Un extractor de jugo teórico

El papel de las matemáticas en la explicación científica

Manuel Barrantes[1]

Recibido: 6 de septiembre de 2022
Aceptado: 7 de noviembre de 2022

Resumen: Recientemente se han propuesto casos en los que, supuestamente, las matemáticas cumplirían un rol genuinamente explicativo en ciencia. Estos se han dividido entre aquellas situaciones en las que el rol explicativo lo cumplirían las operaciones matemáticas, y aquellas en las que lo cumplirían las entidades matemáticas. En este artículo analizo algunos de estos supuestos casos y sostengo que es infundado afirmar que las matemáticas puedan ser genuinamente explicativas. En mi discusión, enfatizo en rol representacional de las matemáticas, opuesto al rol supuestamente explicativo: el rol de las matemáticas, incluso en los casos que discuto, es representar hechos científicos y ayudar a realizar inferencias acerca de dichos hechos.

Palabras clave: explicación científica, explicación matemática, representación, cigarras, arcoíris, panales.

Title: A theoretical juice extractor: The role of mathematics in scientific explanation

Abstract: There have recently been proposed cases where, supposedly, mathematics would play a genuinely explanatory role in science. These have been divided into those situations where the explanatory role would be played by mathematical operations, and those where it would be played by mathematical entities. In this article, I analyze some of these purported cases and argue that claims that mathematics can be genuinely explanatory are unfounded. Throughout my discussion, I emphasize the representational role of mathematics, as opposed to its supposed explanatory role: the role of mathematics, even in the cases that I discuss, is to represent physical facts and help draw inferences about those facts.

Keywords: scientific explanation, mathematical explanation, representation, cicadas, rainbows, honeycombs.

1. Introducción

La manera más natural de entender el rol de las matemáticas en explicaciones científicas es el de representar y ayudar a extraer inferencias sobre los hechos físicos responsables de la ocurrencia del fenómeno a explicar (el *explanandum*). De acuerdo a Joseph Melia, por ejemplo, dado que las matemáticas brindan buenas representaciones del mundo físico, algunas explicaciones científicas requieren el uso de matemáticas, pero esto no significa que las matemáticas sean en sí mismas explicativas. Si decimos, por ejemplo, que 'F ocurre porque P mide $\sqrt{2}$ metros', a pesar de que estamos mencionando el número $\sqrt{2}$ en la explicación, es el largo del objeto físico P, y no el número real $\sqrt{2}$ con el cual lo representamos, el que realiza el verdadero trabajo explicativo (cf. Melia, 2002, p. 76). La idea

[1] Departamento de Filosofía, California State University, Sacramento. Sacramento, California, Estados Unidos.
barrantes@csus.edu | 0000-0002-7997-5948

Barrantes, M. (2022). Un extractor de jugo teórico: El papel de las matemáticas en la explicación científica. *Epistemología e Historia de la Ciencia, 7*(1), 6–21.
https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/article/view/38809/

es que las matemáticas aparecen en explicaciones científicas en virtud de dichos roles representacional e inferencial. Al derivar inferencias sobre la representación matemática, podemos aprender cómo los hechos físicos relevantes explican el *explanandum.*

Recientemente, sin embargo, se ha sostenido la tesis de que las matemáticas serían capaces de hacer más que esto, que podrían jugar un rol genuinamente explicativo en ciencia. Un supuesto tipo de dichos casos, propuesto por Robert Batterman, consiste en las explicaciones que incluyen las llamadas *operaciones* con límites. De acuerdo a Batterman, en estas explicaciones las matemáticas no representarían ningún aspecto de los sistemas físicos que intentan modelar, y sin embargo juegan un rol crucial en explicar aspectos de dichos sistemas. Por lo tanto, sostiene Batterman, el rol de las matemáticas en estos casos no es representacional sino explicativo en sí mismo. Otro tipo de casos, propuesto por Alan Baker (2005) y Aidan Lyon & Mark Colyvan (2008), son aquellos en los que *entidades* matemáticas serían esenciales para la explicación, de manera tal que, si no se mencionaran propiedades específicas de dichas entidades, la explicación no funcionaría. El propósito de este artículo es analizar estos casos y mostrar que es infundado afirmar que las matemáticas juegan un rol explicativo. El rol de las matemáticas, sostengo, es representacional incluso en los casos que usan operaciones con límites o que dependen de manera indispensable de propiedades matemáticas específicas.

El plan de este artículo es el siguiente. En la sección 2 introduzco la concepción inferencial de la aplicabilidad de las matemáticas, de acuerdo a la cual el rol de las matemáticas en explicaciones científicas es (simplemente) representar los hechos físicos que realizan el verdadero trabajo explicativo para poder extraer inferencias acerca de los mismos. También sostengo que esta postura es compatible con algunas de las más importantes posturas filosóficas sobre explicación científica, a saber, las de Carl Hempel, Wesley Salmon, y James Woodward. En la sección 3 introduzco la primera objeción a la postura inferencial, a saber, que algunas operaciones matemáticas son explicativamente indispensables a pesar de que no representan nada en el mundo físico. El ejemplo que discuto en esta sección es la supuesta explicación de dos aspectos relacionados de los arcoíris por la operación con límites que relaciona los modelos de la luz como un rayo y como una onda. En la sección 4 introduzco la segunda objeción, que consiste en que algunas explicaciones científicas apelarían de manera indispensable a entidades matemáticas, y por esa razón, dichas entidades estarían jugando un rol explicativo y no meramente representacional. Los casos que analizo aquí son el de los panales de abeja, y el de las cigarras. En la sección 5 sostengo, contra estas dos objeciones, que incluso en estos casos el rol de las matemáticas es representacional.

Antes de entrar en los argumentos, quisiera decir algo sobre la metodología que seguiré en adelante. Primero, he escogido los casos que voy a discutir porque son los más citados por los filósofos que cuestionan la postura representacional. Al mostrar que estos casos pueden ser explicados de otra manera, espero contribuir a defender la postura representacional. Sin embargo, mi argumento no pretende funcionar como algo que en principio aplicaría a todos los supuestos casos de explicaciones matemáticas en ciencia. Mi aproximación es 'por partes', digamos, en el sentido de que trabajo caso por caso. Habiendo dicho esto, sin embargo, sí considero que estos casos son representativos de las diferentes maneras en las que se puede lidiar con supuestos casos de explicaciones matemáticas en ciencia: se puede mostrar que una operación o entidad no es realmente indispensable para la explicación, o que la explicación misma no es indispensable, debido a que existen mejores alternativas.

El segundo punto metodológico tiene que ver con haber elegido la concepción inferencial. En este artículo no defiendo esta postura como un todo. Simplemente sostengo que una de sus tesis más importantes, a saber, el carácter representacional de las matemáticas en explicación científica, es compatible con los modelos filosóficos más aceptados de explicación científica, y con los casos que supuestamente la cuestionan. Existen otras concepciones filosóficas de la aplicabilidad de las matemáticas en ciencia (por ejemplo, Suárez, 2010) que comparten este aspecto también.[2]

2. El rol de representacional de las matemáticas

De acuerdo a la Concepción Inferencial de la Aplicabilidad de las Matemáticas de Otávio Bueno, Steven French, y Mark Colyvan, en las explicaciones científicas que usan matemáticas, éstas deben interpretarse en términos del fenómeno objetivo. El formalismo matemático en sí no realiza el trabajo explicativo, sino los aspectos empíricos representados o resaltados por él (ver: Bueno & Colyvan, 2011; Bueno & French, 2012, 2018). En esta postura, las matemáticas pueden expresar relaciones explicativas solo cuando se les interpreta adecuadamente en términos empíricos:

> [Una] piedra es arrojada al aire. En cierto momento, la ecuación matemática que describe el movimiento de la piedra tiene valor cero. ¿Acaso el hecho de que la ecuación tenga dicho valor explica por qué la piedra está en reposo, o simplemente ofrece una descripción matemática del fenómeno en cuestión? Presumiblemente, nadie pensaría que el hecho de que una ecuación tenga valor cero sea en sí mismo una explicación de un fenómeno físico. Lo que se necesita para brindar una explicación satisfactoria es una adecuada interpretación física, que identifique los procesos físicos relevantes responsables de la producción del fenómeno en cuestión (Bueno & French, 2012, p. 104).

Esta manera de entender el rol de las matemáticas es compatible con algunos de los más importantes modelos filosóficos de explicación científica. Consideremos por ejemplo el modelo Nomológico-Deductivo (ND) de Carl Hempel. En el modelo ND, explicar científicamente consiste en deducir el *explanandum* de un conjunto de premisas que incluyan una ley empírica que sea esencial para la derivación. En esta postura, la herramienta explicativa relevante es la *deducción*, y las matemáticas son simplemente herramientas para llevar a cabo dichas deducciones. En palabras de Hempel, la función de las matemáticas es:

> Hace[r] explícitos ciertos presupuestos o aseveraciones que están incluidas en el contenido de las premisas del argumento. [...] Tanto las matemáticas como el razonamiento lógico son técnicas conceptuales que hacen explícito lo que está implícito en un conjunto de premisas. (Hempel, 1983, p. 390)
>
> Así, en el establecimiento de conocimiento empírico, las matemáticas [...] tienen, por así decirlo, la función de un extractor de jugo teórico. Las técnicas de teoría matemática

[2] Agradezco a los dos jueces anónimos de esta revista por la sugerencia de extender la introducción del artículo y añadir esta nota metodológica.

> o lógica no pueden producir más jugo de información factual que la que está contenida en los presupuestos sobre las que se aplican. (Hempel, 1983, p. 391)

En el caso del modelo Causal-Mecánico (CM) de Wesley Salmon, solo procesos e interacciones causales pueden ser explicativos; ya que las entidades matemáticas no tienen poderes causales en el sentido de Salmon (como procesos que transfieren una cantidad conservativa tal como la describen las leyes conservativas), el rol de las matemáticas no puede ser el de explicar el *explanandum*. Las fórmulas matemáticas citadas en el *explanans* se usan simplemente para representar dichos procesos e interacciones causales (cf. Salmon, 1984).

En el caso del modelo intervencionista de James Woodward (2003), explicar científicamente requiere información sobre las relaciones invariantes de dependencia responsables por la ocurrencia del *explanandum*. Una relación invariante de dependencia es aquella que se mantiene estable bajo intervenciones, de manera que es posible manipular un elemento de la relación interviniendo en el otro. A veces es imposible llevar a cabo dichas intervenciones, y sin embargo podemos recabar esta información al analizar un modelo matemático que represente dichas relaciones, por supuesto siempre y cuando tengamos un modelo apropiado. Así, por ejemplo, podemos explicar las mareas citando la posición de la luna en un momento determinado. A pesar de que intervenir sobre la posición de la luna no es posible, podemos manipular las mareas (es decir, podemos responder a preguntas del tipo 'qué-habría-pasado-si-las-cosas-hubieran-sido-diferentes') si 'cambiamos' la posición de la luna en el modelo matemático que la representa. Esto puede hacerse, por ejemplo, si insertamos un valor diferente en la variable que representa la distancia de la luna a la tierra, y vemos cómo la representación matemática de las mareas varía correspondientemente. Esto nos permite identificar la distancia de la luna a la tierra como una de las causas de las mareas. Aquí, el modelo matemático es simplemente una herramienta para manipular relaciones objetivas de dependencia (cf. Woodward, 2003, p. 129).[3]

La idea es, por lo tanto, que estos modelos filosóficos de explicación científica son compatibles con la postura de que el rol de las matemáticas es meramente representacional. Sin embargo, esta noción ha sido recientemente cuestionada por algunos autores que sostienen que las matemáticas cumplen un rol explicativo, en algunos casos adicionalmente a su rol representacional, y en otros en lugar de dicho rol. Estos casos han sido llamados 'Explicaciones Matemáticas de Fenómenos Físicos' (EMFF). Existen dos tipos de EMFFs en la literatura, las que apelan a *operaciones* matemáticas, y las que apelan a *entidades* matemáticas.

3. Explicaciones matemáticas: Operaciones

Robert Batterman (2010) sostiene que las matemáticas pueden cumplir un rol genuinamente explicativo, uno que es independiente de su rol representacional. Batterman introduce la noción de 'explicación asintótica', que es aquella que involucra de manera indispensable una operación matemática llamada razonamiento asintótico, que permite transitar entre dos modelos teóricos que convergen en el límite matemático. Lo interesante es que estos dos modelos representan el mismo fenómeno, pero sus presupuestos teóricos subyacentes son

[3] Una discusión más detallada de los modelos de explicación causales como el de Woodward y Salmon puede encontrarse en el artículo de Olga Gómez & Germán Guerrero en esta revista (Gomez Gutierrez & Guerrero Pino, 2020).

diferentes, y generalmente solo uno de ellos es tomado como correcto por la comunidad científica. Por ejemplo, el modelo A intenta ser una representación realista de un fenómeno físico, y el modelo B es una representación más idealizada del mismo. Sin embargo, el modelo B resulta de aplicar una operación asintótica al modelo A, en concreto, de llevar al límite a una variable del modelo A. Para Batterman, lo que es importante en estos casos es que la *operación* matemática (en este caso, obtener un límite) que relaciona ambos modelos es esencial para usar el modelo más realista en explicaciones de fenómenos físicos. Según Batterman, las explicaciones asintóticas no encajarían bajo los modelos representacionales de la aplicación de las matemáticas porque ellas "no proceden enfocándose en una estructura abstracta ejemplificada por el sistema físico" (2010, p. 3), y "*no* requieren que uno asocie una entidad matemática o sus propiedades con una estructura física que el sistema en cuestión posea" (2010, p. 4).

3.1. El caso de los arcoíris

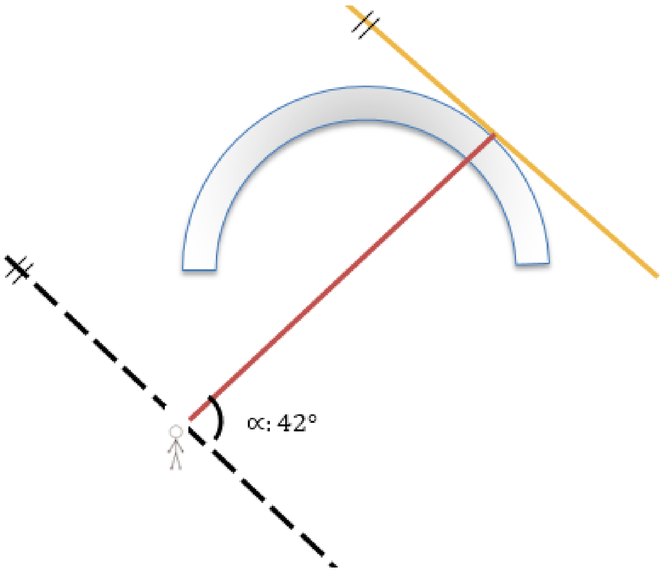

Figura 1: Ángulo de elevación de un arcoíris

Examinemos uno de los casos más citados en la literatura. Los arcoíris aparecen siempre con un ángulo de elevación de 42° relativo a la dirección de la luz solar (es decir que el ángulo que forman los rayos de luz que vienen de la parte superior del arcoíris con los rayos de luz del sol es aproximadamente 42° (ver figura 1). Adicionalmente, los arcoíris siempre aparecen con el mismo patrón de colores, a pesar de que cada arcoíris es el resultado de un conjunto único de circunstancias (Batterman, 2010, 20). ¿Cómo explicar ambas características?

Estas características de los arcoíris se deben a la interacción entre las ondas de luz y las gotas de lluvia, por lo que es natural pensar que se debe usar el modelo de luz como onda para explicarlos. Y, ciertamente, usando este modelo uno puede explicar el patrón de colores, como consecuencia del fenómeno de dispersión, a saber, que el índice de refracción de la luz varía cuando la luz pasa de un medio a otro (en este caso, los medios son el aire y el agua de las gotas de lluvia), dependiendo de la longitud de onda de las ondas de luz (los valores aproximados del índice de refracción en los extremos opuestos del espectro son $n_{\text{rojo}} \approx 4/3$ y $n_{\text{violeta}} \approx 1{,}344$.). Esto a su vez influye en el orden en el que las ondas inciden en el ojo del observador, desde las ondas rojas provenientes de las gotas más altas, hasta las ondas violeta provenientes de las gotas más bajas, tal como puede observarse en la figura 2:

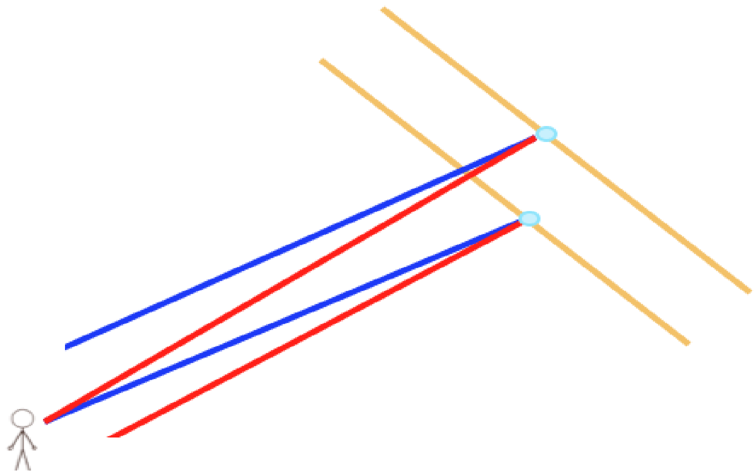

Figura 2: Incidencia en un observador de dos rayos de luz de distinta longitud de onda.

Sin embargo, para explicar la inclinación misma (por qué el ángulo entre la luz refractada y la luz solar es siempre aproximadamente 42°) tenemos que apelar a las relaciones geométricas entre la luz incidente y refractada al interior de las gotas de lluvia (asumiendo gotas perfectamente esféricas). En el caso de las ondas de luz rojas, las relaciones geométricas son las siguientes:
Siguiendo la ley de Snell:

$$\text{sen}\,(2\beta - \phi) = n\,\text{sen}\,\beta \tag{1}$$

La concentración mayor de rayos ocurre cuando la variación de ϕ respecto a β es cero, lo cual puede representarse matemáticamente como:

$$\frac{d\phi}{d\beta} = 0 \tag{2}$$

Para la luz roja, $n_{\text{rojo}} = \frac{4}{3}$, por lo tanto, tenemos:

$$\text{sen}\,(2\beta - \phi) = \frac{4}{3}\,\text{sen}\,\beta$$

$$\phi = 2\beta - \ \text{sen}^{-1}\left(\frac{4}{3}\,\text{sen}\,\beta\right)$$

$$\frac{d}{d\beta}[\,\phi\,] = \frac{d}{d\beta}\left[2\beta - \ \text{sen}^{-1}\left(\frac{4}{3}\,\text{sen}\,\beta\right)\right]$$

Usando (1) tenemos:

$$0 = 2 - \frac{\frac{4}{3}\cos\beta}{\sqrt{1 - \frac{16}{9}\,\text{sen}\,\beta}}$$

Ya que:

$$\cos^2\beta = 1 - \text{sen}^2\,\beta,$$

tenemos que:

$$\operatorname{sen} \beta = \sqrt{\frac{5}{12}}$$

Remplazando β en (1) obtenemos:

$$\phi \approx 21°.$$

Por lo tanto:

$$2\phi \approx 42°.$$

Un razonamiento análogo nos da $2\phi \approx 40{,}5°$ para la luz violeta.

Esto es sorprendente. La explicación depende de las relaciones geométricas que ocurren al interior de la gota de lluvia (Figura 3), las cuales se capturan cuando la luz se representa como perfectamente linear, es decir, cuando se usa el modelo antiguo de la luz como un rayo, evitando entrar en los detalles reales de la naturaleza de la luz, que es una onda (o una serie de paquetes de onas). Por el contrario, debemos amplificar la escala a la que representamos la luz, y asumir que la luz es un rayo, y no una onda (o paquetes de onda), lo cual es falso. El problema, señala Batterman, es que esta falsa representación es esencial para explicar el ángulo de elevación de 42°.

Entonces, para explicar el patrón de colores, debemos apelar a las propiedades de la luz tomada como onda (dependiendo de la longitud de onda, el índice de refracción varía); pero para explicar el ángulo mismo, tenemos que apelar a las relaciones geométricas que ocurren al interior de la gota de agua, lo cual a su vez requiere que describamos a la luz como un rayo. ¿Por qué una representación falsa es esencial para explicar un aspecto real de los arcoíris? Y más importante aún, ¿por qué necesitamos dos modelos diferentes, que asumen ontologías diferentes, para explicar aspectos relacionados de un mismo fenómeno?

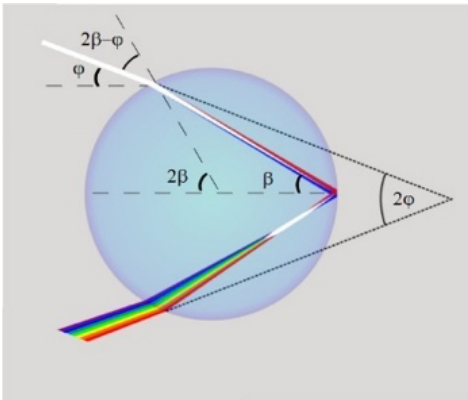

Figura 3: Comportamiento geométrico de la luz en una gota de lluvia perfectamente esférica. Imagen de dominio público, tomada de https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Raindrop_optics.jpg

3.2. Operaciones límite

De acuerdo a Batterman, la razón por la que esta explicación tiene éxito es que el modelo de onda y el modelo de rayo están relacionados por una *operación asintótica*. En el modelo de onda, cada onda refractada tiene una longitud de onda asociada λ. Cuando la proporción entre esta longitud λ y el radio r de la gota de lluvia se aproxima a cero, la representación matemática realista colapsa en la representación falsa. Esta operación se llama ‘tomar el límite’. Tomar el límite, dice Batterman, es explicativamente esencial porque provee “el vínculo mediador entre los modelos representativos” (2010, 10). Una ilustración simple de esto es dada por una función f(x) que define una curva en un plano:

$$f(x) = A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x \tag{3}$$

$$\lim_{1/\lambda\to\infty} f(x) = \lim_{1/\lambda\to\infty} A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x$$

$$\lim_{1/\lambda\to\infty} f(x) = A \tag{4}$$

Como se puede ver, la ecuación (3) especifica una onda y la ecuación (4) especifica una línea. La operación de obtener el límite brinda una transición entre estas dos figuras, y debido a ello, sostiene Batterman, el modelo altamente idealizado del rayo luminoso puede ser usado exitosamente en la explicación de un fenómeno real, en este caso, el hecho de que el ángulo de elevación sea siempre el mismo. El modelo idealizado del rayo luminoso se obtiene como un caso límite del modelo más realista de la luz como onda (o paquete de ondas) como resultado de una operación matemática realizada sobre este último (la operación de obtener el límite), y en ese sentido, la operación en sí misma es explicativamente relevante.[4] La postura de explicación asintótica de Batterman se basa en el uso de las matemáticas para identificar patrones estables que omiten muchos detalles del fenómeno real. Al obtener el límite en el modelo matemático, uno ignora los detalles irrelevantes del proceso real.

De acuerdo a Batterman, estas explicaciones representan un problema para la concepción inferencial de Bueno, French, y Colyvan porque no se basan en similitudes estructurales entre el modelo matemático y el fenómeno físico objetivo. Batterman resume esta situación de la siguiente manera:

> El problema es simple. Nada en el mundo físico realmente corresponde con la idealización. Por lo tanto, ¿en qué sentido puede haber un mapeo desde una estructura matemática hasta una estructura física real? [L]as buenas representaciones reflejan la verdad acerca del mundo. Las idealizaciones, sin embargo, son falsas. (Batterman, 2010, p. 10)

En suma, Batterman sostiene que las explicaciones asintóticas representan un contraejemplo a las posturas representacionales, primero porque estas explicaciones dependen de los componentes idealizados de los modelos matemáticos, y segundo porque la operación misma no representa nada del mundo real. Batterman concluye que las posturas representacionales están equivocadas y que se necesita una postura completamente nueva para dar cuenta del rol que cumplen las matemáticas en explicaciones científicas.

4. Explicaciones matemáticas: entidades

En la literatura reciente ha habido mucha discusión sobre la posibilidad de explicaciones matemáticas en las que *entidades* matemáticas cumplan un rol crucial. La mayoría de las discusiones sobre EMFFs se han enfocado en estos casos.[5] En el contexto de los debates

[4] Esto es así a pesar de que el modelo de onda no es el más realista de los modelos de luz disponibles (el modelo más aceptado es el de los paquetes de onda, pero para los efectos de este artículo, todo lo dicho sobre el primero, se aplica al segundo también).

[5] Por una discusión detallada de explicaciones matemáticas en general, y EMFFs en particular (incluyendo el caso de las cigarras que discuto más abajo) ver Mary Leng (2005).

sobre el realismo matemático, estas explicaciones se han usado para justificar la existencia de objetos matemáticos, usando una nueva versión del Argumento de Indispensabilidad de W.O. Quine.[6] La idea es que, si tenemos razones para creer en la existencia de las entidades y procesos inobservables postulados por nuestras mejores explicaciones científicas (por ejemplo, electrones, campos electromagnéticos, procesos evolutivos, etc.), entonces también tenemos razones para creer en la existencia de las entidades matemáticas que figuran en las EMFFs. Voy a ignorar este debate en este artículo,[7] aunque mi argumento tiene consecuencias que al final son relevantes para dicho debate. Sostengo que incluso en las llamadas EMFFs, el rol de las matemáticas es (simplemente) representar las entidades y los procesos físicos responsables por el verdadero trabajo explicativo.

4.1. El caso de los panales de abeja

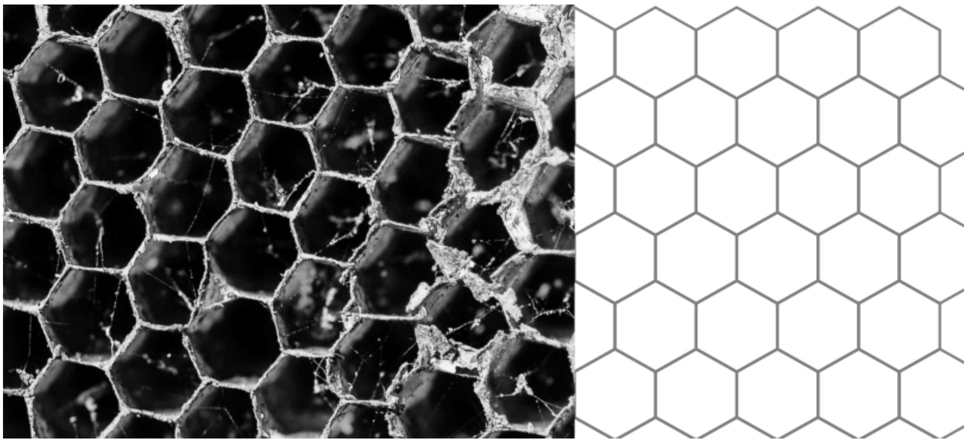

Figura 4. Hexágonos de un panel de abeja

Este caso fue propuesto por primera vez por Aidan Lyon & Mark Colyvan (2008) y ha sido ampliamente discutido en la literatura en el contexto del argumento de indispensabilidad. El problema es el siguiente:

Los panales de abeja dividen el espacio en mallas de celdas hexagonales en lugar de cualquier otro tipo de forma tales como triángulos, cuadrados, etc. (ver Figura 4). La explicación de este hecho constaría de dos partes:

> Es evolutivamente ventajoso para la las abejas minimizar la cantidad de cera que utilizan al construir sus panales para guardarmiel. Siguiendo el teorema de Hales (conocido como la 'conjetura' de los panales antes de ser probada por Thomas Hales en el 2001), la mejor forma de dividir una superficie en regiones de igual área minimizando el perímetro total es con una malla de celdas hexagonales. Por esa razón, las abejas construyen las celdas de sus panales de forma hexagonal

Esta explicación evolutiva depende del hecho matemático de que las mallas hexagonales tienen la propiedad de minimizar el perímetro total maximizando el área interior (teorema de Hales). La explicación muestra cómo, sin importar las diferentes formas que podrían haber intentado las abejas durante su historia evolutiva, una vez que

---

[6] El holismo confirmacional en el que se basaba la versión original ha sido criticado, entre otros, por Penelope Maddy (ver Maddy, 2005, por una síntesis de la discusión). La versión nueva se basa en el principio de inferencia a la mejor explicación (ver, por ejemplo, Baker, 2005). Para un análisis detallado de este mecanismo inferencial ver el artículo de Maximiliano Azcona en esta revista (Azcona, 2019).

[7] Abordo este debate en Barrantes (2019a) y (2019b).

intentan usar hexágonos este rasgo pasará a su descendencia, porque los hexágonos son evolutivamente ventajosos para cualquier abeja de construya panales. Según Lyon y Colyvan (2008), si no se menciona el teorema de Hales, que resalta una propiedad de una entidad matemática, la ventaja evolutiva de la forma hexagonal hubiera permanecido como un misterio. Por lo tanto, sostienen Lyon y Colyvan, este caso muestra cómo una propiedad de los hexágonos (que son entidades matemáticas) es indispensable para la explicación, y en ese sentido cumple un rol explicativo.

4.2. El caso de las cigarras

Este caso fue presentado por primera vez por Alan Baker (2005).[8] Existen siete especies de cigarras del género *Magicicada*, y estas emergen como adultas simultáneamente cada 13 o 17 años en Norteamérica, dependiendo de la región geográfica en la que se encuentren. Ciertas restricciones ecológicas brindan razones a los científicos para asumir que los ciclos vitales deben estar en rangos que incluyen dichos números. De acuerdo a Yin Yoshimura, por ejemplo, las cigarras del sur tendrían un rango de entre [12–15] años, y las del norte de entre [14–18] años (ver Yoshimura, 1997, pp. 113–114). Sin embargo, el hecho de que los ciclos vitales tengan un número de años primo no puede explicarse por estas restricciones ecológicas.[9]

Existen, sin embargo, dos explicaciones evolutivas disponibles. Una es que es evolutivamente ventajoso minimizar la posibilidad de intersección con depredadores; tener un ciclo vital primo minimiza las posibilidades de coincidir con depredadores de otros ciclos vitales. La otra es que es evolutivamente ventajoso evitar hibridación con otras subespecies de ciclos más largos o más cortos, pues eso llevaría a que los descendientes pierdan la ventaja de la emergencia simultánea; tener un ciclo vital primo reduce las posibilidades de dicha hibridación. Estas explicaciones evolutivas dependen de los siguientes hechos de teoría de números:

Un número es primo si admite solo un divisor aparte de 1. Dos o más números son co-primos si solo admiten a 1 como divisor común. En base a estas definiciones, se siguen los siguientes lemas:

> *Lema 1:* el mínimo común múltiplo entre m y n es máximo sí, y solo sí, m y n son co-primos.
>
> *Lema 2:* un número m es co-primo con cada número $n < 2m; n \neq m$ sí, y solo sí, m es primo.

Esto explica por qué, dado que algunas cigarras tienen ciclos vitales primos, tendrían a enfrentar menos depredadores que si tuvieran ciclos compuestos y estarían menos expuestas a otras subespecies con las que puedan coincidir. Por ejemplo, una subespecie de cigarra con un ciclo vital de 12 años se interceptaría con depredadores de ciclos vitales de 1, 2, 3, 4, 6 y 12 años, mientras que una subespecie con ciclo vital de 13 años solo se interceptaría con depredadores de ciclos vitales de 1 y 13 años. Un razonamiento similar se

---

[8] Discuto este caso en detalle en Barrantes (2019a).

[9] Contra Baker, Chris Daly y Simon Langford (2009) sostienen que la elección de años como unidad de medida es arbitraria, y por lo tanto los ciclos no son primos en sí mismos. Aunque estoy de acuerdo con esa conclusión (pues, como veremos, mi interpretación es que los intervalos temporales son atributos físicos, mientras que 'ser primo' es una propiedad de algunos números naturales), le doy la razón a Baker cuando responde que la unidad de medida no es arbitraria. La posición de la Tierra respecto del Sol afecta directamente los ciclos vitales de los organismos vivos al afectar aspectos locales relevantes tales como la temperatura y cantidad de luz diurna (ver Baker, 2009, p. 615). Las cigarras emergen en el verano, y solo existe un verano al año.

aplica a las cigarras de ciclos de 17 años. Adicionalmente, dado que ambas especies tienen ciclos primos, la indeseada hibridación entre cigarras con diferentes ciclos vitales ocurriría solo cuando los números de años de los ciclos se multiplican entre sí, es decir, cada 221 años.

El aspecto crucial de este ejemplo es que estas ventajas evolutivas se explican apelando a una propiedad matemática específica: la propiedad de ser primo, que comparten tanto 13 como 17. Tal como en el caso de los panales de abeja, si no se cita esta propiedad matemática, la explicación no funcionaría, y por esa razón, según Baker, estas entidades juegan un rol indispensable en la explicación. De acuerdo al biólogo Robert MacArthur, esta "sería la única aplicación de la teoría de números a la biología" (citado en May, 1979, p. 347).

5. Defensa de la postura representacional

En esta sección muestro cómo cada uno de estos casos puede ser comprendido bajo la postura representacional. Las matemáticas son una herramienta muy útil para realizar ciertas derivaciones, pero, finalmente, como señala Hempel, son un extractor de jugo teórico que ayuda a los científicos a extraer inferencias que identifican las verdaderas entidades y procesos explicativos, los cuales son, en todos los casos, empíricos. En estos tres casos que acabo de discutir, por lo tanto, las matemáticas no son indispensables en un sentido genuinamente explicativo.

En primer lugar, en el caso del arcoíris sigo a Bueno y French (2012), y a Pincock (2011), para sostener que la operación matemática en sí misma (la operación de calcular el límite) no contribuye a la explicación; solo los modelos matemáticos relacionados por ella lo hacen. Seguidamente, en el caso de los panales de abeja sostengo que existe una mejor explicación disponible, una que convierte a la original en obsoleta.[10] Si seguimos la idea de que una mala explicación no es una explicación en absoluto (de lo contrario, los astros explicarían la conducta humana), entonces las matemáticas no serían explicativas en el caso de los panales, tal como se pretendería en su formulación original. Finalmente, en el caso de las cigarras sí se cumple que la explicación dada sea la mejor disponible, pero el rol que juegan las matemáticas en ella es, después de todo, representacional, debido a que los ciclos vitales pueden ser interpretados como teniendo propiedades empíricas, no matemáticas.[11] Examinemos los tres casos en más detalle.

5.1. Respuesta al caso del arcoíris

De acuerdo a Bueno y French (2012), las explicaciones asintóticas pueden entenderse perfectamente bajo la concepción inferencial. Es cierto que, en principio, las operaciones límite no juegan un rol representacional, y esto podría señalar un problema para la concepción inferencial porque "si no hay análogos físicos que correspondan con las divergencias y singularidades del arreglo matemático, la concepción inferencial no puede interpretarse de vuelta en el arreglo físico" (Bueno & French, 2012, p. 91). Sin embargo, sostienen Bueno y French, siempre y cuando exista algún modelo que pueda interpretarse en términos del fenómeno físico objetivo, no hay problema en que este se relacione

[10] Estoy de acuerdo con un juez de esta revista en que este caso estrictamente no funciona como los otros, pues no estoy reinterpretando la explicación, sino que la remplazo por otra. He decidido conservarlo en el artículo porque me permite ilustrar una de las posibles maneras en la que se puede lidiar con supuestos casos de EMFFs.
[11] Esto también se aplica a la versión original del caso de los paneles de abejas, tal como lo muestra Saatsi (2011), aunque no voy a seguir esa línea argumentativa aquí.

estructuralmente con otro más idealizado. El punto es el siguiente: es cierto que no existe una interpretación física para las operaciones límite, pero si los resultados de dichas operaciones pueden interpretarse en términos del arreglo físico, la operación matemática en sí no tiene que por qué ser interpretada en términos físicos, pues esta se mantiene al nivel de una estructura excedente, es decir, como estructura matemática que cumple propósitos heurísticos (Bueno & French, 2012, p. 92).

Esto se puede ver claramente en el caso del arcoíris. Al obtener el límite ($\lambda/r \to 0$) estamos conectando el modelo de rayo con el modelo de onda, pero esto solamente muestra que el modelo de rayo es un caso especial del modelo de onda, y por lo tanto puede ser incorporado bajo el modelo de onda en situaciones en las que, una vez que el parámetro λ/r caiga por debajo de cierto umbral, algunos aspectos de las ondas son irrelevantes para explicar el ángulo de elevación del arcoíris. El punto de Bueno y French es que lo que hace el trabajo explicativo relevante en este caso es el modelo de rayo, y no la operación a través de la cual llegamos a dicho modelo.

Después de todo, incluso antes del advenimiento del modelo de onda de la luz, se podía considerar la explicación que describe a la luz como rayo como satisfactoria, una vez que se calculen empíricamente los índices de refracción. La manera como se llegue dicho modelo no es relevante para la explicación en sí. Pero la representación de luz como rayo sí tiene en cierto sentido una similitud estructural con la luz real porque, tal como señala Pincock (2011), esta resalta el hecho de que algunas relaciones al interior de la luz tienen un cierto tipo de 'linealidad', a saber, su trayectoria, la cual es esencial para explicar el ángulo de elevación. Si bien representar la luz como un rayo es incorrecto en varios sentidos, es correcto sin embargo respecto de este aspecto específico de la luz. Por lo tanto, a pesar de que no representa directamente el fenómeno objetivo, el modelo idealizado puede entenderse como una representación indirecta de algunos aspectos de dicho fenómeno.

5.2. Respuesta al caso de los panales de abejas

A pesar de la atención que ha recibido este caso, considero que el teorema de Hales no explica la forma hexagonal de los panales. Existe una explicación más tradicional que no apela al teorema de Hales, y en la que el rol de las matemáticas es evidentemente representacional. Fue propuesta por el ingeniero Bhushan Karihaloo, y reportada por Philip Ball en un número reciente de la revista *Nature* (Ball, 2013).

De acuerdo a Karihaloo, la forma hexagonal de los panales se debe tanto a las propiedades de la cera, como al procedimiento que siguen las abejas para construir sus panales. En un experimento, Karihaloo interrumpió a las abejas en el proceso de hacer los panales y encontró que, mientras que las celdas más antiguas eran hexagonales, las celdas nuevas eran circulares. Karihaloo concluyó que las abejas simplemente hacen celdas circulares agrupadas como una capa de burbujas. Debido a que las abejas calientan la cera con sus cuerpos mientras construyen las celdas circulares, una vez que terminan y se mueven a otra celda, la cera se enfría y se endurece en forma de hexágono (el hecho de que la cera caliente se retracta en hexágonos al enfriarse ya había sido probado por Christian Pirk en el 2004). Por lo tanto, reporta Ball, las celdas hexagonales "le deben más a simples fuerzas físicas que a la habilidad de las abejas" (Ball, 2013). Al representar estas fuerzas físicas tenemos que usar matemáticas, pero esto no significa que las matemáticas mismas jueguen un rol explicativo. Veamos en qué sentido esto es así.

La explicación esboza la historia causal del *explanandum*, mostrando que la forma hexagonal de las celdas se debe a procesos causales específicos de la cera. Se sugiere que la forma hexagonal no ocurre porque sea evolutivamente ventajosa, sino por las fuerzas producidas en la interacción entre la cera y el calor. Esta explicación se puede expresar en términos matemáticos, por supuesto, pero el rol que cumplen las matemáticas es muy parecido al que juega el número $\sqrt{2}$ cuando decimos que 'F ha ocurrido porque P mide $\sqrt{2}$ metros'. La explicación de Karihaloo socava la explicación que alude al teorema de Hales porque no es cierto que las abejas construyan celdas hexagonales (construyen celdas circulares que luego se vuelven hexagonales), por lo tanto, la explicación que se apoya en el teorema de Hales se basa en un presupuesto falso. Esto significa que la supuesta EMFF no explica la forma hexagonal.

Pero incluso la explicación original puede ser entendida en términos de las matemáticas representando fenómenos físicos, en este caso, relaciones geométricas en el espacio (esto ha sido argumentado en detalle en Saatsi, 2011). Esta estrategia puede verse mejor en el caso de las cigarras.

5.3. Respuesta al caso de las cigarras

En el caso de las cigarras, los ciclos de 13 y 17 años pueden entenderse perfectamente sin usar la noción 'primos'. Los ciclos poseen una propiedad física en común poseída por algunos intervalos temporales, que llamaré 'propiedad de minimizar la superposición'. Es cierto que hubiera sido muy difícil identificar esta propiedad sin la ayuda de las matemáticas, pero mientras sea posible concebir de manera separada la propiedad física de su representación matemática, el punto acerca del rol representacional de las matemáticas se sostiene. Y ciertamente podemos hacerlo en el caso de las cigarras. Las propiedades físicas del tiempo relevantes para este caso pueden deducirse a partir de las nociones básicas de *combinación* ($\oplus$) y *congruencia* de intervalos temporales, las cuales son propiedades no matemáticas perfectamente aceptables (por ejemplo, pueden representarse perfectamente en lógica de primer orden).

En el caso de las cigarras, la pregunta que intriga a los científicos es por qué los ciclos vitales representados por los números primos tienen una propiedad evolutivamente deseable. La representación matemática que asume que los años son iguales unos a otros, captura todos los factores relevantes para la explicación de este aspecto del tiempo. Al representar los años usando como modelo matemático al sistema de los números naturales, capturamos todos los aspectos relevantes para explicar por qué la propiedad de 'minimización de superposición' es evolutivamente ventajosa.

Es más, nos hemos basado en nuestros conocimientos previos acerca de la importancia de los ciclos naturales para explicar el comportamiento animal para escoger *años* como unidad de medida, y para idealizar los años como si fueran iguales unos a otros. Una vez que este modelo está establecido, nos podemos 'olvidar' de las cigarras y enfocarnos exclusivamente en el número primo de años. La pregunta ¿'por qué los ciclos vitales son evolutivamente ventajosos?' se convierte en 'por qué los números primos son co-primos con los demás?' La explicación matemática de este hecho responde la pregunta empírica sobre las cigarras solo en la medida en que nos muestra cómo las propiedades del tiempo explican los ciclos vitales. En otras palabras, usamos matemáticas para representar intervalos temporales, y luego usamos los lemas de teoría de números para entender por qué los ciclos son evolutivamente ventajosos. Cuando analizamos la representación matemática, podemos ver que esto se debe a que los ciclos son primos; pero cuando interpretamos estos resultados en términos empíricos descubrimos que es la propiedad de minimizar la superposición la que explica la ventaja evolutiva. Es cierto que hubiera sido prácticamente imposible llegar a conocer dicha propiedad de los intervalos temporales sin usar la propiedad matemática de 'ser número primo', pero este es un tema simplemente de indispensabilidad práctica, y no de indispensabilidad explicativa. La propiedad matemática 'ser número primo' sirve simplemente para señalar la propiedad relevante del tiempo.

6. Conclusión

El tema de si las matemáticas pueden cumplir un rol genuinamente explicativo en ciencia es actualmente foco de mucha discusión tanto en la filosofía de la ciencia como en la filosofía de las matemáticas. En este artículo he mostrado que tanto en los casos que incluyen operaciones límite como en los que apelan de manera indispensable a entidades matemáticas, el rol de las matemáticas es representacional.

Agradecimientos

Agradezco a Valeria Panizo por sugerentes conversaciones que contribuyeron a mi enfoque en los arcoíris y las abejas, y a los jueces anónimos de esta revista por sus comentarios y recomendaciones. Una versión de este trabajo fue presentada en el Departamento de Matemáticas y Estadística de James Madison University, Virginia, USA.

Referencias

Azcona, M. (2019). Abducción e inferencia a la mejor explicación: criterios para su delimitación metodológica. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, *4*(1), 33–55. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/article/view/24955

Baker, A. (2005). Are there Genuine Mathematical Explanations of Physical Phenomena? *Mind*, 114, 223–238.

Baker, A. (2009). Mathematical Explanation in Science. *British Journal for the Philosophy of Science*, 60, 611–633.

Ball, P. (2013). How honeycombs can build themselves. *Nature*, Jul 2013. https://doi.org/10.1038/nature.2013.13398

Barrantes, M. (2019a), Optimal Representations and the Enhanced Indispensability Argument. *Synthese*, *196*(1), 247–263. https://link.springer.com/article/10.1007/s11229-017-1470-4

Barrantes, M. (2019b). Estructuralismo, ficcionalismo, y la aplicabilidad de las matemáticas en ciencia. *Areté. Revista de filosofía*, *31*(1), 7–34. https://doi.org/10.18800/arete.201901.001

Batterman, R. (2010). On the Explanatory Role of Mathematics in Empirical Science, *British Journal for the Philosiophy of Science*, *61*(1), 1–25.

Bueno, O., & Colyvan, M. (2011), An Inferential Conception of the Application of Mathematics, *Noûs*, *45*(2), 345–374.

Bueno, O., & French, S. (2012). Can Mathematics Explain Physical Phenomena? *British Journal for the Philosophy of Science*, *63*(1), 85–113.

Bueno, O., & French, S. (2018). *The Applicability of Mathematics: Immersion, Inference, Interpretation.* Oxford: Oxford University Press.

Daly, C., & Langford, S. (2009). Mathematical explanation and indispensability arguments. *Philosophical Quarterly 59*(237), 641–658.

Gomez Gutierrez, O. L., & Guerrero Pino, G. (2020). Explicaciones causal y mecanicista: aspectos etiológico, constitutivo, realista y pragmático. *Epistemología e Historia de la Ciencia*, *4*(2), 26–41. https://revistas.unc.edu.ar/index.php/afjor/article/view/25177

Hempel, C. (1983). On the nature of mathematical truth. En P. Benacerraf & H. Putnam (Eds.), *Philosophy of mathematics. Selected Readings* (2nd ed., pp. 377–393). Cambridge: Cambridge University Press.

Leng, M. (2005). Mathematical Explanation. En C. Cellucci & D. Gillies (Eds.), *Mathematical Reasoning, Heuristics and the Development of Mathematics* (pp. 167–189). London: King's College Publications.

Lyon, A., & Colyvan, M. (2008). The Explanatory Power of Phase Spaces. *Philosophia Mathematica*, *16*(2), 227–243.

Maddy, P. (2005). 'Three forms of Naturalism. En: S. Shapiro (Ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic* (pp. 437–459). Oxford: Oxford University Press.

May, R. M. (1979). Periodical cicadas. *Nature*, *277*, 347–349.

Melia, J. (2002). Response to Colyvan. *Mind*, *111*, 75–79.

Pincock, C. (2011), On Batterman's 'On the Explanatory Role of Mathematics in Science'. *British Journal for the Philosophy of Science*, *62*, 211–217.

Saatsi, J. (2011). The Enhanced Indispensability Argument: Representational versus Explanatory Role of Mathematics in Science. *British Journal for the Philosophy of Science 62*(1), 143–154.

Salmon, W. (1984). *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World.* Princeton: Princeton University Press.

Suárez, M. (2010). Scientific Representation. *Philosophy Compass*, *5*(1), 91–101.

Woodward, J. (2003). *Making Things Happen: A theory of Causal Explanation.* Oxford: Oxford University Press.

Yoshimura, J. (1997), The Evolutionary Origins of Periodical Cicadas During Ice Ages. *The American Naturalist*, *149*(1), 112–124.

Declaraciones

Conflictos de interés: El autor declara que no existen conflictos de interés.