle sensazioni uditive. Esso andrebbe allora confrontato con la filosofia dell'esperimento scientifico proposta da Francis Bacon in Europa qualche secolo dopo.[56] E come non notare la maggior delicatezza dell'esperimento adatto a penetrare i segreti della natura proposto dall'arabo-persiano rispetto all'aggressivo e ben noto *dissecare naturam* [tagliare a pezzi la natura] dell'inglese?[57]

[53] Amnon Shiloah, *Music in the World of Islam*. Aline Tauzin, 'Femme, musique et Islam. De l'interdit à la scéne', *CLIO, Histoire, Femmes et Sociétés*, 25 (2007): 143-163.

[54] Ptolemaeus, *Harmonicorum*, p. 159.

[55] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 158-160.

[56] Con ragione, nella sua traduzione francese, al paragrafo Erlanger aggiungeva come titolo: "Construction d'un instrument pour la vérification expérimentale de la théorie"; p. 158.

[57] Tonietti, *Eppur si ode*, "Capitolo 4".

Uno studioso incline alle classificazioni come Al-Fārābī e famoso per quelle delle scienze,[58] dove avrebbe collocata la musica? "... pour les mathématiciens, la musique est une partie des mathématiques. Faut-il donc alors rechercher le but de l'existence de chacune des choses qui appartiennent à la musique? La philosophie mathématique ne s'enquiert pas, selon l'avis de tous, du pourquoi des choses qui lui appartiennent. Elle ne nous donne, dans ses définitions, qu'une seule des quatre espèces de causes, elle nous dit ce qu'est la chose définie. Quant aux autres espèces de causes, et en particulier aux causes finales et à celle qui répond à la question pourquoi est la chose, on ne s'en occupe pas en mathématique." Comunque, egli aveva dato qui i suoi "Éléments de l'Art Musical", stabilendone i principî. Colui che se ne fosse impadronito "... saura remonter, ..., vers les causes des principes que la musique a tirés de l'expérience et de la sensation. Il sera capable aussi de distinguer ce qu'il y a de juste et de faux dans les dires des divers théoriciens ...".[59]

Il nostro arabo-persiano ci raccontava anche come accordassero in modo diverso il *tunbūr*[60] a Baghdad o nel Khūrāsān. Il primo era "... le plus en faveur dans la contrée où nous écrivons cet ouvrage, ...". Per esso, egli proponeva una distribuzione di tasti e di accordature seguendo i principî teorici esposti fin'ora, ma diversa da quella là allora usuale. Lo strumento doveva essere stato derivato da una tradizione preislamica perché i suoi tasti venivano chiamati *djahiliyyah* [infedeli]. In genere essi venivano posti sul manico alla stessa distanza. Il nostro musicista teorico lo giudicava "... un instrument incomplet dans sa première disposition, et nous avons montré comment on peut le compléter et le parfaire." Questo *tunbūr* veniva considerato adatto ai generi "doux, relâchés"; il suo sistema di accordature era detto "féminin". Nella disposizione tradizionale dei tasti, era infatti capace di intonare microintervalli. Presa una corda lunga 40, se ne ritagliavano i $\frac{7}{8}$ ottenendo 35. Gli altri tasti si distribuivano alle distanze uguali 36, 37, 38, 39. In tal modo si generavano intervalli particolarmente lontani

[58] Thérèse-Anne Druart, 'Scienza e filosofia', in *La civiltà islamica*, p. 74.
[59] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 161-162.
[60] Strumento a due o tre corde con un manico lungo; era una specie di pandora.

dai pitagorici classici: 40 a 39 (in frazione 1,0256) che si avvicinava piuttosto al quarto di tono temperato (1,0293); 40 a 38 (1,0526) vicino al semitono (1,0594); 40 a 36 = 10 a 9 (1,1111) meno confrontabile col tono temperato (1,1224), mentre il tono pitagorico vale 9 a 8 (1,125). Il *tunbūr* del Khūrāsān era invece considerato più adatto ai generi 'maschili' e "fort". Veniva lasciato accordato in modo pitagorico e le sue note godevano di una corrispondenza con quelle del liuto.[61]

Esplicitamente ricolma di elementi tratti dalle sette pitagoriche, e persino con un riferimento diretto ad un Pitagora mitico, stava la teoria della musica esposta nella Quarta e nella Trentunesima delle 52 *Rasa'il Ikhwan al-Safa [Epistole dei fratelli della purezza]*.[62] Sia Ibn Sīnā che Al-Fārābī la criticavano rigettandone la pitagorico-platonica musica delle sfere celesti.[63] Al-Khayyām, nelle poche pagine rimaste riportate sopra, la ignorava del tutto.

3. *Comparisons with Greek, and other theories of music.*

Nelle pagine dedicate da Tolomeo alle armonie musicali, si vedrebbe quanto la teoria greca si fosse disinteressata dall'intonare le canne per gli strumenti a fiato. Egli evitava di ascoltare i suoni dello "$\alpha\upsilon'\lambda\omega\nu$, tibia" [flauto] o quelli ottenuti appendendo pesi alle corde. "Nam, in tibiis & fistulis; praeterquam quod sit admodum difficile omnem irregularitatem inibi cavere: et am termini, ad quos sunt exigenda longitudines, latitudinem quandam admittunt indefinitam: atque (in universum) Instrumentorum inflatilium pleraque, inordinatum aliquid adjunctum habent; & praeter ipsas spiritus injectiones." ["Infatti nei flauti e nelle canne, oltre ad essere molto difficile evitarci ogni irregolarità, i termini, dei quali dobbiamo valutare le lunghezze, ammettono una certa larghezza indefinita; ed (in generale) la grande maggioranza degli strumenti a fiato hanno in aggiunta qualcosa di disordinato, oltre alle stesse immissioni del respiro."][64]

[61] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 218-219, 227, 241, 229-230, 242-262. Per il *tunbūr* di Baghdad, Henry Farmer scriveva in modo esplicito di quarti di tono. Farmer, 'The Music of Islam' pp. 447, 456, 463.

[62] Bausani, *L'enciclopedia dei fratelli della purità*.

[63] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 28. Ibn Sinā, *al-Šifā*, p. 106.

[64] Ptolemaeus, *Harmonicorum*, pp. 33-34, 157-158. Tonietti, *Eppur si ode*, 'Capitolo 1'.

Invece Al-Fārābī qualcosa avrebbe tentato anche con i flauti. "L'acuité et la gravité dépendent aussi du diamètre du conduit tubulaire que l'air traverse. En effet, plus ce conduit est étroit, plus les molécules de l'air qui le traversent sont serrées; et plus les chocs qui se produisent entre elles et contre les parois, sont violents. Le son naît alors plus aigu. Au contraire, plus ce conduit est large ... est alors plus grave." Egli, in un primo momento, considerava indipendenti i due fattori che qui determinano l'altezza di un suono. Canne dello stesso diametro emetterebbero note in proporzione con la lunghezza. Ed inoltre canne della stessa lunghezza emetterebbero, per lui, note in proporzione col diametro. Ma poi scriveva anche: "Toutes ces causes peuvent s'ajouter les unes aux autres et concourir à déterminer le degré des notes." Pertanto, alla fine, concludeva con prudenza nella frase seguente, la quale ritornava a Tolomeo. "On ne peut guère fixer la place des notes sur des instruments de ce genre en se guidant sur l'échelle des autres instruments;" [a corda].[65] Infatti, questa è l'unica parte del *Kitāb al-Mūsīqā* dove i rapporti tra le grandezze in gioco (lunghezza e circonferenza) non venissero fissati con la precisione dei numeri onde ottenere i valori delle altezze per le note. Per un musicista che usasse le proprie orecchie, la teoria ortodossa greca basata sul monocordo non poteva venir estesa direttamente alle canne degli strumenti a fiato e comunque Al-Fārābī non lo faceva. Quindi l'unica teoria matematica antica, a mia conoscenza, per i suoni generati dalle canne, la quale tenesse conto in modo appropriato dell'effetto del diametro sull'intonazione, resta quella dei cinesi.

La teoria matematica della musica dei cinesi era basata sulle *lülü* [standard pipes], delle quali fin dal primo secolo (A.D.) nello *Qian Han Shu [Former Han Books]* venivano date dimensioni precise perché emettessero le note richieste. Because they were solid, the *lülü* had not only length, but also a diameter. Even though other Chinese theories existed, which kept the same diameter varying the length only, in the pages of the *Hanshu* to generate three different notes even the diameter was changed. It should be noticed that the diameter followed the same ra-

[65] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I pp. 263-268.

tio of the length. These literati had invented a mathematical rule that fitted well the ears. If the note *Huangzhong* [yellow bell] is 90 *fen*[66] long, and 9 *fen* open, to get the *Linzhong* [bell of the forest] does not suffice to shorten only the length of 2 : 3, that is to 60 *fen*; otherwise the pitch would be less high than asked by the ears for this note (the Western fifth). The good tuning requests that also the diameter should be shortened by the same 2 : 3 to 6 *fen*. The same rule generated the *Dazu* [big bunch], rising from 60 to 80, by the ratio 4 : 3, both in length and in diameter.

Molto importante per Confucius e la relativa ritualità imperiale, la musica si basava sulle canne, invece che sulle corde come per gli arabi ed i greci, perché attraverso di esse sarebbe passato quel soffio vitale energetico chiamato *qi*. Fattore centrale per la cosmogonia e la concezione del mondo cinese classica, esso entrava a regolare ogni fenomeno, non solo naturale. For the historians is interesting that, to my knowledge, no other culture invented such a way of tuning instruments centered on pipes.[67]

Moreover, no other culture tryed a mathematical procedure that worked so well even for pipes. In Europa, solo chi si fosse allontanato a sufficienza dalla tradizione pitagorica prevalente, ad esempio da Boetius ed avesse ripreso in considerazione Aristoxenus, avrebbe trattato gli strumenti a fiato in modo equivalente. Thus, more than thousand years had to pass before Vincenzio Galilei, in the 16th century, prompted his way concerning pipes. Esso le considerava solidi, quindi ne andava misurato il volume e non solo la lunghezza. Di conseguenza le proporzioni, che richiedevano i cubi dei numeri, erano diverse da quelle pitagoriche. But, this lute player and composer father of Galileo Galilei, had to overcome the European environment of his epoch, which was still mainly Pythagorean, and therefore hostile to other musical theories.[68]

[66] 1 *fen* vale un terzo di cm circa.

[67] Tito M. Tonietti, 'The Mathematics of Music During the 16th Century: The Cases of Francesco Maurolico, Simon Stevin, Cheng Dawei, and Zhu Zaiyu', *Ziran kexueshi yanjiu [Studies in the History of Natural Sciences]*, 22, no. 3 (2003): 223-244. Tito M.Tonietti, *Le matematiche del Tao*, (Roma, 2006). Tonietti, *Eppur si ode*, 'Capitolo 2'.

[68] Vincenzio Galilei, *Dialogo della musica antica et moderna*, (Firenze, 1581), repr. (Roma, 1934). Vincenzio Galilei, *Discorso intorno all'opera di messer Gioseffo Zarlino ...*, (Firenze, 1589). Claude V. Palisca, 'Scientific Empiricism in Musical Thought', in *Seventeenth Century Science, and the Arts*, ed. H.H. Rhys, (Princeton, 1961). Tonietti, 'The Mathematics of Music'. Tonietti, *Eppur si ode*, 'Capitolo 5'. Nel secolo 17th, Vincenzio Galilei sarebbe stato seguito da Marin Mersenne, capace di aggiungere al fiorentino i suoi numeri e le sue esperienze; Mersenne, *Harmonie*

Le relazioni degli Arabi con gli Indiani erano state intense ed erano rimaste ben documentate, come noto.[69] Tuttavia, le loro concezioni relative della musica apparivano così diverse che lo scambio in questo ambito si rivelava quasi nullo. Basti ricordare qui che nei testi indiani più antichi la musica certo abbondava, ma la sua teoria sembrerebbe ignorare *ganita* [il calcolo matematico]. Per intonare i *gita* [canti], le regole venivano tramandate direttamente dal brahmano all'allievo ed esse si basavano quindi soprattutto sull'orecchio.

Bharata in the *Gitalamkara [Rhetoric of singing]* (perhaps some century BC) wrote about three *sthana* [locations, registers]. "Syllables can be [pronounced] in three *sthana*: from the chest, from the throat, from the head. People, learned in the Scriptures, say they are named after the three libations [the drinking-offering Gods the *soma* in the morning, at noon, and in the evening]." Unfortunately, at this central point, the text is mutilated, and annotators completed it following books of phonetics or music much later.[70]

The *Natya Śastra [Science of drama]* (first centuries AD) said how to tune stringed instruments. "These notes becomes low or high according to the adjustment of the strings, and the diversity of the *danda* [neck, measure of 120cm] of the *viṇa*, and of the sense organs. [...] The difference that occurs in *pa* [*pancama*, the fifth note], when it is raised or lowered by one *śruti* [hearable], and when the consequential *marda* [slackness] or the *ayatatva* [tenseness] of strings occurs, will indicate a typical *śruti*. We shall explain the system of these *śruti*. Two *viṇa*s should be made ready with the *danda*s strings with similar measure, and with similar adjustment of the latter in the *ṣadja grama* [gamut on *ṣadja*].[71] Then one of these should be tuned in the *madhyama grama* [gamut on *madhyama*],[72] by lowering *pa* by one *śruti*. The same *viṇa*, by adding one to *pa*, will be tuned in the *ṣadja grama*. This is the meaning of decreasing a *śruti*." "The notes of the *vamśa* [flute] should

Universelle.

[69] Ad esempio, Gerhard Endress, 'Scienza e filosofia nel tardo ellenismo', in *La civiltà islamica*, pp. 29-31. Pascal Crozet, 'Aritmetica', in *La civiltà islamica*, pp. 498-506. Mario Casari & Fabrizio Speziale, 'La scienza islamica in India', in *La scienza indiana*, eds. David Pingree & Raffaele Torella, (Roma, 2001): 908-928.

[70] Bharata, *Gitalamkara*, eds. Alain Daniélou & N.R. Bhatt N.R., (Pondichéry, 1959), p. 139.

[71] *ṣadja* [born from six] is the first note.

[72] *madhyama* [middle] is the fourth note.

be perfected, and accomplished with the help of the *viṇa* and of the human throat ... A unison of the human throat, the *viṇa*, and the flute is specially praised." "The sound is airy [i.e. depending on air], and it is considered to be of two kinds, one equipped with *svara*s [notes], and the other with *abhidhana* [name-words with meaning] ... Seven *svara*s have been proclaimed in the *viṇa* as well as human vocal cords. The same are being produced in the *atodya*s [instruments] as well. Notes coming out of the human body are transmitted to the wooden *viṇa*, then to the *puṣkara* [drums], and ultimately to the *ghana* [solid instruments] ....". "There are three *sthana* [locations, registers]: 1) the *uras* [chest], 2) the *kaṇtha* [throat], and 3) the *śiras* [head]."[73]

Here, to tune the *viṇa*, one took into account the length of the strings managing their tenseness. The musician let his "sense organs" guide him, and he added or took away these "hearable" microintervals called *śruti*. The *sthana* was divided into 22 *śruti*. I have to warn not to equate simply the *sthana* with the Greek octave. The relative sets of seven *svara* [notes] were called *saptaka* [septenary], and not *aṣtaka* [octonary]. In India, the notes are not arranged along a scale, but around a *grama* [village].[74] Al-Fārābī alludeva alle origini nelle tre parti del corpo umano degli *sthana* indiani per criticarli.[75]

Śarngadeva (between the 9th and the 13th century AD) wrote the *Samgita Ratnakara [Mine of gems for singing]*. The book is best preserved in the comment of Simhabhupala (13th century AD). A passage from it is pertinent here. "In practice, there are three parts: in the heart [the octave] considered *mandra* [grave, low], in the throat that *madhya* [middle], in the head that *tara* [acute, high], each double ascending."[76] I was unable to find any previous text with a precise statement about an octave described as "the double", that is in proportion 2 to 1. At this time only, in the 13th century, appeared a mathematical octave in India? Anyway, only when one should divide the *octave* into 22 *śruti*,

[73] *Natya Śastra*, eds. a board of scholars, (Delhi, 1996), chap. 28, 23 and 27-28 (ed. 1996, pp. 388-389); chap. 19, 38-40 (ed. 1996, p. 268); chap. 30, 11-13 (ed. 1996, p. 415); chap. 33, 29-35 (ed. 1996, p. 486).

[74] A.N. Sanyal, *Ragas and raginis*, (Calcutta, 1959), p. 4. Roberto Perinu, *La musica indiana*, (San Giuliano Milanese-Milano, 1981), pp. 40, 24-25, 29-30, 44.

[75] Al-Fārābī, *Kitāb al-Mūsīqā*, I p. 57.

[76] Bharata, *Gitalamkara*, pp. 138-139.

these could become quarter-tones.

At this time in the North of India, was not perhaps already there a strong presence of an Arabic culture with its Greek-inspired mathematical theory of music? Back to its origins, Indian theory of music did not share numbers, and proportions with those of Greeks. The former could have been worked out by the way of the ear only, the latter (in its orthodox form) let numbers descend from the heaven of ideas.[77] In Greece, only Aristoxenus followed the judgments of his ears, and divided the octave also into (equal) quarter-tones. Had Indian scholars know him, perhaps they would appreciated this unorthodox Greek side of the story. But is improbable that Arabic scholars brought him to India, as we saw above. That Brahmans and scholars liked better to trust the accuracy of the ears than numbers should not become a want or (worst) a defect. It is a matter of difference. Anyway it is a puzzle. Why the famous inventors of our universal digits did not use numbers in their theory of music?

The *Śatapatha Brahmana [Brahmana of Hundred Paths]* told exact geometrical measures to build the female altar *vedi* [earth], and the male altar *agni* [fire]. Here, the exactitude was crucial otherwise the rite would be turned out wrong, and ineffective. Therefore Brahmans developped rules to guard their precise liturgy. First these were handed down from master to disciple orally, then they were written in books. The *Śulbasutra [Aphorisms of the string]* (controversal dating, perhaps 3th century BC) gave rules to be precise in the construction of the altars. In these pages, we find the oldest Indian geometry. There, sometimes, we could read even proofs of the relative rules. For example, to compute the area of a trapezoidal *Mahavedi*, the calculation was justified by a geometric proof.[78]

The *Sama Veda [Knowledge of melodies]* is sung. The ritual *mantra* [instruments to think, formulas] must be pronounced in the traditional way, and attuned exactly as prescribed. The well known Panini's *Aṣtadhyayi [Collection in eight sections]* (5th-4th century BC) gave ru-

[77] I do not agree with Alain Daniélou when, editing and commenting the *Gitalamkara*, he wrote: "... une parenté certaine avec les théories musicales de la Grèce, ...", p. v.

[78] *The Śulbasutras*, eds. S.N. Sen & A.K. Bag, (New Delhi, 1983). Tonietti, *Eppur si ode*, 'Capitolo 3'.

les to phonetics, and grammar. But, how to sing would seem to be a matter directly to learn from the master. That is, the shape of the altars in the Vedic rituals were fixed by geometry, and some numbers. But in the art of singing *mantra*, to make precise the musical performance, numerical ratios were not used as well. Therefore the famous phrase, "As the crest on the head of peacocks, as the gems on the hoods of snakes, so is *ganita* at the top of sciences known as the *Vedanga [Limbs of the Veda]*",[79] should be completed with: "As peacocks, in India, so mathematical sciences seem to be birds did not sing."[80] Waiting for the Indian historians to dig up the thousand texts still buried in their archives, here we cannot go any farther.

4. *Back to Al-Khayyām.*

Ritorniamo ora ad Al-Khayyām arricchiti dell'idea che il contesto, il quale faceva da sfondo alle pagine rimasteci della sua teoria, fosse dunque complesso, ricco di problemi e di varietà culturali. Ma, finché non verrà ritrovato il libro più ampio, non possiamo sapere in quale diverso modo il matematico, astronomo e poeta persiano li avrebbe affrontati. Potremmo solo sospettare che, dove Al-Fārābī si fosse con timidezza tirato indietro adeguandosi di fronte all'ortodossia euclideo-tolemaica e religiosa per la musica, Al-Khayyām forse avrebbe osato allontanarsene in misura maggiore.

Sappiamo infatti che lui, più di ogni altro, si fosse spinto oltre le proibizioni che gli studiosi greci si erano imposte riguardo la rappresentazione numerica delle grandezze incommensurabili. Nel *Sharh ma ashala min musadarat Kitab Uqlidis [Commentaire sur les difficultés de certains postulats de l'ouvrage d'Euclide]*, egli allargava dunque molto la nozione corrente di numero. "Et l'on ne devra pas concevoir la grandeur G en tant qu'elle est une ligne, une surface, un solide ou un temps. Il faudra au contraire la concevoir en tant qu'elle est abstraite dans l'in-

[79]B. Datta & A.N. Singh, *History of Hindu Mathematics*, (Bombay, 1935 [1962]) 2 vol., vol. I p. 7.

[80]Tito M. Tonietti, 'Toward a Cross-cultural History of Mathematics. Between the Chinese, and Arabic Mathematical Theory of Music: the Puzzle of the Indian Case', talk given at the conference "Advances in Mathematics: Historical Developments & Engineering Applications", Pant Nagar (Uttarakhand, India), (December 19-22 2007). Tonietti, *Eppur si ode*, 'Capitolo 3'.

tellect de ces caractères adjoints, et en tant qu'elle est rattachée au nombre: non en tant que nombre absolu véritable, car le rapport entre A et B pourrait ne pas être numérique, de sort que l'on ne pourrà pas trouver deux nombres selon leur rapport. [...] Il faudra donc que l'on sache ... que la grandeur G doit être considérée comme un nombre, comme nous l'avons mentionné, quelque grandeur qu'elle soit."[81]

Ma, su quanto Umar Al-Khayyām fosse disposto ad impiegare i suoi numeri irrazionali nelle teorie della musica, rinunciando quindi del tutto all'ortodossia euclideo-tolemaica, potremmo solo avanzare ipotesi al momento. Quindi qui ci fermiamo, sperando che il libro di Khayyām sulla musica non si riveli un "Farmer's ghost".[82] Certo, comunque dai suoi libri che ci sono rimasti, emerge una personalità creativa a sufficienza e poco timorosa di proporre innovazioni anche radicali alla tradizione della matematica greca. Perché non avrebbe dovuto farlo, seguendo il suo orecchio ed i suoi gusti, anche nella musica con la quale lui molto probabilmente accompagnava in libertà le sue *Quatrains*?

Acknowledgements.

Si ringraziano molto Chiara Letta e Roberto Lorenzi della Biblioteca di Fisica, Informatica e Matematica, nell'Università di Pisa, per avere procurato con abilità e sollecitudine alcuni dei testi citati.

Si ringrazia moltissimo Ron Packham per aver regalato come al solito un impeccabile stile inglese al manoscritto.

Siamo riconoscenti persino verso i referee, i quali ci hanno costretto a migliorare il testo con le loro critiche.

Il lavoro viene dedicato al matematico Franco Giannessi, al matematico e pianista Giovanni Gronchi insieme all'amico compositore e pianista Paolo Marzocchi.

[81] Rashed & Vahabzadeh, *Al-Khayyām Mathématicien*, p. 378.

[82] Henry George Farmer, ' "Ghosts" An Excursus On Arabic Musical Bibliographies', *ISIS*, XXXVI (1946): 123-130.

Appendix

The Genera of the Fourth by Al-Khayyām

Diatonic.

1. 64 -(8:7)- 56 -(8:7)- 49 -(49:48)- 48
2. 324 -(9:8)- 288 -(9:8)- 256 -(256:243)- 243
3. 100 -(10:9)- 90 -(10:9)- 81 -(81:75)- 75
4. 72 -(8:7)- 63 -(9:8)- 56 -(28:27)- 54
5. 180 -(9:8)- 160 -(10:9)- 144 -(16:15)- 135
6. 220 -(10:9)- 198 -(11:10)- 180 -(12:11)- 165
7. 80 -(8:7)- 70 -(10:9)- 63 -(21:20)- 60
8. 396 -(9:8)- 352 -(11:10)- 320 -(320:297)- 297
9. 156 -(13:12)- 144 -(9:8)- 128 -(128:117)- 117
10. 16 -(8:7)- 14 -(14:13)- 13 -(13:12)- 12

Chromatic.

11. 24 -(6:5)- 20 -(20:19)- 19 -(19:18)- 18
12. 36 -(6:5)- 30 -(15:14)- 28 -(28:27)- 27
13. 48 -(6:5)- 40 -(40:39)- 39 -(13:12)- 36 *
14. 60 -(6:5)- 50 -(25:24)- 48 -(16:15)- 45
15. 16 -(16:15)- 15 -(15:14)- 14 -(7:6)- 12
16. 28 -(7:6)- 24 -(12:11)- 22 -(22:21)- 21
17. 40 -(10:9)- 36 -(36:35)- 35 -(7:6)- 30

Enharmonic.

18. 40 -(5:4)- 32 -(32:31)- 31 -(31:30)- 30
19. 100 -(5:4)- 80 -(40:39)- 78 -(26:25)- 75 *
20. 140 -(5:4)- 112 -(28:27)- 108 -(36:35)- 105

21. 60 -(5:4)- 48 -(24:23)- 46 -(46:45)- 45

Con l'* indichiamo le specie che non abbiamo trovato né in Al-Fārābī's *Kitāb al-Mūsīqā*, né in Ibn Sīnā's *al-Šifā* nello stesso ordine dei rapporti.[83]

[83]Cf. Youschkevitch & Rosenfeld, 'AL-KHAYYĀMI', p. 326. Costoro però attribuivano al matematico e poeta persiano 22 specie, quando nel testo se ne contano solo 21. Neanche avevano verificato che di nuovi Al-Khayyām ne avesse in realtà proposti solo due e non tre, come aveva dichiarato.