Sur *Les Éléments* d'Euclide *

Voici le premier volume (sur quatre prévus pour l'ensemble des 13 livres) de cette importante traduction commentée du monument euclidien. L'introduction en est assurée par Maurice Caveing, auteur d'une thèse qui a fait date par sa science comme par son ampleur sur *La Constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque* (publiée en 1982 à Lille, cf. Bibliographie, p. 12, après avoir été soutenue en 1977).

Dans un « avertissement » (p. 5-8), l'auteur, mathématicien spécialisé dans l'histoire et l'épistémologie de la science grecque, définit son projet, caractérisé par des exigences d'exactitude historique et d'objectivité lucide (jusqu'à reconnaître, en passant, les limites de la règle — en quelque sorte régressive et « pré-saussurienne » — de la correspondance bi-univoque des mots entre deux langues, dogme d'où résulte, même en science et en philosophie, la pratique d'un charabia ou d'un volapük extérieur à toute langue réelle[1]). *Les Éléments* n'inspirent plus, en effet, du moins directement et sans le détour du détachement historique, la recherche vivante et actuelle. Quant aux commentaires et aux notes infrapaginales, ils se veulent précis, suffisants et éclairants, tant du point de vue philologique et linguistique que sous l'angle mathématique.

L'Introduction générale de M. Caveing comprend quatre chapitres (p. 13-44, 45-83, 84-113, 114-148) traitant de la tradition euclidienne dans l'Antiquité, de l'histoire du texte et de ses traductions anciennes et modernes, de la situation des *Éléments* (nature et genèse) dans les mathématiques grecques et, enfin, *last but not least*, de la question de la forme (ou du raisonnement démonstratif).

Nous n'insisterons pas, malgré sa haute tenue, égale à celle des suivants, sur le premier chapitre, inévitablement marqué par la minceur des documents relatifs à la personne d'Euclide ; de même, le deuxième chapitre, malgré son intérêt pour

* À propos de : EUCLIDE D'ALEXANDRIE, *Les Éléments*. Trad. du texte de Heiberg. Vol. I : *Introduction générale* par Maurice CAVEING ; Livres I-IV : *Géométrie plane*, trad. et commentaires par Bernard VITRAC. Paris, Presses universitaires de France, 1990. 15 x 21,8, 531 p., index (« Bibliothèque d'histoire des sciences »).

1. Cf. les réflexions de P. Garniron (l'un des meilleurs traducteurs actuels de Hegel, pratiquement bilingue et agrégé de philosophie) dans le tome VII des *Leçons sur l'Histoire de la philosophie* de HEGEL, Paris, Vrin, 1991.

l'histoire des traductions (principalement des traductions du grec à l'arabe et du grec, ou de l'arabe, au latin, avant les éditions et les traductions de la Renaissance et de la suite) ne peut ici qu'être salué brièvement. Mentionnons pourtant la *princeps* de Bâle, 1530 (S. Grynaeus l'aîné, édition d'ailleurs médiocre, mais augmentée des *Commentarii* de Proclus sur le Premier Livre des *Éléments*), puis la traduction italienne de Tartaglia (Venise, 1543), la traduction anglaise de Billingsley (Londres, 1570), les versions latines de Commandin (Pesaro, 1572) et de Clavius (Rome, 1574). Parmi les grandes éditions des œuvres d'Euclide, il convient de retenir, seule édition complète jusqu'à Heiberg, celle de D. Gregory (Londres, 1703) ; en version française, on retient D. Henrion (1615) et Peyrard (1804, éditeur des textes à Paris, 1814-1818, étape importante), en version anglaise l'édition renommée de Heath (Cambridge, 1908, nombreuses rééditions américaines, amplement documentée et à bon droit utilisée par la présente traduction, enfin la grande édition critique de I. L. Heiberg, base principale de B. Vitrac et qui, dit l'auteur (p. 5), « fait toujours autorité » (1883-1888)[2].

Avec le troisième Livre de l'Introduction, l'intérêt croît aux yeux de l'amateur de mathématiques. Il faut d'abord éviter de juger que les *Éléments* d'Euclide « sont la somme du savoir mathématique de leur époque » (p. 84), ils ont au contraire leur particularité sélective. L'œuvre est un cas, parmi d'autres, « de mise en ordre de résultats essentiels » (*ibid.*). Proclus, le néo-platonicien, a beau être de basse époque, il n'en a pas moins des remarques précieuses, par exemple sur les « éléments » au sens cardinal, communs à toute la science (cf. p. 84-88), principiels et en bon ordre. D'après la même source, traduite aux p. 89-92, il semble possible de discerner, à travers des différences d'approche, « plusieurs couches rédactionnelles » (p. 88), d'ailleurs sans rapport avec quelque ordre que ce soit d'apparition historique (cf. p. 89). Les mathématiques grecques ne sont pas nées de rien, elles ont puisé dans un fonds principalement mésopotamien pour la géométrie (et égyptien pour la pratique arithmétique) ; Thalès, on le sait, n'est guère plus qu'un nom, auquel sont rattachées les propositions concernant la dichotomie du cercle, l'égalité des angles à la base du triangle isocèle, celle des angles opposés par le sommet, celle des triangles ayant un côté égal et deux angles chacun à chacun égaux (cf. p. 97). Ces propositions ont en commun « la prédominance de certains thèmes intuitifs comme les symétries et les égalités d'angles, qui jouent un rôle médiateur » (p. 97). La géométrie grecque reprend un acquis antérieur, mais elle innove en ce que, dès le début, « au lieu d'être la fin ou l'occasion d'un calcul numérique particulier, la figure est interrogée en elle-même, invitée à exhiber ce qui la caractérise et la différencie d'une autre ; elle devient en soi un objet d'étude » (p. 98) ou de contemplation (*théoria*) non pas seulement esthétique, mais cognitive (cf. *ibid.*). On entre dès lors dans « le libre exercice de la parole » (*ibid.*) qui permet le dialogue et la claire communication entre égaux. Non moins que les fondateurs ioniens, l'œuvre de leurs successeurs reste obscure, notamment celle de Pythagore ; d'après Eudème et Proclus, Œnopide de Chio, d'une génération antérieure à Hippocrate de Chio, aurait inauguré « la maîtrise opératoire de l'égalité des angles » (p. 100 — construction par la règle et le compas, étape

2. Détaillée sous le nom d'Euclide (sigle : *EHM*), p. 11 dans la liste d'abréviations.

méthodique importante, *ibid.*). Quant à Hippocrate, on arrive à reconstituer (cf. p. 100-101) comme acquise à son époque « une bonne partie des IV premiers Livres d'Euclide » (*ibid.*) ainsi qu'une orientation théorique décidée (réflexion sur la *possibilité* même de la quadrature du cercle, cf. p. 101). Théodore de Cyrène, à peu près contemporain d'Hippocrate (et placé si haut dans le *Théétète*) était selon Platon un mathématicien universel, il traita sans doute des longueurs incommensurables (cf. le *Ménon*) qu'Hippocrate n'abordait pas encore de front. L'école de Platon, puis celle d'Aristote firent progresser surtout la détermination des structures formelles. Eudoxe de Cnide (*floruit* vers 350) aurait été d'après Archimède à l'origine de certaines généralisations et, entre autres, de la méthode dite d'exhaustion (cf. p. 108-110). On en arrive, après bien des lacunes dans notre information, à Euclide, qui achève, selon Proclus, le travail de ses prédécesseurs sur les incommensurables et les proportions (mise au point des Livres V et X) qui ne remonteraient pas tels quels respectivement à Eudoxe et à Théétète (cf. p. 112). Ainsi, « la rigueur euclidienne est, pour une bonne part, due à Euclide » (p. 113).

Le quatrième chapitre de l'Introduction est précisément consacré aux aspects structuraux, lesquels ont chance d'être plus spécifiquement euclidiens. Malgré ce qu'on sait de certains traités en forme antérieurs à Euclide, notamment ceux d'Autolycos de Pitane (cf. p. 114-115 et plus haut, p. 93) et qui permettent de croire que les structures formelles repérables dans Euclide étaient déjà de règle en mathématiques (y compris l'astronomie et la mécanique, comme le montre l'exemple d'Autolycos, plus optique et harmonie) à la fin du IVe siècle, on doit reconnaître l'accomplissement d'Euclide et admettre qu'à l'époque d'Eudème et d'Hippocrate, on en était encore à « une argumentation d'accompagnement, guidée par l'intuition de la figure » (p. 115). Il va de soi que la surcharge dont a bénéficié le nom de Pythagore, ainsi qu'à un moindre degré la réflexion dialectique des Éléates, n'ont pas de valeur historique en ce qui regarde les origines de l'appareil démonstratif des *Éléments* d'Euclide (cf. p. 115-116 et plus haut p. 103 et n. 244, important témoignage critique d'Aristote sur les Pythagoriciens d'avant Socrate et Platon). Du reste, outre le monisme intransigeant de l'école de Parménide, « on ne dispose, relève M. Caveing (p. 116), d'aucun témoignage assignant à ces philosophes des énoncés explicites de principes mathématiques ». En opérant la jonction entre la dialectique éléatique et la réflexion de Socrate sur les définitions avec les difficultés des mathématiques (en particulier, les incommensurables), l'Académie de Platon a joué le rôle dévolu par une tradition tenace au prestigieux Pythagore (cf. plus haut, p. 103 sq.). On a réfléchi, dans l'Académie, « sur les objets premiers des mathématiques : l'unité arithmétique, le point, les espèces de la grandeur — ligne, surface, solide —, le droit et le courbe, l'angle, les figures, tant du point de vue de leurs définitions et de leurs relations, que de celui de leur existence » (p. 116), peut-être dans l'horizon d'un savoir pur et anhypothétique. Mais ce qui paraît avoir eu le plus d'influence sur le système des propositions de base des *Éléments* (et dont on garde la trace chez Aristote) est le remaniement, au IVe siècle, de la théorie des proportions, en mettant en avant « un critère géométrique simple de similitude, le parallélisme » (p. 116) ainsi que les axiomes de l'égalité, liés au progrès de la théorie de la mesure des grandeurs.

Les principes (*archaï*), c'est-à-dire « les points de départ des chaînes déductives » se laissent distinguer en définitions (*horoï*, au nombre de 130 en tout), en

« demandes » (*aitèmata*, postulats, au nombre de 5) et en notions communes (*koinaï ennoiaï*, axiomes, au nombre de 9) (cf. p. 117). Il faut remonter d'abord à la doctrine régnante à la fin du IIIe siècle, celle d'Aristote (*Seconds analytiques*) déclarant, exemples mathématiques à l'appui, que, dans la constitution de toute science apodictique, il intervient : 1) la position d'existence du genre, 2) les principes communs ou axiomes, 3) les propriétés, dont on pose seulement la signification. La fonction des démonstrations concerne l'existence des objets seconds, les propriétés. Les axiomes, nécessaires par soi, ont un caractère de certitude absolue, tandis que les autres principes n'ont pas, eux, une telle certitude immédiate, soit qu'ils n'y aspirent pas (définitions), soit qu'ils la prennent pour accordée sous bénéfice d'inventaire, ce qui est le cas des postulats, soit enfin qu'ils constituent des hypothèses d'existence dont la consistance a été dialectiquement contrôlée. Il est remarquable que le 5e postulat d'Euclide, accepté provisoirement, soit dès Aristote à la racine logique des géométries non euclidiennes, en tant que « contre toute attente indémontrable, même par l'absurde » (p. 120, n. 294). Quant aux principes d'Euclide, ils sont bien en conformité avec les exposés liminaires d'Aristote (cf. tableau, p. 121), y compris pour les hypothèses non explicitées d'existence ; cette dernière notion est celle des objets premiers tirés par abstraction de l'existence naturelle : « il faut des hypothèses pour les existences, des définitions pour les essences, des axiomes comme nerf du raisonnement » (p. 122).

Proclus, dans ses *Commentaires*, nous livre un écho des discussions du temps d'Aristote et d'Euclide. Ainsi, pour Géminus (ou Géminos), axiomes et postulats entretiennent la même analogie que théorèmes et problèmes, la simplicité de la construction excluant pour lui les 4e et 5e postulats et les problèmes ne pouvant être que de construction complexe. Proclus en fait la remarque et les traite au contraire comme des postulats. D'autre part, il mentionne une théorie selon laquelle les postulats sont particuliers à la géométrie et les axiomes communs à toute quantité ; il y aurait d'ailleurs, selon sa doctrine personnelle, outre des axiomes communs, des axiomes propres à l'arithmétique, d'autres à la géométrie et il opine de même pour les postulats. À noter que les postulats du Livre premier d'Euclide se rapportent exclusivement à la géométrie et que les Livres arithmétiques ne sont introduits par aucun postulat. Pour Aristote, les postulats sont démontrables, mais non les axiomes, qui, dit Proclus, sont d'évidence immédiate ; il admet 5 axiomes (1, 2, 3, 7 et 8) et 5 postulats (cf. p. 124, M. Caveing et p. 179, B. Vitrac). Euclide suit assez bien les notions communes d'Aristote, mais les postulats 4 et 5 ne sont pas aussi nettement d'esprit conforme à l'aristotélisme que les autres ; les postulats 4 et 5 — égalité des angles droits, postulat dit « des parallèles », cf. formule exacte et commentaire de B. Vitrac p. 175-178 — énoncent des propriétés, au lieu que les premiers « affirment bien, semble-t-il, l'existence possible de la droite indéfiniment prolongée et du cercle de rayon quelconque » (M. Caveing, p. 125).

Si les définitions, selon Aristote, ne disent rien de l'existence (ou de l'inexistence) du défini, il reste qu'il distingue entre la fiction (le « bouc-cerf ») et le savoir : en science, il n'y a que de « vraies définitions, qui sont des définitions vraies, expriment la signification du nom en énonçant l'essence de la chose » (p. 126, n. 309) ; tel est le sens du réalisme aristotélicien, qui s'étend aux objets mathématiques et ne se limite pas à l'expérience de la nature (cf. p. 126-127). La fidélité d'Euclide aux exigences aristotéliciennes est soulignée par M. Caveing : Euclide « tient habilement compte, écrit-il (p. 130), des exigences formulées dans la philosophie des mathématiques de son temps », c'est-à-dire chez Aristote (qui se considérait, rappelons-le, comme un Platon rectifié et qui, en l'espèce, éliminait la pétition de principe par l'abstraction à partir du sensible, ainsi que le mouvement générateur des êtres mathématiques (repris plus tard par Savile et Hobbes, pourrait-on ajouter). « Au total on constate qu'il existe une corrélation non négligeable entre la structure et les caractéristiques de l'axiomatique d'Euclide et ce que recommande Aristote pour une science déductive » (p. 132), en particulier en ceci que les êtres mathématiques, potentiellement présents dans le monde physique, sont régis par « un modèle » (p. 133) s'imposant « par avance » (*ibid.*) à l'activité du mathématicien.

Passons sur certains détails, soit moins nets (statut des problèmes dans une science théorique), soit techniques et terminologiques (comme les « données », *dédoména*), pour en venir au dernier point du commentaire de Caveing, portant sur « Le raisonnement » (p. 141), en particulier sur les hypothèses en mathématiques. « De fait, l'hypothèse se rencontre partout » (p. 142) dans *Les Éléments*, qu'il s'agisse de postulats initiaux, de « fragments de déduction à valeur exploratoire » (*ibid.*), de substitution de propositions équivalentes, etc. Outre le *Ménon* (p. 86 sq.), médité à nouveau dans les *Premiers analytiques* en reprenant l'exemple de la tentative de quadrature du cercle par deux moyennes proportionnelles (Hippocrate de Chio), Aristote établit la théorie du raisonnement « apagogique » ou « par réduction » (*apagôgè*), c'est-à-dire par substitution d'un problème plus aisé à un autre (Hippocrate avait déjà substitué le problème des moyennes à celui de la duplication du cube), dont une variante est la réduction à l'absurde (ou : à l'impossible, cf. p. 143 et n. 359). Le livre VII de la *Collection* de Pappus d'Alexandrie (sous Dioclétien, vers la fin du IIIe siècle ap. J.-C. et de l'École d'Alexandrie) s'accorde avec Proclus sur la distinction de l'analyse et de la synthèse ; l'analyse va plus loin (régression vers les principes) chez Pappus, Porphyre et Proclus que la « réduction » d'Aristote. « Il y a lieu de penser que l'emploi systématique de l'analyse, à partir de Platon vraisemblablement, a contribué à la rigueur des démonstrations » (p. 147). Conformément à l'enseignement de la tradition, « la synthèse est par excellence la méthode de la preuve, tandis que la vertu de l'analyse est heuristique » (*ibid.*).

Si l'on n'était tenu à la brièveté, il conviendrait d'aborder l'étude du travail de traduction et de commentaire dû à B. Vitrac (et revu par M. Caveing). Nous nous proposons de la reporter à la parution du volume 2.

Jean BERNHARDT.