Über die Struktur der klassischen Syllogistik

von

Klaus Härtig

SONDERDRUCK
aus der
WISSENSCHAFTLICHEN ZEITSCHRIFT DER MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT
HALLE-WITTENBERG
JAHRGANG II, 1952/53, HEFT 4
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE REIHE NR. 2

WISSENSCHAFTLICHE ZEITSCHRIFT DER MARTIN-LUTHER-UNIVERSITÄT HALLE-WITTENBERG
Jahrgang II, 1952/53, Heft 4
Mathematisch-naturwissenschaftliche Reihe Nr. 2

Über die Struktur der klassischen Syllogistik *)

Von KLAUS HÄRTIG

EINLEITUNG

(1)

Als „klassische Syllogistik" soll hier jener wohlbekannte Komplex von 256 Lehrsätzen bezeichnet werden, deren jeder von einem der 256 denkbaren Schlußmodi aussagt, ob er gültig ist oder nicht. Und zwar seien Gültigkeit und Ungültigkeit so auf die Modi verteilt, wie es das ganze Mittelalter hindurch und bis ins 19. Jahrhundert hinein — bis zur Ausbildung der „Algebra der Logik" nämlich — so gut wie unumstritten gelehrt worden ist; darauf soll das Attribut „klassisch" hindeuten.

In dieser Arbeit, die zur formalen Logik gehört, wird der *deduktive Zusammenhang* zwischen den Bestandteilen der klassischen Syllogistik untersucht.

Aus der Anhäufung von „Material" (nämlich von einzelnen Ableitungszusammenhängen ([1])) (Kap. I) geht das Bestreben nach dessen Vervollständigung und Systematisierung hervor (Kap. II). Eine in II aufgeworfene Frage wird „ins Abstrakte übersetzt" (Kap. III) und so „durchgerechnet" (Kap. IV); das Resultat läßt sich *nicht nur* auf die klassische Syllogistik zurückübersetzen (Kap. V).

Die im II. Kapitel gestellte Aufgabe kann hier zu Beginn nur skizziert werden:

Vorausgesetzt werde die Gültigkeit des identischen Urteils und gewisser unmittelbarer Schlüsse, darüber hinaus die Ungültigkeit gewisser anderer unmittelbarer Schlüsse. Ich frage nach *allen* erdenklichen *Teil*-Komplexen der klassischen Syllogistik, die zur Herleitung der *ganzen* klassischen Syllogistik hinreichen, wobei aber kein Bestandteil des betreffenden Teilkomplexes überflüssig sein soll. Solche Teilkomplexe („Axiomensysteme") anzugeben und zu zeigen, daß es wirklich alle sind, soll uns zur Klärung der (deduktiven) Struktur der klassischen Syllogistik genügen.

Diese Frage wird in Abschnitt 4, 7.1 beantwortet. „Von allein" — ohne daß man zunächst darauf hinaus will — entstehen jedoch andere Fragen, die in den letzten Teilen zur Sprache kommen.

(2)

Elementarer Darstellung zuliebe bemühe ich mich, nicht an allzuviele logische oder gar mathematische Vorkenntnisse zu appellieren. An *logistischen* Hilfsmitteln werden nur die Symbole für die sogenannten elementaren Aussagenverknüpfungen (—, &, v, →, ∾) ([2]) herangezogen — nicht einmal Allzeichen und Seinszeichen (statt derer wir Worte benutzen; beispielsweise wird in 4, 1.4.1 „XaX ist gültig" gemäß 4, 1.1 bedeuten, daß XaX für *alle* Werte der Variablen X richtig ist).

Zur *Terminologie* sei schon hier bemerkt:

Sowohl „Alle Griechen sind Menschen" als auch „Alle X sind Menschen" oder „Alle X sind Y" soll eine *Aussage* heißen; „Aussage" nennen wir daher nicht nur jede „eigentliche" Aussage (im üblichen Sinne), sondern auch jede *Funktion mit* (eigentlichen) *Aussagen als Wertevorrat.*

Aussagen im engeren Sinne sind entweder richtig oder falsch; Aussagen schlechthin (nämlich im weiteren Sinne) sind entweder *gültig* (= „immer" richtig) oder *ungültig* (= „manchmal" falsch): Der Wertevorrat einer gültigen Aussage besteht aus lauter richtigen (eigentlichen) Aussagen, der einer ungültigen Aussage enthält mindestens eine falsche (eigentliche) Aussage.

([1]) Zum Beispiel: „Aus der Gültigkeit von dem und dem Modus folgt die von dem und dem anderen Modus."

([2]) Siehe z. B. D. HILBERT und W. ACKERMANN, Grundzüge der theoretischen Logik (= Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 27), 3. Aufl., Berlin 1949, §§ 1 und 2.

***) Inaugural-Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades, genehmigt von der Philosophischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena.**

Referent: Prof. Dr. G. KLAUS, Korreferent: Prof. Dr. P. F. LINKE; Tag der mündlichen Prüfung: 23. 9. 1952.

Außer dem Anhang wurden die Abschnitte 4, 1.4.3—4 und 5, 3.2—3 nachträglich eingefügt. Absatz (2) der Einleitung, Abschnitt 2, 2 und Abschnitt 4, 8 sind hier ausführlicher als in der ursprünglichen Fassung.

Bei der Regel

$$\frac{\begin{array}{c} p \textit{ ist richtig} \\ p \rightarrow q \textit{ ist richtig} \end{array}}{p \rightarrow \bar{q} \textit{ ist falsch}}$$

bedeuten p und q Aussagen im engeren Sinne, bei der verwandten Regel

$$\frac{\begin{array}{c} p \textit{ ist manchmal}(^3) \textit{ richtig} \\ p \rightarrow q \textit{ ist gültig} \end{array}}{p \rightarrow \bar{q} \textit{ ist ungültig}}$$

jedoch Aussagen schlechthin.

Spezielle Aussagen sind die *Urteile* (vgl. 3,1 und 4,1), *unmittelbaren Schlüsse* (vgl. 1,1.3; 2,2; 4,1.4) und syllogistischen *Modi* (vgl. 4,2.1.1).

Im IV. und V. Kapitel habe ich *Strenge* im („naiven") Sinne nicht-formalisierter mathematischer Beweisführungen angestrebt; allerdings begnüge ich mich z. B. bei einfachen Beweisen wie 4, 3.3 (die man mühelos zu voller Strenge ergänzen kann) absichtlich mit Andeutungen. Der Ausdruck „herleiten" (2, 1; 4, 4.2; 4, 8.1) wird nicht näher erläutert.

Daß ich die (dem Aussagenkalkül zu entnehmenden) „nicht-syllogistischen Stützpunkte" (H. Scholz) *nicht* mit formalisiert habe, scheint mir, bei allen Nachteilen nicht-logistischen Vorgehens, mindestens den einen Vorteil zu haben: Die verwendeten Symbole bezeichnen fast ausschließlich *speziell-syllogistische* Gebilde. —

Von der *Literatur* über Syllogistik sprechen Abschnitt 3, 2 und der Anhang.

(3)

Die ersten Anregungen, mich mit dem *Ableitungs*zusammenhang der klassischen Syllogistik zu befassen, empfing ich 1948 von Herrn Professor Dr. Gerhard Stammler, der dann selbst auf diesem Gebiet — in einer noch unveröffentlichten Arbeit — mit teilweise anderer Symbolik, mit Hilfe anderer Begriffsbildungen und Methoden, in eine andere Richtung vorstieß (wobei er übrigens die ungültigen Modi nicht mit untersuchte). Für jene Anregungen danke ich Herrn Professor Stammler.

Ich danke Herrn Professor Dr. Georg Klaus, ohne dessen Interesse an der vorliegenden Abhandlung ich sie wohl kaum zu ihrer jetzigen Gestalt ausgebaut hätte.

Kapitel I

ABLEITUNGSZUSAMMENHÄNGE INNERHALB DER KLASSISCHEN LEHRE VOM SCHLUSS

1, 1.1. Seit der Scholastik ([4]) benutzen die Logiker mit Vorliebe die Buchstaben *a*, *e*, *i* und *o*, um Qualität und Quantität von Urteilen zu bezeichnen; auch wir schreiben, wenn S und P Begriffe bedeuten,

SaP	für	Alle S sind P,
SeP	für	Kein S ist P,
SiP	für	Einige S sind P,
SoP	für	Einige S sind nicht P.

An dem kniffligen Thema der Analyse dieser vier Verknüpfungen eilen wir vorbei — liegt uns doch jetzt nur an einer vorläufigen Übersicht. (Abschnitt 5,2 enthält einige Interpretationen im groben Umriß.) Zur Erläuterung bemerken wir allerdings, daß man von SaP zu verlangen pflegt, *es gebe* einige S; „einige S" bedeutet herkömmlicherweise „mindestens ein S", also das Gegenteil von „kein S" ([5]).

1, 1.2. Von den unmittelbaren Schlüssen sollen in der vorliegenden Arbeit nur diejenigen beachtet werden, bei denen in der Konklusion die beiden *selben* Begriffe wie in der Prämisse vorkommen. *Den zu einem Begriff A kontradiktorischen Begriff* $\bar{A}$ *(non-A) führen wir nicht ein.* ([6]) Damit reduziert sich (hier für uns) die Lehre von den unmittelbaren Schlüssen auf die Beziehungen des traditionellen Urteilsquadrats und die Konversionsregeln. Schlüsse wie z. B. der Kontrapositionsschluß

$$SoP \rightarrow \bar{P}iS$$

gehören demnach nicht zum Gegenstand unserer Untersuchungen.

1, 1.3. Falschheit eines Urteils wollen wir (meist) durch ein angehängtes f ausdrücken. ([7]) Auf Grund der (künftig durch die Abkürzung *cc* zu zitierenden) Kontradiktionsschlüsse

$$SaP \sim (SoP)f \qquad SeP \sim (SiP)f$$
$$SiP \sim (SeP)f \qquad SoP \sim (SaP)f$$

dürfen wir uns auf die unmittelbaren Schlüsse von Richtigkeit auf Richtigkeit beschränken und beispielsweise den Kontraritätsschluß

$$SaP \rightarrow (SeP)f$$

(als mit

$$SaP \rightarrow SiP$$

([3]) d. h. für mindestens eine Wertekonstellation der Variablen, von denen p abhängt.

([4]) Vgl. C. Prantl, Geschichte der Logik im Abendlande, Bd. 2, Leipzig 1861, S. 272 u. 276f.

([5]) — „wie dies auch das lateinische non-nulli durch seine Zusammensetzung zu erkennen gibt" (E. Schröder, Vorlesungen über die Algebra der Logik, Bd. 2, Erste Abteilung, Leipzig 1891, S. 89).

([6]) Vgl. 2, 4 und 5, 2.3.

([7]) Den Negations-*Strich* möchte ich mit Rücksicht auf den syllogistischen „Also-Strich" vermeiden; in manchen Formeln kämen nämlich sonst waagerechte Striche in *beiden* Bedeutungen vor (vgl. 3, 1.2 oder 4, 2.1.1).

gleichbedeutend) beiseite lassen. Außer *cc* enthält nach diesem Prinzip das Urteilsquadrat nur noch

$$\left.\begin{array}{lll} & SaP \to SiP & (= sa_1) \\ \text{und} & SeP \to SoP & (= sa_2), \end{array}\right\} \begin{array}{r}\text{(Subalternation,}\\ = sa)\end{array}$$

während als gültige Konversionsschlüsse

$$\left.\begin{array}{lll} & SiP \to PiS & (= s_1) \\ \text{und} & SeP \to PeS & (= s_2) \end{array}\right\} \begin{array}{r}\text{(conversio sim-}\\ \text{plex, } = s)\end{array}$$

sowie

$$\left.\begin{array}{lll} & SaP \to PiS & (= p_1) \\ \text{und} & SeP \to PoS & (= p_2) \end{array}\right\} \begin{array}{r}\text{(conversio per}\\ \text{accidens, } = p)\end{array}$$

übrigbleiben.

1, 1.4. Hier sind zwei Beispiele für den (fast trivialen) deduktiven Zusammenhang zwischen den gültigen unmittelbaren Schlußweisen:

1. Offensichtlich lassen sich die Schlüsse *p* aus *sa* und *s* gewinnen.
2. Mit *cc*, s_1 und p_1 gilt auch sa_2. Wäre nämlich bei einigen *S* und *P* SeP richtig, aber SoP falsch, so entstünde wegen

$$\underset{(cc)}{(SoP)f \to} SaP \underset{(p_1)}{\to} PiS \underset{(s_1)}{\to} SiP \underset{(cc)}{\to} (SeP)f$$

ein Widerspruch.

1, 2.1. Nach diesen Vorbereitungen wenden wir uns der Syllogistik selbst zu — vorerst nur den gültigen Modis. Der berühmt-berüchtigte Merkvers, der die 19 Modi

Barbara, Celarent, Darii, Ferio . . . (8)

als gültig aufzählt, hat zwar nicht gerade schmeichelhafte Beurteilungen gefunden (9), und ungeschickt genug sind die Namen ja gewählt — man kann einem aus dem Vers herausgegriffenen Merkwort nicht einmal ansehen, zu welcher Figur der gemeinte Modus gehört! Aber man muß doch anerkennen, daß über eine bloße Aufzählung hinaus auf den *Ableitungszusammenhang* Wert gelegt wurde: Bekanntlich enthalten die Merkworte genaue Hinweise, wie man aus den Modis der I. Figur die der drei anderen Figuren mittels *s*, *p*, *cc* und *m* (= „metathesis praemissarum") herleiten kann — aus *welchem* Modus der I. Figur, lehrt, wie man weiß, jeweils der Anfangsbuchstabe. Da gewinnt man z. B.

Disamis (III. Figur) aus Darii:

$$\begin{array}{ccccc} MiP & \underset{(s)}{\to} & PiM & \searrow & MaS \\ MaS & \to & MaS & \underset{(m)}{\nearrow} & \underline{PiM} \\ & & & & PiS \underset{(s)}{\to} SiP \end{array} \Big\downarrow \text{(Darii)}$$

oder

Fesapo (IV. Figur) aus Ferio:

$$\begin{array}{ccc} PeM & \underset{(s)}{\to} & MeP \\ MaS & \underset{(p)}{\to} & \underline{SiM} \\ & & SoP \end{array} \Big\downarrow \text{(Ferio)}$$

oder

Barocco (II. Figur) aus Barbara:

$$\begin{array}{l} PaM \\ \underline{SoM} \\ \text{Behauptung: } SoP, \end{array} \quad \text{Annahme: } (SoP)f \underset{(cc)}{\to} \begin{array}{l} PaM \\ \underline{SaP} \\ SaM \underset{(cc)}{\to} (SoM)f = \text{Widerspruch zu } SoM. \end{array} \Big\downarrow \text{(Barbara)}$$

1, 2.2. Genau die Modi Barocco und Boccardo lassen sich nur durch *indirekten* Beweis aus der I. Figur herleiten. Auf den Gedanken, die nicht zu ihr gehörigen gültigen Modi *alle indirekt* auf sie zu reduzieren (weil es direkt nicht bei allen geht), kam man schon lange vor LEIBNIZ; z. B. hat Jodok TRUTVETTER, „volens scire, ad quem modum perfectorum quisque syllogismus imperfectus reducatur per impossibile", eine Tabelle solcher Reduktionsergebnisse mitgeteilt (10).

Als Beispiel wollen wir den schon in 1, 2.1. betrachteten Modus Fesapo aus Barbara indirekt ableiten:

$$\begin{array}{l} PeM \\ \underline{MaS} \\ \text{Beh.: } SoP, \end{array} \quad \text{Annahme: } (SoP)f \underset{(cc)}{\to} \begin{array}{l} SaP \\ \underline{MaS} \\ MaP \underset{(p)}{\to} PiM \underset{(cc)}{\to} (PeM)f = \text{Widerspruch.} \end{array} \Big\downarrow \text{(Barbara)}$$

(8) In Abschnitt 1, 2. 5 werden wir die gültigen Modi *alle* aufschreiben.

(9) SCHRÖDER: „äußerst geschmacklos", JEVONS: „barbarisch", usw.

(10) C. PRANTL, Geschichte der Logik im Abendlande, Bd. 4, Leipzig 1870, S. 242f., Fußnote 391.

1, 2.3. Es wäre konsequent gewesen, auch die vier Modi der (so bevorzugten) I. Figur diesem Verfahren zu unterwerfen; man kann nämlich z. B. Celarent durch indirekten Beweis aus Darii deduzieren:

$$\begin{array}{llll}
 & MeP & & \\
 & SaM & \longrightarrow & SaM \\
\cline{2-2}
\text{Beh.:} & SeP, & \text{Annahme: } (SeP)f \underset{(cc)}{\rightarrow} SiP \underset{(s)}{\rightarrow} & PiS \quad \Big\downarrow \ (\text{Darii}) \\
\cline{4-4}
 & & & PiM \underset{(s)}{\rightarrow} MiP \underset{(cc)}{\rightarrow} (MeP)f = \text{Widerspruch}
\end{array}$$

— was übrigens besagt, daß man gar nicht *alle* vier Modi der I. Figur als gültig vorauszusetzen braucht.

1, 2.4. Ebenfalls vor LEIBNIZ fügten manche Logiker ([11]) den 19 traditionellen Modis noch die 5 „abgeschwächten" = „subalternierten" (gültigen) Modi

Barbari, Celaront; Cesaro, Camestros; ———; Calemos

hinzu und erreichten dadurch erstens, daß nunmehr jeder Figur genau 6 gültige Modi angehören (mit dieser Feststellung beginnt ein von LEIBNIZ verfaßter Merkvers für die 24 Modi ([12])), sowie zweitens, daß nunmehr *alle* anderen 256 — 24 = 232 Modi ungültig sind.

1, 2.5. Der Gedanke der reductio per impossibile (1, 2.2) und der Gedanke der subalternierten Modi (1, 2.4) treten in LEIBNIZ' Untersuchungen zueinander in Beziehung:

1, 2.5.1. Für die Modi der ersten drei Figuren werde die Anordnung

Barbara	Barocco	Boccardo
Barbari	Camestros	Felapton
Celarent	Festino	Disamis
Celaront	Cesaro	Darapti
Darii	Camestres	Ferison
Ferio	Cesare	Datisi

gewählt, bei der in der ersten (bzw. zweiten bzw. dritten) Spalte die Modi der I. (bzw. II. bzw. III.) Figur stehen. LEIBNIZ fand: Jeder hier vorkommende Modus läßt sich auf jeden anderen derselben Zeile durch einen indirekten Beweis reduzieren, der sich (ungleich 1, 2.3) lediglich auf *cc* stützt. (In 1, 2.1 lernten wir an Barbara → Barocco schon eine Probe kennen.) LEIBNIZ stellt in einer Tabelle ([13]) die Reduktionen auf die I. Figur „fort clairement" (COUTURAT) zusammen. Aber obwohl er (sehr hübsch) den jeweiligen Modus der I. Figur „pater" und die beiden mit ihm in einer Zeile stehenden Modi „fratres" nennt, ist doch hier eine Art Gleichberechtigung der drei Figuren erlangt, weil man auch von der II. oder III. ausgehen kann: „Ita ex *Cesare* per regressum... fit pater *Ferio*, ... aut frater *Datisi;* similiter ex *Datisi* per regressum fit pater *Ferio* aut frater *Cesare*" ([14]).

Schlösse man die subalternierten Modi aus, so entstünde kein so symmetrischer Komplex gegenseitiger Implikationen, denn Darapti und Felapton hätten keinen Partner.

1, 2.5.2. Auch auf die IV. Figur läßt sich LEIBNIZ' Verfahren anwenden. Sie zerfällt in die beiden Modus-Tripel

Calemes	Dimatis	Fresison
Calemos	Bamalip	Fesapo,

innerhalb derer analoge deduktive Beziehungen wie in 1, 2.5.1 bestehen. Auch hier würde die Gesetzmäßigkeit verschleiert, wenn man Calemos wegließe.

1, 3.1. Zweierlei Ableitungszusammenhänge betrachteten wir bisher:

1. Aus der Gültigkeit unmittelbarer Schlüsse wurde die Gültigkeit unmittelbarer Schlüsse bewiesen (1, 1.4).
2. Aus der Gültigkeit eines Modus und unmittelbarer Schlüsse konnte die Gültigkeit eines Modus folgen (1, 2).

LEIBNIZ hat noch einen anderen Beweistyp in seine Untersuchungen einbezogen:

3. Aus der Gültigkeit eines Modus und des identischen Urteils ([15]) kann man die Gültigkeit eines unmittelbaren Schlusses herleiten.

Beispielsweise läßt sich *s* aus Cesare gewinnen:

$$\frac{\begin{matrix}PeM\\SaM\end{matrix}}{SeP} \quad \text{geht für } M = S \text{ in } \quad \frac{\begin{matrix}PeS\\SaS\end{matrix}}{SeP}, \quad \text{also in}$$

$PeS \rightarrow SeP$, über.

Nicht nur XaX, sondern auch das abgeschwächte identische Urteil XiX benutzt LEIBNIZ: „*Subalternatio* ... ita demonstratur: *Omne A est B.* quoddam *A* est *A*. *Ergo quoddam A est B.* quod est argumentum in *Darii*" ([16]).

([11]) Vgl. K. DÜRR, Leibniz' Forschungen im Gebiet der Syllogistik, Berlin 1949, S. 16.

([12]) Opuscules et fragments inédits de LEIBNIZ. Extraits des manuscrits de la Bibliothèque royale de Hanovre par L. COUTURAT. Paris 1903. S. 207.

([13]) LEIBNIZ a. a. O., S. 413f.

([14]) LEIBNIZ a. a. O., S. 414.

([15]) „LEIBNIZ ist Zeit seines Lebens der Auffassung gewesen, daß die identischen Sätze für die Erkenntnis nicht unfruchtbar sind" (DÜRR a. a. O., S. 18).

([16]) LEIBNIZ a. a. O., S. 412.

Beiläufig sei erwähnt, daß die gültigen Modi der *ersten* Figur bei diesem Verfahren nicht zu Konversionsschlüssen führen.

1, 3.2. Damit haben wir die Hilfsmittel beisammen, mit denen Leibniz eine Theorie der gültigen Modi errichtet. In dem Fragment „De formis syllogismorum mathematice definiendis“ ([17]) geht er wie die „Merkvers-Logiker“ von der Gültigkeit der „modi primitivi“

Barbara, Celarent, Darii, Ferio

aus; während sich aber die Scholastiker auf die Hilfsmittel *cc*. *s*, *p* und *sa* stützen, um die 24 Modi als gültig nachzuweisen, braucht Leibniz nur *cc*, dafür aber das identische Urteil und das abgeschwächte identische Urteil. Er gewinnt der Reihe nach:

sa [aus Darii und Ferio mit Hilfe von XiX],
die beiden subalternierten Modi der I. Figur,
alle 6 Modus-Tripel der drei ersten Figuren,
s und *p* [z. B. s_1 aus Datisi (III. Figur), s_2 aus Cesare (II. Figur), beide mit Hilfe von XaX].

Die IV. Figur kann er dann gemäß Merkvers ableiten. Übrigens ersieht man aus 1, 2.5.2, daß man nur noch Calemes zu beweisen braucht: Wegen *sa* gilt dann auch Calemos, so daß beide Modus-Tripel der IV. Figur als gültig gesichert sind.

1, 4. Die Reihe der Beispiele für Ableitungszusammenhänge breche ich hier ab. Man kann versuchen, dem Leibnizschen Weg (1, 3.2) Analoga an die Seite zu stellen, indem man eine der drei anderen Figuren der Deduktion zugrundelegt; man kann versuchen, weitere Beweistypen zu benutzen, z. B. den, daß man aus mehreren Modis einen gewinnt; man kann eine Klassifikation gleichartiger Beweise vornehmen; man kann bei jedem Modus die Frage stellen, welche Modi aus ihm folgen und aus welchen er selbst folgt; man kann, wenn einem die Herleitung eines Modus aus einem Modus nicht gelang, zu *beweisen* suchen, daß sie unmöglich ist, daß es also nicht „nur am geeigneten Kunstgriff fehlt“; kurzum: eine Fülle von Deduktionsmöglichkeiten und -unmöglichkeiten wäre, falls man alle erschöpfen wollte, schon bei den (nur 24) gültigen Modis zu behandeln.

Wie nun erst, wenn man die *ungültigen* unmittelbaren Schlüsse und die über 200 *ungültigen* Modi in die Untersuchungen einbezieht! Es gibt da einfache Relationen (wie z. B. diese:

$$\begin{array}{l} MaP \\ SeM \\ \hline SiP \end{array}$$

ist ungültig, weil man für $M = P$ mit Hilfe der Gültigkeit des identischen Urteils an

$$\begin{array}{l} PaP \\ SeP \\ \hline SiP \end{array}$$

einen Widerspruch zu *cc* abliest), aber als allgemeinste Form müßte man für einen implikativen Zusammenhang hier die folgende ansetzen:

Als *Voraussetzungen* dürfen gültige und ungültige Modi, gültige und ungültige unmittelbare Schlüsse sowie das identische Urteil auftreten. Auch die *Behauptung* ist ein Schluß einer dieser Arten.

Kapitel II

PROBLEMSTELLUNG

2, 1. Wenn zwei Komplexe von Aussagen, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, vorliegen, kann man einen Teilkomplex $\mathfrak{B}'$ des Komplexes $\mathfrak{B}$ ein *Axiomensystem* von $\mathfrak{B}$ nennen, wenn folgendes gilt:

[1] Aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$ läßt sich ganz $\mathfrak{B}$ herleiten.

[2] Für jeden Teilkomplex $\mathfrak{B}''$, der durch Weglassung von mindestens einer Aussage aus $\mathfrak{B}'$ hervorgeht, gilt: Aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}''$ läßt sich *nicht* ganz $\mathfrak{B}$ herleiten.

Bei dieser Fassung des Begriffs „Axiomensystem“ müssen die Axiome also Mitglieder des Komplexes selbst sein. Deshalb läuft die übliche Forderung nach der *Widerspruchsfreiheit* von $\mathfrak{B}'$ auf die *Erfüllbarkeit* von $\mathfrak{B}$ hinaus. [1] bringt die sogenannte *Vollständigkeit* von $\mathfrak{B}'$ zum Ausdruck, [2] die *Unabhängigkeit* der Axiome aus $\mathfrak{B}'$.

2, 2.1. Wir wollen $\mathfrak{A}$ so wählen, daß mit $\mathfrak{A}$ die Lehre von den unmittelbaren Schlüssen gesichert ist, und $\mathfrak{B}$ soll die klassische Syllogistik sein.

Wie wir in 1, 1.2 und 1, 1.3 verabredet haben, zählen wir zur Lehre von den unmittelbaren Schlüssen außer der Gültigkeit der 4 *cc*-Äquivalenzen (1, 1.3) lediglich die Aufteilung der 32 Schlüsse

$$\begin{array}{c} SaP \\ SeP \\ SiP \\ SoP \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} SaP \\ PaS \\ SeP \\ PeS \\ SiP \\ PiS \\ SoP \\ PoS \end{array} \qquad (*)$$

in gültige und ungültige.

$\mathfrak{A}$ enthalte cc, sa und s als gültige Schlüsse.

Die 6 Formeln *sa*, *s*, *p* (wie sie in 1, 1.3 aufgeführt sind) werden durch die Angabe ergänzt, daß sie — von den 4 trivialerweise gültigen Schlüssen

$$S\delta P \rightarrow S\delta P \quad (\delta = a, e, i, o)$$

abgesehen — *sämtliche gültigen* von den 32 Schlüssen (*) wiedergeben, mit anderen Worten: daß alle *übrigen* 22 Schlüsse (*) *ungültig* (d. h. nicht bei jedem Wert von S und P richtig) sind.

Ohne auf ein möglichst anspruchsloses, „minimales“ $\mathfrak{A}$ hinzuzielen, werden wir in $\mathfrak{A}$ hinzunehmen, *daß sich*

([17]) Leibniz a. a. O., S. 410—416.

SoP *nicht konvertieren läßt*, d. h.: daß $SoP \to P\delta S$ für $\delta = a, e, i, o$ ungültig ist. Hieraus und aus der Gültigkeit von *cc*, *sa* und *s* (kurz: aus dem, was wir bisher in 𝔄 aufgenommen haben) versuche ich in 2, 2.2.2 jene 22 ungültigen von den 32 Schlüssen (*) als ungültig herzuleiten.

2, 2.2.1 Aus der Ungültigkeit der 4 Schlüsse $SoP \to P\delta S$ folgert man sofort, daß jede der Aussagen SaP, SeP, SiP, SoP manchmal (d. h. für mindestens ein Wertepaar $S = S_0$, $P = P_0$) richtig ist: Wäre nämlich z. B. SeP immer falsch, so gälte $SoP \to PiS$, weil ja die Konklusion immer richtig wäre.

2, 2.2.2. Nach der aussagenlogischen Regel

$$\frac{\begin{array}{l} q_1 \text{ ist manchmal richtig} \\ q_1 \to q_2 \text{ ist gültig} \end{array}}{q_1 \to q_2 f \text{ ist ungültig}}$$

ist **wegen** *cc* (und wegen 2, 2.2.1!)

$$\begin{array}{llr} & SaP \to SoP \text{ ungültig}, & (1) \\ & SeP \to SiP \text{ ungültig}, & (2) \\ & SiP \to SeP \text{ ungültig} & (3) \\ \text{und} & SoP \to SaP \text{ ungültig}. & (4) \end{array}$$

Mittels der gleichen Regel erkennt man auch die nächsten 6 von den 22 fraglichen Schlüssen als ungültig (wobei man sich wiederum auf 2, 2.2.1 stützt):

Wegen *sa* ist

$$\begin{array}{llr} & SaP \to (SiP)f \text{ ungültig} & (5') \\ \text{und} & SeP \to (SoP)f \text{ ungültig}; & (6') \end{array}$$

auf Grund der *cc*-Äquivalenzen $(SiP)f \sim SeP$ und $(SoP)f \sim SaP$ ist also

$$\begin{array}{llr} & SaP \to SeP \text{ ungültig} & (5) \\ \text{und} & SeP \to SaP \text{ ungültig}. & (6) \end{array}$$

Wegen *s* ist

$$\begin{array}{llr} & SeP \to PiS \text{ ungültig} & (7) \\ \text{und} & SiP \to PeS \text{ ungültig}; & (8) \end{array}$$

hier und im folgenden habe ich *cc*-Umformungen, die dem Übergang von (5′) nach (5) oder von (6′) nach (6) entsprechen, stillschweigend vorgenommen.

Schließlich ist **wegen** *p*

$$\begin{array}{llr} & SaP \to PeS \text{ ungültig} & (9) \\ \text{und} & SeP \to PaS \text{ ungültig}. & (10) \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\begin{array}{llr} & SoP \to PaS \text{ ungültig}, & (11) \\ & SoP \to PeS \text{ ungültig}, & (12) \\ & SoP \to PiS \text{ ungültig} & (13) \\ \text{und} & SoP \to PoS \text{ ungültig}; & (14) \end{array}$$

auf Grund der *s*-Äquivalenzen $PeS \sim SeP$ und $PiS \sim SiP$ ist wegen (12)

$$SoP \to SeP \text{ ungültig} \qquad (15)$$

und wegen (13)

$$SoP \to SiP \text{ ungültig}. \qquad (16)$$

Mit Hilfe der aussagenlogischen Regel

$$\frac{q_1 \to q_2 \text{ ist ungültig}}{q_2 f \to q_1 f \text{ ist ungültig}}$$

kann man jetzt die Ungültigkeit von 5 weiteren Schlüssen (*) zeigen:

Wegen (5) ist

$$\begin{array}{llr} & SiP \to SoP \text{ ungültig}; & (17) \\ \text{daß} & SiP \to PoS \text{ ungültig} & (18) \\ \text{bzw.} & SiP \to PaS \text{ ungültig} & (19) \\ \text{bzw.} & SaP \to PaS \text{ ungültig} & (20) \end{array}$$

ist, ergibt sich aus (9) bzw. (12) bzw. (14), wenn man noch S und P miteinander vertauscht; wegen (15) ist auch

$$SiP \to SaP \text{ ungültig}. \qquad (21)$$

Man vergewissert sich, daß die Schlüsse (1) bis (21) alle voneinander verschieden sind, und findet, daß nur noch

$$SaP \to PoS \text{ als ungültig} \qquad (22)$$

nachzuweisen übrigbleibt. (22) ist gesichert, wenn für spezielle S und P

$$SaP \text{ und } PaS$$

richtig sind, insbesondere also, wenn SaS manchmal richtig ist. Nehmen wir doch *die Gültigkeit des identischen Urteils* SaS mit in 𝔄 auf (deren Verwendbarkeit wir ohnehin in 1, 3.1 und 1, 4 gesehen haben)! *Gewiß dann* ist durch 𝔄 jeder der 32 Schlüsse (*) als gültig oder als ungültig festgelegt, so daß 𝔄, wie gewünscht, auf die *gesamte* Lehre von den unmittelbaren Schlüssen hinausläuft.

2, 3. In der vorliegenden Arbeit suche ich (und in 4, 7.1 finde ich) **alle** Axiomensysteme 𝔅′ der klassischen Syllogistik 𝔅, wobei ich folgende Hilfsmittel 𝔄 voraussetze:

Das identische Urteil ist gültig.
Die unmittelbaren Schlüsse *cc*, *s* und *sa* sind gültig.
XoY läßt sich nicht konvertieren.

2, 4. In 4, 7.1 werden wir sagen dürfen, daß wir die Struktur der klassischen Syllogistik durchschaut haben — wenigstens von *einer* Seite her, denn über die Willkürlichkeit unseres Ansatzes wollen wir uns im klaren sein:

So naheliegend die Wahl von 𝔄 ist — es gibt auch andere sinnvolle Möglichkeiten.

$\bar{X}$ wird aus dem Spiel gelassen, ja mehr noch: Uns kümmern hier weder die (von Petrus Ramus ans Tageslicht gezogenen ([18])) singulären Urteile mit ihren Modis noch die reicheren Aufgliederungen der Urteilsformen, die viele Autoren an die Stelle der groben *a-e-i-o*-Einteilung setzen ([19]).

Wenigstens für die Weglassung der Begriffe $\bar{X}$ möchte ich Motive (wenn auch keine zwingenden Gründe) angeben:

Im abstrakt-rechnerischen Kapitel IV wäre die Einführung von $\bar{X}$ (als Funktion von X) zwischen 4, 1.1 und 4, 1.2 einzuschalten. Erstens fand ich, diese $\bar{X}$-Definition sei komplizierter gebaut als die Anforderungen 𝔄, die wir in 4, 1.4.1 an das System der Urteile richten; zweitens wird die Rolle von $\bar{X}$ gerade durch die *Auswirkungen* 5, 2.3 (unserer „Maßnahme“ 1, 1.2 auf das Axiomatisierungsergebnis 4, 7.1) beleuchtet.

2, 5. Nicht das Gestrüpp der *sämtlichen* Ableitungsfäden (die ganz innerhalb 𝔄 und 𝔅 verlaufen) interessiert uns letzten Endes, auch nicht, *welche* Fäden von einem Axiomensystem aus zu allen Bestandteilen von 𝔅 hinführen — uns interessieren die Axiomensysteme selbst.

Wenn man freilich, wie es beispielsweise Kant tut ([20]), *von vornherein* nur die „ratiocinia pura“ der I. Figur als Extrakt der Schlußkraft und die „ratiocinia hybrida“ der anderen Figuren als unnütze Verwickelungen ansieht — dann sind die Bestandteile der Syllogistik von Anfang an ungleich „bewichtet“, dann erhält auch jeder *einzelne* Ableitungsfaden eine andere Bedeutung als in der vorliegenden Arbeit, dann macht man es sich leicht; *wir* wollen den „Kern“ (nein: *alle* möglichen Kerne) der Syllogistik ja erst *herausschälen*.

([18]) Vgl. H. Scholz, Geschichte der Logik (= Geschichte der Philosophie in Längsschnitten, Bd. 4), Berlin 1931, S. 38f.

([19]) Nur *ein* Beispiel: J. E. Th. Wildschrey (Die Grundlagen einer vollständigen Syllogistik, = Abhandlungen zur Philosophie und ihrer Geschichte Bd. 26, Halle (S.) 1907) behandelt *sechs* Arten der Kopula.

([20]) Die falsche Spitzfindigkeit der vier syllogistischen Figuren (Immanuel Kants Werke, hrsg. v. E. Cassirer, Bd. 2, Berlin 1922, S. 49—65).

Kapitel III

ÜBERLEITUNG

Den straffen (von vorn beginnenden) Beweisgang des IV. Kapitels möchte ich nicht durch längere Erläuterungen unterbrechen. Deshalb schiebe ich dies vorbereitende Kapitel ein.

3, 1.1. *Urteile* können wir als eine besondere Art von *Aussagen* auffassen; Subjekt und Prädikat betrachten wir als Veränderliche mit gleichem Variabilitätsbereich, Urteile als *Funktionen* dieser beiden Variablen. Wir „zerlegen" also die Urteile *nicht* (wie man das etwa in der mathematischen Logik tut ([21]), sondern fassen ein Urteil als etwas *Ganzes* auf, das — nach Auswahl von a oder e oder i oder o — dem Subjekt und Prädikat eindeutig zugeordnet ist.

Ein willkürlicher, aber der Vereinfachung dienender Schritt weiter ist es, auch noch den Definitionsbereich der Urteile — also die Menge der Begriffe, die Subjekt oder Prädikat sein können — durch eine beliebige Menge zu ersetzen. So werden wir in 4, 1 vorgehen.

Im V. Kapitel interessiert uns die *Tragweite* dieser Abstraktionen.

3, 1.2. Bei der Untersuchung der Modi machen wir uns die Auffassung von Christine LADD-FRANKLIN zunutze, die den Syllogismus als „antilogism" sieht: „If for the usual three statements consisting of *two premises and a conclusion* one substitutes the equivalent *three statements that are together incompatible* (namely, the same two premises and the immediate denial of the conclusion), one has a formula which has this great advantage: the order of the statements is immaterial — the *relation* is a perfectly symmetrical one." ([22])

In der Tat läßt sich die Aussage

$$(\text{Obersatz} \ \& \ \text{Untersatz}) \rightarrow \text{Schlußsatz}$$

in

$$(\text{Obersatz} \ \& \ \text{Untersatz} \ \& \ \text{Schlußsatz}\ f)\ f$$

umformen, denn

$$q_1 \rightarrow q_2$$

ist mit

$$\big(q_1 \ \& \ (q_2 f)\big) f$$

äquivalent. Wir werden z. B. Barbara als

$$\begin{array}{c} MaP \\ SaM \\ \hline (SoP)f \end{array}$$

ansetzen; da es hierin, wie Mrs. FRANKLIN hervorhebt, auf die Reihenfolge der Urteile MaP, SaM, SoP nicht ankommt, erkennt man ohne weitere Überlegungen die Äquivalenz von Barbara mit

$$\begin{array}{c} MaP \\ SoP \\ \hline (SaM)f \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} SoP \\ SaM \\ \hline (MaP)f, \end{array}$$

also mit Barocco und Boccardo. LEIBNIZ' Modus-Tripel (1, 2.5.1) entstehen demnach bei LADD-FRANKLINscher Schreibweise einfach durch Vertauschung (transmutatio) der drei „incompatible statements", die als t zitiert werden möge.

Es liegt nahe,

Barbara, Cesare, . . .

nicht (nach HÖFLER ([23])) durch

I $(a, a; a)$, II $(e, a; e)$ . . . ,

sondern durch

I $(a\,a\,o)$, II $(e\,a\,i)$ . . .

zu bezeichnen; in diese Symbolik übertragen, nimmt sich die Tabelle 1, 2.5.1 sehr übersichtlich aus.

3, 1.3. Weil $\mathfrak{B}$ 256 Bestandteile hat, gibt es 2^{256} Teilkomplexe, und von denen sollen die Axiomensysteme herausgesucht werden; 2^{256} ist eine 78-stellige Zahl!

Man wird danach streben, äquivalente Modi zu „bündeln" und dann den neuen Komplex, den der Modus-Bündel, der aber auch wieder $\mathfrak{B}$ genannt werde, zu axiomatisieren, da er aus weniger Bestandteilen bestehen wird als der ursprüngliche Komplex $\mathfrak{B}$.

Modi, deren Äquivalenz durch t beweisbar ist, fassen wir in einer „t-Familie" zusammen (4, 2. 2); Modi, deren Äquivalenz durch t und s beweisbar ist, werden wir zu einer „t-s-Familie" bündeln (4, 3.4). Um bei der Aufstellung aller t-s-Familien (4, 3.6) die Ungewißheit bloßen Probierens auszuschalten, gebe ich eine Normalform für t-s-Beweise an (Satz 4, 3.5).

Erhielt man 88 t-Familien, so gibt es nur noch 44 t-s-Familien, deren jede ausschließlich gültige oder ausschließlich ungültige Modi enthält (4, 3.6).

Von dieser Stelle an wird $\mathfrak{B}$ nicht als Theorie der Modi, sondern als Theorie der t-s-Familien betrachtet.

3, 1.4. Als nächstes werden wir mit Hilfe von *sa* einige — bei weitem nicht alle! — Implikationen (zwischen t-s-Familien) beweisen (4, 5), die es bereits ermöglichen, aus der Gültigkeit zweier bestimmter t-s-Familien und der Ungültigkeit zweier bestimmter t-s-Familien ganz $\mathfrak{B}$ herzuleiten; die eben genannten 4 Bestandteile von $\mathfrak{B}$ fassen wir als $\mathfrak{B}^*$ zusammen.

([21]) Vgl. z. B. HILBERT/ACKERMANN a. a. O., S. 44—48.

([22]) C. LADD-FRANKLIN, Mind (new series) Bd. 37 (1928), S. 532.

([23]) A. HÖFLER, Logik, Prag-Wien-Leipzig 1890, S. 165.

Die Vermutung liegt nahe, 𝔅* sei ein (t-s-Familien-)Axiomensystem von 𝔅; die *Vollständigkeit* wäre ja gesichert. Wir werden die 4 Bestandteile von 𝔅* auch als *unabhängig* nachweisen; dazu stehen zwei verschiedene Wege offen:

1. Man vervollständigt die Liste der *sa*-Beweise, nützt alle erdenklichen weiteren Beweistypen (vgl. 1, 4) voll aus und prüft nach, daß sich, innerhalb dieser Gesamtheit der Ableitungszusammenhänge, der betreffende Bestandteil von 𝔅* (der als Axiom in bezug auf das „gebündelte" 𝔅 zu bestätigen ist) *nicht* aus 𝔄 und den drei übrigen Axiomen gewinnen läßt.
2. Man geht indirekt vor und zeigt, daß es Systeme von „Urteilen" (im Sinne von 3, 1. 1) gibt, für die das betreffende Axiom *nicht* zutrifft, während 𝔄 und das übrige 𝔅* erfüllt sind.

Der zweite Weg — die Konstruktion von „Modellen" — ist in der Mathematik gang und gebe ([24]). Ich ziehe ihn dem ersten Weg vor — mir ist es lieber, möglichst *wenige* Ableitungsfäden benutzen zu müssen. Sind nämlich die Unabhängigkeitsbeweise auf dem zweiten Wege geglückt, so hat man das Studium aller jener Beweistypen *umgangen* — nachträglich aufgedeckte Ableitungszusammenhänge können sich ja nicht auf das Axiomatisierungsergebnis auswirken!

3, 1.5. Es gibt nun aber nur *ein* t-s-Axiomensystem von 𝔅 — 𝔅* ist das einzige. Um das zu beweisen, werden wir statt der *Unabhängigkeit* der in 𝔅* vereinten 4 Axiome ihre *Unentbehrlichkeit* zeigen:

Konstruiert wird ein System von „Urteilen" (im Sinne von 3, 1. 1), für das der betreffende Bestandteil von 𝔅* *nicht* zutrifft, während 𝔄 und das restliche 𝔅 erfüllt sind.

Die 4 Unentbehrlichkeitsnachweise machen zwar die 4 Unabhängigkeitsnachweise überflüssig, aber ich werde diese (in 4, 6.1) jenen (4, 6.2) trotzdem vorausschicken.

3, 1,6. In 4. 7.1 nehmen wir dann das „gebündelte" 𝔅 wieder auseinander, d. h.: Wir betrachten wieder Modi statt t-s-Familien und verwandeln das (t-s-Familien-)Axiomensystem 𝔅* in die von uns gesuchten *sämtlichen* (Modus-) Axiomensysteme 𝔅'.

Mit den Worten von P. Hertz dürfen wir sagen, man könne die in 2, 3 gestellte Aufgabe „auf den Fall zurückführen, daß nur *ein* unabhängiges Axiomensystem vorhanden ist, indem man nämlich zunächst gewisse Gruppen gegenseitig miteinander verbundener Elemente durch je *ein* Element ersetzt, daraufhin zu dem reduzierten System das Axiomensystem aufsucht und hernach wieder die fortgelassenen Elemente einführt" ([25]).

3, 2.1. Unsere Fragestellung ist in den (überaus zahlreichen) Darstellungen der Syllogistik nicht zu finden ([26]). Aus der Literatur über dieses Gebiet — auch mehrere Monographien gibt es — kommt für unsere Zwecke weder all das in Betracht, was *Deutung* und *Wertung* der Urteile und Modi betrifft, noch all das, was Ableitungszusammenhänge aufzeigt oder heranzieht, die *nicht* ganz *innerhalb* von 𝔄 und 𝔅 verlaufen.

Gebrauchen können wir hier z. B. weder C. Ladd-Franklins *eine* Formel, aus der 15 gültige Modi hervorgehen ([27]), noch die traditionellen Herleitungen gültiger Modi aus dem „Dictum de omni et nullo" oder ähnlichen Prinzipien.

3, 2.2 Ein Beispiel möge die Feststellungen 3, 2.1 verdeutlichen.

Ich greife zwei sehr verschiedenartige neuere Darstellungen der Syllogistik heraus — eine rein klassenlogische ([28]) von Dienes ([29]) und eine konsequent inhaltslogische ([30]) von v. Freytag-Löringhoff ([31]). Beide Autoren gelangen *von „außen" her* zu **𝔅**; das berührt unser Thema, wie wir in 3, 2.1 hervorhoben, nicht. Aber in beiden Arbeiten kommen *Gruppierungen* von Modis vor — ähnlich den Familien, von denen oben die Rede war. Man könnte versucht sein, hier eine methodische Parallelität zu sehen.

Tatsächlich aber haben jene Gruppierungen eine ganz andere Stellung innerhalb der Gesamtuntersuchung als bei uns: In der vorliegenden Arbeit sind, grob gesprochen, erst die Modi da, dann die Familien; dort hingegen werden zunächst die schlüssigen Begriffslagen (v. Freytag-Löringhoff) bzw. valid moods (Dienes) konstruiert, aus denen *dann erst* die einzelnen Modi bzw. transposed moods hervorgehen.

3, 2.3. P. Hertz behandelt in mehreren (vorhin schon einmal zitierten) Veröffentlichungen ([32]) Axiomensysteme beliebiger (nicht irgendeiner speziellen Wissenschaft angehöriger) Satzsysteme. Die vorliegende Abhandlung kann manche der allgemeinen Bemerkungen, die in den Einleitungen der drei genannten Arbeiten stehen, gut illustrieren.

Erwähnenswert ist übrigens, wie sich Hertz, auf seine Axiomatisierungsprobleme hinzielend, über das „Gebiet der alten Aristotelischen Schlußlehre" äußert:

([24]) Vgl. z. B. die Unabhängigkeitsbeweise bei den Postulaten für die natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen, Gruppen usw. in: A. Loewy, Lehrbuch der Algebra, Bd. I: Grundlagen der Arithmetik, Leipzig 1915.

([25]) Mathematische Annalen Bd. 87 (1922), S. 248.

([26]) Vgl. jedoch den Anhang.

([27]) Bequem zugänglich bei Schröder a. a. O., S. 228ff.

([28]) Vgl. 5, 2.1.

([29]) P. Dienes, A new treatment of the theory of inference, The Monist Bd. 40 (1930), S. 462—476.

([30]) Vgl. 5, 2.4.

([31]) B. Baron von Freytag gen. Löringhoff, Über das System der Modi des Syllogismus, Zeitschrift für philosophische Forschung Bd. 4 (1950), S. 235—256.

([32]) Vor allem: P. Hertz, Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme, Mathematische Annalen Bd. 87 (1922), S. 246—269; Bd. 89 (1923), S. 76—102; Bd. 101 (1929), S. 457—514.

„Es ist wohl beachtenswert, daß sich auch auf diesem als gänzlich unfruchtbar verrufenen Felde Fragestellungen ergeben, deren Beantwortung zum Teil recht schwierig ist, ungleich den Problemen, die der gute unsterbliche, sterbliche Caius den Logikern aufgegeben hat" ([33]).

Kapitel IV

ABSTRAKTE BEHANDLUNG DES PROBLEMS

Urteile, Modi, t-Familien, t-s-Familien.

4, 1.1. Als erstes sei eine Menge $\mathfrak{M}$ vorgegeben. Hängt eine Aussage von Veränderlichen ab, die auf $\mathfrak{M}$ variieren, so soll diese Aussage *gültig* heißen, falls sie für alle Werte aller dieser Veränderlichen richtig ist, und andernfalls soll sie *ungültig* heißen.

4, 1.2. Zweitens seien vier für X auf $\mathfrak{M}$ und Y auf $\mathfrak{M}$ definierte eindeutige Funktionen

$$XaY,\quad XeY,\quad XiY,\quad XoY$$

vorgegeben; diese Funktionen sollen Aussagen sein.

4, 1.3. Auch mit M, S, P bezeichnen wir Veränderliche, die auf $\mathfrak{M}$ variieren. α, β, γ, δ mögen Parameter bedeuten, die aus $\{a, e, i, o\}$ wählbar sind.

4, 1.4.1. Die Aussagen $X\delta Y$ sollen *Urteile* (und in ihrer Gesamtheit ein *System von Urteilen*) heißen, falls sie den Anforderungen $\mathfrak{A}$ genügen:

$$\mathfrak{A}:\left\{\begin{array}{rl} (A_1:) & XaX \text{ ist gültig.} \\ (cc = A_2:) & XaY \sim (XoY)f \text{ und} \\ & XiY \sim (XeY)f \text{ sind gültig.} \\ (sa = A_3:) & XaY \rightarrow XiY \text{ ist gültig.} \\ (s = A_4:) & XiY \rightarrow YiX \text{ ist gültig.} \\ (A_5:) & \text{Bei jedem Wert von } \delta \text{ ist} \\ & XoY \rightarrow Y\delta X \text{ ungültig.} \end{array}\right.$$

4, 1.4.2. Wir werden auch einige unmittelbare Folgerungen aus A_2, A_3, A_4 benutzen, nämlich:

$$\begin{array}{rl} (cc) & XeY \sim (XiY)f \text{ und} \\ & XoY \sim (XaY)f \text{ sind gültig.} \\ (sa) & XeY \rightarrow XoY \text{ ist gültig.} \\ (s) & XeY \rightarrow YeX \text{ ist gültig.} \end{array}$$

4, 1.4.3. Satz. Die Menge $\mathfrak{M}$, auf der ein System von Urteilen definiert ist, enthält mindestens drei Elemente.

Beweis. Wegen A_5 gibt es in $\mathfrak{M}$ ein A, ein B, ein C und ein D derart, daß $AoB \rightarrow BaA$ und $CoD \rightarrow DoC$ falsch sind. Folglich ist

$$\begin{array}{lll} & AoB \text{ richtig,} & (1) \\ & BaA \text{ falsch,} & (2) \\ & CaD \text{ falsch (wegen } cc\text{),} & (3) \\ & DoC \text{ falsch} & (4) \\ \text{und} & DaC \text{ richtig (wegen } A_2\text{).} & (5) \end{array}$$

Wegen (2) und A_1 ist $A \neq B$.

1. Falls außer $D \neq A$ auch $D \neq B$ zutrifft, ist das Behauptete evident.

2. Im Falle $D = A$ ist einerseits $C \neq A$ wegen (3) und A_1, andererseits $C \neq B$, weil sonst (4) in Widerspruch zu (1) geriete.

3. Im Falle $D = B$ ist einerseits $C \neq A$, weil sonst aus (5) ein Widerspruch zu (2) entstünde, und andererseits $C \neq B$ wegen (3) und A_1.

4, 1.4.4. In 4, 5.3.1 und 4, 6.1.1 benutzen wir den

Satz. Genügen die (auf $\mathfrak{M}$ erklärten) Aussagen $X\delta Y$ den Anforderungen A_2, A_3, A_4, so ist A_5 *äquivalent* mit der Forderung,

es gebe in $\mathfrak{M}$ Elemente X_0, Y_0, X_1, Y_1 solcherart, daß Y_0eX_0 und X_1oY_1 und Y_1aX_1 richtig ist.

Beweis. 1. A_5 sei erfüllt. Wäre YeX „nie" richtig, so wäre (wegen A_2) YiX und damit auch $XoY \rightarrow YiX$ gültig — im Widerspruch zu A_5.

Weil $XoY \rightarrow YoX$ nach A_5 ungültig ist, gibt es in $\mathfrak{M}$ Elemente X_1, Y_1 mit falschem $X_1oY_1 \rightarrow Y_1oX_1$, also richtigem X_1oY_1 bei falschem Y_1oX_1; wegen A_2 ist Y_1aX_1 richtig.

2. Seien X_1oY_1 und Y_1aX_1 richtig. Wegen A_3 ist dann auch Y_1iX_1 richtig, und wegen A_2 sind Y_1oX_1 und Y_1eX_1 falsch. Damit ist die Ungültigkeit von $XoY \rightarrow YoX$ und von $XoY \rightarrow YeX$ bewiesen.

Mit Y_0eX_0 ist einerseits X_0oY_0 richtig (s, sa), andererseits Y_0oX_0 (sa). Weil Y_0iX_0 und Y_0aX_0 wegen cc falsch sind, ist sowohl $XoY \rightarrow YiX$ als auch $XoY \rightarrow YaX$ ungültig.

4, 1.5. In diesem (IV.) Kapitel wird *ein bestimmtes* (wenn auch beliebiges) System $\mathfrak{S}$ von Urteilen ein für allemal festgehalten, erst recht also die Menge $\mathfrak{M}$, auf der das System $\mathfrak{S}$ definiert ist.

4, 1.6. In dem Urteil $S\delta P$ heißt S Subjekt, P Prädikat, δ Argument. Die Argumente a und i nennt man positiv, die andern beiden negativ.

4, 1.7. Urteile mit noch frei variablem (nämlich auf ganz $\mathfrak{M}$ variablem) Subjekt und Prädikat sollen durch arabische Ziffern bezeichnet werden dürfen, z. B. $XiY = 4$.

Für die Aussage $\begin{array}{l} 1 \\ \underline{2} \\ 3f \end{array}$, d.h. $(1 \,\&\, 2) \rightarrow \overline{3}$, verwenden wir die Abkürzung $[1\,2\,3]$.

Satz. $[123] \sim [132]$
$\sim [213] \sim [231] \sim [312] \sim [321]$.

Beweis. $[123]$ bedeutet $(1 \,\&\, 2) \rightarrow \overline{3}$ und läßt sich über $\overline{1 \,\&\, 2} \vee \overline{3}$ in $\overline{1 \,\&\, 2 \,\&\, 3}$ umformen. Die Reihenfolge der Glieder der Konjunktion $1 \,\&\, 2 \,\&\, 3$ darf beliebig geändert werden.

([33]) Math. Ann. 101 (1929), S. 458.

4, 2.1.1. Für die Aussage

$$\frac{\begin{matrix}M\,a\,P\\ S\,\beta\,M\end{matrix}}{(S\gamma P)f}\ \text{bzw.}\ \frac{\begin{matrix}P\,a\,M\\ S\,\beta\,M\end{matrix}}{(S\gamma P)f}\ \text{bzw.}\ \frac{\begin{matrix}M\,a\,P\\ M\,\beta\,S\end{matrix}}{(S\gamma P)f}\ \text{bzw.}\ \frac{\begin{matrix}P\,a\,M\\ M\,\beta\,S\end{matrix}}{(S\gamma P)f}$$

benutzen wir die Abkürzung

I$(\alpha\beta\gamma)$ bzw. II$(\alpha\beta\gamma)$ bzw. III$(\alpha\beta\gamma)$ bzw. IV$(\alpha\beta\gamma)$.

Eine Aussage N$(\alpha\beta\gamma)$ mit N aus {I, II, III, IV} heißt ein *Modus der* N. *Figur* oder schlechthin ein *Modus*. (Was „gültiger Modus" bedeutet, geht aus 4, 1.1 hervor.)

4, 2.1.2. Natürlich müssen die unabhängig voneinander auf $\mathfrak{M}$ variierenden Veränderlichen *verschieden* bezeichnet sein — aber sonst ist ihre Benennung gleichgültig; z. B. ist auch

$$\frac{\begin{matrix}S\,a\,P\\ S\,\beta\,M\end{matrix}}{(M\gamma P)f}\quad \text{der Modus III}\,(\alpha\beta\gamma).$$

4, 2.2. Unter einer *t-Familie* verstehen wir die Menge derjenigen Modi, die durch Permutation der Urteile 1, 2, 3 aus einem Modus [123] hervorgehen. Wegen 4, 1.7 enthält eine *t*-Familie entweder lauter gültige oder lauter ungültige Modi.

4, 2.3. Hilfssatz. Ist [123] ein Modus, so ist die Aussage [213] kein Modus.

Beweis. Sei $3 = S\gamma P$. Wie man aus 4, 2.1.1 ersieht, enthält dann das erste Urteil (der „Obersatz") P und eine dritte Variable — etwa M, während in dem zweiten Urteil (dem „Untersatz") S und M vorkommen. In der fraglichen Aussage ist es aber gerade umgekehrt.

Satz 1. Bei jeder Wahl von α, β, γ, bilden die Modi

$$\text{I}\,(\alpha\beta\gamma),\ \text{II}\,(\alpha\gamma\beta),\ \text{III}\,(\gamma\beta\alpha)$$

eine vollständige *t*-Familie [die als $\mathfrak{T}_1(\alpha\beta\gamma)$ bezeichnet werden möge].

Beweis. 1. Für

$$\text{I}\,(\alpha\beta\gamma) = [1\,2\,3]$$

wird

$$[1\,3\,2] = \text{II}\,(\alpha\gamma\beta)$$

evident, wenn man S durch S', P durch M' und M durch P' ersetzt:

$$\text{I}\,(\alpha\beta\gamma) = \frac{\begin{matrix}M a P\\ S\beta M\end{matrix}}{(S\gamma P)f} = [1\,2\,3]$$

$$\sim [1\,3\,2] = \frac{\begin{matrix}M a P\\ S\gamma P\end{matrix}}{(S\beta M)f} = \frac{\begin{matrix}P' a M'\\ S'\gamma M'\end{matrix}}{(S'\beta P')f}$$

und nachträglich die Akzente wegläßt.

2. Ähnlich verläuft die Bestätigung von

$$[3\,2\,1] = \text{III}\,(\gamma\beta\alpha),$$

bei der man sich der Substitutionen

$$S = M',\quad P = P',\quad M = S'$$

bedient.

3. Die Aussagen

$$[1\,2\,3],\quad [1\,3\,2],\quad [3\,2\,1]$$

sind demnach die drei im Satz genannten Modi und gehören *einer* *t*-Familie an, die *nur* diese drei enthält, weil

$$[2\,1\,3],\quad [3\,1\,2],\quad [2\,3\,1]$$

nach dem Hilfssatz keine Modi sind.

Satz 2. Bei jeder Wahl von α, β, γ bilden die Modi

$$\text{IV}\,(\alpha\beta\gamma),\ \text{IV}\,(\beta\gamma\alpha),\ \text{IV}\,(\gamma\alpha\beta)$$

eine vollständige *t*-Familie [die als $\mathfrak{T}_4(\alpha\beta\gamma)$ oder $\mathfrak{T}_4(\beta\gamma\alpha)$ oder $\mathfrak{T}_4(\gamma\alpha\beta)$ bezeichnet werden möge].

Zum *Beweis* geht man von

$$\text{IV}\,(\alpha\beta\gamma) = [1\,2\,3]$$

aus und bestätigt

$$[2\,3\,1] = \text{IV}\,(\beta\gamma\alpha),\ [3\,1\,2] = \text{IV}\,(\gamma\alpha\beta).$$

4, 2.4. Manche Sätze und Anmerkungen, die zwar innerhalb unseres Beweisganges zur Gewinnung der Endergebnisse nicht herangezogen werden, aber die Rolle der eingeführten Begriffe plastischer hervortreten lassen, werde ich durch das vorangestellte Zeichen **°** markieren, so z. B. den

°Satz. Es gibt genau 88 *t*-Familien.

Beweis. Weil für die Wahl der Parameter α, β, γ je 4 Möglichkeiten offenstehen, gibt es $4^3 = 64$ *t*-Familien $\mathfrak{T}_1(\alpha\beta\gamma)$; jeder Modus einer der drei ersten Figuren gehört genau einer dieser 64 *t*-Familien an.

Eine *t*-Familie $\mathfrak{T}_4(\alpha\beta\gamma)$ (ein „Ring", denn die Argumente werden doch zyklisch vertauscht) enthält für $\alpha = \beta = \gamma$ nur einen Modus, sonst aber drei verschiedene; demnach gibt es $((64 - 4) : 3) + 4 = 24$ Ringe, und jeder Modus der IV. Figur liegt in genau einem dieser 24 Ringe.

4, 2.5. Gehören die Modi $L = \text{N}(\alpha\beta\gamma)$ und $L' = \text{N}'(\alpha'\beta'\gamma')$ zur gleichen *t*-Familie, so schreiben wir

$$L\,t\,L'.$$

4, 3.1. Sind $L_1 = [1\,2\,3]$ und L_2 Modi, so schreiben wir

$$L_1\,\hat{s}\,L_2,$$

falls man $L_1 \sim L_2$ oder $[2\,1\,3] \sim L_2$ dadurch beweisen kann, daß man genau einmal s anwendet (siehe 4, 1.4).

4, 3.2. u sei ein Parameter, der die Werte e und i annehmen kann (also diejenigen Argumente δ, für die $X\delta Y$ umkehrbar ist).

Ist $q = XuY$, so sei $YuX = q^*$.

4, 3.3. Satz. Es bestehen die Relationen

1)	I $(u\beta\gamma)$	$\hat{s}$	II $(u\beta\gamma)$
	III $(u\beta\gamma)$	$\hat{s}$	IV $(u\beta\gamma)$
2)	I $(\alpha u\gamma)$	$\hat{s}$	III $(\alpha u\gamma)$
	II $(\alpha u\gamma)$	$\hat{s}$	IV $(\alpha u\gamma)$
3)	I $(\alpha\beta u)$	$\hat{s}$	IV $(\beta\alpha u)$
	II $(\alpha\beta u)$	$\hat{s}$	II $(\beta\alpha u)$
	III $(\alpha\beta u)$	$\hat{s}$	III $(\beta\alpha u)$.

Gilt $L_1 \hat{s} L_2$, so fällt $L_1 \hat{s} L_2$ oder $L_2 \hat{s} L_1$ unter eine dieser sieben Relationen.

Beweis. Die Formeln 1) gewinnt man durch Konversion des Obersatzes 1; wegen $1 \sim 1^*$ darf man $[123] \sim [1^*23]$ anwenden.

Die Formeln 2) gewinnt man durch Konversion des Untersatzes 2; man verwendet $[123] \sim [12^*3]$.

Die Formeln 3) gewinnt man durch Konversion des Schlußsatzes 3; man stützt sich auf $[213] \sim [213^*]$.

Zum Beispiel wird, wenn

$$\mathrm{I}(\alpha\beta u) = \frac{\begin{matrix} M\alpha P \\ S\beta M \end{matrix}}{(SuP)f} = [123] \text{ ist, } [213] = \frac{\begin{matrix} S\beta M \\ M\alpha P \end{matrix}}{(SuP)f} \sim [213^*] = \frac{\begin{matrix} S\beta M \\ M\alpha P \end{matrix}}{(PuS)f} = \mathrm{IV}(\beta\alpha u).$$

Da die Bestätigung *jeder* Äquivalenz $L_1 \hat{s} L_2$ nach einer dieser drei Arten (Ober-, Unter-, Schlußsatzkonversion) verlaufen muß, ist die Zugehörigkeit zu einer der drei Formelgruppen dann gesichert, wenn unter 1) *jeder* Modus $\mathrm{N}(u\beta\gamma)$, unter 2) *jeder* Modus $\mathrm{N}(\alpha u\gamma)$ und unter 3) *jeder* Modus $\mathrm{N}(\alpha\beta u)$ vorkommt; das ist aber der Fall.

4, 3.4. Sind L_1 und L_2 Modi, so schreiben wir

$$L_1 s L_2,$$

wenn sich $L_1 \sim L_2$ durch Äquivalenzen $L' \hat{s} L''$ beweisen läßt.

Unter einer *t-s-Familie* verstehen wir die Menge aller Modi L für die man, wenn ein Modus L_0 vorgegeben ist, $L_0 \sim L$ durch Äquivalenzen $L' t L''$ und $L' s L''$ beweisen kann (wobei man jedes dieser Hilfsmittel nicht heranzuziehen braucht, aber beliebig oft heranziehen darf.)

Eine t-s-Familie enthält also entweder lauter gültige oder lauter ungültige Modi.

°Beispiel. Wegen

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Ferio} & & \text{Datisi} & & \text{Darii} & & \text{Dimatis} & & \text{Calemes} \\ \mathrm{I}(eia) & \underset{(4,2.3.1)}{t} & \mathrm{III}(aie) & \underset{(4,3.3.2)}{\hat{s}} & \mathrm{I}(aie) & \underset{(4,3.3.3)}{\hat{s}} & \mathrm{IV}(iae) & \underset{(4,2.3.2)}{t} & \mathrm{IV}(aei) \quad \underset{(4,3.3.3)}{\hat{s}} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} \text{Celarent} & & \text{Festino} & & \text{Fresison} & & \text{Ferison} & & \text{Camestres} \\ \mathrm{I}(eai) & \underset{(4,2.3.1)}{t} & \mathrm{II}(eia) & \underset{(4,3.3.2)}{\hat{s}} & \mathrm{IV}(eia) & \underset{(4,3.3.1)}{\hat{s}} & \mathrm{III}(eia) & \underset{(4,2.3.1)}{t} & \mathrm{II}(aei) \end{array}$$

gehören Ferio und Camestres derselben t-s-Familie an. Daß man $\mathrm{I}(eia) \sim \mathrm{II}(aei)$ wesentlich schneller beweisen kann, geht aus Satz 4,3.5 hervor.

4, 3.5. Hilfssatz. Gilt $L_1 t L_2 \hat{s} L_3$, so gibt es einen Modus L_2^* mit $L_1 \hat{s} L_2^* t L_3$.

Beweis. Sei $L_1 = [123]$; dann sind auch in L_2 die Urteile 1, 2, 3 enthalten, in L_3 aber nur zwei von ihnen, während eins von ihnen konvertiert auftritt. Kommen in L_3

$$1^*, 2, 3 \quad \text{bzw.} \quad 1, 2^*, 3 \quad \text{bzw.} \quad 1, 2, 3^*$$

vor, so setzen wir

$$L_2^* = [1^*23] \text{ bzw. } L_2^* = [12^*3] \text{ bzw. } L_2^* = [213^*],$$

so daß L_2^* ein Modus ist, für den $L_1 \hat{s} L_2^*$ gilt. Außerdem trifft $L_2^* t L_3$ zu, weil L_2^* die gleichen Urteile wie L_3 enthält.

Satz. Gehören L_0 und L_0' zur gleichen t-s-Familie, so gibt es einen Modus L_0^* mit

$$L_0 s L_0^* t L_0'.$$

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine Äquivalenzenkette

$$L_0 \sim L_1 \sim L_2 \sim \ldots\ldots \sim L_n = L_0', \qquad (1)$$

in der jedes $\sim$ durch $\hat{s}$ oder t ersetzbar ist. Wir stellen aus (1) eine neue Äquivalenzenkette her:

Hat das erste Zeichen $\sim$ die Bedeutung t, so fügen wir vorne die triviale Äquivalenz $L_0 s L_0$ an; hat es aber die Bedeutung $\hat{s}$, so schreiben wir $L_0 s L_1$ statt $L_0 \hat{s} L_1$. Falls das letzte $\sim$ der Kette $\hat{s}$ bedeutet, hängen wir die triviale Äquivalenz $L_0' t L_0'$ hinten an. Für $L' \hat{s} L'' \hat{s} L'''$ darf man $L' \hat{s} L'' t L'' \hat{s} L'''$ schreiben, so daß sich erreichen läßt, daß in der Kette nie zwei benachbarte Zeichen $\sim$ beide die Bedeutung $\hat{s}$ haben. Aber auch daß zweimal t nebeneinandersteht, läßt sich vermeiden, denn aus $L' t L'' t L'''$ folgt $L' t L'''$.

Von der neuen Kette darf man also folgendes verlangen:

1. Sie beginnt mit $L_0 s \ldots$ und endet mit $\ldots t L_0'$.
2. Das zweite $\sim$ bedeutet t.
3. Vom zweiten $\sim$ an bedeutet $\sim$ abwechselnd t und $\hat{s}$.

Besteht die neue Kette aus nur zwei Äquivalenzen, so ist die Behauptung bewiesen. Enthält die neue Kette jedoch über zwei (also mindestens vier) Äquivalenzen, so genügt es zu zeigen, daß eine um zwei Glieder kürzere Kette existiert, die ebenfalls die Bedingungen 1. bis 3. erfüllt. In der Tat gibt es, wenn die neue Kette so:

$$L_0\, s\, L_1\, t\, L_2\, \hat{s}\, L_3\, t\, L_4\, (\hat{s}\, \ldots) \qquad (2)$$

aussieht, dem Hilfssatz zufolge einen Modus L_2^* mit

$$L_0\, s\, L_1\, \hat{s}\, L_2^*\, t\, L_3\, t\, L_4\, (\hat{s}\, \ldots),$$

so daß die Kette

$$L_0 \quad s\, L_2^* \quad t\, L_4\, (\hat{s}\, \ldots) \qquad (3)$$

das Verlangte leistet — wobei natürlich der in Klammern stehende vielleicht vorhandene Rest der Kette (2) der gleiche ist wie der der Kette (3).

Korollar. Man erhält sämtliche Modi einer t-s-Familie, wenn man zunächst neben einen Modus L_0 alle Modi L mit $L_0\, s\, L$ schreibt und dann unterhalb von jedem dieser Modi L die weiteren Mitglieder von dessen t-Familie aufzählt.

(°Ob einzelne Modi bei dieser Konstruktion mehrfach auftreten können, ist damit nicht gesagt.)

4, 3.6. Aufstellung aller t-s-Familien.

α, β, γ dürfen in 4,3.6 nur a oder o bedeuten.

A. Ist **kein** Argument eines Modus gleich e oder i, so fallen seine t-Familie und seine t-s-Familie zusammen.

Fall 1. $\mathfrak{T}_1(\alpha\beta\gamma)$.

°Da für jedes Argument 2 Möglichkeiten offenstehen, gibt es $2^3 = 8$ solche Familien mit je 3 Modis.

Fall 2. $\mathfrak{T}_4(\alpha\beta\gamma)$.

°**Fall 2a.** Sind alle Argumente gleich, so enthält die Familie nur einen Modus, und 2 solche Familien gibt es.

°**Fall 2b.** Sind nicht alle Argumente gleich, so sind entweder zwei Argumente $= a$ oder zwei Argumente $= o$, so daß man 2 Familien mit je 3 Modis erhält.

B. Genau **ein** Argument ist $= e$ oder $= i$.

Fall 3. Ausgangsmodus sei $\mathrm{I}\,(u\beta\gamma)$; gemäß Korollar 4, 3.5 haben wir wegen $\mathrm{I}\,(u\beta\gamma)\ \hat{s}\ \mathrm{II}(u\beta\gamma)$ (vgl. 4, 3.3.1) die t-Familien dieser beiden Modi zu vereinigen; $\mathrm{I}(u\beta\gamma)$ liegt in $\mathfrak{T}_1(u\beta\gamma)$, $\mathrm{II}(u\beta\gamma)$ in $\mathfrak{T}_1(u\gamma\beta)$ (vgl. 4, 2.3.1).

Fall 3a. Im Falle $\beta = \gamma$ besteht die t-s-Familie aus $\mathfrak{T}_1(u\beta\beta)$.

°Es gibt 4 solche Familien mit je 3 Modis.

Fall 3b. Im Falle $\beta \neq \gamma$ erhält man die t-s-Familie $\mathfrak{T}_1(u\beta\gamma) + \mathfrak{T}_1(u\gamma\beta)$.

°Weil für $(u\beta\gamma)$ nur die 2 Möglichkeiten (uao) bestehen, gibt es 2 solche Familien mit je 6 Modis.

Fall 4. Mit dem Ausgangsmodus $\mathrm{I}\,(\alpha u\gamma)$ verfährt man analog.

Fall 4a. Im Falle $\alpha = \gamma$ erhält man $\mathfrak{T}_1(\alpha u\alpha)$.

°Es gibt 4 solche Familien mit je 3 Modis.

Fall 4b. Für $\alpha \neq \gamma$ gelangt man zu $\mathfrak{T}_1(\alpha u\gamma) + \mathfrak{T}_1(\gamma u\alpha)$.

°Es gibt 2 solche Familien mit je 6 Modis.

Fall 5. Wir gehen von $\mathrm{I}\,(\alpha\beta u)$ aus; wegen $\mathrm{I}\,(\alpha\beta u)\ \hat{s}\ \mathrm{IV}\,(\beta\alpha u)$ (vgl. 4, 3.3.3) lautet die t-s-Familie $\mathfrak{T}_1(\alpha\beta u) + \mathfrak{T}_4(\beta\alpha u)$.

°Hier gibt es $2^3 = 8$ Familien zu je 6 Modis.

C. Genau **zwei** Argumente sind $= e$ oder $= i$.

Fall 6. Ausgangsmodus sei $\mathrm{I}\,(\alpha uu')$. Daß in $\mathrm{I}(\alpha uu')\ \hat{s}\ \mathrm{III}(\alpha uu')\ \hat{s}\ \mathrm{III}(u\alpha u')\ \hat{s}\ \mathrm{IV}(u\alpha u')\ \hat{s}\ \mathrm{I}(\alpha uu')$ (vgl. 4, 3.3!) wirklich *alle* Modi L mit $\mathrm{I}\,(\alpha uu')\ s\ L$ vorkommen, geht daraus hervor, daß jeder mit zwei verschiedenen Modis durch $\hat{s}$ verbunden ist — mehr $\hat{s}$-Relationen kann es ja bei nur zwei Konversion ermöglichenden Argumenten nicht geben. Weil nun

$$\begin{aligned} &\mathrm{I}(\alpha uu') \text{ in } \mathfrak{T}_1(\alpha uu'),\\ &\mathrm{III}(\alpha uu') \text{ in } \mathfrak{T}_1(u'u\alpha),\\ &\mathrm{III}(u\alpha u') \text{ in } \mathfrak{T}_1(u'\alpha u)\\ \text{und } &\mathrm{IV}(u\alpha u') \text{ in } \mathfrak{T}_4(\alpha u'u) \end{aligned}$$

enthalten ist (vgl. 4, 2.3), wird

$$\mathfrak{T}_1(\alpha uu') + \mathfrak{T}_1(u'u\alpha) + \mathfrak{T}_1(u'\alpha u) + \mathfrak{T}_4(\alpha u'u)$$

die gesuchte vollständige t-s-Familie.

°Es gibt 8 solche t-s-Familien zu je 12 Modis.

D. Alle **drei** Argumente sind $= e$ oder $= i$.

Fall 7. Zwangsläufig sind mindestens zwei Argumente gleich.

Ausgangsmodus sei $\mathrm{I}(uu'u')$. Wegen $\mathrm{I}(uu'u')\ \hat{s}\ \mathrm{IV}(u'uu')\ \hat{s}\ \mathrm{III}(u'uu')\ \hat{s}\ \mathrm{III}(uu'u')$ (vgl. 4, 3.3) liegen mindestens $\mathfrak{T}_1(uu'u')$, $\mathfrak{T}_4(uu'u')$, $\mathfrak{T}_1(u'uu')$, $\mathfrak{T}_1(u'u'u)$ (vgl. 4,2.3) in der t-s-Familie unseres Ausgangsmodus. Diese t-Familien bilden sogar schon die *ganze* Familie:

Stets haben ja zwei Modi aus derselben t-s-Familie dieselben Argumente (wenn man von deren Reihenfolge absieht). ([34]) Nun enthalten die oben zusammengestellten t-Familien sämtliche Modi, die (in irgendeiner Reihenfolge) die Argumente u, u', u' besitzen. Also kann kein weiterer Modus diese Argumente haben — was aber die notwendige Bedingung für die Zugehörigkeit zu unserer t-s-Familie wäre.

([34]) Die Umkehrung gilt nicht (vgl. in 4,3.8 z. B. $\mathfrak{U}_6$ und $\mathfrak{G}_4$ oder $\mathfrak{U}_7$ bis $\mathfrak{U}_{10}$).

Fall 7a. Für $u = u'$ reduziert sich die Familie auf

$\underline{\mathfrak{T}_1(uuu) + \mathfrak{T}_4(uuu)}$.

°Es gibt 2 solche Familien mit je 4 Modis.

Fall 7b. Für $u \neq u'$ entsteht

$\underline{\mathfrak{T}_1(uu'u') + \mathfrak{T}_1(u'uu') + \mathfrak{T}_1(u'u'u) + \mathfrak{T}_4(uu'u')}$.

°Es gibt 2 solche Familien zu je 12 Modis.

Die °Anmerkungen zusammenfassend, erhalten wir den

°Satz: Die 256 Modi verteilen sich auf

2	t-s-Familien	mit je	1	Modus,
18	t-s-Familien	mit je	3	Modis,
2	t-s-Familien	mit je	4	Modis,
12	t-s-Familien	mit je	6	Modis,
10	t-s-Familien	mit je	12	Modis.

Demnach gibt es genau 44 *t-s*-Familien.

4, 3.7. Die *t-s*-Familie von $\mathfrak{I}(eee)$ soll den Namen $\mathfrak{U}_1$ erhalten. In der eben aufgestellten Tabelle gehört $\mathfrak{U}_1$ zu Fall 7a: $\mathfrak{U}_1$ besteht aus den 4 Modis $\mathfrak{N}(eee)$.

4, 3.8. Für später brauchen wir eine **Zusammenstellung aller *t-s*-Familien mit genau zwei positiven Argumenten.**

Die „genau zwei positiven Argumente" können *a* und *a*, *a* und *i*, *i* und *i* sein; für das dritte Argument bleiben die Möglichkeiten *e* und *o*. Die demnach möglichen 6 Argument-Zusammenstellungen

1. *aae*	3. *aie*	5. *iie*
2. *aao*	4. *aio*	6. *iio*

sind nun erstens auf alle erdenklichen Weisen anzuordnen:

1. *aae*,	*aea*,	*eaa*;			
2. *aao*,	*aoa*,	*oaa*;			
3. *aei*,	*aie*,	*eai*,	*eia*,	*iae*,	*iea*;
4. *aio*,	*aoi*,	*iao*,	*ioa*,	*oai*,	*oia*;
5. *eii*,	*iei*,	*iie*;			
6. *iio*,	*ioi*,	*oii*			

und zweitens als Argumente sowohl von $\mathfrak{T}_1(\ldots)$ als auch von $\mathfrak{T}_4(\ldots)$ einzusetzen. Die eben hergestellten 24 Anordnungen erzeugen 24 *t*-Familien $\mathfrak{T}_1(\ldots)$; dazu kommen 8 *t*-Familien $\mathfrak{T}_4(\ldots)$:

1. $\mathfrak{T}_4(aae)$;
2. $\mathfrak{T}_4(aao)$;
3. $\mathfrak{T}_4(aei)$, $\mathfrak{T}_4(aie)$;
4. $\mathfrak{T}_4(aio)$, $\mathfrak{T}_4(aoi)$;
5. $\mathfrak{T}_4(eii)$;
6. $\mathfrak{T}_4(iio)$.

Mit Hilfe der Tabelle 4, 3.6 können wir diese 32 *t*-Familien mühelos in *t-s*-Familien gliedern. Wir werden deren 15 erhalten, denen wir die Namen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{G}_4$ und $\mathfrak{U}_2$ bis $\mathfrak{U}_{12}$ geben:

1. $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{T}_1(aae) + \mathfrak{T}_4(aae)$
   (Fall 5: $\alpha = a$, $\beta = a$, $u = e$)
   (° enthält 6 Modi, darunter Barbari und Bamalip)
   $\mathfrak{U}_2 = \mathfrak{T}_1(aea)$ (Fall 4a)
   $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{T}_1(eaa)$ (Fall 3a)
   (° enthält 3 Modi, darunter Celaront)
2. $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{T}_1(aao)$ (Fall 1)
   (° enthält 3 Modi, darunter Barbara)
   $\mathfrak{U}_3 = \mathfrak{T}_1(aoa)$ (Fall 1)
   $\mathfrak{U}_4 = \mathfrak{T}_1(oaa)$ (Fall 1)
   $\mathfrak{U}_5 = \mathfrak{T}_4(aao)$ (Fall 2b)
3. $\mathfrak{U}_6 = \mathfrak{T}_1(aei) + \mathfrak{T}_1(iea) + \mathfrak{T}_1(iae) + \mathfrak{T}_4(aie)$ (Fall 6)
   $\mathfrak{G}_4 = \mathfrak{T}_1(aie) + \mathfrak{T}_1(eia) + \mathfrak{T}_1(eai) + \mathfrak{T}_4(aei)$ (Fall 6)
   (° $\mathfrak{G}_4$ enthält 12 Modi, darunter Darii, Ferio, Celarent, Calemes)
4. $\mathfrak{U}_7 = \mathfrak{T}_1(aio) + \mathfrak{T}_1(oia)$ (Fall 4b)
   $\mathfrak{U}_8 = \mathfrak{T}_1(aoi) + \mathfrak{T}_4(oai)$ (Fall 5)
   $\mathfrak{U}_9 = \mathfrak{T}_1(iao) + \mathfrak{T}_1(ioa)$ (Fall 3b)
   $\mathfrak{U}_{10} = \mathfrak{T}_1(oai) + \mathfrak{T}_4(aoi)$ (Fall 5)
5. $\mathfrak{U}_{11} = \mathfrak{T}_1(eii) + \mathfrak{T}_1(iei) + \mathfrak{T}_1(iie) + \mathfrak{T}_4(eii)$ (Fall 7b)
6. $\mathfrak{U}_{12} = \mathfrak{T}_1(oii) + \mathfrak{T}_1(iio) + \mathfrak{T}_1(ioi) + \mathfrak{T}_4(oii)$ (Fall 6)

Wir überzeugen uns, daß die unterzubringenden 32 *t*-Familien tatsächlich alle aufgebraucht sind.

4, 3.9. Von den *t-s*-Familien mit 0, 1 oder 3 positiven Argumenten hat bisher nur eine (nämlich $\mathfrak{U}_1$) einen Namen erhalten; die anderen denken wir uns in irgendeiner Reihenfolge durchnumeriert:

$$\mathfrak{U}_{13},\ \mathfrak{U}_{14},\ \mathfrak{U}_{15}\ \ldots\ (\text{° bis } \mathfrak{U}_{40}).$$

4, 4. Vorbemerkung. Wenn $\mathfrak{P}$ eine Menge von Aussagen (z. B. Modis) ist, gebrauchen wir von jetzt ab für

Alle Aussagen aus $\mathfrak{P}$ sind (un-)gültig

die inkonsequente, aber bequeme Abkürzung

Ganz $\mathfrak{P}$ ist (un-)gültig

oder

$\mathfrak{P}$ ist (un-)gültig.

4, 4.1. $\mathfrak{G}$ sei die Vereinigungsmenge der *t-s*-Familien $\mathfrak{G}_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). $\mathfrak{U}$ sei die Vereinigungsmenge der *t-s*-Familien $\mathfrak{U}_\mu$ ($\mu = 1, 2, 3\ldots$ °bis 40).

$\mathfrak{B}$ bedeute: „Ganz $\mathfrak{G}$ ist gültig, und ganz $\mathfrak{U}$ ist ungültig".

Wir sagen: „Das System $\mathfrak{S}$ hat die Struktur der klassischen Syllogistik", falls $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{S}$ zutrifft.

Nun bilden ja die („wirklichen") Urteile, von denen die klassische Syllogistik handelt, ein System mit der Struktur der klassischen Syllogistik; da sie aber recht schwierig scharf zu fassen sind, werden wir, um die *Erfüllbarkeit* der Forderung $\mathfrak{B}$ zu zeigen, in 4, 6.3 ein sehr einfaches System $\mathfrak{S}_0$ angeben, das ebenfalls die Struktur der klassischen Syllogistik besitzt.

4, 4.2. $\mathfrak{B}'$ sei eine Konjunktion von Aussagen

der Form „$\mathrm{N}(\alpha\beta\gamma)$ ist gültig" oder „$\mathrm{N}(\alpha\beta\gamma)$ ist ungültig" oder beider Formen.	der Form „$\mathfrak{G}_\mu$ ist gültig" oder „$\mathfrak{U}_\mu$ ist ungültig" oder beider Formen.
$\mathfrak{B}'$ heißt ein **Axiomensystem** von $\mathfrak{B}$,	$\mathfrak{B}'$ heißt ein t-s-**Axiomensystem** von $\mathfrak{B}$,

falls folgendes beides gilt:

[1] Aus $\mathfrak{B}'$ ist $\mathfrak{B}$ herleitbar.

[2] Es gibt *keine* (von $\mathfrak{B}'$ verschiedene) Teilkonjunktion $\mathfrak{B}''$ von $\mathfrak{B}'$, aus der sich $\mathfrak{B}$ herleiten läßt.

(° „$\mathfrak{B}$ ist unter der Voraussetzung von $\mathfrak{A}$ herleitbar" — statt „$\mathfrak{B}$ ist herleitbar" — wäre eine Tautologie, denn $\mathfrak{B}$ bezieht sich ja auf die Modi, also auf die Urteile, also auf deren System $\mathfrak{S}$, das den Anforderungen $\mathfrak{A}$ genügt.)

Aus diesen Definitionen ergibt sich der

Satz. Kennt man alle t-s-Axiomensysteme von $\mathfrak{B}$, so erhält man alle Axiomensysteme von $\mathfrak{B}$, indem man bei *jedem* t-s-Axiomensystem auf *jede* mögliche Weise jede t-s-Familie dieses t-s-Axiomensystems durch einen ihrer Modi ersetzt.

Konstruktion der t-s-Axiomensysteme.

4, 5.1. Definitionen. a *steht über* a und i,
e steht über e und o,
i steht über i,
o steht über o.

Der Modus $L = \mathrm{N}(\alpha\beta\gamma)$ *steht über* dem Modus $L' = \mathrm{N}(\alpha'\beta'\gamma')$ (der gleichen Figur) und dieser *steht unter* jenem, wenn sowohl α über α' als auch β über β' als auch γ über γ' steht.

Satz 1. Ist ein Modus gültig, so jeder, der über ihm steht.

Beweis. Wir konstatieren zunächst, daß wegen *sa* (vgl. 4, 1.4) bei jedem δ die Beziehung

$$X\delta Y \rightarrow X\delta' Y$$

zutrifft, wenn δ über δ' steht; dann gilt auch

$$(X\delta' Y)f \rightarrow (X\delta Y)f.$$

Steht nun $L = \dfrac{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}{3f}$ über dem *gültigen* Modus

$L' = \dfrac{\begin{matrix}1'\\2'\end{matrix}}{3'f}$, so gelangt man wegen $1 \rightarrow 1'$, $2 \rightarrow 2'$,

$3 \rightarrow 3'$ zu $\dfrac{\begin{matrix}1 \rightarrow 1'\\2 \rightarrow 2'\end{matrix}}{3'f \rightarrow 3f}$, q. e. d.

Satz 2. Ist ein Modus ungültig, so jeder, der unter ihm steht.

Beweis. Wäre dieser nämlich gültig, so nach Satz 1 auch jener.

4, 5.2. Satz. Zwischen den t-s-Familien $\mathfrak{G}_1$ bis $\mathfrak{G}_4$ bestehen die Implikationen

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{G}_1 & \mathfrak{G}_2 \\ \mathfrak{G}_3 \arrow[u] & \mathfrak{G}_4 \arrow[u] \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Mit $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_4$ ist also ganz $\mathfrak{G}$ gültig.

Beweis. 1. Ist $\mathfrak{G}_3 = \mathfrak{T}_1(aao)$ gültig, dann insbesondere der Modus $\mathrm{I}(aao)$; der über ihm stehende Modus $\mathrm{I}(aae)$ ist nach Satz 4, 5.1.1 gültig — damit auch $\mathfrak{T}_1(aae)$ und die $\mathfrak{T}_1(aae)$ enthaltende t-s-Familie $\mathfrak{G}_1$.

2. $\mathfrak{G}_4$ enthält $\mathfrak{T}_1(aie)$ und damit $\mathrm{I}(aie)$. Über $\mathrm{I}(aie)$ steht $\mathrm{I}(aae)$. $\mathrm{I}(aae)$ liegt in $\mathfrak{T}_1(aae)$ und damit in $\mathfrak{G}_1$. Also gilt $\mathfrak{G}_4 \rightarrow \mathfrak{G}_1$.

3. $\mathfrak{G}_4$ enthält $\mathfrak{T}_1(eai)$ und damit $\mathrm{I}(eai)$. Über $\mathrm{I}(eai)$ steht der Modus $\mathrm{I}(eaa)$, der in $\mathfrak{T}_1(eaa)$ und damit in $\mathfrak{G}_2$ liegt. Also gilt $\mathfrak{G}_4 \rightarrow \mathfrak{G}_2$.

(° In der Mitte jedes der 3 Beweise kommt die Wendung „steht über" vor. Die so verknüpften Modi sind

1. Barbara $\rightarrow$ Barbari,
2. Darii $\rightarrow$ Barbari,
3. Celarent $\rightarrow$ Celaront.)

4, 5.3.0. Satz 1. Höchstens mit Ausnahme von $\mathfrak{U}_1$ sind alle Familien, die kein positives Argument haben, ungültig, wenn $\mathrm{I}(eeo)$ ungültig ist.

Beweis. Bei drei negativen Argumenten kann

1. dreimal e,
2. zweimal e und einmal o,
3. einmal e und zweimal o,
4. dreimal o

vorkommen. Daß die 4 Modi 1. die *eine* t-s-Familie $\mathfrak{U}_1$ bilden, wissen wir seit 4, 3.7. Die zwölf Modi 2. bilden wegen 4,3.6 (Fall 6) ebenfalls *eine* t-s-Familie, und zwar eine ungültige, denn sie enthält den nach Voraussetzung ungültigen Modus $\mathrm{I}(eeo)$. Die Modi 3. und 4. sind nach Satz 4, 5.1.2 ungültig, da jeder von ihnen unter mindestens einem Modus 2. steht.

Satz 2. Alle Familien ohne positives Argument sind ungültig, wenn $\mathfrak{U}_1$ ungültig ist.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz 1; der Modus $\mathrm{I}(eeo)$ ist nämlich ungültig, da er unter dem (in $\mathfrak{U}_1$ liegenden und damit ungültigen) Modus $\mathrm{I}(eee)$ steht.

4. 5.3.1. Satz. Alle Familien mit genau einem positiven Argument sind ungültig.

Beweis. Jeder Modus mit genau einem positiven Argument steht unter einem der 12 Modi

$$\mathfrak{N}(aee),\quad \mathfrak{N}(eae),\quad \mathfrak{N}(eea),$$

die nach 4, 3.6 (Fall 6) *eine t-s*-Familie bilden. Es genügt demnach, die Ungültigkeit *eines* Modus dieser Familie zu beweisen. Wir zeigen, daß $\mathrm{I}(aee)$ ungültig ist:

Wie wir in 4, 1.4.4 sahen, gibt es in $\mathfrak{M}$ ein Y_0 und ein X_0 mit $Y_0 e X_0$. Aus der Gültigkeit von

$$\frac{\begin{matrix}MaP\\ SeM\end{matrix}}{(SeP)f} \quad\text{würde}\quad \frac{\begin{matrix}X_0aX_0\\ Y_0eX_0\end{matrix}}{(Y_0eX_0)f}$$

folgen — ein Widerspruch, denn bei richtigen Prämissen ist hier der Schlußsatz falsch.

4. 5.3.2. Jetzt gilt es die zu $\mathfrak{U}$ gehörigen und genau zwei positive Argumente besitzenden Familien, nämlich

$$\begin{matrix} & & & \mathfrak{U}_2 & & & \\ & \mathfrak{U}_3 & \mathfrak{U}_4 & & \mathfrak{U}_5 & \mathfrak{U}_6 & \\ \mathfrak{U}_7 & \mathfrak{U}_8 & & \mathfrak{U}_9 & \mathfrak{U}_{10} & & \mathfrak{U}_{11} \\ & & & \mathfrak{U}_{12}, & & & \end{matrix}$$

zu untersuchen.

Hilfssatz. $\mathfrak{U}_4$, $\mathfrak{U}_5$, $\mathfrak{U}_7$, $\mathfrak{U}_{10}$ und $\mathfrak{U}_{12}$ sind ungültig.

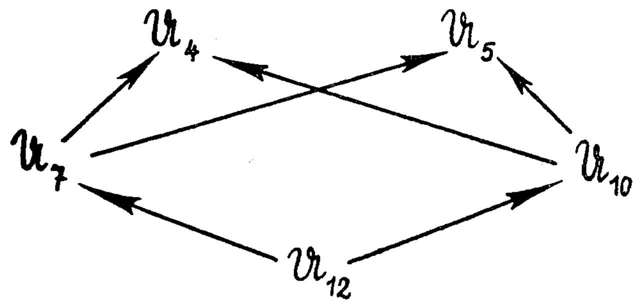
Beweis. Die Modi $\mathrm{II}(oaa)$ und $\mathrm{IV}(oaa)$ sind ungültig, weil sich aus ihrer Gültigkeit, wenn man $M = S$ setzt, die der Aussage

$$\frac{\begin{matrix}PoS\\ SaS\end{matrix}}{(SaP)f,} \quad\text{also}\quad PoS \to SoP,$$

ergäbe — im Widerspruch zu A_5 (siehe 4, 1.4.1).

Da $\mathrm{II}(oaa)$ in $\mathfrak{T}_1(oaa)$ und $\mathrm{IV}(oaa)$ in $\mathfrak{T}_4(aao)$ liegt, sind $\mathfrak{U}_4$ und $\mathfrak{U}_5$ ungültig.

(Von den durch 4, 5.1 beweisbaren Beziehungen



brauchen wir gar nicht alle:)

1. Unter $\mathrm{I}(oaa)$ aus $\mathfrak{U}_4$ liegt $\mathrm{I}(oia)$ aus $\mathfrak{U}_7$: Also ist $\mathfrak{U}_7$ ungültig.
2. Unter $\mathrm{I}(oaa)$ aus $\mathfrak{U}_4$ liegt $\mathrm{I}(oai)$ aus $\mathfrak{U}_{10}$: Also ist $\mathfrak{U}_{10}$ ungültig.
3. Unter $\mathrm{I}(oai)$ aus $\mathfrak{U}_{10}$ liegt $\mathrm{I}(oii)$ aus $\mathfrak{U}_{12}$: Also ist auch $\mathfrak{U}_{12}$ ungültig.

Satz 1. Höchstens mit Ausnahme von $\mathfrak{U}_2$ sind alle Familien, die genau zwei positive Argumente haben und in $\mathfrak{U}$ vorkommen, ungültig, wenn $\mathfrak{U}_3$ und $\mathfrak{U}_6$ ungültig sind.

Beweis. Im Hinblick auf den Hilfssatz (und auf die Übersicht zu Beginn von 4,5.3.2) bleibt nur noch die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}_8$, $\mathfrak{U}_9$ und $\mathfrak{U}_{11}$ nachzuweisen; wir leiten sie aus der von $\mathfrak{U}_6$ ab:

$\mathfrak{U}_6$ enthält $\mathrm{I}(aei)$, darunter steht	$\mathfrak{U}_6$ enthält $\mathrm{I}(iae)$, darunter steht	
$\mathrm{I}(aoi)$ aus $\mathfrak{U}_8$.	$\mathrm{I}(iao)$ aus $\mathfrak{U}_9$.	$\mathrm{I}(iie)$ aus $\mathfrak{U}_{11}$.

Satz 2. Alle zu $\mathfrak{U}$ gehörigen Familien mit genau zwei positiven Argumenten sind ungültig, wenn $\mathfrak{U}_2$ ungültig ist.

Beweis. Es genügt nachzuweisen, daß die Voraussetzungen von Satz 1 zutreffen:

Unter dem Modus $\mathrm{I}(aea)$ aus $\mathfrak{U}_2$ steht sowohl $\mathrm{I}(aoa)$ aus $\mathfrak{U}_3$ als auch $\mathrm{I}(aei)$ aus $\mathfrak{U}_6$, so daß $\mathfrak{U}_3$ und $\mathfrak{U}_6$ tatsächlich ungültig sind.

4, 5.3.3. Satz. Alle Familien mit drei positiven Argumenten sind ungültig.

Beweis. Die Modi $\mathfrak{N}(aaa)$ sind ungültig, denn aus der Gültigkeit auch nur eines von ihnen erhielte man für $M = S = P$ den Widerspruch

$$\frac{\begin{matrix}MaM\\ MaM\end{matrix}}{(MaM)f.}$$

Und *jeder* Modus $\mathfrak{N}(\alpha\beta\gamma)$ mit drei positiven Argumenten ist ungültig, weil er unter dem Modus $\mathfrak{N}(aaa)$ der gleichen Figur steht.

4, 5.4. Satz 4, 5.2, Satz 4, 5.3.0(2), Satz 4, 5.3.1, Satz 4, 5.3.2(2) und Satz 4, 5.3.3 führen gemeinsam zu dem

Satz. Aus der Gültigkeit von $\mathfrak{G}_4$ und $\mathfrak{G}_3$ und der Ungültigkeit von $\mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1$ folgen die Gültigkeit von ganz $\mathfrak{G}$ und die Ungültigkeit von ganz $\mathfrak{U}$.

Definition. $\mathfrak{B}^*$ sei die Konjunktion der Aussagen

„$\mathfrak{G}_4$ ist gültig“,
„$\mathfrak{G}_3$ ist gültig“,
„$\mathfrak{U}_2$ ist ungültig“,
„$\mathfrak{U}_1$ ist ungültig“.

Mit dieser Bezeichnung können wir den gerade ausgesprochenen Satz umformulieren zu dem

Satz. Aus $\mathfrak{B}^*$ folgt ganz $\mathfrak{B}$.

4, 6.1.1. Satz. Die Gültigkeit von $\mathfrak{G}_3$ läßt sich nicht aus dem übrigen $\mathfrak{B}^*$ herleiten.

Beweis. Ich werde ein System $\mathfrak{S}_3$ angeben, für das zwar das übrige $\mathfrak{B}^*$ erfüllt, $\mathfrak{G}_3$ aber ungültig ist. $\mathfrak{S}_3$ soll nicht gleich als fertig vorliegendes Gebilde auf die verlangten Eigenschaften hin untersucht werden, sondern ich möchte ein wenig plausibel machen, wie man auf so ein $\mathfrak{S}_3$ kommt.

Da muß zuerst jene Menge $\mathfrak{M}$ (vgl. 4, 4.1) vorliegen. Wir wollen versuchen, ob wir mit den **sechs** Elementen A, B, C, D, E, F auskommen. Als nächstes müssen die vier Funktionen $X\,\delta\,Y$ erklärt sein. 4 mal 36 Funktionswerte sind also festzulegen, denn X und Y können je 6 Werte annehmen. Jeder Wertekonstellation von δ, X und Y werden wir entweder die Angabe „richtig" oder die Angabe „falsch" zuordnen. Diese Angabe teilt natürlich nicht den jeweiligen Funktionswert selber mit (der ist ja eine *Aussage*), sondern ist eine Abkürzung dafür, daß wir uns als den betreffenden Funktionswert *irgendeine* richtige bzw. falsche Aussage festgelegt denken. Wir stellen nun nicht vier Tabellen (für a, e, i, o getrennt) auf, sondern geben den Funktionsverlauf der vier Funktionen in *einer* Tabelle wieder:

Bei festem Subjekt $X = X_0$ und festem Prädikat $Y = Y_0$ können, wie man mühelos aus *cc* und *sa* folgert, nur die drei Konstellationen

	$X_0 a Y_0$	$X_0 e Y_0$	$X_0 i Y_0$	$X_0 o Y_0$
1.	richtig,	falsch,	richtig,	falsch;
2.	falsch,	richtig,	falsch,	richtig;
3.	falsch,	falsch,	richtig,	richtig

auftreten. Eine Tafel

	A	B	C	...
A				
B				
C				
⋮				

füllen wir folgendermaßen aus: In das leere Kästchen, das rechts von X_0 und unterhalb von Y_0 liegt, tragen wir

im Falle 1. a ein,
im Falle 2. e,
im Falle 3. oi.

Die Anforderungen $\mathfrak{A}$ wirken sich auf diese Tabellen so aus:

A_1: In der Hauptdiagonalen muß überall a stehen.
(A_2 und A_3 sind bereits verwendet.)
A_4: Jeder Eintragung e muß ein e „gegenüberliegen" (in dem symmetrisch zur Hauptdiagonalen gelegenen Feld).
A_5: e muß mindestens einmal vorkommen, und mindestens einmal müssen a und oi einander gegenüberliegen (siehe 4, 1. 4. 4).

Gehen wir also an die Konstruktion von $\mathfrak{S}_3$! Offensichtlich gewährleistet die Eintragung

	A	B	C
A		e	e
B	e		e
C	e	e	

die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}_1$, während die *Ungültigkeit* von $\mathfrak{G}_3$ durch

	D	E	F
D		oi	a
E			
F		a	

gesichert ist (wegen
$$\frac{\begin{matrix} F a E \\ D a F \end{matrix}}{D o E}$$
ist nämlich Barbara manchmal falsch). Nimmt man noch $A a D$ und $B a D$ an, so wird wegen
$$\frac{\begin{matrix} B a D \\ A e B \end{matrix}}{A a D}$$
auch $\mathrm{I}(aea)$ und damit $\mathfrak{U}_2$ ungültig.

Hier ist die fertige Tabelle:

$\mathfrak{S}_3$:

	A	B	C	D	E	F
A	a	e	e	a		
B	e	a	e	a		
C	e	e	a			
D				a	oi	a
E					a	
F					a	a

In allen leergelassenen Feldern soll oi stehen.

Man bestätigt, daß A_1, A_4 und A_5 erfüllt sind. Jetzt bleibt noch die Gültigkeit von $\mathfrak{G}_4$, also z. B. von Celarent, nachzuweisen:

Das a des Untersatzes kommt nur in identischen Urteilen, in AaD, in BaD, in FaE und in DaF vor. Ist der Untersatz das identische Urteil, so ist Celarent richtig, weil Obersatz und Schlußsatz zusammenfallen. Ist DaF der Untersatz, so müßte ein Obersatz $Fe\ldots$ lauten; wir sehen in der Zeile rechts von F nach: Der Fall kommt nicht vor. Auch zu FaE gibt es keinen passenden Obersatz $Ee\ldots$, zu AaD und BaD keinen Obersatz $De\ldots$.

Celarent ist demnach in $\mathfrak{S}_3$ gültig.

4, 6.1.2. Satz. Die Gültigkeit von $\mathfrak{G}_4$ läßt sich nicht aus dem übrigen $\mathfrak{B}^*$ herleiten.

Beweis. Diesmal wird ein System $\mathfrak{S}_4$ aufgezeigt, für das zwar das übrige $\mathfrak{B}^*$ erfüllt, $\mathfrak{G}_4$ aber ungültig ist. Dabei kommen wir schon mit **fünf** Elementen aus.

Wie in 4, 6.1.1 erreichen wir durch die Festsetzung

	A	B	C	D	E
A		e	e	a	
B	e		e	a	
C	e	e			
D					
E					

daß $\mathrm{N}(eee)$ und damit $\mathfrak{U}_1$ sowie $\mathrm{I}(aea)$ und damit $\mathfrak{U}_2$ ungültig ist. Verlangen wir noch DeE und $AoiE$, so entsteht das System

$\mathfrak{S}_4$:

	A	B	C	D	E
A	a	e	e	a	oi
B	e	a	e	a	
C	e	e	a		
D				a	e
E				e	a

(leer $= oi$),

in dem zwar $\mathfrak{G}_3$ (Barbara) gültig, $\mathfrak{G}_4$ jedoch ***ungültig*** ist, denn wegen DeE $\dfrac{AaD}{AiE}$ ist Celarent manchmal falsch.

4, 6.1.3. Satz. Die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}_2$ läßt sich nicht aus dem übrigen $\mathfrak{B}^*$ herleiten.

Beweis. Nur **vier** Elemente brauchen wir für $\mathfrak{M}$. In dem System

$\mathfrak{S}_2$:

	A	B	C	D
A	a	e	e	a
B	e	a	e	
C	e	e	a	
D				a

(leer $= oi$)

sind Barbara und Celarent, also $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_4$, gültig; $\mathfrak{U}_1$ ist, wie wir schon zweimal sahen, ungültig.

Aber $\mathfrak{U}_2$ ist *gültig*, denn immer ist I(aea) richtig. Wir brauchen das nur für den Obersatz AaD zu bestätigen. Der Untersatz muß dann $\ldots eA$ heißen. Und in der Tat:

sowohl $\begin{array}{l} AaD \\ BeA \\ \hline BoD = (BaD)f \end{array}$

als auch $\begin{array}{l} AaD \\ CeA \\ \hline CoD = (CaD)f \end{array}$

trifft zu.

Un-

4. 6.1.4. Satz. Die Gültigkeit von $\mathfrak{U}_1$ läßt sich nicht aus dem übrigen $\mathfrak{B}^*$ herleiten.

Beweis. Diesmal nehmen wir nur **drei** Elemente. (Nebenbei bemerkt: Bei *noch* weniger Elementen kommt laut Satz 4,1.4.3 überhaupt kein System von Urteilen zustande.)

In dem System

$\mathfrak{S}_1$:

	A	B	C
A	a	oi	oi
B	a	a	e
C	a	e	a.

hat man $\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_4$ gültig, $\mathfrak{U}_2$ ungültig. $\mathfrak{U}_1$ ist hier ***gültig***, denn wegen

$$\begin{array}{l} BeC \\ CeB \\ \hline CiC \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} CeB \\ BeC \\ \hline BiB \end{array} \quad \text{ist I}(eee) \text{ immer richtig.}$$

4, 6.1.5. In Verbindung mit 4, 5.4 lehren die Sätze 4, 6.1.1—4:

$\mathfrak{B}^*$ ist ein t-s-Axiomensystem von $\mathfrak{B}$.

4, 6.2.1. In jedem t-s-Axiomensystem von $\mathfrak{B}$ steht die Aussage „$\mathfrak{G}_3$ ist gültig".

Der *Beweis* ist erbracht, wenn man ein System $\mathfrak{S}_3'$ angibt, in dem zwar $\mathfrak{G}_3$ ungültig ist, aber das restliche $\mathfrak{G}$ gültig bleibt, während $\mathfrak{U}$ ungültig ist.

Es ist leicht zu sehen, daß man $\mathfrak{S}_3$ als $\mathfrak{S}_3'$ verwenden kann:

$\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{G}_3$ waren dort ungültig; $\mathfrak{G}_4$ war gültig, so daß wegen 4, 5.2 auch $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ gültig sind.

4, 6.2.2. In jedem t-s-Axiomensystem von $\mathfrak{B}$ steht die Aussage „$\mathfrak{G}_4$ ist gültig".

Beweis. Wir brauchen ein System $\mathfrak{S}_4'$, in dem zwar $\mathfrak{G}_4$ ungültig ist, aber das restliche $\mathfrak{G}$ gültig bleibt, während $\mathfrak{U}$ ungültig ist.

Man kann $\mathfrak{S}_4$ als ein $\mathfrak{S}_4'$ ansehen:

Mit $\mathfrak{G}_3$ ist (4, 5.2 zufolge) $\mathfrak{G}_1$ gültig. Nun ist noch ein Modus aus $\mathfrak{G}_2$ als gültig nachzuweisen:

$$\text{Wegen} \quad \begin{array}{l} DeE \\ AaD \\ \hline AoE \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} DeE \\ BaD \\ \hline BoE \end{array} \quad \text{ist Celaront gültig.}$$

4, 6.2.3. In jedem t-s-Axiomensystem von $\mathfrak{B}$ steht die Aussage „$\mathfrak{U}_2$ ist ungültig".

Zum *Beweis* soll ein System $\mathfrak{S}_2'$ aufgewiesen werden, in dem zwar $\mathfrak{U}_2$ gültig ist, aber das gesamte übrige $\mathfrak{U}$ ungültig bleibt, während $\mathfrak{G}$ gültig ist.

Dafür sind die folgenden Voraussetzungen hinreichend:

$\mathfrak{G}$ ist gültig,
$\mathfrak{U}_1$ ist ungültig,
$\mathfrak{U}_2$ ist gültig,
$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{U}_3 \text{ ist ungültig,} \\ \mathfrak{U}_6 \text{ ist ungültig,}\end{array}\right\}$ [vgl. 4,5.3.2(1)]

von denen wir die ersten drei in $\mathfrak{S}_2$ erfüllt fanden. Aber auch die beiden letzten treffen in $\mathfrak{S}_2$ zu:

$$\text{Wegen} \quad \begin{array}{l} AaD \\ DoA \\ \hline DaD \end{array} \quad \text{ist I}(aoa) \text{ aus } \mathfrak{U}_3 \text{ ungültig,}$$

$$\text{und wegen} \quad \begin{array}{l} AaD \\ BeA \\ \hline BiD \end{array} \quad \text{ist es I}(aei) \text{ aus } \mathfrak{U}_6.$$

Wählen wir also $\mathfrak{S}_2' = \mathfrak{S}_2$.

4, 6.2.4. In jedem t-s-Axiomensystem von $\mathfrak{B}$ steht die Aussage „$\mathfrak{U}_1$ ist ungültig“.

Beweis. Wir suchen ein System $\mathfrak{S}_1'$, in dem zwar $\mathfrak{U}_1$ gültig ist, der Rest von $\mathfrak{U}$ jedoch ungültig bleibt, während $\mathfrak{G}$ gültig ist.

Hinreichend hierfür sind die Voraussetzungen:

$\mathfrak{G}_3$ und $\mathfrak{G}_4$ sind gültig,
$\mathfrak{U}_1$ ist gültig,
I(eeo) ist ungültig [vgl. 4, 5,3.0(1)],
$\mathfrak{U}_2$ ist ungültig,

die allesamt in dem neuen System

$\mathfrak{S}_1'$:

	A	B	C	D
A	a			oi
B	a	a		e
C	a		a	e
D	a	e	e	a

(leer $= oi$)

erfüllt sind.

(° $\mathfrak{S}_1$ ist als $\mathfrak{S}_1'$ unbrauchbar, weil der Modus I(eeo) in $\mathfrak{S}_1$ gültig ist.)

$\mathfrak{M}$ besteht hier aus **vier** Elementen, während $\mathfrak{M}$ bei $\mathfrak{S}_1$ nur drei Elemente hatte.

4, 6.2.5. In Verbindung mit 4, 5.4 lehren die Sätze 4, 6.2.1—4:

$\mathfrak{B}^*$ ist das einzige t-s-Axiomensystem von $\mathfrak{B}$.

°4, 6.2.6. Es ist unschwer nachzuweisen, daß es neben jedem unserer Modelle ($\mathfrak{S}_1$ bis $\mathfrak{S}_4$ und $\mathfrak{S}_1'$ bis $\mathfrak{S}_4'$) weitere Systeme gibt, die den gleichen Forderungen genügen, deren $\mathfrak{M}$ aber mehr Elemente besitzt als das $\mathfrak{M}$ des jeweiligen hier gezeigten Modells — und zwar kann man dem $\mathfrak{M}$ *jede* höhere (endliche oder unendliche) Anzahl vorschreiben.

Die Systeme $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_3$ usw. bieten einen Anhaltspunkt für die Abschätzung der *Gewichtigkeit* der vier t-s-Axiome. Da z. B. $\mathfrak{S}_3$ auf einer Menge von sechs Elementen definiert ist, $\mathfrak{S}_4$ auf einer von fünf Elementen, kann man
19 sagen, die Gültigkeit von $\mathfrak{G}_3$ *liege tiefer* als die von $\mathfrak{G}_4$ (vorausgesetzt natürlich, daß sich die Anzahlen 6 und 5 nicht noch unterbieten lassen — was leicht nachzuprüfen wäre). Mit diesem Maß gemessen, liegt die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}_1$ am weitesten an der Oberfläche.

Soll man nun aber die Kompliziertheit der *Unabhängigskeits*beweise (also $\mathfrak{S}_1$ bis $\mathfrak{S}_4$) oder die Kompliziertheit der *Unentbehrlichkeits*beweise (also $\mathfrak{S}_1'$ bis $\mathfrak{S}_4'$) zugrundelegen?

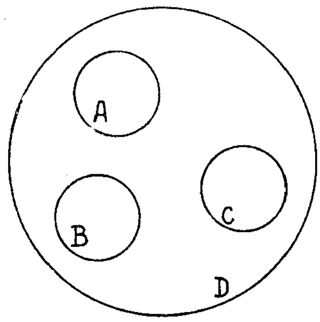
4, 6.3. Wir wollen jetzt den *Erfüllbarkeits*nachweis für $\mathfrak{B}$ nachholen.

4, 6.3.1. Nach unseren Erfahrungen mit Modellen finden wir schnell, daß das System

$\mathfrak{S}_0$:

	A	B	C	D
A	a	e	e	a
B	e	a	e	a
C	e	e	a	a
D	oi	oi	oi	a

die Struktur der klassischen Syllogistik hat (nämlich $\mathfrak{B}$ erfüllt). Das Eulersche Diagramm



darf wohl als einleuchtende Realisierung gelten.

4, 6.3.2. Man kann darüber hinaus *für jede beliebige* (endliche oder unendliche, allerdings $\geqq 4$ vorausgesetzte) *Mächtigkeit von* $\mathfrak{M}$ Systeme mit der Struktur der klassischen Syllogistik konstruieren. Am einfachsten ist wohl die Verallgemeinerung von 4, 6.3.1:

Wenn die Menge $\mathfrak{N}$ mindestens 3 Elemente enthält,

wenn $\mathfrak{M}$ aus einem weiteren Element X_0 und aus $\mathfrak{N}$ besteht

und wenn man schließlich

$$\left.\begin{array}{l} X_0 a X_0, \\ X_0 oi Z, \\ Z a X_0, \\ Z a Z, \\ Z e Z' \text{ für } Z \neq Z' \end{array}\right\} \quad (Z \text{ und } Z' \text{ aus } \mathfrak{N})$$

verlangt, dann treffen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}^*$ zu — und mit $\mathfrak{B}^*$ ganz $\mathfrak{B}$.

Ergebnis.

4. 7. 1. Satz. Man wähle einen der Modi

I(aie) = Darii,	II(aei) = Camestres,	III(eia) = Ferison,
I(eia) = Ferio,	II(eai) = Cesare,	III(aie) = Datisi,
I(eai) = Celarent,	II(eia) = Festino,	III(iae) = Disamis,
IV(aei) = Calemes,	IV(eia) = Fresison,	IV(iae) = Dimatis

und nenne ihn G_4. Man wähle zweitens einen der Modi

I(aao) = Barbara,	II(aoa) = Barocco,	III(oaa) = Boccardo

und nenne ihn G_3. Drittens wähle man einen der Modi

I(aea),	II(aae),	III(aea)

$$\left[\frac{\begin{matrix}M\,a\,P\\ S\,e\,M\end{matrix}}{S\,o\,P}\right] \qquad \left[\frac{\begin{matrix}P\,a\,M\\ S\,a\,M\end{matrix}}{S\,i\,P}\right] \qquad \left[\frac{\begin{matrix}M\,a\,P\\ M\,e\,S\end{matrix}}{S\,o\,P}\right]$$

und bezeichne ihn als U_2. Schließlich wähle man als U_1 einen der 4 Modi

N(eee)

$$\left[\frac{\begin{matrix}M\,e\,P\\ S\,e\,M\end{matrix}}{S\,i\,P},\quad \frac{\begin{matrix}P\,e\,M\\ S\,e\,M\end{matrix}}{S\,i\,P},\quad \frac{\begin{matrix}M\,e\,P\\ M\,e\,S\end{matrix}}{S\,i\,P},\quad \frac{\begin{matrix}P\,e\,M\\ M\,e\,S\end{matrix}}{S\,i\,P}\right].$$

Dann ist die Konjunktion der Aussagen

G_4 ist gültig, G_3 ist gültig, U_2 ist ungültig, U_1 ist ungültig

ein Axiomensystem von $\mathfrak{B}$.

Andere Axiomensysteme von $\mathfrak{B}$ als die auf diese Weise aufstellbaren gibt es nicht.

Beweis. Man wendet Satz 4, 4.2 auf Satz 4. 6.2.5 an und geht auf die Definitionen von $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_3$, $\mathfrak{U}_2$, $\mathfrak{U}_1$ zurück.

4. 7. 2. Wir konstatieren:

1. Alle Axiomensysteme von $\mathfrak{B}$ haben gleichviel Axiome, nämlich 4.

2. Es gibt genau $12 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 432$ Axiomensysteme von $\mathfrak{B}$.

3. Es gibt Axiomensysteme von $\mathfrak{B}$, in denen **nur Modi der I.**, nur Modi der II., nur Modi der **III. Figur** vorkommen — und zwar gibt es je 3 **solche** Axiomensysteme. Aber *kein* Axiomensystem betrifft nur Modi der IV. Figur, denn von denen kommt weder in $\mathfrak{G}_3$ noch in $\mathfrak{U}_2$ einer vor [35].

°4. 8. 1. Neben 4, 4.2 stellen wir weitere Definitionen:

$\mathfrak{B}_g'$ sei eine Konjunktion von Aussagen der Form

„N($\alpha\beta\gamma$) ist gültig", wobei N($\alpha\beta\gamma$) zu $\mathfrak{G}$ gehört.	„$\mathfrak{G}_\mu$ ist gültig".
$\mathfrak{B}_g'$ heißt ein *Axiomensystem*	$\mathfrak{B}_g'$ heißt ein *t-s-Axiomensystem*

für die Gültigkeit von $\mathfrak{G}$, falls

[1] die Gültigkeit von $\mathfrak{G}$ aus $\mathfrak{B}_g'$ herleitbar ist

und [2] *keine* (von $\mathfrak{B}_g'$ verschiedene) Teilkonjunktion $\mathfrak{B}_g''$ von $\mathfrak{B}_g'$ existiert, aus der sich die Gültigkeit von $\mathfrak{G}$ herleiten läßt.

$\mathfrak{B}_u'$ sei eine Konjunktion von Aussagen der Form

„N($\alpha\beta\gamma$) ist ungültig", wobei N($\alpha\beta\gamma$) zu $\mathfrak{U}$ gehört.	„$\mathfrak{U}_\mu$ ist ungültig".
$\mathfrak{B}_u'$ heißt ein *Axiomensystem*	$\mathfrak{B}_u'$ heißt ein *t-s-Axiomensystem*

für die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}$, falls

[1] die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}$ aus $\mathfrak{B}_u'$ herleitbar ist

und [2] *keine* (von $\mathfrak{B}_u'$ verschiedene) Teilkonjunktion $\mathfrak{B}_u''$ von $\mathfrak{B}_u'$ existiert, aus der sich die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}$ herleiten läßt.

Satz. Jedes Axiomensystem $\mathfrak{B}'$ ist die Konjunktion eines Axiomensystems $\mathfrak{B}_g'$ und eines Axiomensystems $\mathfrak{B}_u'$ — *und umgekehrt*: Die

[35] Die Sonderstellung der IV. Figur wurde ja schon in 4, 2.3 deutlich.

Konjunktion eines Axiomensystems $\mathfrak{B}_g'$ und eines Axiomensystems $\mathfrak{B}_u'$ ist ein Axiomensystem $\mathfrak{B}'$.

Den *Beweis* erbringt man, indem man erstens

$$\mathfrak{B}_g^* = (\mathfrak{G}_4 \text{ ist gültig und } \mathfrak{G}_3 \text{ ist gültig})$$

als *einziges t-s*-Axiomensystem $\mathfrak{B}_g'$ und zweitens

$$\mathfrak{B}_u^* = (\mathfrak{U}_2 \text{ ist ungültig und } \mathfrak{U}_1 \text{ ist ungültig})$$

als *einziges t-s*-Axiomensystem $\mathfrak{B}_u'$ nachweist.

Die *Vollständigkeit* von $\mathfrak{B}_g^*$ geht aus 4, 5.2 hervor. In $\mathfrak{S}_4'$ bzw. $\mathfrak{S}_3'$ ist $\mathfrak{G}_4$ bzw. $\mathfrak{G}_3$ ungültig, das (jeweilige) restliche $\mathfrak{G}$ aber gültig (4, 6.2.2 bzw. 4 6.2.1). Also ist die *Unentbehrlichkeit* der Bestandteile von $\mathfrak{B}_g^*$ gesichert.

Die *Vollständigkeit* von $\mathfrak{B}_u^*$ ergibt sich aus Satz 4, 5.3.0 (2), Satz 4, 5.3.1, Satz 4, 5.3.2(2) und Satz 4, 5.3.3. In $\mathfrak{S}_2'$ bzw. $\mathfrak{S}_1'$ ist $\mathfrak{U}_2$ bzw. $\mathfrak{U}_1$ gültig, aber das (jeweilige) restliche $\mathfrak{U}$ ungültig (4, 6.2.3 bzw. 4, 6.2.4). Also ist die *Unentbehrlichkeit* der Bestandteile von $\mathfrak{B}_u^*$ gesichert.

°4, 8.2. Wir konstatieren:

Es gibt genau 36 Axiomensysteme $\mathfrak{B}_g'$ für die Gültigkeit von $\mathfrak{G}$; jedes besteht aus 2 Axiomen.

Es gibt genau 12 Axiomensysteme $\mathfrak{B}_u'$ für die Ungültigkeit von $\mathfrak{U}$; jedes besteht aus 2 Axiomen.

In *keinem* der 48 Axiomensysteme $\mathfrak{B}_g'$ und $\mathfrak{B}_u'$ betreffen *beide* Axiome Modi der IV. Figur.

Kapitel V

SYSTEME MIT DER STRUKTUR DER KLASSISCHEN SYLLOGISTIK

5, 1. Von der konkreten Syllogistik hatten wir abstrahiert und im Kapitel IV *irgendein* System von Urteilen axiomatisch untersucht, das nur eben die Struktur der klassischen Syllogistik haben sollte. Solche Systeme — für die also $\mathfrak{B}$ erfüllt ist — nennen wir jetzt kurz *syllogistische Systeme*. Unsere Problemstellung samt der in Kap. IV gefundenen Lösung wird automatisch auf *jedes* syllogistische System übertragen und trifft *nicht nur* die „wirkliche“ Syllogistik.

In der Terminologie („Urteil,“ „Subjekt“, „Prädikat“ usw.) und bei der Auffindung der Gedankengänge ließen wir uns natürlich von der „wirklichen“ Syllogistik leiten — der Gedanke, es könne vielleicht inhaltlich ganz andersartige Systeme von gleicher Struktur geben, brauchte uns nicht zu stören. In diesem abschließenden Kapitel nun werden wir — wenigstens in Andeutungen — auf die Verschiedenartigkeit und auf die Verwandtschaft der *Realisierungsmöglichkeiten* syllogistischer Systeme zu sprechen kommen.

Daß es zu jeder beliebigen vorgegebenen Mächtigkeit $\mathfrak{m} \geqq 4$ syllogistische Systeme gibt, deren Menge $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ besitzt, wurde schon gezeigt (4, 6.3.2). Mit einem (durch eine bekannte mengentheoretische Einsicht nahegelegten) Ausdruck möchte man sagen: Es gibt *zahllose* syllogistische Systeme.

5, 2. Bleiben wir zunächst bei den „wirklichen“ Begriffen, Urteilen und Modis!

Zwei häufig anzutreffende (und meist einander gegenübergestellte) Lesarten seien flüchtig beschrieben (5, 2.1 und 5, 2.4):

5, 2.1. Bei der sogenannten *umfangs-* (oder klassen-) theoretischen Betrachtungsweise denkt man sich alle Gegenstände, die unter einen Begriff X fallen, in der nicht-leeren Menge $\mathfrak{K}(X)$ vereinigt.

$\mathfrak{K}(X)$ ist in $\mathfrak{K}(Y)$ genau dann *enthalten*, wenn $X a Y$ richtig ist.

$\mathfrak{K}(X)$ und $\mathfrak{K}(Y)$ sind *elementefremd* genau dann, wenn $X e Y$ richtig ist. [36]

Urteile werden demnach als Beziehungen zwischen *Mengen* aufgefaßt.

5, 2.2. Man braucht aber gar nicht die Begriffe zum Gegenstand der Untersuchung zu machen, sondern kann von einer Menge nicht-leerer Mengen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ ... *ausgehen* und festsetzen:

$\mathfrak{X} a \mathfrak{Y}$, falls $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ enthalten,

$\mathfrak{X} e \mathfrak{Y}$, falls $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ elementefremd.

5, 2.3. Bei dieser Gelegenheit kann ich eine Bemerkung zum Ergebnis 4, 7.1 unserer axiomatischen Untersuchungen nachholen:

Die Gültigkeit von $\mathfrak{G}_4$ und die von $\mathfrak{G}_3$ oder z. B. die von Celarent und die von Barbara erwiesen sich als unabhängige Axiome. Läßt man aber die negierten Begriffe $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ... (vgl. 1, 1.2) zu, so sind, wie man leicht sieht, die beiden Modi wegen

$$X a Y \sim X e \bar{Y}$$

äquivalent, und die Zahl der Axiome verringert sich. Daß wir $\bar{X}$, $\bar{Y}$ ... *nicht* verwenden, hat also merkliche Folgen!

Auf das mengentheoretische System (5, 2.2) übertragen bedeutet dies, daß sich die Anzahl der syllogistischen Axiome danach richtet, ob man die *Komplementärmengen*

$$\bar{\mathfrak{X}}, \bar{\mathfrak{Y}}, \ldots$$

einführt oder nicht.

---

[36] Wenn man XaY und XeY oder aber XaY und XiY interpretiert hat, ist es wegen *cc* nicht nötig, auch noch die beiden übrigen Urteile $X\delta Y$ explizit zu erläutern.

5, 2.4. Beim Gegenstück zu 5, 2.1, bei der *inhalts*theoretischen Betrachtungsweise nämlich, kommt es auf die *Merkmale* der Begriffe an:

XaY, falls jedes Merkmal von Y auch Merkmal von X ist.

XiY, falls es einen Begriff Z mit ZaX und ZaY gibt.

„Es gibt" kommt hier nur in der Wendung: „Es gibt einen *Begriff* . . ." vor. Von der Existenz von *Gegenständen*, die unter betrachtete Begriffe fallen, soll in inhaltslogischen Überlegungen nicht die Rede sein. In 5, 2.1 dagegen bedeutete XiY: Es gibt einen *Gegenstand*, der sowohl Element von $\mathfrak{K}(X)$ als auch Element von $\mathfrak{K}(Y)$ ist.

5, 3. Kolmogoroff, ein führender sowjetischer Mathematiker, hat das Formelsystem des Aussagenkalküls als eine Aufgabenrechnung gedeutet ([37]). Die Beziehungen zwischen „Aussagen" (im logistischen Sinn) kommen also *nicht nur* den (wirklichen) Aussagen zu (von deren Beziehungen man sie ja abstrahiert hatte!), sondern z. B. auch Systemen von geometrischen Konstruktionsaufgaben.

Hier ist es ähnlich.

5, 3.1. $\mathfrak{M}$ sei die Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind; x, y ... sollen auf $\mathfrak{M}$ variieren. Richtig sei

xay genau dann, wenn y durch x teilbar ist, und

xey genau dann, wenn x und y teilerfremd sind.

Ohne Mühe zeigt man, daß die Aussagen $x\delta y$ den Anforderungen $\mathfrak{A}$ genügen, also ein *System* von Urteilen bilden, und sodann, daß auch $\mathfrak{B}$ zutrifft, $\mathfrak{S}$ also ein *syllogistisches* System ist.

Ich deute hier nur eine Bestätigung von A_5 an:

$$\begin{array}{lll} 6o2; & 2a6, & 2i6. \\ 6o10; & 10i6, & 10o6. \\ 6o5; & 5e6, & 5o6. \end{array}$$

5, 3.2.1. Als $\mathfrak{M}$ kann man in 5, 3.1 statt jener Menge natürlicher Zahlen auch andere Mengen von (im allgemeinen *transfiniten*) Ordnungszahlen zugrundelegen, z. B. die zweite Zahlklasse.

5, 3.2.2. Leibniz wollte Begriffe und natürliche Zahlen umkehrbar eindeutig einander zuordnen, „hoc uno observato, ut terminus compositus ex aliis quibusdam terminis respondentem sibi habeat numerum productum ex numeris illorum terminorum invicem multiplicatis" ([38]) (so daß den Primzahlen gewisse Grundbegriffe entsprächen). „Itaque si velimus scire an omne aurum sit metallum ... tantum explorabimus ... an numerus characteristicus auri dividi possit per numerum characteristicum metalli" ([39]).

„En vertu de la loi de tautologie: aa = a, les facteurs premiers n'entrent qu' à la première puissance dans tous les produits" ([40]); in einem System von numeris characteristicis würde unser $\mathfrak{M}$ demnach eine Menge von *Produkten verschiedener Primzahlen* sein, während man $x\delta y$ — in Anlehnung an $X\delta Y$ aus 5, 2.4 — etwa so festlegen könnte:

xay genau dann, wenn x durch y teilbar ist,

xiy genau dann, wenn das kleinste gemeinsame Vielfache von x und y in $\mathfrak{M}$ liegt.

Numeri characteristici für Begriffe finden sich bei Leibniz noch auf andere Weise definiert; indem wir von den Logikkalkül-Absichten des Urhebers abstrahieren, gewinnen wir das syllogistische System 5, 3.2 (das übrigens — wie Łukasiewicz in seinem im Anhang zitierten Buch auf S. 126/129 zeigt — sogar die Struktur der von Łukasiewicz dargestellten *Verallgemeinerung* der klassischen Syllogistik besitzt).

5, 3.3. $\mathfrak{M}$ sei die Menge der (geordneten) Paare $x = \{x_1, x_2\}$ teilerfremder natürlicher Zahlen. ([41])

xay sei genau dann richtig, wenn sowohl x_1 durch y_1 teilbar ist als auch x_2 durch y_2 teilbar ist. ([42])

xiy sei genau dann richtig, wenn sowohl x_1 und y_2 teilerfremd sind als auch x_2 und y_1 teilerfremd sind. ([43])

Den (gar nicht schwierigen) Nachweis, daß die Aussagen $x\delta y$ ein syllogistisches System bilden, lasse ich auch hier fort.

5, 3.4. $\mathfrak{M}$ sei die Menge der komplexen Zahlen. Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Variablen — sagen wir: der komplexen Variablen x — werde als $\mathfrak{R}(x)$ bzw. $\mathfrak{I}(x)$ bezeichnet.

xay bedeute: $\mathfrak{R}(x) = \mathfrak{R}(y)$ und $\mathfrak{I}(x) \geqq \mathfrak{I}(y)$.

xey bedeute: $|\mathfrak{R}(x) - \mathfrak{R}(y)| > 1$.

xiy bedeute: $|\mathfrak{R}(x) - \mathfrak{R}(y)| \leqq 1$.

xoy bedeute: $\mathfrak{R}(x) \neq \mathfrak{R}(y)$ oder $\mathfrak{I}(x) < \mathfrak{I}(y)$.

Wir wollen uns diese Bedeutung von $x\delta y$ veranschaulichen — bei festgehaltenem $x\ (= x_0)$ in der y-Ebene:

([37]) A. N. Kolmogoroff (А. Н. Колмогоров), Zur Deutung der intuitionistischen Logik, Mathematische Zeitschrift Bd. 35 (1932), S. 58—65.

([38]) Leibniz a. a. O., S. 42.

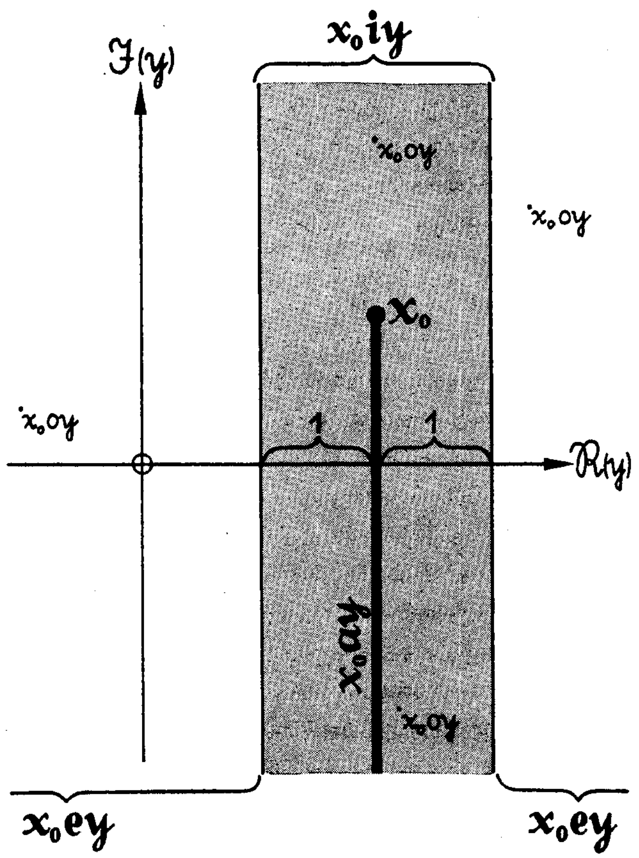
([39]) Leibniz a. a. O., S. 55.

([40]) L. Couturat, La logique de Leibniz d'après des documents inédits, Paris 1901, S. 327.

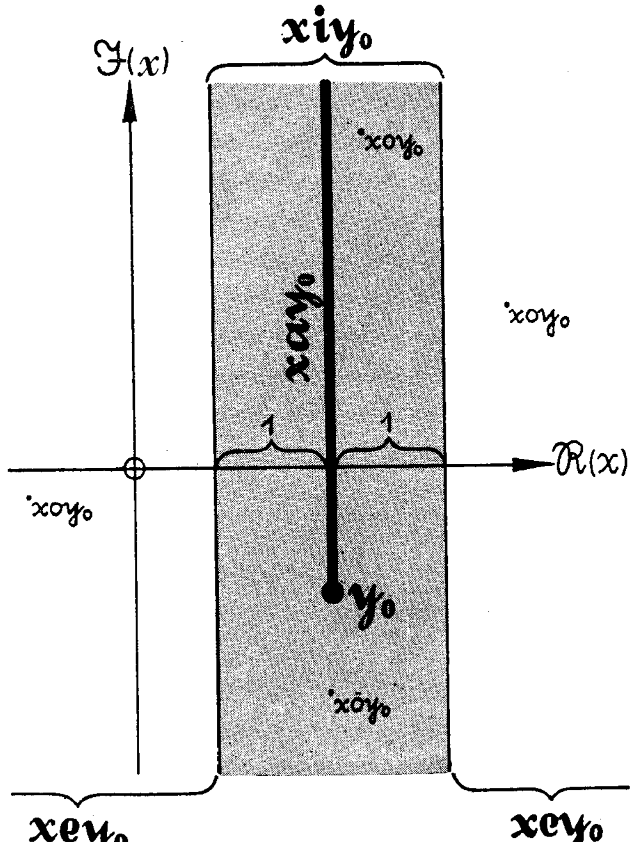
([41]) „Si qua offeratur propositio, tunc pro quolibet ejus Termino, subjecto scilicet vel praedicato, scribantur numeri duo ... Hoc unum tantum cavendum est ne duo numeri ejusdem Termini ullum habeant communem divisorem" (Leibniz a. a. O., S. 78).

([42]) „Propositio universalis affirmativa vera est ... in qua quilibet numerus characteristicus subjecti ... per praedicati numerum characteristicum ejusdem notae ... exacte .. dividi potest" (Leibniz a. a. O., S. 78).

([43]) Leibniz führt erst xey ein.



und bei festgehaltenem y ($= y_0$) in der x-Ebene:



Dies System von Urteilen — es *ist* eins! — besitzt *nicht* die Struktur der klassischen Syllogistik, denn zwar sind offensichtlich Barbara und Celarent gültig sowie I(eee) ungültig, aber I(aea) ist gültig statt ungültig:

$$\text{Niemals ist } \frac{\begin{matrix} y\,a\,z \\ x\,e\,y \end{matrix}}{x\,a\,z},$$

$$\text{sondern immer hat man } \frac{\begin{matrix} y\,a\,z \\ x\,e\,y \end{matrix}}{x\,e\,z}.$$

Denken wir uns jetzt die Funktionen $x \delta y$ aus der Ebene durch stereographische Projektion auf die punktierte Zahlenkugel verpflanzt, so liegt es nahe, den Nordpol in $\mathfrak{M}$ einzubeziehen. Zusätzlich verlangen wir

$$x\ a\ \infty, \qquad \infty\ oi\ x, \qquad \infty\ a\ \infty$$

— und jetzt ist das System ein *syllogistisches* System: Die Gültigkeit von Barbara und Celarent bleibt erhalten, die Ungültigkeit von I(eee) trivialerweise auch, und wegen

$$\frac{\begin{matrix} 2\ a\ \infty \\ 0\ e\ 2 \end{matrix}}{0\ a\ \infty}$$

ist nun auch I(aea) ungültig, so daß ein Axiomensystem für $\mathfrak{B}$, eins von den 432, erfüllt ist.

5, 4.1. Kehren wir zum System 5, 3.1 zurück!

y ist durch x teilbar

ist der Aussage

Alle Teiler (44) *von x sind Teiler von y*

äquivalent, und

x und y sind teilerfremd

besagt dasselbe wie

Kein Teiler von x ist Teiler von y.

Jeder Zahl x aus $\mathfrak{M}$ ist hier ein *Begriff* $B(x)$ (nämlich „Teiler von x") zugeordnet, und zwar so, daß

$B(x)\,\delta\,B(y)$ im Sinne von 5, 2.1	mit	$x\,\delta\,y$ im Sinne von 5, 3.1	äquivalent wird.

Jeder Zahl x aus $\mathfrak{M}$ — so kann man es auch auffassen — läßt sich eine nicht-leere *Menge* $\mathfrak{M}(x)$ (nämlich die Menge der Teiler von x) auf solche Weise zuordnen, daß

$\mathfrak{M}(x)\,\delta\,\mathfrak{M}(y)$ im Sinne von 5, 2.2	mit	$x\,\delta\,y$ im Sinne von 5, 3.1	äquivalent wird.

Urteile bzw. Modi unseres Systems 5, 3.1 sind also verkappte Urteile bzw. Modi der „wirklichen" Syllogistik.

Ist das Analoge bei den Systemen 5, 3.3 und 5, 3.4 der Fall? Läßt sich auch dort jeweils eine

(44) Als Teiler lassen wir nur natürliche Zahlen zu, die größer als 1 sind.

Funktion $B(x)$, oder $\mathfrak{M}(x)$, mit der verlangten Eigenschaft auftreiben? Es scheint schwierig oder unmöglich zu sein.

5, 4. 2. Läßt sich *jedes* System, das die *Struktur* der klassischen Syllogistik besitzt, „der *Bedeutung* nach" auf die klassische Syllogistik zurückführen?

In schärferer Formulierung lautet diese **Frage 1:**

Gibt es bei jedem syllogistischen System $\mathfrak{S}$ (das etwa auf $\mathfrak{M}$ definiert sei und die Urteile $X\delta Y$ enthalte) zu jedem X aus $\mathfrak{M}$ eine nicht-leere **Menge $\mathfrak{M}(X)$** derart, daß für jedes X aus $\mathfrak{M}$, für jedes Y aus $\mathfrak{M}$ und für jeden Wert von δ

$$\boxed{X\delta Y \sim \mathfrak{M}(X)\,\delta^*\,\mathfrak{M}(Y)} \qquad (*)$$

gilt? Dabei soll, wenn $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ nicht-leere Mengen sind, $\mathfrak{X}\delta^*\mathfrak{Y}$ dasselbe bedeuten wie $\mathfrak{X}\delta\mathfrak{Y}$ in 5, 2.2.

5, 5. 1. Und wieder betrachten wir das spezielle System 5, 3.1. Dort findet man, daß $\mathfrak{M}(x)$ aus *denjenigen Zahlen* ξ *aus* $\mathfrak{M}$ besteht, *für die* $\xi a x$ *gilt* — das sind nämlich die Teiler von x.

Um *allgemein* für *diese* Wahl von $\mathfrak{M}(X)$ die Relation (*) zu beweisen, wäre es hinreichend und notwendig, viererlei zu zeigen:

1. Voraussetzung: XaY.
   Behauptung: $\mathfrak{M}(X)a^*\mathfrak{M}(Y)$, d. h.: Aus ξaX folgt ξaY.
2. die Umkehrung von 1.
3. Voraussetzung: XiY.
   Behauptung: $\mathfrak{M}(X)i^*\mathfrak{M}(Y)$, d. h.: In $\mathfrak{M}(X)$ gibt es ein Element, das auch in $\mathfrak{M}(Y)$ vorkommt.
4. die Umkehrung von 3.

Nun folgt zwar 1. aus Barbara ($\mathfrak{S}$ sollte ja ein *syllogistisches* System sein!), 2. aus A_1 für $\xi = X$, 4. aus Darapti — aber 3. ist leider schon in dem speziellen System 5, 3.4 nicht erfüllt: man nehme z. B. $X = 0$, $Y = 1$.

Diese Wahl von $\mathfrak{M}(X)$ führt also nur manchmal zum Ziel.

5, 5.2.1. $\mathfrak{S}$ sei ein beliebiges syllogistisches System, erklärt auf der Menge $\mathfrak{M}$. Zu je irgend zwei Elementen X und Y aus $\mathfrak{M}$ definieren wir zwei Mengen:

$[X, Y)$ vereinige die ξ aus $\mathfrak{M}$, für die ξaX zutrifft, und, falls XiY richtig ist, das Element Y.

$(X, Y]$ enthalte genau die ξ aus $\mathfrak{M}$, für die ξaY zutrifft.

$$\boxed{\textbf{Satz.}\ X\delta Y \sim [X, Y)\,\delta^*\,(X, Y].}$$

Beweis. 1. Voraussetzung: XaY.
Behauptung: $[X, Y)\,a^*\,(X, Y]$.

Beweis:

Aus ξaX folgt ξaY: $\dfrac{\begin{matrix}XaY\\ \xi aX\end{matrix}}{\xi aY}$ (Barbara).

Ferner könnte Y zu $[X, Y)$ gehören; Y liegt aber wegen YaY gewiß in $(X, Y]$.

2. Vor. $[X, Y)\,a^*\,(X, Y]$.
   Beh. XaY.
   Bew. Nach Voraussetzung folgt ξaY aus ξaX, also insbesondere XaY aus dem identischen Urteil.
3. Vor. XiY.
   Beh. $[X, Y)\,i^*\,(X, Y]$.
   Bew. Y gehört wegen YaY zu $(X, Y]$ und wegen XiY zu $[X, Y)$.
4. Vor. $[X, Y)\,i^*\,(X, Y]$.
   Beh. XiY.
   Bew. X_0 sei den beiden Mengen gemeinsam. Für $X_0 = Y$ ist, nach Definition von $[X, Y)$, XiY oder YaX richtig, also in jedem Fall XiY erfüllt. Für $X_0 = \xi \neq Y$ erhält man $\dfrac{\begin{matrix}\xi aY\\ \xi aX\end{matrix}}{XiY}$ nach Darapti.

5, 5.2.2. Was ist damit gewonnen? *Alle Urteile* $X\delta Y$ *eines beliebigen syllogistischen Systems sind transponiert in Urteile im Sinne von* 5, 2.2, *in „richtiggehende" Urteile also.*

Aber Modi gehen bei dieser Übersetzung nicht in Modi über, sondern in Aussagen, in denen nicht 3, sondern 6 Mengen verknüpft sind. So wird man diese Übersetzung *nicht* als Rückführung syllogistischer Systeme auf *die* Syllogistik anerkennen.

5, 5.3. Nach diesen beiden Fehlschlägen wollen wir zum Schluß die Frage 1 *spezialisieren.*

Welcher Art waren denn die Mengen $\mathfrak{M}(X)$ im Beispiel 5, 3.1? Es waren Mengen von Teilern, also Mengen von natürlichen Zahlen $\geqq 2$, also Teilmengen der Ausgangsmenge $\mathfrak{M}$. Wir stellen die **Frage 2:**

Gibt es bei jedem syllogistischen System $\mathfrak{S}$ zu jedem X aus $\mathfrak{M}$ eine nicht-leere **Teilmenge $\mathfrak{M}(X)$ von $\mathfrak{M}$** derart, daß für jedes X und Y aus $\mathfrak{M}$ und für jeden Wert von δ

$$X\delta Y \sim \mathfrak{M}(X)\,\delta^*\,\mathfrak{M}(Y)$$

gilt?

Nein! antworten wir und konstruieren Gegenbeispiele: n sei eine natürliche Zahl $\geqq 2$. $\mathfrak{M}_{n+3}$ bestehe aus den $n+3$ Elementen X_ν $(1 \leqq \nu \leqq n)$ und Y_μ $(\mu = 1, 2, 3)$. Wir setzen

$$X_\nu a X_\nu \qquad (1)$$

$$X_\nu e X_\lambda \quad \text{für} \quad \nu \neq \lambda \qquad (2)$$

$X_\nu \, oi \, Y_1$	(3)	$Y_1 \, oi \, X_\nu$	(6)
$X_1 \, oi \, Y_{2,3}$	(4)	$Y_{2,3} \, a \, X_1$	(7)
$X_\nu \, e \, Y_{2,3}$ für $\nu \neq 1$	(5)	$Y_{2,3} \, e \, X_\nu$ für $\nu \neq 1$	(8)

sowie

	Y_1	Y_2	Y_3
Y_1	a	oi	oi
Y_2	oi	a	e
Y_3	oi	e	a

(9)

und erhalten ein *System* $\mathfrak{S}_{n+3}$.

Die Bestätigung von Barbara und Celarent ist deshalb recht einfach, weil außerhalb der Hauptdiagonalen nur in (7) das Argument a auftritt.

Ferner ist wegen

$$\begin{array}{ll} Y_2 \, a \, X_1 & (7) \\ \underline{Y_3 \, e \, Y_2} & (9) \\ Y_3 \, a \, X_1 & (7) \end{array}$$

der Modus I(aea) ungültig, und auch I(eee) ist es:

$$\begin{array}{ll} Y_2 \, e \, Y_3 & (9) \\ \underline{X_2 \, e \, Y_2} & (5) \\ X_2 \, e \, Y_3 & (5). \end{array}$$

$\mathfrak{S}_{n+3}$ ist also ein *syllogistisches* System.

Wir nehmen an, jedem X aus $\mathfrak{M}_{n+3}$ sei eine nicht-leere Teilmenge $\mathfrak{M}(X)$ von $\mathfrak{M}_{n+3}$ zugeordnet, und die in der Frage 2 erhobene Forderung sei für die Mengen $\mathfrak{M}(X)$ erfüllt. Wegen $Y_2 \, oi \, Y_1$ hat $\mathfrak{M}(Y_2)$ mindestens 2 Elemente. Wegen $Y_2 \, e \, Y_3$ liegen beide nicht in $\mathfrak{M}(Y_3)$, das wegen $Y_3 \, oi \, Y_1$ ebenfalls mindestens 2 Elemente besitzt. Diese 4 Elemente liegen wegen (7) in $\mathfrak{M}(X_1)$, während für $\nu \geqq 2$ jedes $\mathfrak{M}(X_\nu)$ wegen (3) 2 verschiedene Elemente enthält. Die n Mengen $\mathfrak{M}(X_\nu)$ sind wegen (2) elementefremd, sollten aber alle in $\mathfrak{M}_{n+3}$ liegen. Also enthält $\mathfrak{M}_{n+3}$ mindestens $4 + (n - 1) \cdot 2 = 2n + 2$ Elemente — das ist aber ein Widerspruch, denn für $n \geqq 2$ ist $2n + 2 > n + 3$.

Da haben wir also die unendlich vielen Gegenbeispiele

$$\mathfrak{S}_5, \; \mathfrak{S}_6, \; \mathfrak{S}_7, \; \ldots\ldots, \; \mathfrak{S}_{10000000}, \; \ldots$$

5, 5.4. Im V. Kapitel brachte ich Ansätze, die *Reichweite* der syllogistischen Struktur aufzuklären, deren *Kern* ja in 4, 6.2.5 bzw. 4, 7.1 aufgefunden war.

Die (unbeantwortet gebliebene) Frage 1 auch nur zu stellen, erschien mir wichtiger, als noch andere, andersartige syllogistische Systeme mitzuteilen; für 5, 3 suchte ich besonders einfach beschreibbare Modelle aus.

Unser eigentliches Thema — das Studium der Ableitungszusammenhänge nur der klassischen Syllogistik selbst — verließen wir in Kapitel V. Aber es ist ja natürlich, wenn eine Abhandlung nicht mit einer Antwort schließt, sondern mit einer neuen Frage.

ANHANG

Die vorliegende Abhandlung entstand unabhängig von den Untersuchungen, die J. Łukasiewicz und J. Słupecki über die aristotelische Syllogistik veröffentlicht haben (45). Erst nach Abschluß meiner Arbeit wurde mir das Buch von Łukasiewicz (46) zugänglich. Die Quintessenz dieses Werkes findet man in den beiden Besprechungen von H. Scholz (47, 48). Um mich bei den folgenden Bemerkungen, die *lediglich an einigen Einzelpunkten* das Buch *zur vorliegenden Arbeit in Beziehung bringen* sollen, kurz fassen zu können, setze ich das Zentralblatt-Referat (48) als bekannt voraus und benutze weiterhin unsere bisherige Terminologie und Symbolik.

1. Aus den — als widerspruchsfrei und unabhängig nachgewiesenen (49) — Axiomen:

$$\left.\begin{array}{l} XaX \\ XiX \\ \textit{Barbara} \; [= \mathrm{I}\,(aao)] \\ \textit{Datisi} \;\;\; [= \mathrm{III}\,(iae)] \end{array}\right\} \textit{sind gültig} \qquad (1)$$

deduziert Łukasiewicz (in einem Teil des systematischen Teils) zunächst (S. 91) die gültigen unmittelbaren Schlüsse (50) und alsdann die restlichen gültigen Modi. Damit ist „zum erstenmal die Aristotelische Syllogistik“ (genau genommen: $\mathfrak{G}$) „mit ihren nicht-syllogistischen Stützpunkten mit dem Rüstzeug der mathematischen Logik lückenlos axiomatisiert“ (47).

Zu (1) fügt er die „axioms of rejection“:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{II}(aae) \\ \mathrm{II}(eee) \end{array}\right\} \textit{sind ungültig} \qquad (2)$$

hinzu und beweist (S. 97) (als Beispiel) die Ungültigkeit der 4 Modi I $(ae\delta)$ (die restlichen 226 ungültigen Modi dem Leser überlassend).

Dies zur Bereicherung unseres I. Kapitels.

Übrigens liegen — was im Hinblick auf 4, 7.1 erwähnt werden mag — die vier in (1) und (2) genannten Modi in $\mathfrak{G}_3$ bzw. $\mathfrak{G}_4$ bzw. $\mathfrak{G}_2$ bzw. $\mathfrak{G}_1$.

(45) — nämlich (46) und die in (46) zitierten und verwerteten Publikationen in polnischer Sprache.

(46) J. Łukasiewicz, Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic, Oxford 1951.

(47) H. Scholz, Besprechung von (46) in: Deutsche Literaturzeitung, Jhrg. 73 (1952), Spalte 230—235.

(48) H. Scholz, Besprechung von (46) in: Zentralblatt für Mathematik, Bd. 43 (1952), S. 246—247.

(49) S. 89f.; interessant ist der Vergleich zwischen den dortigen (eleganten) Unabhängigkeitsbeweisen für das Axiomensystem (1) [das **nur** $\mathfrak{G}$ betrifft] und den *hier* gegebenen Unabhängigkeitsbeweisen (4, 6.1.1—2) [die sich auf $\mathfrak{G}$ **und** $\mathfrak{U}$ beziehen].

(50) Die Schlüsse *cc* treten nicht als Beziehungen zwischen den vier von Anfang an vorgegebenen Funktionen $X\delta Y$ auf, sondern dienen — bei vorgegebenem XaY und XiY — zur *Definition* von XeY und XoY.

2. „The syllogistic of Aristotle is a theory neither of classes nor of predicates; it exists apart from other deductive systems, having its own axiomatic and its own problems" (S. 130). Die Urteile, unmittelbaren Schlüsse und syllogistischen Modi sind „propositional functions, i. e. expressions containing free variables and becoming true for some of their values, and false for others" (S. 94f.; vgl. hier Einl. (2)). „I do not introduce ... singular, empty, or negative terms, as Aristotle has not introduced them" (S. 130; vgl. hier 2, 4).

Daß sich diese Auffassung der Syllogistik mit unserer deckt, ist deshalb erwähnenswert, weil ich sie *eher ihrer Plausibität als historischer Rücksichten wegen* zugrundelegte — während sich ŁUKASIEWICZ doch vom Bestreben nach engster Anlehnung an ARISTOTELES leiten ließ.

Allerdings war bei uns „ungültig" als „manchmal richtig" (also mittels Quantifikation) definiert; anders bei ŁUKASIEWICZ: „Aristotle knows nothing of quantifiers; instead of adding to his system new theses with quantifiers he uses rejection. As rejection seems to be a simpler idea than quantification, let us follow in Aristotle's steps" (S. 95).

3. Bei der in ch. V dargestellten *Verallgemeinerung* der Syllogistik auf Modi mit *mehr* Prämissen (und *mehr* verknüpften Begriffen) tritt an die Stelle der Verwerfung von II (eee) ein allgemeineres „Ex mere negativis nil sequitur", nämlich die Regel von SŁUPECKI (siehe ([48])), während die übrigen Bestandteile von (1) und (2) als Axiome beibehalten werden. ŁUKASIEWICZ sieht in der dadurch verursachten Sonderstellung der — wie er behauptet, im Axiomensystem *unentbehrlichen* — Verwerfung von II (aae) das einzige noch übrige Problem innerhalb der aristotelischen Syllogistik, gewissermaßen den einzigen „mysterious point waiting for an explanation" (S. 76).

a) Es ist *nicht* notwendig, II (aae) „axiomatically" zu verwerfen; statt dieses Modus kommen mindestens noch die beiden anderen aus $\mathfrak{U}_2$, nämlich I (aea) und III (aea), in Frage ([51]).

b) Wenn wir für $\mathfrak{B}$ die Aufteilung der 256 Modi, der 32 unmittelbaren Schlüsse ((*) in 2, 2) und der 4 [oder, wenn wir wollen, 8] „Schlüsse mit null Prämissen" $X\delta Y$ [und $X\delta X$] in gültige und ungültige wählen, während $\mathfrak{A}$ nur aus cc besteht, also fast leer ist — welches sind dann, im Sinne von 2, 1, *sämtliche* Axiomensysteme $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$? ([52])

Die Frage nach *sämtlichen* Axiomensystemen kann auf die *verallgemeinerte* Syllogistik übertragen werden. Dabei kann man — in zu präzisierendem Sinne — Axiomensysteme $\mathfrak{B}'$ mit unendlich vielen Bestandteilen zulassen (und 2, 1 beibehalten) oder aber zusätzlich Endlichkeit von den $\mathfrak{B}'$ fordern. Das „auxiliary system" kann z. B. keine speziell-syllogistische Schlußregel, oder die Regel von SŁUPECKI, oder eine andere (?) speziell-syllogistische Schlußregel enthalten.

Wir sehen — in der Syllogistik gibt es, noch immer, *viele* „mysterious points waiting for an explanation". Zu den noch ausstehenden „explanations" hoffe ich an anderer Stelle beitragen zu können.

([51]) Hier sei an die „Lage" von $\mathfrak{U}_2$ erinnert:

Alle gültigen Modi haben *genau zwei positive Argumente.* Alle Modi mit genau zwei positiven Argumenten, bei denen überdies *kein Argument partikulär* ist, verteilen sich auf vier t-Familien (siehe 4, 3.8 unter 1.). Von diesen vier t-Familien ist $\mathfrak{U}_2$ *die einzige ungültige.*

([52]) Hier hat auch G. STAMMLER vorgearbeitet; vgl. Einl. (3).

LEBENSLAUF

Ich, Klaus Härtig, bin der Sohn des Diplom-Bergingenieurs Dr. Helmut Härtig und seiner Ehefrau Gertrud geb. Petsch. Am 15. 4. 1929 wurde ich in Welzow (Niederlausitz) geboren. Die Grundschule besuchte ich von 1935 bis 1939 in Paritz (Schlesien), Görlitz und Naumburg (Saale), danach von 1939 bis zur Reifeprüfung (1946) die Naumburger Oberschule für Jungen.

Während der 9 Semester vom Herbst 1946 bis zum Frühjahr 1951 studierte ich an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, und zwar vornehmlich Mathematik und Philosophie. Im Oktober 1947 begann ich am hallischen Institut für angewandte Mathematik als wissenschaftliche Hilfskraft zu arbeiten. Seit Mai 1950 Diplom-Mathematiker, wurde ich im gleichen Jahre wissenschaftlicher Assistent und bin es noch.

Allen meinen akademischen Lehrern bin ich zu aufrichtigem Dank verpflichtet. Mein Institutsdirektor Professor Dr. Harry Schmidt (gest. 1951), der mich unermüdlich anregte und förderte, war und ist mir als Forscher, Lehrer und Mensch ein Vorbild. Von meinen philosophischen Lehrern schulde ich vor allem Herrn Professor Dr. Paul Menzer Dank.

Halle (Saale), 28. 8. 1952.

Herausgeber: Der Rektor der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Prof. Dr. Rudolf Agricola
Lizenz-Nr. 4204 des Amtes für Literatur und Verlagswesen der Deutschen Demokratischen Republik
H (1) Druckerei der Werktätigen, Halle (Saale)