SCIENTIÆ studia, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 633-76, 2010

George Berkeley

O analista:
ou um discurso dirigido a um matemático infiel[1]

Onde se examina se o objeto, os princípios e as inferências da análise moderna são mais distintamente concebidos ou mais obviamente deduzidos do que os mistérios religiosos e as questões de fé

Pelo autor de O diminuto filósofo[2]

"Primeiro retirai a trave de vosso próprio olho e, então, enxergareis de modo mais claro para que possais retirar o cisco do olho de vosso irmão"(Mateus, 7, 5).

MDCCXXXIV

Os conteúdos[3]

§1 Presume-se que os matemáticos são os grandes senhores da razão. Daí a deferência indevida feita às suas decisões naqueles assuntos sobre os quais eles não têm qualquer direito de decidir. Essa é uma causa da infidelidade.

§2 Os princípios e métodos dos matemáticos devem ser examinados com a mesma liberdade com que eles examinam os princípios e mistérios da religião. Em qual sentido e até onde se deve admitir a geometria como sendo um aperfeiçoamento da mente.

§3 As fluxões tornaram-se o grande objeto e ofício dos argutos geômetras da atualidade. O que são essas fluxões.

§4 Os momentos ou incrementos nascentes de quantidades fluentes são difíceis de conceber. As fluxões de diferentes ordens. As segundas e terceiras fluxões são obscuros mistérios.

§5 As diferenças, isto é, os incrementos ou decréscimos infinitamente pequenos, são usadas pelos matemáticos estrangeiros no lugar de fluxões ou velocidades de incrementos nascentes ou evanescentes.

§6 As diferenças de várias ordens, isto é, as quantidades infinitamente menores do que as quantidades infinitamente pequenas; e as partes infinitesimais de infinitesimais de infinitesimais etc., sem fim nem limite.

§7 Os mistérios da fé enfrentam injustamente a objeção daqueles que os admitem na ciência.

§8 Os analistas modernos supõem [serem capazes de], por si próprios, estender suas visões para além do infinito, enganados pelas suas próprias espécies e símbolos.

§9 O método para encontrar a fluxão de um retângulo de duas quantidades indeterminadas mostra-se ilegítimo e falso.

§10 A deferência implícita dos matemáticos ao eminente autor das fluxões. O anseio deles de avançar cada vez mais rápido e ir mais além, ao invés de estabelecer cautelosamente e de enxergar nitidamente o seu caminho.

§11 Os momentos são de difícil compreensão. Nenhuma quantidade intermediária é admitida entre uma quantidade finita e o nada sem que se admita infinitesimais.

§12 As fluxões de qualquer potência de uma quantidade fluente. O lema pressuposto a fim de examinar o método para encontrar essas fluxões.

§13 A regra das fluxões de [quantidades com] potências não é obtida por meio de um raciocínio razoável.

§14 O raciocínio anterior detalhado e mostrado como sendo lógico.

§15 Nenhuma conclusão verdadeira pode ser legitimamente inferida como consequência imediata de suposições inconsistentes. Devem-se observar as mesmas regras da reta razão quando os homens raciocinam seja com símbolos seja com palavras.

§16 Quando uma hipótese é destruída, nenhuma consequência de tal hipótese deve ser mantida.

§17 A dificuldade de distinguir entre incrementos evanescentes e diferenças infinitesimais. Os vários enfoques sobre as fluxões. O grande autor, ao que tudo indica, não se satisfez com suas próprias noções.

§18 Leibniz e seus seguidores supõem e, em seguida, rejeitam as quantidades infinitamente pequenas. Nenhuma quantidade, segundo eles, é maior ou menor em virtude da adição ou da subtração de seu infinitesimal.

§19 As conclusões devem ser provadas pelos princípios e não os princípios pelas conclusões.

§20 O geômetra analítico considerado como um lógico e suas descobertas consideradas, não em si mesmas, mas apenas enquanto derivadas de determinados princípios e por meio de determinadas inferências.

§21 Traça-se a tangente de uma parábola de acordo com o *calculus differentialis*. Mostra-se que a verdade é resultado do erro e como isso ocorre.

§22 Em virtude de um erro duplo, os analistas chegam à verdade, mas não à ciência, ignorando o modo como chegam a suas próprias conclusões.

§23 A conclusão não é nem evidente nem precisa, quando resulta de premissas obscuras ou imprecisas. As quantidades finitas poderiam ser rejeitadas, assim como as infinitesimais.

§24 Ilustra-se ainda mais a doutrina anterior.

§25 Observações variadas a esse respeito.

§26 A partir da área, encontra-se a ordenada por meio de incrementos evanescentes.

§27 No caso anterior, o suposto incremento evanescente é realmente uma quantidade finita, destruída por uma quantidade igual com um sinal contrário.

§28 O caso anterior é generalizado. As expressões algébricas são comparadas a quantidades geométricas.

§29 Quantidades algébricas e geométricas correspondentes são igualadas. Mostra-se que a análise não pode ser realizada sobre infinitesimais, a menos que seja também realizada sobre quantidades finitas.

§30 A eliminação de quantidades por meio dos princípios aceitos, sejam os das fluxões sejam os das diferenças, não é nem uma boa geometria nem uma boa lógica. A razão pela qual as fluxões ou as velocidades são introduzidas.

§31 As velocidades não devem ser abstraídas do tempo e do espaço, nem se deve investigar ou considerar suas proporções com a exclusão do tempo e do espaço.

§32 Pontos difíceis e obscuros constituem os princípios da análise moderna e são os fundamentos sobre os quais ela está construída.

§33 Se as faculdades racionais são aperfeiçoadas por meio dessa analítica obscura.

§34 Por meio de quais passos inconcebíveis se conclui que linhas finitas são proporcionais a fluxões. Matemáticos infiéis coam um mosquito e engolem um camelo.

§35 Mantidos os princípios aceitos, não se pode evitar as fluxões ou os infinitesimais. As abstrações sutis e a metafísica geométrica.

§36 Se as velocidades de quantidades nascentes ou evanescentes são realmente compreendidas e representadas por meio de linhas e espécies finitas.

§37 Signos ou exponentes são óbvios, mas fluxões em si mesmas não o são.

§38 As fluxões são as velocidades com que as diferenças infinitesimais são geradas?

§39 As fluxões de fluxões ou segundas fluxões devem ser concebidas como velocidades de velocidade ou, melhor, como velocidades de segundos incrementos nascentes?

§40 As fluxões são consideradas às vezes em um sentido e às vezes em outro, em alguns momentos em si mesmas e em outros em seus exponentes; o resultado disso é a confusão e a obscuridade.

§41 Os incrementos isócronos, quer finitos quer nascentes, são proporcionais a suas respectivas velocidades.

§42 Supõe-se que o tempo divide-se em momentos, que os incrementos são gerados nesses momentos e que as velocidades são proporcionais a esses incrementos.

§43 As fluxões segunda, terceira, quarta etc.; o que são elas, como obtê-las e como representá-las. Essa é a ideia de velocidade em um momento de tempo e em um ponto do espaço.

§44 Todas as ordens de fluxões são inconcebíveis.

§45 Signos ou exponentes confundem-se com as fluxões.

§46 Inventa-se facilmente séries de expressões ou de sinais. Ora, concebe-se tão facilmente uma série de velocidades puras ou de incrementos nascentes puros, correspondentes àquelas expressões ou sinais?

§47 As celeridades são dispensadas e, no lugar delas, ordenadas e áreas são introduzidas. As analogias e expressões, úteis nas quadraturas modernas, podem, todavia, ser inúteis para capacitar-nos a conceber as fluxões. Não é correto aplicar as regras sem o conhecimento dos princípios.

§48 A metafísica dos analistas modernos é bastante incompreensível.

§49 Os analistas lidam com entidades nocionais sombrias. Sua lógica é tão objetável quanto sua metafísica.

§50 As circunstâncias deste escrito. Conclusão. Questões.

O analista

§1 Embora eu seja um estranho aos senhores, não desconheço, contudo, a reputação que tendes alcançado no ramo do conhecimento que estudeis de modo peculiar. Nem desconheço a autoridade que, por consequência, assumis em assuntos estranhos à vossa profissão, muito menos desconheço o abuso que se reconhece que vós, juntamente com muitos outros de igual estatura, fazeis de tal autoridade indevida para enganar pessoas incautas em questões do mais alto interesse e sobre as quais vosso conhecimento matemático não pode de modo algum vos qualificar como um juiz competente. A equidade, de fato, e o bom senso produzem em nós a inclinação a desprezar o juízo dos homens em questões que eles não consideraram ou examinaram. Mas a maioria daqueles que fazem a mais estridente reivindicação dessas qualidades, apesar de tudo, realizam as mesmas coisas que pareciam desprezar, revestindo-se, à maneira de um uniforme, das opiniões de outros homens e colocando-se em um estado de deferência incondicional ao vosso juízo, cavalheiros, que presumidamente deveis ser, entre todos os homens, os supremos senhores da razão, visto que sois bastante versados em diferentes ideias e jamais admitis qualquer coisa com base na confiança, mas sempre enxergais claramente vosso caminho, como ocorre com os homens cujo constante ofício é deduzir a verdade por meio da mais exata inferência e a partir dos mais evidentes princípios. Com esses preconceitos em mente, eles se submetem a vossas decisões em questões em que não tendes o direito de decidir. E esse é o caminho mais curto para se produzir infiéis, segundo o que me foi informado de modo fidedigno.

§2 Enquanto, então, se supõe que podeis compreender mais distintamente, considerar mais rigorosamente, inferir mais corretamente e concluir mais precisamente do que outros homens, e que, portanto, sois menos religiosos porque sois mais judiciosos, reivindicarei o privilégio de um livre pensador e tomarei a liberdade de indagar sobre o objeto, os princípios e os métodos de demonstração admitidos pelos matemáticos da atualidade, com a mesma liberdade que presumis tratar os princípios e os mistérios da religião, para que, no final, todos os homens possam perceber qual direito possuís de conduzi-los ou quais motivações outros teriam para seguir-vos. Trata-se de uma antiga observação que a geometria é uma excelente lógica. E é preciso reconhecer que, quando as definições são claras, quando os postulados não podem ser recusados nem os axiomas, negados, quando, após contemplar e comparar distintamente as figuras, as propriedades delas são derivadas por meio de uma cadeia contínua e bem conectada de consequências, sem jamais perder de vista os objetos e sempre mantendo a atenção fixada sobre eles, adquire-se com isso um hábito de raciocínio minucioso, exato e metódico, hábito esse que fortalece e ilumina a mente e torna-se de uso geral na investigação da verdade ao ser transferido para outros assuntos. Mas, por ora, valeria a pena considerar até que ponto nossos geômetras analíticos se afastam disso.

§3 O método das fluxões é a chave geral com o auxílio da qual os modernos matemáticos abrem os segredos da geometria e, consequentemente, da natureza. E, visto que ele os capacitou a superar tão notavelmente os antigos na descoberta de teoremas e na solução de problemas, o seu exercício e a sua aplicação tornaram-se o principal ofício, senão o único, a que se dedicam todos aqueles que atualmente se passam por profundos geômetras. Mas, do mesmo modo como indagarei com extrema imparcialidade se esse método é claro ou obscuro, consistente ou inconsistente (*repugnant*), demonstrativo ou precário, submeto minha investigação ao vosso juízo e ao de qualquer outro leitor sincero. Supõe-se que as linhas são geradas <ver *Introductio ad quadratura curvarum*>[4] pelo movimento de pontos, que os planos, pelo movimento de linhas, e que os sólidos, pelo movimento de planos. E, em virtude de que quantidades geradas em tempos iguais resultam maiores ou menores de acordo com a maior ou menor velocidade com a qual aumentam e são geradas, encontrou-se um método para determinar as quantidades a partir das velocidades dos movimentos que as geraram. Tais velocidades são chamadas fluxões e as quantidades geradas são chamadas quantidades fluentes. Afirma-se que essas fluxões são quase como incrementos das quantidades fluentes, geradas nas menores partículas iguais de tempo e que estão, precisamente, na proporção primeira dos incrementos nascentes ou na proporção última dos incrementos evanescentes. Às vezes, em lugar das velocidades, consideram-se, sob o nome de momentos, os incrementos ou decréscimos momentâneos de quantidades fluentes indeterminadas.

§4 Não devemos entender os momentos como sendo partículas finitas. Essas partículas, dizem, não são momentos, mas quantidades geradas a partir de momentos, que definitivamente são apenas os princípios nascentes de quantidades finitas. Diz-se que o menor dos erros, na matemática, não deve ser negligenciado e que as fluxões são velocidades não proporcionais aos incrementos finitos, ainda que esses sejam muito pequenos, mas apenas aos momentos ou incrementos nascentes, dos quais se considera apenas a proporção, não a magnitude. E das fluxões acima existem outras fluxões; essas fluxões de fluxões são chamadas segundas fluxões. E as fluxões dessas segundas fluxões são chamadas terceiras fluxões e assim por diante, quartas, quintas, sextas etc., *ad infinitum*. Ora, assim como nossos sentidos ficam fatigados e perplexos (*strained and puzzled*) com a percepção de objetos extremamente diminutos, a imaginação – faculdade essa derivada dos sentidos – fica ainda mais fatigada e perplexa na tentativa de formar ideias claras das menores partículas de tempo ou dos mínimos acréscimos nelas gerados; e muito mais ainda para compreender os momentos ou esses incrementos das quantidades fluentes em *statu nascenti*, na sua exata origem ou início da existência, antes de tornarem-se partículas finitas. Parece ainda mais difícil conceber velocidades abstraídas de tais imperfeitas entidades nascentes. Mas as velocidades das velocidades – as segundas, terceiras, quartas, quintas etc. velocidades –, se eu não estiver enganado, excedem todo o entendimento humano. Quanto mais a mente analisa e persegue essas ideias fugidias tanto mais ela fica perdida e desnorteada. Os objetos, em princípio fugazes e diminutos, logo somem de vista. Com certeza, seja em qual sentido for, uma segunda ou terceira fluxão parece um obscuro mistério. A velocidade incipiente de uma velocidade incipiente, o aumento nascente de um aumento nascente, isto é, de uma coisa que não tem magnitude, tome-se isso sob qualquer perspectiva que se queira tomar, a menos que eu esteja enganado, a sua concepção clara mostrar-se-á impossível. Se isso de fato é assim ou não, eu apelo ao exame (*trial*) de todo leitor pensante. E se uma segunda fluxão for inconcebível, o que devemos pensar das terceiras, quartas, quintas fluxões e assim por diante indefinidamente?

§5 Mesmo entre nós há quem suponha que os matemáticos estrangeiros procedem de uma maneira menos exata, talvez, e geométrica, embora mais inteligível. Ao invés de quantidades fluentes e suas fluxões, eles consideram as quantidades finitas variáveis como aumentando ou diminuindo pela contínua adição ou subtração de quantidades infinitamente pequenas. Ao invés das velocidades com as quais os incrementos são gerados, eles consideram os próprios incrementos ou diminuições, que chamam diferenças e que supõem serem infinitamente pequenos. A diferença de uma linha é uma linha infinitamente pequena; de um plano, um plano infinitamente pequeno. Eles supõem que as quantidades finitas consistem de partes infinitamente pequenas; que as curvas consistem de polígonos cujos lados são infinitamente pequenos e determinam a curvatura da linha pelos ângulos que [os lados] formam uns com os outros. Ora, conceber uma quantidade infinitamente pequena, isto é, infinitamente menor que qualquer quantidade sensível ou imaginável ou, ainda, a menor de todas as magnitudes finitas, confesso que está acima da minha capacidade. Mas conceber uma parte de tal quantidade infinitamente pequena que fosse ainda infinitamente menor que ela e que, consequentemente, embora multiplicada infinitamente, jamais fosse igual à menor de todas as quantidades finitas, suspeito que seja uma dificuldade infinita para qualquer homem – algo que será admitido por quem declara honestamente o que pensa, contanto que realmente pense e reflita, e não aceite nada com base na confiança.

§6 E, entretanto, no *calculus differentialis*, método que serve para os mesmos propósitos e objetivos que o método das fluxões, nossos analistas modernos não se contentam em considerar somente as diferenças de quantidades finitas. Eles também consideram as diferenças daquelas diferenças e as diferenças das diferenças das primeiras diferenças, e assim por diante *ad infinitum.* Dito de outra maneira, eles consideram quantidades infinitamente menores que a menor quantidade discernível, e outras infinitamente menores que aquelas infinitamente pequenas; e ainda outras infinitamente menores que os infinitesimais precedentes e, assim por diante, sem fim nem limite, de tal modo que devemos admitir uma infinita sucessão de infinitesimais, cada qual infinitamente menor que os anteriores e infinitamente maior que os posteriores. Como existem primeiras, segundas, terceiras, quartas, quintas etc. fluxões, também existem primeiras, segundas, terceiras, quartas etc. diferenças, em uma progressão infinita para o nada, do qual sempre vos aproximais sem nunca lá chegar. E (o que é mais estranho) ainda que tomeis um milhão de milhões daqueles infinitesimais, supondo que cada qual seja infinitamente maior do que qualquer outra magnitude real, e que se os adicionais à menor quantidade dada, isso em nada será maior. Pois esse é um dos modestos *postulata* dos nossos matemáticos modernos, e constitui uma pedra angular ou uma base para as suas especulações.

§7 Afirmo que certos homens rigorosos que exigem provas na religião, que não pretendem acreditar em nada além do que podem ver, supõem e acreditam em todos esses pontos. Não se passar por algo completamente inexplicável que homens versados exclusivamente em questões claras houvessem de admitir com dificuldade pontos obscuros. Mas quem puder digerir uma segunda ou uma terceira fluxão, uma segunda ou uma terceira diferença, não precisa ser, penso eu, escrupuloso em matérias da teologia. Há um pressuposto natural segundo o qual as faculdades dos homens são similares. É com base nessa suposição que eles tentam argumentar e convencer uns aos outros. O que, portanto, pode parecer comprovadamente impossível e inconsistente para alguém deve sê-lo presumidamente de maneira idêntica para outrem. Mas com que arremedo de razão poderia um homem pretender dizer que os mistérios não devem ser objetos de fé e, ao mesmo tempo, ele próprio admitir que tais mistérios obscuros sejam objetos da ciência?

§8 Deve-se, de fato, reconhecer que os matemáticos modernos não consideram esses pontos como mistérios, mas como concebidos claramente e dominados por suas mentes capazes de total compreensão. Eles não têm escrúpulos em dizer que, com a ajuda dessa nova analítica, podem penetrar no próprio infinito, que podem até mesmo estender sua visão para além do infinito, que sua arte compreende não somente o infinito, mas o infinito do infinito (como eles o expressam) ou uma infinidade de infinitos.

Mas, apesar de todas essas asserções e pretensões, pode-se justificadamente questionar se eles não estão sendo enganados e iludidos de maneira admirável por seus signos, símbolos ou espécies (*species*) peculiares, assim como outros homens em outras investigações são frequentemente enganados por palavras ou termos. Nada é mais fácil do que inventar expressões ou notações para fluxões e infinitesimais de primeira, segunda, terceira, quarta e subsequentes ordens, prosseguindo com $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$ *etc.*, ou *dx, ddx, dddx, ddddx etc*. sem fim nem limite de forma regular. Essas expressões são realmente claras e distintas, e a mente não encontra dificuldade para conceber o prosseguimento delas para além de quaisquer limites assináveis. Mas, se removermos o véu e olharmos por debaixo dele, se, colocando de lado as expressões, voltarmos nossa atenção para considerar as próprias coisas que se supõem serem expressas ou sinalizadas por elas, descobriremos um grande vazio, muita escuridão e confusão, ou melhor, se eu não estiver equivocado, descobriremos impossibilidades e contradições diretas. Se esse é ou não o caso, estão convidados a examinar e a julgar por si próprios todos os leitores pensantes.

§9 Tendo considerado o objeto, passo a considerar os princípios dessa nova análise constituídos de momentos, fluxões ou infinitesimais. Se, ao longo dessas considerações, ficar aparente que vossos pontos capitais, dos quais se supõe depender o resto, incluem erros e falsos raciocínios, então, seguir-se-á que vós – alguém que se embaraça ao conduzir a si mesmo – não podeis com decência alguma colocar-vos como guia de outros homens. O principal ponto do método das fluxões é obter a fluxão ou o momento do retângulo ou o produto de duas quantidades indeterminadas, visto que daí são derivadas regras para a obtenção das fluxões de outros produtos ou potências, sejam quais forem os coeficientes ou exponentes, inteiros ou fracionários, racionais ou irracionais (*surd*). Ora, poder-se-ia pensar que esse ponto fundamental foi distinguido muito claramente, considerando-se o quanto se constrói sobre ele e que sua influência estende-se através de toda a análise. Mas que se deixe o leitor julgar. Eis o que é dado como sendo uma demonstração <*Philosophiae naturalis principia mathematica, lib. 2, lem. 2*>. Supõe-se que o produto ou o retângulo AB aumenta por um movimento contínuo e que os incrementos momentâneos dos lados A e B são a e b. Quando os lados A e B estão incompletos, faltando-lhes a metade de seus momentos, o retângulo é

$$\left(A-\frac{1}{2}a\right)\times\left(B-\frac{1}{2}b\right), \text{ isto é, } AB-\frac{1}{2}aB-\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab.$$

E quando os lados A e B são aumentados nas outras duas metades dos seus momentos, o retângulo torna-se

$$\left(A+\frac{1}{2}a\right)\times\left(B+\frac{1}{2}b\right) \text{ ou } AB+\frac{1}{2}aB+\frac{1}{2}bA+\frac{1}{4}ab.$$

Do último retângulo subtrai-se o primeiro, e a diferença restante será $aB + bA$. Portanto, o incremento do retângulo gerado pelos incrementos inteiros a e b é $aB + bA$. *Q.E.D.* Mas é óbvio que o método direto e verdadeiro para obter o momento ou incremento do retângulo AB é tomar os lados acrescidos de seus incrementos inteiros e multiplicá-los um pelo outro, $A + a$ vezes $B + b$, cujo produto resultante $AB + aB + bA + ab$ é o retângulo aumentado. Se subtrairmos AB desse retângulo, o resto $aB + bA + ab$ será o seu incremento verdadeiro, excedendo na quantidade ab aquele que fora obtido pelo método anterior, ilegítimo e indireto. E isso vale universalmente sejam as quantidades a e b o que forem, grandes ou pequenas, finitas ou infinitesimais, incrementos, momentos ou velocidades. De nada adianta dizer que ab é uma quantidade excessivamente pequena, visto que nos é declarado que *in rebus mathematicis errores quàm minimi non sunt contemnendi* (em assuntos matemáticos, por menores que sejam, os erros não são negligenciáveis) <*Introductio ad quadraturam curvarum*>.

§10 Somente a obscuridade do assunto teria encorajado ou induzido o grande eminente do método fluxionário a impor a seus seguidores tal raciocínio como sendo uma demonstração, e somente uma deferência implícita à autoridade movê-los-ia a admiti-lo. O caso realmente é difícil. Nada podeis fazer até que tenhais conseguido livrar-vos da quantidade ab. Para esse propósito, a noção de fluxão é alterada, é colocada sob luzes diversas; confundem-se pontos que, na condição de primeiros princípios, deveriam ser claros e tornam-se ambíguos termos que deveriam ser usados de maneira fixa. Mas, apesar de toda essa destreza e habilidade, o propósito de livrar-se de ab não pode ser obtido por meio de um raciocínio legítimo. Se um homem, por métodos não geométricos nem demonstrativos, convence-se da utilidade de certas regras que, em seguida, propõe a seus discípulos como verdades indubitáveis e que ele próprio se encarrega de demonstrar de maneira sutil com a ajuda de noções refinadas e intrincadas, não é difícil supor que seus discípulos, para pouparem-se do aborrecimento de pensar, inclinem-se a confundir a utilidade de uma regra com a certeza de uma verdade e a aceitar uma pela outra – especialmente, se eles forem homens mais acostumados a computar do que a pensar, mais ansiosos por avançar cada vez mais rápido e mais distante do que dispostos a estabelecer cautelosamente e a enxergar nitidamente o seu caminho.

§11 Os pontos ou os simples limites de linhas nascentes são indubitavelmente iguais, pois, não tendo mais magnitude do que os demais, um limite como tal não é quantidade. Se por momento significais algo mais do que o próprio limite inicial, ele deve ser ou uma quantidade finita ou um infinitesimal. Mas todas as quantidades finitas são expressamente excluídas da noção de momento. Portanto, o momento deve ser um infinitesimal. E, de fato, embora se tenha empregado muitos artifícios para escapar ou evitar a admissão de quantidades infinitamente pequenas, nenhum deles parece ter sido eficaz. Até onde posso ver, não podeis admitir nenhuma quantidade como um meio-termo entre uma quantidade finita e o nada sem admitir infinitesimais. Um incremento gerado em uma partícula finita de tempo é em si uma partícula finita e, portanto, não pode ser um momento. Por isso, deveis tomar uma parte infinitesimal de tempo para nela gerar vosso momento. Afirma-se que não se considera a magnitude do momento e, todavia, supõe-se dividir esses mesmos momentos em partes. Isso não é fácil de ser concebido, não mais do que a razão pela qual se toma quantidades menores do que A e B para obter o incremento de AB, um procedimento – isto deve-se reconhecer – cuja causa final ou cujo motivo é bastante óbvio, mas cuja razão exata e legítima não é tão óbvia nem tão fácil de explicar, como seria mostrar que ele é geométrico.

§12 Deriva-se do princípio precedente, assim demonstrado, a regra geral para encontrar a fluxão de uma quantidade fluente de qualquer potência <*Philosophiae naturalis principia mathematica*, lib 2, lem. 2>. Mas, visto que parece ter havido algum escrúpulo íntimo em relação à demonstração precedente ou à consciência do seu defeito, e visto que encontrar a fluxão de uma dada potência era um ponto de primeira importância, julgou-se então adequado demonstrar o mesmo de uma maneira diferente e independente daquela demonstração. Mas, se esse outro método é mais legítimo e conclusivo do que o anterior, vou agora examinar. Para tanto, tomarei como premissa o lema seguinte: "Se com o propósito de demonstrar alguma proposição, admite-se um certo ponto, em virtude do qual outros pontos são alcançados, e se tal ponto admitido for posteriormente eliminado ou rejeitado por uma suposição contrária, então, nesse caso, todos os outros pontos alcançados por intermédio dele e consequentes a ele devem também ser eliminados ou rejeitados, de tal modo que não devem ser mais admitidos ou aplicados no restante da demonstração." Isso é tão claro que não necessita de prova.

§13 Ora, o outro método para obter uma regra destinada a encontrar a fluxão de [quantidades com] qualquer potência é o seguinte. Seja x a quantidade que flui uniformemente, e seja x^n a fluxão a ser encontrada. No mesmo tempo em que x fluindo torna-se $x+o$, a [quantidade com] potência x^n torna-se $(x+o)^n$, isto é, pelo método das séries infinitas,

$$x^n + n o x^{n-1} + \frac{nn-n}{2} o o x^{n-2} + etc.,$$

e os incrementos

$$o \text{ e } nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + etc.$$

estão entre si como

$$1 \text{ para } nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2}ox^{n-2} + etc.$$

Faça-se agora os incrementos esvanecerem e a proporção última entre eles será 1 para nx^{n-1}. Mas pode parecer que esse raciocínio não seja razoável nem conclusivo. Pois, quando se diz "faça-se esvanecer os incrementos", isto é, "reduzam-se os incrementos a nada" ou, ainda, "que não haja incremento", elimina-se a suposição inicial, a saber, a suposição de que os incrementos eram alguma coisa ou que havia incrementos, e, no entanto, retém-se uma consequência dessa suposição, isto é, uma expressão obtida em virtude dela. Isso, pelo lema precedente, é uma maneira incorreta de raciocinar. Certamente, quando supomos que incrementos esvanecem, devemos supor que esvanecem com eles suas proporções, suas expressões e tudo mais derivado da suposição da existência deles.

§14 Para tornar essa questão mais evidente, detalharei o raciocínio e o apresentarei diante de vossos olhos sob a mais plena luz. Portanto, o raciocínio equivale ou pode ser expresso em outros termos da seguinte forma. Suponho que a quantidade x flui e aumenta ao fluir. Chamo seu incremento de o, de tal modo que ao fluir ela se torna $x+o$. E, visto que x aumenta, segue-se que toda potência de x aumenta do mesmo modo na devida proporção. Portanto, quando x se torna $x+o$, x^n tornar-se-á $(x+o)^n$, isto é, de acordo com o método das séries infinitas,

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + etc.$$

E, se das duas quantidades aumentadas subtrairmos, respectivamente, a raiz e a [quantidade com] potência, obteremos como restos os dois incrementos a seguir:

$$o \text{ e } nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + etc.,$$

que, divididos pelo divisor comum o, produzem os quocientes

$$1 \text{ e } nx^{n-1} + \frac{nn-n}{2} ox^{n-2} + etc.,$$

que são, portanto, exponentes da razão entre incrementos.[5] Até aqui supus que x flui, que x tem um incremento real, que o é alguma coisa. Realizei tudo isso com base nessa suposição, sem a qual não teria sido capaz de ter dado sequer um único passo. É a partir dessa suposição que obtenho o incremento de x^n, torno-me capaz de compará-lo com o incremento de x e encontro a proporção entre os dois incrementos. Agora, peço-vos que me permitam fazer uma nova suposição contrária à primeira, qual seja, suporei que o incremento de x não existe ou que o não é coisa alguma. Essa segunda suposição elimina a minha primeira e é inconsistente com ela e, portanto, com tudo mais que dela depende. Apesar de tudo, peço a licença para reter nx^{n-1}, que é uma expressão obtida em virtude de minha primeira suposição, da qual necessariamente depende e sem a qual não poderia ser obtida. Tudo isso parece ser uma maneira muito inconsistente de argumentar e, como tal, não se admitiria na teologia.

§15 Nada mais comprovado do que a impossibilidade de extrair imediatamente uma conclusão legítima a partir de duas suposições inconsistentes. Podeis, de fato, supor qualquer coisa que seja possível, mas, posteriormente, não podeis supor alguma coisa que destrua o que primeiramente supusestes, ou, se o fazeis, deveis começar *de novo*. Portanto, se supondes que os aumentos esvanecem, isto é, que não houve qualquer aumento, deveis começar novamente e verificar o que se segue de tal suposição. Mas, para o vosso propósito, nada se seguirá. Não podeis, por esse meio, jamais chegar à vossa conclusão ou ter êxito na – assim chamada pelo célebre autor – investigação das proporções primeiras ou últimas das quantidades nascentes e evanescentes ao instituir a análise nas quantidades finitas. Repito mais uma vez: tendes a liberdade de fazer qualquer suposição possível e podeis destruir uma suposição por meio da outra, mas, então, não podeis reter a consequência ou qualquer parte da consequência de vossa primeira suposição já destruída. Admito que se possa fazer os signos ou denotarem alguma coisa ou nada denotarem, e que, consequentemente, na notação inicialmente empregada em $x+o$, o poderia ou significar um incremento ou nada significar. Mas, por outro lado, seja o que for que almejais com isso significar, deveis raciocinar de maneira consistente com tal significado e jamais prosseguir apoiado em um duplo significado, o que o faria incorrer em um sofisma manifesto. Se argumentais seja com símbolos seja com palavras, as regras da reta razão ainda são as mesmas. Tampouco se pode imaginar que alegaríeis o privilégio de estar dispensado delas na matemática.

§16 Se assumis de início que uma quantidade não aumenta em nada e que, na expressão $x+o$, o nada significa, com base nessa suposição, uma vez que não há incremento da raiz, não haverá incremento da potência e, consequentemente, na série das potências do binômio, não haverá nenhum de seus membros constituintes, exceto o primeiro; por consequência, mediante tal método, jamais podeis obter legitimamente a vossa expressão de uma fluxão. Portanto, estais procedendo de um modo falacioso, progredindo até um certo ponto sob a suposição de um incremento e mudando em seguida, subitamente, para outra suposição segundo a qual não haveria nenhum incremento. Poderia parecer uma grande habilidade fazer isso em um determinado ponto ou período. Pois, se essa segunda suposição tivesse sido feita antes da divisão comum por o, tudo teria esvanecido de imediato e nada teríeis obtido com vossa suposição. Ao passo que, por meio desse artifício de primeiro dividir e depois mudar vossa suposição, retendes 1 e nx^{n-1}. Mas, apesar de todo esse discurso para encobri-la, a falácia é ainda a mesma. Pois, se isso é feito mais cedo ou mais tarde, uma vez que se faça a segunda suposição ou assunção, no mesmo instante a primeira assunção e tudo o que obtivestes por meio dela encontram-se destruídos e eliminados conjuntamente. E isso é universalmente verdadeiro, qualquer que seja o assunto, em todos os ramos do conhecimento humano; em qualquer um deles, creio que os homens dificilmente admitiriam um raciocínio tal como esse que na matemática é aceito como uma demonstração.

§17 Pode não ser completamente incorreto observar que o método para encontrar a fluxão de um retângulo de duas quantidades fluentes, tal como se apresenta no *De quadratura curvarum*, difere do acima mencionado retirado do segundo livro dos *Principia*, e que é, na prática, idêntico àquele usado no *Calculus differentialis* <ver *Analyse des infiniment petits,* part 1, prop. 2>. Pois a suposição de que uma quantidade diminuiu infinitamente e, portanto, é rejeitada, é na verdade a rejeição de um infinitesimal; e, de fato, isso requer uma capacidade de discernimento extraordinariamente aguda, a fim de distinguir entre incrementos evanescentes e diferenças infinitesimais. Talvez se possa dizer que uma quantidade ao ser infinitamente diminuída torna-se nada e, enquanto nada, é rejeitada. Mas, de acordo com os princípios aceitos, é óbvio que nenhuma quantidade geométrica, por meio de qualquer divisão ou subdivisão que seja, pode ser esgotada ou reduzida a nada.[6] Considerando as várias artes e truques usados pelo eminente autor do método fluxionário, os vários enfoques que ele deu a suas fluxões e, finalmente, as diferentes maneiras que ele tentou demonstrar o mesmo ponto, poder-se-ia pensar que ele mesmo suspeitava da exatidão de suas demonstrações e que não estava satisfeito o bastante com nenhuma noção para aderir-lhe firmemente. Isso, de qualquer maneira, deixa claro que ele se sentia satisfeito com respeito a certos pontos e que, no entanto, não se encarregaria de demonstrá-los aos demais <Ver a cor-

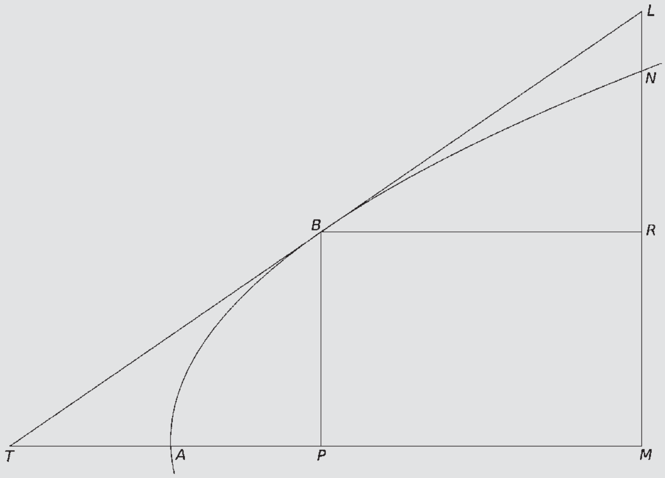
respondência a Collins de 8 de novembro de 1676>.[7] Se essa satisfação procede de métodos experimentais (*tentative*) ou de induções, algo que frequentemente os matemáticos têm admitido (por exemplo, Dr. Wallis em seu *Arithmetic of infinites*), isso não posso pretender determinar. Mas, qualquer que seja o caso com respeito ao nosso autor, parece que seus seguidores mostram-se mais ávidos em aplicar seus métodos do que em examinar seus princípios com precisão.

§18 É curioso observar a sutileza e a destreza com que esse grande gênio combate uma dificuldade insuperável, e através de quais labirintos ele se esforça para escapar da doutrina dos infinitesimais – algo que se lhe impõe quer queira quer não, tanto que é admitida e acolhida por outros sem a mínima repugnância. No *calculus differentialis*, Leibniz e seus seguidores não têm qualquer escrúpulo para, em primeiro lugar, supor e, em seguida, rejeitar quantidades infinitamente pequenas, com uma clareza de compreensão e uma exatidão de raciocínio que pode ser discernida por qualquer homem pensante isento de preconceitos. A noção ou ideia de uma *quantidade infinitesimal*, enquanto um simples objeto apreendido pela mente, já foi considerado acima <Ver §5 e 6>. Agora, farei observações somente acerca do método de eliminar tais quantidades, o que se realiza sem a menor cerimônia. Assim como no caso das fluxões, o ponto de maior importância e preparatório a todo o restante era encontrar a fluxão do produto de duas quantidades indeterminadas, no *calculus differentialis* (método que se supõe ter sido apropriado do primeiro com algumas pequenas alterações),[8] o ponto principal é obter a diferença daquele produto. A regra agora empregada é obtida com a rejeição do produto ou retângulo da diferença. E, em geral, supõe-se que nenhuma quantidade é maior ou menor com a adição ou a subtração de seu infinitesimal e que, consequentemente, nenhum erro pode surgir dessa rejeição de infinitesimais.

§19 No entanto, parece que, sejam quais forem os erros admitidos nas premissas, erros proporcionais aparecerão na conclusão, sejam eles finitos ou infinitesimais, e que a ἀκρίβεια da geometria exigirá que nada seja negligenciado ou rejeitado.[9] Em resposta a isso, direis talvez que as conclusões são rigorosamente verdadeiras e que, portanto, também devem assim ser os princípios e métodos dos quais são derivados. Mas essa maneira invertida de demonstrar vossos princípios a partir de vossas conclusões tanto vos é peculiar, cavalheiros, quanto é contrária às regras da lógica. A verdade da conclusão não provará a verdade nem da forma nem da matéria de um silogismo, na medida em que a ilação poderia estar errada ou as premissas serem falsas e, apesar de tudo, a conclusão ser verdadeira, embora não em virtude de tal ilação ou de tais premissas. Digo que em qualquer outra ciência os homens provam suas conclusões por meio de seus princípios, e não os princípios por meio das conclusões. Mas, se na vossa ciência permitis essa maneira antinatural de proceder, a consequência será que devereis adotar a indução e dizer adeus à demonstração. Se aceitardes isso, vossa autoridade para guiar-nos em questões que envolvem a razão e a ciência não perdurará por muito mais tempo.

§20 Não levanto qualquer controvérsia sobre vossas conclusões, mas somente sobre a lógica e o método por vós adotado. Como fazeis as vossas demonstrações? De quais objetos tratais? Concebei-os claramente? Com base em quais princípios procedeis? Quão sólidos eles podem ser e de que modo os aplicais? Deve ser relembrado que não estou preocupado com a verdade de vossos teoremas, mas somente com o modo de obtê-los; se ele é legítimo ou ilegítimo, claro ou obscuro, científico ou por tentativas (*tentative*). Para evitar toda possibilidade de engano a meu respeito, peço-vos permissão para repetir e insistir que considero o geômetra analítico como sendo apenas um lógico, isto é, considero-o na medida em que ele raciocina e argumenta; considero suas conclusões matemáticas não em si mesmas, mas a partir de suas premissas; e não as considero como verdadeiras ou falsas, úteis ou insignificantes, mas como consequências derivadas desses princípios, por meio daquelas inferências. E, já que talvez possa parecer um paradoxo inexplicável que matemáticos deduzam proposições verdadeiras de princípios falsos, que estejam corretos a respeito da conclusão ainda que errados a respeito das premissas, esforçar-me-ei particularmente para explicar por que isso pode acontecer e para mostrar como o erro pode produzir verdade, embora não possa produzir ciência.

§21 Portanto, a fim de esclarecer esse ponto, suponhamos, por exemplo, que seja preciso traçar a tangente de uma parábola, e examinemos o desenrolar dessa tarefa tal como ela seria realizada com base nas diferenças infinitesimais. Seja *AB* uma curva, a abscissa $AP = x$, a ordenada $PB = y$, a diferença da abscissa $PM = dx$, a diferença da ordenada $RN = dy$. Ora, supondo que a curva seja um polígono e, consequentemente, que *BN*, o incremento ou diferença da curva, seja uma linha reta coincidindo com a tangente e que o triângulo diferencial *BRN* seja similar ao triângulo *TPB*, [então] a subtangente *PT* constitui a quarta proporcional[10] para $RN : RB : PB$, isto é, para $dy : dx : y$.



Portanto, a subtangente será $\frac{ydx}{dy}$. Mas, nesse caso, há um erro resultante da falsa suposição acima mencionada, que fornece um valor para *PT* maior que ele o é verdadeiramente, pois na realidade não é o triângulo *RNB*, mas sim *RLB* que é similar a *PBT* e, por isso, (no lugar de *RN*) *RL* seria o primeiro termo da proporção, isto é, *RN* + *NL*, isto é, $dy + z$; donde a expressão verdadeira da subtangente seria $\frac{ydx}{dy+z}$. Portanto, houve um erro por falta, quando se faz de dy o divisor, erro esse igual a z, isto é, à linha *NL*, compreendida entre a curva e a tangente. Ora, pela natureza da curva $yy = px$, supondo p ser o parâmetro, infere-se, pela regra das diferenças, que $2ydy = pdx$ e $dy = \frac{pdx}{2y}$. Mas se multiplicardes $y + dy$ por si mesmo e conservardes o produto total sem rejeitar o quadrado da diferença, então resultará verdadeiramente, pela substituição das quantidades aumentadas na equação da curva, em $dy = \frac{pdx}{2y} - \frac{dydy}{2y}$. Portanto, ao fazer $dy = \frac{pdx}{2y}$, ocorreu um erro por excesso, que decorreu da regra errônea das diferenças. A medida desse segundo erro é $\frac{dydy}{2y} = z$. Por isso, os dois erros sendo iguais e contrários destroem-se mutuamente. O primeiro erro por falta é corrigido por um segundo erro por excesso.

§22 Se houvésseis cometido somente um erro, não teríeis chegado a uma solução verdadeira para o problema. Mas, em virtude de um erro duplo, mesmo assim chegais, embora não na ciência, ainda que na verdade. Pois, não se deve chamar de ciência quando se procede às cegas e se chega à verdade sem saber como nem por quais meios. Para demonstrar que z é igual a $\frac{dydy}{2y}$, faça-se que *BR* ou dx seja m, e *RN* ou dy seja n. Pela trigésima terceira proposição do primeiro livro das *Cônicas* de Apolônio,[11] e a partir dos triângulos semelhantes, $2x$ está para y assim como m está para $n + z = \frac{my}{2x}$.[12] Da mesma maneira, pela natureza da parábola, $yy + 2yn + nn = xp + mp$ e $2yn + nn = mp$. Portanto, $\frac{2yn+nn}{p} = m$; e porque $yy + px$, $\frac{yy}{p}$ será igual a x.

Então, substituindo m e x por esses valores, teremos

$$n + z = \frac{my}{2x} = \frac{2yynp + ynnp}{2yyp},$$

isto é,

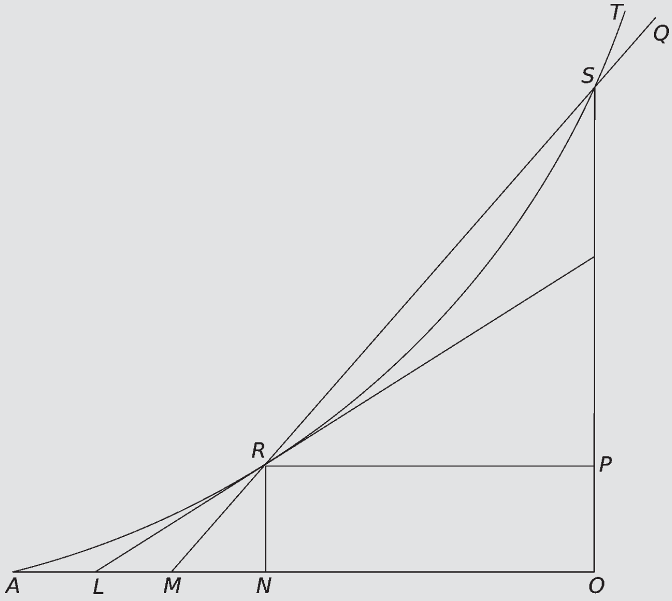
$$n+z=\frac{2yn+nn}{2y}$$

que, por redução, dá

$$z=\frac{nn}{2y}=\frac{dydy}{2y}\quad Q.E.D.$$

§23 Ora, observo, em primeiro lugar, que a conclusão resulta correta, não porque o rejeitado quadrado de *dy* era infinitamente pequeno, mas porque esse erro foi compensado por outro erro igual e contrário. Observo, em segundo lugar, que seja lá o que for rejeitado, tão pequeno quanto for, desde que seja real e, consequentemente, produza um erro real nas premissas, produzirá um erro real e proporcional na conclusão. Vossos teoremas, portanto, não podem ser precisamente verdadeiros nem vossos problemas precisamente solucionados, em virtude de que as próprias premissas não são precisas, sendo uma regra da lógica que *conclusio sequitur partem debiliorem* (a conclusão segue-se da parte mais fraca). Assim, em terceiro lugar, observo que, quando a conclusão é evidente e as premissas são obscuras, ou a conclusão é precisa e as premissas são imprecisas, podemos seguramente pronunciar que o fato de tal conclusão não ser nem evidente nem precisa não se deve a essas premissas ou princípios obscuros e imprecisos, mas deve-se a certos outros princípios que talvez o próprio demonstrador jamais conheceu ou pensou a respeito. Em último lugar, observo que, no caso de as diferenças serem supostas como quantidades finitas, mesmo que sejam suficientemente grandes, a conclusão apesar disso resultará no mesmo, pois as quantidades rejeitadas são legitimamente desprezadas não pela sua pequenez, mas por outra razão, a saber, por causa dos erros contrários que se destroem mutuamente e, assim, no conjunto, nada é realmente rejeitado, apesar da aparente eliminação. Essa razão é igualmente válida com respeito tanto às quantidades finitas quanto às infinitesimais, tanto com respeito às grandes quanto às pequenas, tanto a um pé ou a uma jarda quanto ao incremento mais minúsculo.

§24 Para ilustrar mais completamente esse ponto, eu o considerarei sob outra luz e, procedendo com quantidades finitas até a conclusão, farei uso somente de um infinitesimal. Suponha-se que a linha reta *MQ* corta a curva *AT* nos pontos *R* e *S*. Suponha-se *LR* ser uma tangente no ponto *R*, *AN* a abscissa e *NR* e *OS* as ordenadas. Seja *AN* pro-



longada até O, e RP traçada paralelamente a NO. Suponha-se $AN = x$, $NR = y$, $NO = v$, $PS = z$, a subsecante $MN = s$. Seja a equação $y = xx$ a expressão da natureza da curva. Supondo que y e x sejam aumentados pelos seus incrementos finitos, obtemos

$$y + z = xx + 2xv + vv;$$

donde, subtraindo a primeira equação, resultará $z = 2xv + vv$. Em razão da semelhança de triângulos

$$PS : PR :: NR : NM, \text{ isto é,}$$

$$z : v :: y : s = \frac{vy}{z};$$

donde, se substituirmos seus valores para y e z, obtemos

$$\frac{vxx}{2xv + vv} = s = \frac{xx}{2x + v}.$$

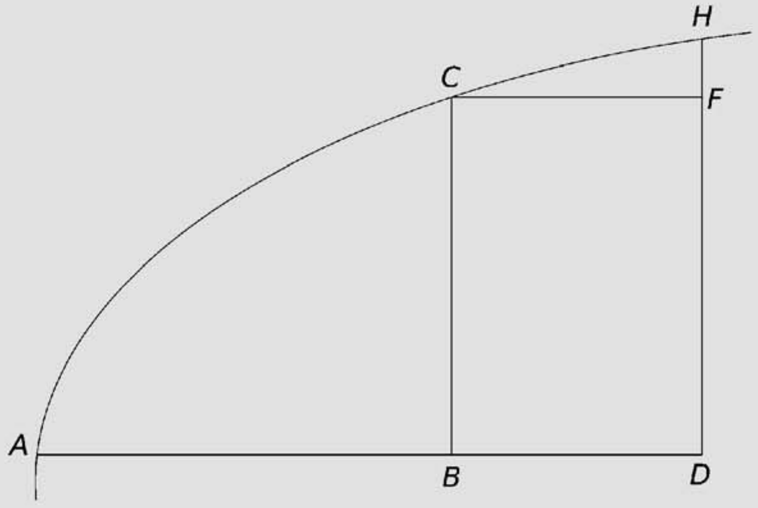
Supondo NO diminuir infinitamente, a subsecante NM, nesse caso, coincidirá com a subtangente NL, e v, como um infinitesimal, pode ser rejeitado. Disso se segue que

$$s = NL = \frac{xx}{2x} = \frac{x}{2},$$

que é o valor verdadeiro da subtangente. Visto que esse resultado foi obtido mediante um erro somente, isto é, rejeitando-se somente um único infinitesimal, pode parecer que – contrariando o que foi dito acima –, mesmo que uma diferença ou quantidade infinitesimal seja negligenciada ou desprezada, a conclusão pode ser precisamente verdadeira, embora não haja, como no primeiro caso, erro duplo ou retificação de um erro pelo outro. Mas, se esse ponto for profundamente considerado, descobriremos que há ainda ali um erro duplo, um compensando ou retificando o outro. Pois, em primeiro lugar, supõe-se que quando NO diminui infinitamente ou torna-se um infinitesimal, então a subsecante NM torna-se igual à subtangente NL. Mas isso é claramente um erro, pois é evidente que, como uma secante não pode ser uma tangente, da mesma maneira, uma subsecante não pode ser uma subtangente. Por menor que seja a diferença, sempre haverá ainda uma diferença. E se NO é infinitamente pequena, haverá ainda uma diferença infinitamente pequena entre *NM* e *NL*. Portanto, *NM* ou *S* era muito pequena para vossa suposição (quando o supusestes igual a *NL*), e esse erro foi compensado por um segundo erro contido na eliminação de *v*; e esse último erro deu a *s* um valor maior do que o seu verdadeiro valor, valor com qual *s* substituiu o valor da subtangente. Esse é o verdadeiro estado dessa situação, por mais disfarçado que ele esteja. E, na realidade, a isso corresponde e, no fundo, é a mesma coisa que se pretendêssemos encontrar, a partir da equação da curva e da semelhança de triângulos, a subtangente mediante, primeiro, a busca de uma expressão geral para todas as subsecantes e, ao reduzir a subtangente a essa regra geral, então, considerá-la como sendo a subsecante quando *v* esvanece ou reduz-se a nada.

§25 De um modo geral, observo que, *primeiro*, *v* nunca pode ser nada na medida em que há uma secante. *Segundo*, que a mesma linha não pode ser ambas, a tangente e a secante. *Terceiro*, que, quando *v* ou *NO* <ver a figura anterior> esvaece, *PS* e *SR* também esvaecem, e com eles [esvaece] a proporcionalidade dos triângulos similares. Consequentemente, toda a expressão, que foi obtida a partir dessa similaridade e nela está baseada, esvaece quando *v* esvaece. *Quarto*, que o método de encontrar secantes ou expressões de secantes, por mais geral que seja, não pode, em um sentido comum, estender-se nem sequer um pouco mais além [em sua aplicação] que a uma secante qualquer: e, como ele necessariamente supõe triângulos semelhantes, não se pode supor que ele se aplique onde não existem triângulos semelhantes. *Quinto*, que a subsecante será sempre menor do que a subtangente e jamais poderá coincidir com ela. Admitir tal coincidência seria um absurdo, pois seria supor que a mesma linha corta e não corta ao mesmo tempo outra linha dada, o que é uma contradição manifesta, tanto que subverte a hipótese e dá a demonstração de sua falsidade. *Sexto*, se isso não for admitido, exijo uma razão por que qualquer outra demonstração apagógica, ou demonstração *ad absurdum*, seria mais admissível na geometria do que aquela, ou que alguma diferença real seja assinalada entre aquela demonstração e as outras desse último gênero. *Sétimo*, observo que é sofístico supor *NO* ou *RP*, *PS*, e *SR* serem realmente linhas finitas destinadas a formar o triangulo *RPS* e, assim, obter as proporções por meio dos triângulos semelhantes, mas logo em seguida supor não existirem tais linhas nem, consequentemente, os triângulos semelhantes, e, apesar disso, reter a consequência da primeira suposição, mesmo após tal suposição ter sido destruída por uma suposição em contrário. *Oitavo*, embora, no presente caso, a verdade possa ser obtida por uma suposição inconsistente, essa verdade não foi, no entanto, demonstrada. Tal método não está em conformidade com as regras da lógica e com a reta razão. Qualquer que seja sua utilidade, deve-se considerá-lo somente como uma suposição, como um truque, uma habilidade ou, de preferência, um artifício, mas jamais uma demonstração científica.

§26 Pode-se ilustrar mais completamente a doutrina proposta pelo seguinte caso, fácil e simples, no qual procederei por incrementos evanescentes.



Suponha-se que $AB = x$, $BC = y$, $BD = o$, e que xx é igual à área ABC. Pede-se para encontrar a ordenada y ou BC. Quando x, ao fluir, torna-se $x + o$, então xx torna-se $xx + 2xo + oo$, enquanto a área ABC torna-se ADH e o incremento de xx torna-se igual a $BDHC$, o incremento da área, isto é, $BCFD + CFH$. Se supormos o espaço curvilíneo CFH ser qoo, então

$$2xo + oo = yo + qoo\ ,$$

que, dividido por o, resulta em $2x + o + y + qo$. Supondo que o seja evanescente, $2x = y$; nesse caso, ACH será uma linha reta e as áreas ABC e CFH serão triângulos. Ora, a respeito desse raciocínio, como já foi observado <§12 e 13, supra>, não é legítimo nem lógico supor que o seja evanescente, isto é, que se converta em nada ou que não haja incremento, a menos que rejeitemos conjuntamente ao próprio incremento tudo o que seja sua consequência direta, isto é, tudo o que não pode ser obtido senão supondo tal incremento. No entanto, deve-se reconhecer que o problema é corretamente solucionado e que a conclusão a que esse método nos conduz é verdadeira. Então, pergunta-se: como chegamos a rejeitar o sem que apareça erro algum na conclusão? Respondo que a razão verdadeira é simplesmente esta: porque, sendo q a unidade, qo é igual a o e, portanto,

$$2xo+o-qo=y=2x\,,$$

sendo a destruição mútua das quantidades iguais qo e o provocada por seus sinais contrários.

§27 Se, por um lado, era um absurdo livrar-se de o dizendo: permita-me contradizer a mim mesmo, permita-me subverter a minha própria hipótese, permita-me conceder que não existe incremento, ao mesmo tempo em que retenho uma quantidade que nunca teria sido concebida senão supondo um incremento; do mesmo modo, por outro lado, seria errado imaginar que em uma demonstração geométrica nos é permitido admitir algum erro, não importa quão pequeno ele seja, ou que é possível pela natureza das coisas que uma conclusão precisa pudesse ser derivada de princípios imprecisos. Portanto, o não pode ser eliminado a título de um infinitesimal nem com base no princípio de que infinitesimais podem ser seguramente negligenciados. Ao contrário, somente [pode ser desprezado] porque ele é destruído por uma quantidade igual com um sinal negativo, de tal modo que $o - qo$ é igual a nada. E, assim como é ilegítimo reduzir uma equação subtraindo-se de um de seus lados uma quantidade quando essa quantidade não pode ser destruída ou quando uma quantidade igual não é eliminada do outro lado da mesma equação, deve-se admitir que é uma conclusão obtida por um método lógico e justo de argumentar que, quando nada ou quantidades iguais se subtraem de iguais, eles ainda permanecerão iguais. Essa é a verdadeira razão por que, ao final, nenhum erro é produzido ao se rejeitar o; o que não se deve, portanto, atribuir nem à doutrina de diferenças, nem aos infinitesimais, nem às quantidades evanescentes, aos momentos ou às fluxões.

§28 Suponha-se que o caso [anterior] seja generalizado e que x^n seja igual à área *ABC*. Pelo método das fluxões, encontra-se a ordenada nx^{n-1}, que admitimos como verdadeira e cujo modo de obtenção deveremos questionar. Ora, se nos contentamos em chegar à conclusão por um caminho sumário, supondo que a razão entre as fluxões x e x^n são <ver §13> como 1 e nx^{n-1} e que se considera a ordenada da área como a sua fluxão, não conseguiremos visualizar muito claramente nosso procedimento ou não perceberemos como obtivemos a verdade, uma vez que o método é obscuro e ilógico, conforme mostramos anteriormente. Mas, se delinearmos adequadamente a área e seu incremento e se dividirmos esse último em duas partes, *BCFD* e *CFH* <ver a figura no §26>, procedendo regularmente por equações entre as quantidades algébricas e as geométricas, a razão das coisas ser-nos-á plenamente manifesta. Pois, assim como x^n é igual à área ABC, o incremento de x^n é igual ao incremento da área, isto é, igual a *BDHC*; de tal modo que:

$$nox^{n-1} + \frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + etc. = BDFC + CFH.$$

Se retivermos somente o primeiro membro de cada lado da equação, $nox^{n-1} = BDFC$, e se dividirmos ambos os lados por *o* ou *BD*, obteremos $nx^{n-1} = BC$. Portanto, admitindo que o espaço curvilíneo *CFH* é igual à quantidade rejeitada

$$\frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + etc.,$$

e que, quando essa quantidade é rejeitada de um lado, é igualmente rejeitada do outro, o raciocínio torna-se correto e a conclusão, verdadeira. E isso vale para toda e qualquer magnitude que conferis a *BD*, seja uma diferença infinitesimal seja um incremento finito tão grande quanto for. Portanto, está evidente que supor que a quantidade algébrica rejeitada seria negligenciada, por ser uma quantidade infinitamente pequena ou evanescente, deve ter produzido um erro, dado que ela não foi, em virtude de sua igualdade com o espaço curvilíneo, subtraída ao mesmo tempo da outra parte ou do outro lado da equação, conforme o axioma: *se de iguais subtrai-se iguais, o que permanece será igual.* Pois essas quantidades que os analistas dizem serem negligenciadas ou levadas a esvanecerem-se, são na realidade subtraídas. Se, portanto, a conclusão for verdadeira, é absolutamente necessário que o espaço finito *CFH* seja igual ao restante do incremento expresso por

$$\frac{nn-n}{2}oox^{n-2} + etc.,$$

que é igual, afirmo eu, ao resto finito de um incremento finito.

§29 Seja qual for, portanto, a potência que desejais, aí surgirá de um lado uma expressão algébrica e de outro uma quantidade geométrica, cada qual naturalmente dividida em si em três membros: a expressão algébrica ou fluxional, na qual não se inclui nem a expressão do incremento da abscissa nem a da sua potência, uma outra que inclui a própria expressão do incremento, e uma terceira que inclui a expressão das potências do incremento. Também a quantidade geométrica, ou a área total acrescida, consiste em três partes ou membros. A primeira é a área dada. A segunda é um retângulo sobre a ordenada e o incremento da abscissa. E a terceira é um espaço curvilíneo. Comparando os membros homólogos ou correspondentes de ambos os lados, descobriremos que, do mesmo modo que o primeiro membro da expressão é a expressão de uma dada área, o segundo membro da expressão exprimirá o retângulo ou o segundo membro da quantidade geométrica, e o terceiro, contendo as potências do incremento, exprimirá o espaço curvilíneo ou o terceiro membro da quantidade geométrica. Essa sugestão pode talvez ser mais amplamente estendida e aplicada a outros bons propósitos, por qualquer um com tempo disponível e curiosidade para tais assuntos. O uso que dela faço destina-se a mostrar que a análise não pode ser realizada sobre aumentos ou diferenças, a menos que, necessariamente, seja realizada também sobre quantidades finitas, sejam elas tão grandes quanto forem, conforme observou-se anteriormente.

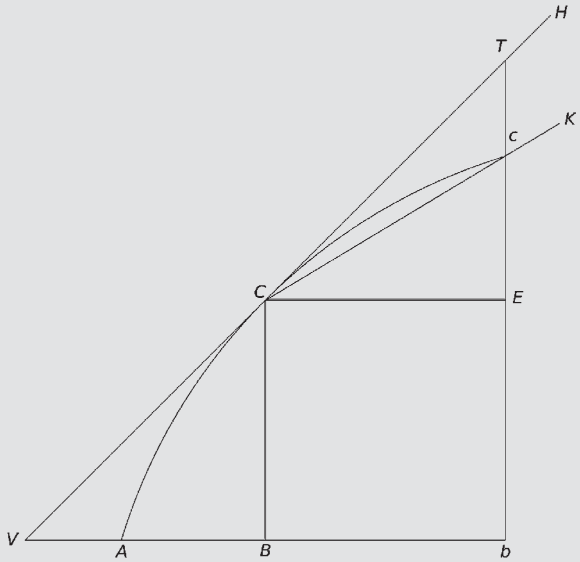
§30 Portanto, mediante tudo o que podemos seguramente afirmar, parece-me que a conclusão não pode estar correta, se, para essa finalidade, alguma quantidade esvaneça ou tenha que ser negligenciada, a menos que ou um erro seja compensado por outro ou que, secundariamente, do mesmo lado de uma equação, quantidades iguais sejam destruídas por sinais contrários, de tal modo que a quantidade que pretendemos rejeitar seja a primeira a ser aniquilada ou, por fim, que quantidades iguais sejam subtraídas de ambos os lados opostos. Portanto, livrar-se de quantidades em conformidade com os admitidos princípios das fluxões ou das diferenças não é nem uma boa geometria nem uma boa lógica. Quando o aumento esvanece, a velocidade também esvanece. Afirma-se que as velocidades ou as fluxões são *primò* e *ultimò*,[13] tal como os aumentos são nascentes e evanescentes. Tome-se, portanto, a *ratio* (razão) de quantidades evanescentes, que será a mesma que aquela das fluxões. Ela satisfará igualmente aos mesmos propósitos. Por que então se introduz as fluxões? Não é para evitar ou, de preferência, para mitigar o uso de quantidades infinitamente pequenas? Porém, não temos nenhuma noção por meio da qual conceber e medir os vários graus de velocidade além daquelas do espaço e do tempo; ou, quando são dados os tempos, nada além do espaço. Nem sequer temos qualquer noção de velocidade que prescinda de tempo e de espaço. Então, quando se supõe um ponto mover-se em um tempo dado, não temos noção de nenhuma velocidade maior ou menor ou de proporções entre as velocidades, mas somente de linhas maiores ou menores e de proporções entre tais linhas geradas em intervalos iguais de tempo.

§31 Um ponto pode ser o limite de uma linha; uma linha pode ser o limite de um plano; um momento pode terminar um tempo. Mas de que modo podemos nós conceber uma velocidade com a ajuda de tais limites? Ela necessariamente implica ambos, tempo e espaço, e não pode ser concebida sem eles. Se as velocidades de quantidades nascentes e evanescentes, isto é, abstraídas de tempo e espaço, não podem ser compreendidas, como podemos nós compreender e demonstrar suas proporções ou considerar suas *rationes primae* e *ultimae* (razões primeiras e últimas)? Pois, considerar a proporção ou *ratio* das coisas implica que tais coisas tenham magnitude, que se possa medir tais magnitudes e conhecer as suas relações mútuas. Mas, uma vez que não haja medida de velocidade exceto pelo tempo e pelo espaço e que a proporção das velocidades seja composta somente da proporção direta dos espaços e da proporção inversa (*reciprocal*) dos tempos, não se segue que falar em investigar, obter e considerar as proporções de velocidades, excluindo-se o tempo e o espaço, seja falar de maneira ininteligível?

§32 Mas, no uso e aplicação das fluxões, direis que os homens não sobrecarregam suas faculdades para conceber precisamente as velocidades, os incrementos, os infinitesimais acima mencionados ou qualquer outra ideia de uma natureza tão refinada, sutil e evanescente. E, portanto, talvez sustentareis que os problemas podem ser solucionados sem essas suposições inconcebíveis e que, consequentemente, a doutrina das fluxões, na sua parte prática, permanece isenta de todas essas dificuldades. Respondo que, mesmo que no uso ou na aplicação desse método não se levam em conta tais pontos difíceis e obscuros, eles estão, entretanto, pressupostos. Eles são os fundamentos sobre os quais os modernos constroem; são os princípios sobre os quais eles procedem na solução de problemas e na descoberta de teoremas. Isso é feito com o método das fluxões, bem como com todos os outros métodos que pressupõem seus respectivos princípios e se fundamentam neles, ainda que as suas regras possam ser praticadas por homens que nem dão atenção aos princípios nem talvez os conheçam. Portanto, da mesma maneira como um marinheiro pode aplicar na prática certas regras derivadas da astronomia e da geometria, cujos princípios ele não compreende, e como qualquer homem comum pode resolver diversas questões numéricas pelas regras e operações comuns da aritmética, que ele executa e aplica sem conhecer as suas razões, assim tampouco se pode negar que podeis aplicar as regras do método das fluxões, que podeis comparar e reduzir casos particulares a formas gerais; que podeis operar, calcular e solucionar problemas por intermédio disso, não somente sem qualquer atenção a ou conhecimento efetivos dos fundamentos desse método e dos princípios dos quais ele depende e dos quais é deduzido, mas também sem nunca os ter considerado ou compreendido.

§33 Mas, então, deve-se recordar que em tal caso, embora podeis passar por um artista, calculador ou analista, ainda não vos podeis considerar um homem de ciência e de demonstração. Nenhum homem, em virtude de ser versado em tal análise obscura, imaginaria que suas faculdades racionais são mais desenvolvidas do que as de qualquer outro homem que as exercitaram de diferentes maneiras e em diferentes assuntos; muito menos se erige como um juiz ou um oráculo a respeito de assuntos sem nenhum tipo de conexão ou dependência dessas espécies, símbolos ou signos, no manejo dos quais ele é muito versado e experiente. Apesar de que sois um hábil calculador ou analista, não podeis, por isso, ser considerado hábil em anatomia; ou, vice-versa, um homem capaz de dissecar com arte pode ser, no entanto, ignorante em sua arte de calcular. Ambos, apesar de suas habilidades peculiares em suas respectivas artes, podem igualmente não ser qualificados para decidir sobre lógica, metafísica, ética ou religião. E isso seria verdadeiro mesmo admitindo que compreendeis vossos princípios e que os podeis demonstrar.

§34 Suponhamos que se diga que as fluxões podem ser expostas ou expressas por linhas finitas proporcionais a elas, ou ainda que se diga que essas linhas finitas, uma vez que podem ser distintamente concebidas, conhecidas e submetidas a raciocínios, também podem ser substituídas pelas fluxões e suas relações ou proporções mútuas consideradas como as proporções das fluxões. E suponhamos que se diga, por fim, que desse modo essa doutrina torna-se clara e útil. A tudo isso respondo que, se para encontrar essas linhas finitas proporcionais às fluxões, realizam-se certos passos que são obscuros e inconcebíveis, por mais que essas linhas finitas sejam claramente concebidas, deve-se, no entanto, reconhecer que vosso proceder não é claro nem é científico seu método. Por exemplo, supõe-se que *AB* seja a abscissa, *BC* a ordenada e *VCH* a tangente da curva *AC*; que *Bb* ou *CE* seja o incremento da abscissa, *Ec* o incremento da ordenada, que quando prolongada encontra *VH* no ponto *T*, e *Cc* o incremento da curva. Prolongando-se a linha reta *Cc* até *K*, serão formados três pequenos triângulos: o retilíneo *CEc*, o mistilíneo *CEc* e o retilíneo *CET*. É óbvio que esses triângulos são diferentes entre si, sendo o retilíneo *CEc* menor que o mistilíneo *CEc*, cujos lados são três os incrementos acima mencionados, e sendo esse último menor que o triângulo *CET*. Suponha-se que a ordenada *bc* move-se até o lugar *BC*, de maneira que o ponto *c* coincida com o ponto *C*; e que a linha reta *CK* e, consequentemente, a curva *Cc* coincida com a tangente *CH*. Nesse caso, o triângulo evanescente mistilíneo *CEc* será, em sua última forma, similar ao triângulo *CET* e seus lados evanescentes *CE*, *Ec* e *Cc* serão proporcionais a *CE*, *ET* e *CT*, que são os lados do triângulo *CET*. Portando, conclui-se que as fluxões das linhas *AB*, *BC* e *AC*, estando na razão última de seus incrementos evanescentes, são proporcionais aos lados do triângulo *CET* ou, o que é o mesmo, do

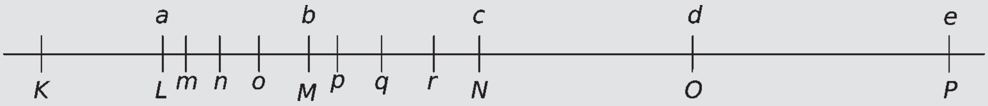


triângulo *VBC* similar a ele <ver *Introductio ad Quadratura curvarum*>. Com bastante ênfase, o eminente autor insiste que os pontos *C* e *c* não devem se distanciar um do outro por nenhum intervalo, por menor que seja, mas que, para o propósito de encontrar a proporção última entre as linhas *CE, Ec* e *Cc* (isto é, as proporções das fluxões ou velocidades) expressas pelos lados finitos do triângulo *VBC*, os pontos *C* e *c* devem precisamente coincidir, isto é, ser um único e mesmo ponto. Portanto, considera-se um ponto como sendo um triângulo ou supõe-se que um triângulo seja formado em um ponto, o que parece ser totalmente impossível conceber. Contudo, há pessoas que, embora recusem todos os outros mistérios, não têm qualquer dificuldade com os seus próprios; esses coam um mosquito e engolem um camelo.[14]

§35 Não sei se vale a pena observar que possivelmente certos homens podem esperar operar por meio de símbolos e suposições, na expectativa de evitar o uso de fluxões, momentos e infinitesimais. Eles procedem da seguinte maneira. Suponha-se que x seja a abscissa de uma curva e z, a outra abscissa da mesma curva. Suponha-se também que as respectivas áreas são xxx e zzz e que $z - x$ é o incremento da abscissa e $zzz - xxx$, o incremento da área, sem considerar quão grande ou quão pequeno podem ser esses incrementos. Divida-se agora $zzz - xxx$ por $z - x$, e o quociente será $zz + zx + xx$. E, supondo que z e x são iguais, esse mesmo quociente será $3xx$, que nesse caso é a ordenada, que, portanto, pode ser obtida independentemente de fluxões e infinitesimais. Mas há aqui uma evidente falácia: pois, em primeiro lugar, supõe-se que as abscissas z e x sejam desiguais, visto que sem tal suposição nenhum passo teria sido dado. Em segundo lugar, supõe-se novamente que elas sejam iguais, o que é uma inconsistência manifesta, correspondendo ao mesmo tipo de coisa que foi considerado anteriormente <ver §15>. E há de fato razão para pensar que toda tentativa de estabelecer a geometria abstrusa e refinada sobre fundamentos corretos e evitar a doutrina das velocidades, momentos etc., mostrar-se-á impraticável até quando o objeto e a finalidade da geometria forem melhor compreendidos do que aparentemente têm sido até agora. O eminente autor do método das fluxões sentiu essa dificuldade e, por conseguinte, consentiu essas abstrações sutis e essa metafísica geométrica, ambas indispensáveis — conforme ele próprio percebeu — a tudo que se possa fazer a partir dos princípios aceitos. Caberá ao leitor julgar o que ele fez a partir desses princípios em termos de demonstração. Deve-se, de fato, reconhecer que ele empregou as fluxões de modo semelhante ao andaime de uma construção, ou seja, como algo a ser posto de lado ou eliminado tão logo se encontre as linhas finitas proporcionais a elas. Mas, por outro lado, esses exponentes finitos são encontrados com a ajuda das fluxões. Assim, qualquer coisa obtida por meio de tais exponentes e proporções há de ser atribuída às fluxões, que devem, por isso, ser previamente conhecidas. Mas o que são essas fluxões?

As velocidades de incrementos evanescentes? E o que são esses mesmos incrementos evanescentes? Eles não são quantidades nem finitas, nem infinitamente pequenas, nem, ainda, nada. Não os poderíamos chamar de fantasmas de quantidades defuntas?

§36 Com muita frequência, os homens enganam a si mesmos e aos outros, agindo como se concebessem e compreendessem as coisas expressas pelos signos, quando na verdade não têm ideia alguma além daquela dos próprios símbolos empregados. Há razões para pensar que isso possa estar ocorrendo no presente caso. Supõe-se que as velocidades de quantidades nascentes ou evanescentes são expressas tanto por linhas finitas de uma magnitude determinada quanto por notas ou signos algébricos; mas suspeito que muitos daqueles que tomam o assunto como certo sem talvez jamais o haver examinado, se o submetessem a um cuidadoso escrutínio, descobririam ser impossível formular qualquer ideia ou noção dessas velocidades independentemente daquelas quantidades finitas e daqueles signos.



Suponha-se que a linha *KP* seja descrita pelo movimento de um ponto continuamente acelerado e que sejam geradas, em partículas iguais de tempo, as partes desiguais *KL, LM, MN, NO* etc. Suponha também que *a, b, c, d, e* etc. denotem as velocidades do ponto gerador em cada período da geração das partes ou dos incrementos. Observa-se facilmente que cada um desses incrementos é proporcional à soma das velocidades com as quais é descrito; e, consequentemente, que as várias somas das velocidades, geradas em partes iguais de tempo, podem ser representadas respectivamente pelas linhas *KL, LM, MN* etc. geradas nos mesmos tempos. Da mesma maneira, afirma-se com facilidade que a velocidade última gerada na primeira partícula de tempo pode ser expressa pelo símbolo a, a velocidade última gerada na segunda partícula expressa por b, a mesma velocidade gerada na terceira partícula expressa por c e assim por diante; que a é a velocidade de *LM* em *statu nascenti*, enquanto *b, c, d, e* etc. são as velocidades dos incrementos *MN, NO, OP* etc. em seus respectivos estados nascentes. Podeis continuar considerando essas mesmas velocidades como quantidades fluentes e crescentes, ou seja, tomando as velocidades das velocidades, e as velocidades das velocidades das velocidades, isto é, a primeira, segunda, terceira etc. velocidades *ad infinitum*. Essas séries sucessivas de velocidades podem ser expressas assim: a, $(b - a)$, $(c - 2b + a)$, $(d - 3c + 3b - a)$ etc., que podeis chamar pelo nome de fluxões primeira, segunda, terceira, quarta. Para uma expressão apropriada, podeis denotar a linha fluente variável

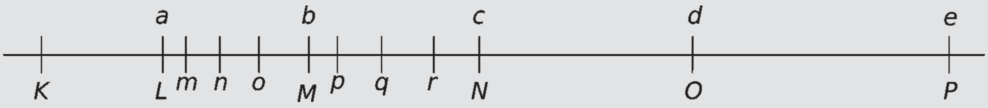
KL, KM, KN etc. pela letra x, e a fluxão primeira por $\dot{x}$, a segunda por $\ddot{x}$, a terceira por $\dddot{x}$ e assim sucessivamente *ad infinitum*.

§37 Nada mais fácil do que atribuir nomes, signos ou expressões a essas fluxões; tampouco é difícil computar e operar por meio desses signos. Mas será encontrada muita dificuldade em omitir os signos e, ainda assim, reter em nossas mentes as coisas que supomos serem significadas por eles. Não há qualquer dificuldade em considerar os exponentes, sejam geométricos, algébricos ou fluxionários, mas formar uma ideia precisa de, por exemplo, uma terceira velocidade, em si e por si mesma, *hoc opus*, *hic labor* (isso é o trabalho, isso é o esforço). Tampouco, de fato, é fácil formar uma ideia clara e distinta de uma velocidade qualquer, que exclua e prescinda de todo e qualquer comprimento de tempo e de espaço, bem como de todos e quaisquer sinais, signos ou símbolos. Isso, se me permitem julgar os demais a partir de mim mesmo, é impossível. A mim, parece evidente que medidas e signos são absolutamente necessários para conceber ou raciocinar sobre as velocidades e que, consequentemente, quando pensamos conceber as velocidades isoladamente e em si mesmas, estamos nos iludindo com vãs abstrações.

§38 Pode-se pensar talvez que um método mais fácil de conceber as fluxões seja supô-las como sendo as velocidades com as quais as diferenças infinitesimais são geradas. Desse modo, as primeiras fluxões seriam as velocidades das primeiras diferenças; as segundas, as velocidades das segundas diferenças; as terceiras fluxões, as velocidades das terceiras diferenças, e assim *ad infinitum*. Mas, sem mencionar a intransponível dificuldade de admitir ou conceber infinitesimais, e infinitesimais de infinitesimais etc., é evidente que essa noção de fluxões não concordaria com o modo de pensar do eminente autor, que não permitia negligenciar nem mesmo a menor das quantidades e que, portanto, recusava admitir na geometria a doutrina das diferenças infinitesimais, tanto que parece ter nitidamente introduzido o emprego de velocidades ou fluxões com o propósito de excluir e proceder sem aquelas diferenças.

§39 A outros, talvez possa parecer que formaríamos uma ideia mais justa de fluxões admitindo os incrementos finitos, desiguais e isocrônicos *KL, LM, MN* etc. e considerando-os em seu *statu nascenti*, bem como os seus próprios incrementos e os incrementos nascentes desses incrementos, e assim por diante; supondo ainda que os primeiros incrementos nascentes sejam proporcionais às primeiras fluxões ou velocidades, que os incrementos nascentes desses incrementos sejam proporcionais às segundas fluxões, que os terceiros incrementos nascentes sejam proporcionais às terceiras fluxões, e assim por diante. Assim como as primeiras fluxões são as velocidades dos primeiros incrementos nascentes, as segundas fluxões podem ser concebidas como as velocidades dos segundos incrementos nascentes, ao invés de velocidades de velocidades. Desse modo, a analogia das fluxões parece ser melhor preservada e essa noção parece tornar-se mais inteligível.

§40 De fato, pode parecer que, no caminho para obter a segunda ou a terceira fluxão de uma equação, as fluxões dadas eram consideradas mais como incrementos do que como velocidades. Mas o fato de considerá-las às vezes em um sentido e às vezes em outro, em um momento em si mesmas e em outro em seus exponentes, parece ter ocasionado uma parte não desprezível dessa confusão e obscuridade encontrada na doutrina das fluxões. Pode parecer, portanto, que essa noção possa ainda ser consertada e que, ao invés de fluxões de fluxões ou fluxões de fluxões de fluxões, e de segunda, terceira ou quarta etc. fluxões de uma quantidade dada, possa ser mais consistente e menos propenso a exceções falar da fluxão do primeiro incremento nascente, isto é, da segunda fluxão; da fluxão do segundo incremento nascente, isto é, da terceira fluxão; da fluxão do terceiro incremento nascente, isto é, da quarta fluxão. Cada uma dessas fluxões é concebida como respectivamente proporcional ao princípio nascente do incremento seguinte àquele do qual ela é a fluxão.



§41 Para uma concepção mais distinta disso tudo, pode-se considerar que, se o finito incremento LM for dividido em partes isócronas Lm, mn, no, oM, e o incremento MN dividido nas partes Mp, pq, qr, rN, isócronas às anteriores, assim como os incrementos totais LM, MN são proporcionais às somas das velocidades com que são descritos, do mesmo modo as partículas homólogas Lm, Mp são proporcionais às respectivas velocidades aceleradas com que são descritas. Assim como a velocidade da geração de Mp excede aquela de Lm, a partícula Mp também excede a partícula Lm. Em geral, assim como as velocidades isócronas descritas pelas partículas de MN excedem as velocidades isócronas descritas pelas partículas de LM, da mesma maneira as partículas da primeira excedem as partículas correspondentes da segunda. E isso persistirá, por menores que sejam as ditas partículas. Portanto, se ambas forem tomadas em seus estados nascentes, MN excederá LM, e esse excesso será proporcional ao excesso da velocidade b sobre a velocidade a. Podemos ver, então, que essa última explicação das fluxões, no final das contas, não se distingue da primeira <§36>.

§42 Mas, apesar de tudo o que se disse até aqui, deve-se ainda reconhecer que as partículas finitas *Lm* ou *Mp*, por menores que sejam consideradas, não são proporcionais às velocidades *a* e *b*, mas cada uma é proporcional a uma série de velocidades que se altera a cada momento ou, o que é a mesma coisa, a uma velocidade acelerada, com a qual cada uma é gerada durante uma certa partícula mínima de tempo. Além disso, deve-se reconhecer também que os princípios nascentes ou os finais evanescentes de quantidades finitas produzidas em momentos ou partes infinitamente pequenas de tempo são proporcionais somente às velocidades; que, então, para conceber as primeiras fluxões, devemos conceber o tempo dividido em momentos, os incrementos gerados naqueles momentos e as velocidades proporcionais àqueles momentos; que, para conceber as segundas ou terceiras fluxões, devemos supor que os princípios ou incrementos momentâneos admitem, eles próprios, outros incrementos momentâneos, que são proporcionais às suas respectivas velocidades com que são gerados; que as velocidades desses segundos incrementos momentâneos são segundas fluxões e aquelas de seus incrementos momentâneos nascentes, terceiras fluxões, e assim por diante *ad infinitum*.

§43 Ao subtrair o incremento gerado no primeiro momento daquele gerado no segundo, obtemos o incremento de um incremento. Ao subtrair a velocidade gerada no primeiro momento daquela gerada no segundo, obtemos a fluxão de uma fluxão. De igual maneira, ao subtrair a diferença das velocidades geradas nos dois primeiros momentos do excesso de velocidade no terceiro sobre aquela no segundo momento, obtemos a terceira fluxão. Em seguida, com a mesma analogia, podemos proceder para as fluxões quartas, quintas, sextas, etc. Se denominamos como a, b, c e d as velocidades dos momentos primeiro, segundo, terceiro e quarto, as séries das fluxões serão como antes a, $(b - a)$, $(c - 2b + a)$, $(d - 3c + 3b - a)$, *ad infinitum*, isto é, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, $\ddddot{x}$, *ad infinitum*.

§44 Assim, as fluxões podem ser consideradas sob diversas luzes e formas, que parecem ser igualmente todas de difícil concepção. Certamente, visto que é impossível conceber velocidade sem tempo ou espaço, independentemente de um comprimento finito ou duração finita <ver §31>, mesmo a compreensão das primeiras fluxões deve estar aparentemente acima dos poderes humanos. Se as primeiras são incompreensíveis, o que diríamos das segundas, terceiras etc. fluxões? Aquele que puder conceber o começo de um começo ou o fim de um fim, ligeiramente anterior ao primeiro ou ligeiramente posterior ao último, poderia ser talvez suficientemente perspicaz para conceber essas coisas. Mas a maioria dos homens, creio eu, descobrirá ser impossível compreendê-las em qualquer sentido que seja.

§45 Pensar-se-ia que os homens não podem falar de um modo demasiadamente exato sobre um assunto tão sutil. Todavia, conforme foi anteriormente sugerido, podemos frequentemente observar que os expoentes das fluxões ou os sinais (*notes*) que representam as fluxões confundem-se com as próprias fluxões. Não é esse o caso quando, logo após se dizer que as fluxões das quantidades fluentes são as celeridades de seus incrementos e que as segundas fluxões são as mutações das primeiras fluxões ou celeridades, nos dizem que $z''.\ z'.\ z.\ \dot{z}.\ \ddot{z}.\ \dddot{z}.$ <ver *De quadratura curvarum*> representam uma série de quantidades, na qual cada quantidade subsequente é a fluxão da precedente e cada quantidade antecedente é a quantidade fluente que tem na quantidade subsequente a sua fluxão?

§46 Diversas séries de quantidades e expressões, geométricas e algébricas podem ser concebidas por meio de linhas, superfícies e espécies, que poderiam ser continuadas indefinida ou ilimitadamente. Mas descobre-se não ser tão fácil assim conceber uma série de puras velocidades ou de puros incrementos nascentes, que seja distinta deles, mas que lhes seja correspondente. Alguns talvez possam ser levados a pensar que o autor tinha em vista uma série de ordenadas, na qual cada ordenada era a fluxão da sua precedente e a fluente da sua subsequente, isto é, que a fluxão de uma ordenada era ela própria a ordenada de uma outra curva e a fluxão dessa última ordenada era ainda a ordenada de alguma outra curva, e assim *ad infinitum*. Mas quem seria capaz de conceber a maneira como a fluxão (quer como velocidade quer como incremento nascente) de uma ordenada seria ela mesma uma ordenada? Ou, mais ainda, [quem seria capaz de conceber] que cada quantidade ou fluente precedente está relacionado à quantidade subsequente a ela ou a sua fluxão, do mesmo modo como a área de uma figura curvilínea está relacionada à sua ordenada, em conformidade com o que observa o autor, a saber, que cada quantidade precedente nessa série é como a área de uma figura curvilínea, da qual a abscissa é z e a ordenada, a quantidade seguinte?

§47 Em suma, parece que as velocidades são dispensadas e, no lugar delas, são introduzidas áreas e ordenadas. Mas, seja qual for o expediente pelo qual tais analogias ou expressões possam ser descobertas para facilitar as modernas quadraturas, ainda assim não descobriremos que elas proporcionam qualquer luz acerca da verdadeira natureza original das fluxões ou que nos permita formar, a partir disso, ideias precisas das fluxões consideradas em si mesmas. Em tudo isso, a intenção geral e definitiva do autor é muito clara, mas seus princípios permanecem obscuros. Talvez essas teorias do eminente autor não sejam, todavia, tão minuciosamente consideradas ou examinadas pelos seus discípulos, que parecem ávidos, conforme foi sugerido anteriormente, a operar ao invés de conhecer, a aplicar suas regras e suas formas ao invés de compreender seus princípios e aprofundar-se em suas noções. Apesar de tudo, a fim de segui-lo em suas quadraturas, eles devem certamente encontrar fluentes a partir de fluxões e, para isso, devem saber como encontrar fluxões a partir de seus fluentes e, para encontrar fluxões, eles devem primeiramente saber o que são as fluxões. De outra maneira, eles procederiam sem clareza e sem ciência. Portanto, o método direto precede o método inverso, e o conhecimento dos princípios é suposto em ambos. Mas operar de acordo com as regras e com o auxílio das fórmulas gerais, cujos princípios e razões originais não se compreendem, é fazer algo que deve ser considerado como puramente técnico. Portanto, mesmo que os princípios sejam ainda muito obscuros e metafísicos, eles devem ser estudados por quem deseja compreender a doutrina das fluxões. Nenhum geômetra pode aplicar as regras do eminente autor sem primeiro considerar as noções metafísicas das quais elas foram derivadas. Essas, muito embora sejam de extrema necessidade para a ciência – e nunca possam ser alcançadas sem uma concepção precisa, clara e exata (*precise, clear, and accurate*) dos princípios – são, entretanto, descuidadamente negligenciada por muitos; ao passo que somente as expressões são enfatizadas, consideradas e tratadas com grande habilidade e destreza para daí obter outras expressões por métodos que, considerados em si mesmos, são (para dizer o mínimo) suspeitos e indiretos, ainda que sejam apoiados pela indução e pela autoridade –, dois fatores suficientemente reconhecidos como produtores de uma fé racional e de uma persuasão moral, mas incapazes de produzir algo mais elevado que isso.

§48 Possivelmente esperais evitar a força de tudo o que foi dito e encobrir princípios falsos e raciocínios inconsistentes sob o pretexto geral de que essas objeções e observações são metafísicas. Mas isso é um pretexto fútil. Para sustentar o sentido e a verdade evidentes do que foi sugerido nas observações precedentes, apelo ao entendimento de todo leitor inteligente e sem preconceitos. Apelo igualmente para que decida se os pontos observados não constituem uma metafísica ainda mais incompreensível. E não a minha metafísica, mas a vossa própria. Que não se compreenda que concluo serem falsas ou fúteis as vossas noções porque elas são metafísicas. Nada é verdadeiro ou falso por essa razão. Não ajuda muito decidir se um assunto é metafísico ou não. A questão é saber se ele é claro ou obscuro, correto ou errado, bem ou mal deduzido.

§49 Ainda que incrementos momentâneos, quantidades nascentes e evanescentes, fluxões e infinitesimais de todos os graus sejam na verdade tais como entidades muito sombrias, tão difíceis de imaginar ou conceber distintamente que (para dizer o mínimo) não se pode admiti-los como princípios ou objetos de uma ciência clara e precisa, e ainda que apenas essa obscuridade e essa incompreensibilidade de vossa metafísica tenham sido suficientes para diminuir vossas pretensões de evidência, mostrei também até aqui, se eu não estiver errado, que vossas inferências não são mais legítimas do que a clareza de vossas concepções e que vossa lógica é tão objetável quanto o é vossa metafísica. Portanto, deveria parecer que, acima de tudo, vossas conclusões não são obtidas por um raciocínio correto conduzido a partir de princípios claros e que, consequentemente, o trabalho do analista moderno, apesar de sua extrema utilidade nos cálculos e construções matemáticas, não habitua nem qualifica a mente para apreender com clareza nem para inferir corretamente e que, por conseguinte, não tenhais qualquer direito, em virtude de tais hábitos, de impor-vos fora de vossa própria esfera, esfera além da qual vosso julgamento não há de se passar por superior ao dos demais homens.

§50 Há muito tempo suspeito que essas análises modernas não são científicas e, sobre isso, fiz publicar algumas sugestões há cerca de vinte cinco anos.[15] Desde então, dispersei-me com outras ocupações e imaginava poder dedicar-me a algo melhor do que a deduzir e reunir meus pensamentos sobre um assunto tão sutil – embora ultimamente me tenham solicitado a desenvolver melhor as minhas sugestões. Entretanto, se a pessoa que assim me solicitou parecesse pensar de modo suficientemente maduro para compreender a metafísica que ele deseja refutar ou a matemática que ele deseja defender, eu teria me poupado das perturbações de escrever com o propósito de obter o seu convencimento. Do mesmo modo, agora eu não teria perturbado nem a vós nem a mim mesmo com esse discurso, após uma interrupção tão longa desses estudos, se não fosse para impedir, até onde posso, que arrogásseis ter autoridade sobre vós mesmos e sobre quaisquer outros em assuntos de extrema importância e interesse. Com a finalidade de vos permitir compreender mais claramente a força e o propósito das observações anteriores e estendê-las ainda mais com vossas meditações, acrescentarei as seguintes questões:

Questão 1. As proporções entre extensões assinaláveis não constituiriam o objeto da geometria? Haveria alguma necessidade de considerar quantidades como infinitamente grandes ou como infinitamente pequenas?

Questão 2. A finalidade da geometria não seria medir a extensão finita e assinável? Não seria esse objetivo prático aquilo que primeiro conduziu o homem ao estudo da geometria?

Questão 3. Equívocos cometidos com relação ao objeto e à finalidade da geometria não teriam gerado dificuldades desnecessárias e buscas mal orientadas nessa ciência?

Questão 4. Os homens poderiam dizer propriamente que agem segundo um método científico sem que concebam claramente o objeto de que se ocupam, a finalidade a que se propõem e o método mediante o qual realizam a sua investigação?

Questão 5. Não seria suficiente [admitir] que qualquer número assinalável de partes possa estar contido em qualquer grandeza assinalável? Não seria desnecessário, assim como absurdo, supor que a extensão finita seja infinitamente divisível?

Questão 6. Em uma demonstração geométrica, os diagramas não deveriam ser considerados signos de todas as possíveis figuras finitas, de todas as extensões ou magnitudes do mesmo tipo sensíveis e imagináveis?

Questão 7. Seria possível livrar a geometria de dificuldades e absurdos insuperáveis supondo que seu objeto verdadeiro seja a ideia abstrata geral de extensão ou a extensão externa absoluta?

Questão 8. As noções de tempo absoluto, espaço absoluto e movimento absoluto não pertenceriam à metafísica mais abstrata? Para nós, seria possível medi-los, calculá-los ou conhecê-los?

Questão 9. Os matemáticos não se engajam em disputas e paradoxos acerca do que eles não concebem nem podem conceber? A doutrina das forças não seria uma prova suficiente disso? <Ver o tratado em latim, *De motu*, publicado em Londres, no ano de 1721>[16]

Questão 10. Na geometria, não seria suficiente considerar a magnitude finita assinalável, sem nos envolvermos com o infinito? Não seria mais correto, em lugar de curvas, medir grandes polígonos de lados finitos, evitando assim supor que essas curvas sejam polígonos de lados infinitesimais, suposição essa que não é nem verdadeira nem concebível?

Questão 11. Muitos pontos que não são prontamente aceitos não seriam, todavia, verdadeiros? Os pontos abordados nas duas questões seguintes, não poderiam eles ser exemplos disso?

Questão 12. Seria possível que houvéssemos obtido uma ideia ou noção de extensão anterior à do movimento? Ou, se um homem jamais houvesse percebido o movimento, ele jamais teria sabido ou concebido que uma coisa está distante da outra?

Questão 13. A quantidade geométrica possuiria partes coexistentes? Toda quantidade não estaria em um fluxo, assim como estão o tempo e o movimento?

Questão 14. Poder-se-ia supor que a extensão seja um atributo de um Ser imutável e eterno?

Questão 15. O fato de recusarem o exame dos princípios e a distinção dos métodos empregados na matemática, não revelaria o fanatismo dos matemáticos?

Questão 16. Não se disseminam entre os analistas certas máximas que afrontam o bom senso? Não seria uma dessas máximas a suposição comum de que uma quantidade finita, sendo dividida por zero, torna-se infinita?

Questão 17. Os diagramas geométricos considerados de maneira absoluta ou em si mesmos, ao invés de como representantes de todas as magnitudes ou figuras finitas do mesmo tipo, não seriam a causa principal para supor que a extensão finita seja infinitamente divisível e de todas as dificuldades e absurdos daí decorrentes?

Questão 18. Do fato de as proposições geométricas serem gerais e, por conseguinte, as linhas empregadas nos diagramas converterem-se em substitutas ou representantes gerais, não deveria se seguir que não podemos limitar ou tomar em consideração (*consider*) o número de partes em que essas linhas particulares sejam divisíveis?

Questão 19. Quando se diz ou se infere que certa linha traçada no papel contém mais do que qualquer número assinalável de partes, na verdade, nada mais se pretende dar a entender senão que ela seria um signo que representa indiferentemente todas as linhas finitas, por maiores que sejam. Por meio de qual capacidade relativa aquela linha conteria, isto é, representaria mais do que qualquer número assinalável de partes? Não seria totalmente absurdo supor que uma linha finita, considerada (*consider*) em si mesma ou em sua própria natureza positiva, devesse conter um número infinito de partes?

Questão 20. Todos os argumentos em favor da infinita divisibilidade da extensão finita não pressuporiam e implicariam que o objeto da geometria seja ou ideias gerais abstratas ou a extensão absoluta externa? E, portanto, aqueles argumentos também não cessariam e esvaneceriam juntamente com essas pressuposições?

Questão 21. A suposta divisibilidade infinita da extensão finita não tem sido uma cilada e um constante tormento para os matemáticos? Uma quantidade diminuída infinitamente e uma quantidade infinitamente pequena não seriam a mesma coisa?

Questão 22. Seria mesmo necessário considerar as velocidades de quantidades nascentes ou evanescentes, de momentos ou de infinitesimais? Não seria um motivo de repreensão aos matemáticos a introdução de coisas tão inconcebíveis?

Questão 23. As inconsistências poderiam ser verdadeiras? Dever-se-ia admitir afirmações inconsistentes e absurdas acerca de qualquer tema ou em qualquer ciência? A permissão para o emprego de infinitos não deveria ser encarada como pretexto e desculpa suficientes para admitir esse tipo de afirmações na geometria?

Questão 24. Não seria correto dizer que não se conhece propriamente uma determinada quantidade quando conhecemos [apenas] a proporção entre ela e outras quantidades dadas? Essa proporção poderia ser conhecida apenas por meio de expressões ou exponentes, sejam geométricos, algébricos ou aritméticos? As expressões em termos de linhas ou espécies não seriam úteis somente na medida em que fossem redutíveis a números?

Questão 25. A disposição e a inclinação mais geral da matemática não seria encontrar expressões ou notações apropriadas para as quantidades? A operação aritmética não seria o que limita e define o seu uso?

Questão 26. A analogia e o emprego de signos têm sido suficientemente considerados pelos matemáticos? Até que ponto a restrita natureza específica das coisas corresponderia aos signos?

Questão 27. Quando enunciamos um caso geral na álgebra pura, em virtude de termos total liberdade para fazer um símbolo denotar uma quantidade positiva ou negativa ou, mesmo, absolutamente nada, poderíamos então reivindicar o mesmo direito diante de um caso geométrico, no qual somos limitados por hipóteses sobre e por raciocínios a partir de propriedades e relações particulares concernentes às figuras?

Questão 28. A mudança de hipótese ou, conforme poderíamos dizer, a *fallacia suppositionis* não seria um sofisma que contagia profunda e amplamente todos os raciocínios modernos, tanto na filosofia mecânica quanto na geometria abstrusa e sutil?

Questão 29. Poderíamos formar uma ideia ou noção de velocidade que fosse distinta e independente de sua medida, a exemplo do que faríamos no caso do calor, se pudéssemos formar uma ideia dele que fosse distinta e independente dos graus verificados no termômetro com o qual ele é medido? Não seria isso o que se supõe nos raciocínios dos analistas modernos?

Questão 30. O movimento poderia ser concebido em um ponto do espaço? Se não se pode fazer isso para o movimento, poder-se-ia fazê-lo para a velocidade? E se tampouco é possível fazê-lo nesse último caso, poder-se-ia conceber a velocidade primeira ou última em um mero limite, inicial ou final, do espaço descrito?

Questão 31. Se não há incrementos, poderia haver alguma *ratio* entre incrementos? Poder-se-iam considerar os nadas como proporcionais às quantidades reais? Ou, então, falar de suas proporções não seria dizer contrassensos? Da mesma forma, em qual sentido deveríamos compreender a proporção entre uma superfície e uma linha, entre uma área e uma ordenada? Seria possível pretender expressar proporções mútuas entre espécies e números, ainda que cada uma delas expressem propriamente quantidades não homogêneas?

Questão 32. Se todos os círculos assinaláveis pudessem ser quadrados, então, para todos os efeitos, não se quadraria o círculo tanto quanto a parábola? Ou poderia uma área parabólica ser efetivamente medida de modo mais preciso que um círculo?

Questão 33. Não seria mais correto fazer uma aproximação razoável do que se empenhar para alcançar a precisão por meio de sofismas?

Questão 34. Não seria mais decente proceder por tentativas (*trials*) e induções do que pretender demonstrar por meio de princípios falsos?

Questão 35. Haveria algum meio de chegar à verdade, ainda que os princípios não fossem científicos nem os raciocínios, exatos? Se houvesse algum meio para tal, ele deveria ser chamado de truque ou de ciência?

Questão 36. Poderia haver alguma ciência com relação à conclusão quando não houvesse qualquer evidência a respeito dos princípios? Um homem poderia ter qualquer evidência a respeito dos princípios sem ser capaz de compreendê-los? E, sendo assim, os matemáticos de hoje agiriam como homens de ciência quando dedicam mais esforço a aplicarem seus princípios do que a compreendê-los?

Questão 37. O maior gênio não poderia se frustrar ao lutar com falsos princípios? Quadraturas precisas poderiam ser obtidas sem novos *postulata* ou suposições? Se não, não se deveria preferir aqueles que fossem inteligíveis e consistentes em vez do contrário? <Ver §28 e 29>.

Questão 38. Os tediosos cálculos da álgebra e das fluxões seriam os métodos mais indicados para aperfeiçoar a mente? O costume de tudo raciocinar com signos e figuras matemáticas não impediria os homens de saber como raciocinar sem eles?

Questão 39. Qualquer que seja o desembaraço que os analistas tenham adquirido para exprimir um problema ou para encontrar expressões adequadas para quantidades matemáticas, eles deveriam necessariamente inferir que possuem uma habilidade proporcional para conceber e exprimir outros assuntos?

Questão 40. Não seria um caso ou uma regra geral que da divisão de produtos iguais por um mesmo coeficiente resultará coeficientes iguais? Contudo, esse coeficiente poderia ser interpretado como o ou nada? Ou haveria quem dissesse que, ao dividir a equação $2 \times o = 5 \times o$ por o, os quocientes de ambos os lados são iguais? Poderia haver, portanto, um caso geral que valesse para todas as quantidades, mas que não se estendesse aos nadas ou não incluísse o caso do nada? A inclusão do nada na noção de quantidade não revelaria a incursão dos homens em raciocínios falsos?

Questão 41. Não seriam os homens capazes de no raciocínio mais geral acerca de igualdades e proporções realizarem demonstrações como as que realizam na geometria? Em tais demonstrações, eles não estariam obrigados a realizar estritamente o mesmo raciocínio que realizam na geometria? E esses seus raciocínios não seriam deduzidos dos mesmos axiomas de que são deduzidos aqueles da geometria? Portanto, a álgebra não seria tão verdadeiramente uma ciência quanto o é a geometria?

Questão 42. Não poderiam os homens raciocinar com espécies tão bem como raciocinam com palavras? As mesmas regras lógicas não vigorariam em ambos os casos? Não teríamos o direito de esperar e exigir o mesmo grau de evidência em ambos os casos?

Questão 43. Um algebrista, um fluxionista, um geômetra ou um demonstrador de qualquer coisa poderiam esperar obter indulgência por empregarem princípios ou realizarem raciocínios, ambos, incorretos? Um sinal ou espécie algébrica poderia ao final de um processo ser interpretado em um sentido que não lhe pudesse ser assinalado no início desse processo? Ou poderia qualquer suposição particular pertencer a um caso geral que não fosse consistente com o raciocínio que dela se segue?

Questão 44. A diferença entre um mero calculador e um homem de ciência não seria senão que, enquanto um calcula com base em princípios claramente concebidos e por meio de regras bem demonstradas, o outro não o faz?

Questão 45. Embora a geometria seja uma ciência, a álgebra seja admitida como tal e o método analítico seja o mais excelente método, na aplicação da análise à geometria, os homens não poderiam ter, entretanto, admitido falsos princípios e métodos equivocados de raciocínios?

Questão 46. Embora, quando os raciocínios algébricos se limitam aos signos ou às espécies que representam quantidades em geral, se admita que eles são extremamente exatos, não poderíeis, apesar de tudo, cair em erro se, quando eles forem por vós limitados a representar coisas particulares, não limitásseis a vós mesmos a raciocinar em conformidade com a natureza de tais coisas particulares? Esse erro deveria ser imputado à álgebra pura?

Questão 47. A visão dos matemáticos modernos não pareceria mais apta a alcançar a expressão obtida por um artifício do que a ciência obtida por demonstração?

Questão 48. Não poderia haver uma metafísica sólida assim como haveria uma metafísica incerta? Uma lógica sólida assim como uma lógica incerta? A análise moderna não poderia ser subsumida a uma dessas duas denominações, e a qual delas?

Questão 49. Não haveria uma *philosophia prima*, uma determinada ciência transcendental, que fosse superior à matemática e mais abrangente que ela e que exigisse dos nossos analistas modernos mais uma atitude de aprendizagem do que uma atitude de desprezo em relação a ela?

Questão 50. Desde a redescoberta do conhecimento matemático, não ocorreram disputas e controvérsias infindáveis entre os matemáticos? Isso não depreciaria a comprovação de seus métodos?

Questão 51. Qualquer outra coisa além da metafísica e da lógica poderia abrir os olhos dos matemáticos e livrá-los de suas dificuldades?

Questão 52. De acordo com os princípios aceitos, poderia uma quantidade ser reduzida a nada por meio de qualquer divisão ou subdivisão, por mais longe que se conduza essa operação?

Questão 53. Se a finalidade da geometria for a prática, se essa prática for medir e se medirmos somente extensões assinaláveis, não se seguiria que aproximações ilimitadas respondem inteiramente às intenções da geometria?

Questão 54. Não se poderia fazer por meio de quantidades finitas as mesmas coisas que são feitas atualmente por meio de quantidades infinitas? E isso não seria um grande alívio para a imaginação e o entendimento dos matemáticos?

Questão 55. Se os médicos, os anatomistas, os comerciantes de animais, todos os filomatemáticos (*philomathematical*), enfim, homens que admitem a doutrina das fluxões em decorrência de uma fé implícita, poderiam de bom grado insultar outros homens porque acreditam naquilo que não compreendem?

Questão 56. A filosofia corpuscular, experimental e matemática, tão cultivada ultimamente, não tem ocupado demasiadamente a atenção dos homens, da qual uma parte poderia ser empregada de maneira mais útil?

Questão 57. Não é por essa e por outras causas concorrentes que as mentes dos homens especulativos teriam declinado, provocando a degradação e o entorpecimento das suas mais elevadas faculdades? Não poderíamos assim explicar a mesquinhez e a intolerância predominantes entre muitos homens que se passam por homens de ciência, a sua incapacidade para coisas morais, intelectuais ou teológicas, a sua propensão a medir todas as verdades pelos sentidos e pela experiência da vida animal?

Questão 58. Seria realmente um efeito do [livre] pensamento que os mesmos homens admirem o eminente autor por suas fluxões e o ridicularizem por sua religião?

Questão 59. Se certos virtuosos filosóficos da atual época não têm religião, pode-se dizer que é por causa da falta de fé?

Questão 60. Defender questões de fé a partir de seus efeitos não seria um modo mais correto de raciocinar do que demonstrar princípios matemáticos por suas conclusões?

Questão 61. Não seria menos reprovável admitir questões de fé acima da razão do que aquelas contrárias à razão?

Questão 62. Não se poderia ter mais direito de admitir mistérios na fé divina do que na ciência humana?

Questão 63. Aqueles matemáticos que bradam contra os mistérios teriam alguma vez examinado os seus próprios princípios?

Questão 64. Os matemáticos, que são tão sensíveis quando se trata de questões religiosas, seriam estritamente escrupulosos em sua própria ciência? Eles não se submeteriam à autoridade, não admitiriam algo movidos pela confiança e não acreditariam em questões inconcebíveis? Eles não possuiriam seus mistérios e, ainda mais, suas incoerências e contradições?

Questão 65. Julgar de modo cauteloso, sincero e modesto sobre outros assuntos não viria a ser uma atitude digna de homens que se mostram embaraçados e perplexos acerca de seus próprios princípios?

Questão 66. A analítica moderna não forneceria um forte *argumentum ad hominem* contra os atuais infiéis que cultivam a matemática?

Questão 67. A partir das observações acima mencionadas, se seguiria que a retidão e a exatidão do raciocínio sejam a característica peculiar dos dias atuais? O moderno crescimento da infidelidade poderia ser atribuído a uma distinção tão verdadeiramente valiosa?

F I M

Traduzido do original em inglês por Alex Calazans e Eduardo Salles de Oliveira Barra

Notas

1 A tradução do texto *O analista* foi realizada principalmente a partir do texto publicado nos *Works* de Berkeley, editados por A. A. Luce e T. E. Jessop (Berkeley, 1979). Entretanto, realizou-se um constante cotejamento com a edição preparada por D. Jesseph (Berkeley, 1992). Desse modo, optou-se por seguir muitas das convenções adotadas por Jesseph e que não aparecem na edição de Luce e Jessop. Uma delas é a inclusão da tábua de *Conteúdos*. Outra diz respeito à notação de binômios, ou seja, utiliza-se $(x + o)^n$ ao invés de $\overline{x + o}|^n$. As figuras também foram construídas a partir da edição de Jesseph, respeitando-se a maneira pela qual se constrói atualmente a orientação de eixos. As notas originais de Berkeley, utilizadas para referir às obras analisadas ou para mencionar parágrafos anteriores, foram acrescentadas ao corpo do texto com o uso dos sinais < >. Três outras traduções foram utilizadas. Duas são para o francês, realizadas por André Leroy (Berkeley, 1936) e por Michel Blay (Berkeley, 1999). A outra tradução é para o espanhol, realizada por José A. Robles (Berkeley, 2006).
2 Aqui Berkeley está se referindo ao seu texto que tem por título *Alciphron; or the minute philosopher*, publicado em Londres em 1732. Acerca da tradução do termo "*minute*", cf. a nota 1 da introdução.
3 Essa seção dos conteúdos não aparece na edição de A. A. Luce e T. E. Jessop.
4 Essa passagem é uma paráfrase da introdução do texto de Newton *De quadratura curvarum,* publicado por ele pela primeira vez como apêndice da edição latina de sua *Ótica* (1704). Pode-se encontrar o texto de Newton em: Whiteside, 1967-1980, v. 8, p 123-9.
5 O termo utilizado por Berkeley é *exponents*. Há, no mínimo, duas possibilidades para a tradução de *exponent*. A primeira é traduzi-lo como potência matemática. Por exemplo, em x^2 o número 2 é o expoente (ou a potência) de x. A outra é traduzi-lo como representante, advogado ou intermediador de algo. É mais provável que o sentido pretendido por Berkeley seja melhor expresso pela segunda tradução que pela primeira. Pois, entre outros casos, visto que na frase anterior afirma-se que "linhas são proporcionais" às fluxões, essas linhas são os *representantes* finitos das fluxões. Todavia, o emprego de "representante" poderia sugerir a ideia de representação, algo que Berkeley apenas evoca explicitamente a partir da Questão 15, ao final do texto, na seção das Questões. Por outro lado, o emprego do equivalente mais óbvio, a saber, "expoente" poderia, no entanto, sugerir o sentido de potência de um número ou de uma variável, que é o sentido mais corrente associado a esse termo em contextos matemáticos. Foi por isso que, precariamente, optou-se por "exponente".
6 Sobre essa passagem, Jesseph declara o seguinte: "essa observação mostra que Berkeley não estava disposto a afastar-se dos padrões clássicos de rigor. Os 'princípios aceitos', evidentemente, são aqueles da geometria grega; e a afirmação de que nenhuma quantidade geométrica pode ser esgotada pela divisão somente pode ser lida como uma declaração de que nenhum número *finito* de divisões pode reduzir uma magnitude finita a nada. É claro que, ao prosseguir infinitamente o processo de divisão, permitir-se-ia que uma quantidade finita fosse esgotada, mas Berkeley não está disposto a admitir tal infinita subdivisão" (Jesseph, 1993, p. 196).
7 A correspondência de Newton referida aqui por Berkeley foi publicada entre 1712 e 1713 no *Commercium epistolicum D. Johannis, et aliorum de analysi promota*, um documento solicitado pela *Royal Society* a John Collins – que contou com a intervenção torrencial e velada de Newton, então presidente da *Royal Society* – a fim de dirimir a polêmica sobre a prioridade da criação do cálculo infinitesimal entre ele e Leibniz.
8 Referência à querela, entre Newton e Leibniz, a respeito da prioridade da invenção do cálculo infinitesimal.
9 "Rigor", "exatidão". Essa não é a primeira vez que Berkeley utiliza o termo ἀκρίβεια no contexto da matemática. Outra utilização acontece em seu texto de juventude *Comentários filosóficos*, entrada 313: "Que direi? Ousarei declarar que a admirada ἀκρίβεια matemática, essa preferida do momento, é uma ninharia?" (Conte, 2010, p. 441).
10 Dito de outra maneira, aqui se formam duas proporções cuja subtangente *PT* é a quarta proporcional, ou seja, tanto em $RN : RB :: PB : PT$ quanto em $dy : dx :: y : PT$.
11 O teorema aqui referido por Berkeley é o, assim chamado, "teorema do eixo-tangente", que diz basicamente que a subtangente da parábola é bissectada no vértice. O texto de Apolônio diz que "Se, em uma parábola [ver a figura do §21], for tomado um ponto [*B*] e, a partir dele, for traçada uma ordenada [*PB*] ao diâmetro [*MA*] e, tomando a linha compreendida entre a interseção dessa ordenada e o vértice sobre o diâmetro [*AP*] cortada por essa ordenada sobre o diâmetro a partir do vértice , for traçada uma linha reta igual a partir da sua extremidade [*AT*], então a linha reta

[*TB*] unindo o ponto assim resultante ao ponto antes tomado tocará a seção [isto é, será a tangente da seção naquele ponto]" (Apolônio, 1998, p. 57-8).

12 Isto é, $2x : y :: m : (n + z)$. Realizando a operação, essa proporção torna-se igual a $n + z = my/2x$.

13 Berkeley refere-se aqui ao conceito newtoniano de velocidade nascente ou evanescente, isto é, velocidades que estão em seu *primeiro* ou *último* estado.

14 Mais uma frase bíblica utilizada retoricamente por Berkeley. Cf.: Mateus 23,24.

15 Berkeley está fazendo referência ao texto publicado em 1709, *Tratado sobre os princípios do conhecimento humano*, particularmente em §123-134.

16 Existe tradução para o português do *De motu* de Berkeley, feita por Marcos Rodrigues da Silva (cf. Berkeley, 2006a).