NON-CATEGORICITATEA LOGICII (I). PROBLEMA UNEI FORMALIZĂRI COMPLETE

CONSTANTIN C. BRÎNCUŞ

Institutul de Filosofie şi Psihologie „Constantin Rădulescu-Motru”, Academia Română

The Non-Categoricity of Logic (I).
The Problem of a Full Formalization

Abstract. A system of logic usually comprises a language for which a model-theory and a proof-theory are defined. The model-theory defines the semantic notion of model-theoretic logical consequence (⊨), while the proof-theory defines the proof-theoretic notion of logical consequence (or logical derivability, ⊢). If the system in question is sound and complete, then the two notions of logical consequence are extensionally equivalent. The concept of *full formalization* is a more restrictive one and requires in addition the preservation of the standard meanings of the logical terms in all the admissible interpretations of the logical calculus, as it is proof-theoretically defined. Although classical first-order logic is sound and complete, its standard formalizations fall short to be full formalizations since they allow non-intended interpretations. This fact poses a challenge for the logical inferentialism program, whose main tenet is that the meanings of the logical terms are uniquely determined by the formal axioms or rules of inference that govern their use in a logical calculus, i.e., logical inferentialism requires a categorical calculus. This paper is the first part of a more elaborated study which will analyze the categoricity problem from its beginning until the most recent approaches. I will first start by describing the problem of a full formalization in the general framework in which Carnap (1934/1937, 1943) formulated it for classical logic. Then, in sections IV and V, I shall discuss the way in which the mathematicians B.A. Bernstein (1932) and E.V. Huntington (1933) have previously formulated and analyzed it in algebraic terms for propositional logic and, finally, I shall discuss some critical reactions Nagel (1943), Hempel (1943), Fitch (1944), and Church (1944) formulated to these approaches.

Keywords: categoricity, non-intended models, full formalization, inferentialism.

1. INTRODUCERE

Un sistem de logică cuprinde în mod obişnuit un limbaj pentru care este definită o teorie a modelelor şi o teorie a demonstraţiei. Teoria modelelor defineşte noţiunea semantică de consecinţă logică model-teoretică (⊨), iar teoria demonstraţiei defineşte noţiunea sintactică de consecinţă logică demonstrativă (derivabilitatea logică, ⊢). Dacă sistemul de logică este corect şi complet, atunci cele două noţiuni de consecinţă logică sunt extensional echivalente. Conceptul de formalizare completă (*full formalization*) este unul mai restrictiv şi necesită în plus ca semnificaţia standard a termenilor logici să fie prezervată în toate interpretările admisibile ale calculului logic definit prin teoria demonstraţiei. Deşi logica clasică de ordinul întâi este corectă şi completă, formalizările ei standard nu sunt formalizări complete. Acest fapt constituie o problemă pentru inferenţialismul logic contemporan definit prin ideea că regulile de deducţie sau axiomele dintr-un calcul logic determină în mod unic înţelesul standard al termenilor logici, i.e., sistemul logic vizat de către inferenţialismul logic trebuie să fie unul categoric. Prezentul articol este prima parte a unui studiu mai amplu care va urmări această problemă de la debutul său până la cele mai recente abordări. Voi începe prin a descrie problema şi cadrul filosofic mai general în care R. Carnap (1934, 1943) a formulat această problemă pentru logica clasică, iar apoi voi expune tratarea anterioară a acestei probleme în termeni algebrici pentru logica propoziţiilor de către matematicienii B.A. Bernstein (1932) şi E.V. Huntington (1933), cât şi reacţiile critice imediate pe care unii logicieni le-au formulat.

2. RELAŢIA DINTRE SINTAXA ŞI SEMANTICA LOGICII: CE ESTE O FORMALIZARE COMPLETĂ?[1]

Prima cercetare sistematică explicită a problemei unei formalizări complete a logicii clasice de ordinul întâi a fost realizată de Rudolf Carnap în cartea sa din 1943 *Formalization of Logic.* Carnap a analizat relaţia dintre semantica logică (ceea ce numim astăzi teoria modelelor (*model-theory*)) şi sintaxa logică (ceea ce numim astăzi teoria demonstraţiei (*proof-theory*)) şi a observat că formalizările standard ale logicii clasice sunt compatibile cu interpretări care atribuie termenilor logici înţelesuri diferite de cele standard. Aceste interpretări au fost denumite de Carnap interpretări non-normale. Interesul lui Carnap a fost să construiască formalizări ale logicii clasice care determină în mod unic înţelesul standard al termenilor logici, i.e., formalizări complete, şi să realizeze astfel o simetrie între cele două metode de a defini un sistem logic (semantica şi sintaxa).

Iniţial, în *Logical Syntax of Language* (1934/1937), Rudolf Carnap a adoptat o poziţie care astăzi ar putea fi etichetată fără mari dificultăţi ca fiind una inferenţialistă[2]. Obiectivul lui Carnap era de a construi o fundaţie solidă pentru filosofie, pe care el o identifica în acel moment cu logica ştiinţei, prin dezvoltarea şi aplicarea unei metode sintactice precise pentru analiza problemelor filosofice. Această metodă sintactică, bazată pe aşa-numitul *Principiul Toleranţei*, ne permite să construim un sistem logic prin alegerea în mod arbitrar a axiomelor şi regulilor de inferenţă primitive, iar semnificaţia termenilor logici va fi determinată de către acestea:

[1] Unele idei prezentate în această secţiune şi în următoarea au fost formulate, iniţial, sub altă formă şi cu un alt obiectiv teoretic, în secţiunile a doua şi a cincea din Brîncuş (2022) şi în Brîncuş (2023).

[2] A se vedea Peregrin (2020) pentru o analiză a ideilor lui Carnap din perspectivă inferenţialistă.

Let any postulates and any rules of inference be chosen arbitrarily; then this choice, whatever it may be, will determine what meaning is to be assigned to the fundamental logical symbols. […] The standpoint which we have suggested – we will call it the Principle of Tolerance – relates not only to mathematics, but to all questions of logic (Carnap (1937: xv)).

Această metodă sintactică venea în opoziţie cu metoda obişnuită practicată până atunci de a atribui înţeles termenilor logici şi de a evalua corectitudinea propoziţiilor şi a inferenţelor logice în relaţie cu acest înţeles. Motivaţia lui Carnap pentru a adopta metoda sintactică venea din faptul că înţelesul atribuit de vechea metodă era formulat în mod intuitiv prin intermediul limbajului natural şi astfel considerat de Carnap inexact şi ambiguu. În plus, acest demers califica orice încercare de a folosi o altă logică decât pe cea clasică drept una deviantă şi care necesită o justificare teoretică. Noua metodă sintactică deschidea posibilitatea unei abordări pluraliste în care justificarea unui sistem logic este dată de considerente practice, precum eficacitatea, simplicitatea, utilitatea etc.

Datorită dezvoltărilor realizate de Alfred Tarski şi de către membrii Şcolii de la Varşovia, Carnap abandonează opoziţia iniţială faţă de metoda obişnuită de a atribui înţeles şi admite că înţelesul termenilor logici poate fi definit în mod clar şi precis şi prin intermediul metodei semantice (care sistematizează şi dezvoltă teoretic ceea ce am numit mai sus „metoda obişnuită"). Faptul că putem defini condiţii de adecvare în metalimbaj pentru definiţia conceptelor semantice îl convinge pe Carnap să adopte şi să dezvolte metoda semantică, iar în 1942 scrie cartea *Introduction to Semantics*, care este dedicată acestei problematici.

Desigur, adoptarea metodei semantice nu echivalează cu renunţarea la cea sintactică, ci presupune o completare a acesteia, Carnap fiind interesat atât de dezvoltarea şi aplicarea celor două metode, dar şi de relaţia dintre ele. Funcţia ambelor metode este văzută de Carnap (1943: x) ca fiind aceea

of making systematic and explicit certain procedures which have been practically applied in traditional logic for the last two thousand years and, in a more elaborate and exact way, in modern logic for the last hundread years.

Ambele metode cuprind proceduri şi reguli explicite menite să substituie proceduri folosite în mod intuitiv şi chiar instinctiv în activitatea inferării deductive a gândirii. Aşa cum observă şi Carnap (1943: xi), distincţia dintre conceptele sintactice şi cele semantice nu este mereu explicită în scrierile logicienilor din prima jumătate a secolului al XX-lea. De exemplu, Kurt Gödel (1930: 103, 107) formulează rezultatul de completitudine pentru logica predicatelor de ordinul întâi în două moduri:

Teorema I: Orice formulă universal validă (*allgemeingültige*) din calculul restrâns al predicatelor este demonstrabilă.

Teorema II: Orice formulă din calculul restrâns al predicatelor este fie refutabilă, fie realizabilă/satisfiabilă (*erfullbar*) şi, mai mult, într-un domeniu denumerabil de obiecte.

Termenii „demonstrabil" şi „refutabil" sunt termeni sintactici definibili pe baza axiomelor şi a regulilor de inferenţă dintr-un calcul logic. Termenii „universal valid" şi „realizabil” sunt însă termeni semantici, deoarece definiţia lor este formulată prin apelul la semnificaţia variabilelor (o formulă este universal validă dacă este adevărată pentru toate valorile variabilelor sale libere; o formulă este realizabilă dacă există cel puţin o valoare a variabilelor sale libere pentru care formula este adevărată) şi la conceptul de adevăr. Aceşti termeni semantici sunt folosiţi şi explicaţi într-o manieră informală, fără a fi definiţi explicit printr-o teorie semantică cadru. Teorema de completitudine este aşadar un exemplu de rezultat a cărui formulare necesită utilizarea unor concepte specifice ambelor metode de analiză logică. Faptul că ambele tipuri de concepte sunt utilizate în metalimbaj şi sunt esenţiale pentru teoria în cauză relevă importanţa dezvoltării semanticii logice în mod explicit şi riguros asemeni sintaxei logice. Hilbert şi Bernays (1934) disting de asemenea între cele două metode logice, pe care le etichetează ca teoria demonstraţiei (*Beweistheorie*) şi logică set-teoretică (*mengentheoretische Logik*), dar nu dezvoltă în mod explicit şi sistematic o teorie semantică cadru.

Adoptarea metodei semantice de către Carnap apare astfel ca o necesitate, însă adoptarea ei impune formularea unor restricţii asupra aplicării principiului toleranţei în construirea unui sistem logic sintactic, i.e., a unui calcul logic:

> *While in constructing a calculus we may choose the rules arbitrarily, in constructing a calculus K in accordance with a given semantical system S we are not entirely free. In some essential respects the features of S determine those of K, although, on the other hand, there is still a freedom of choice left with respect to some features. Thus logic – if taken as a system of formal deduction, in other words, a calculus – is in one way conventional, in another not (Carnap (1942: 218-19)).*

Formalizarea unui sistem logic definit anterior printr-un sistem semantic presupune aşadar satisfacerea condiţiei de adecvare a calculului logic în raport cu sistemul semantic dat. Pentru a defini această adecvare, Carnap (1943: viii, 95–96) introduce conceptul de formalizare completă.

Un sistem logic este formalizat complet dacă şi numai dacă:

1. Toate propoziţiile logic adevărate sunt teoreme în calculul logic asociat.
2. Toate relaţiile de consecinţă logică semantică sunt formalizate de relaţii de derivabilitate logică în cadrul calculului logic asociat.
3. Toţi termenii logici din calculul logic îşi prezervă înţelesul semantic standard în toate interpretările admisibile ale acestui calcul[3].

Carnap (1943) a analizat formalizările standard ale logicii clasice pentru a observa dacă ele sunt formalizări complete în acest sens, iar descoperirile sale au fost negative. Formalizările standard (i.e., acele formalizări care admit reguli cu o singură concluzie şi cu un număr finit de premise) ale logicii propoziţionale şi ale logicii predicatelor de ordinul întâi admit interpretări pentru care acestea îşi prezervă

[3] Interpretările admisibile sunt acele interpretări pentru care calculul logic este corect, în sensul că toate teoremele sale vor fi adevărate în aceste interpretări şi toate relaţiile de derivabilitate vor fi reprezentate prin relaţii de consecinţă logic-semantică în aceste interpretări. Admisibilitatea se defineşte aşadar în raport cu relaţia de consecinţă logică semantică. Vom vedea că putem defini admisibilitatea şi în raport cu corectitudinea unei reguli sau a unui set de reguli, cele ce definesc anumiţi termeni logici, fără a ne raporta la întregul sistem de reguli ce definesc relaţia de derivabilitate logică într-un calcul logic (a se vedea Garson (2013)).

corectitudinea şi completitudinea, dar majoritatea termenilor logici primesc în aceste interpretări înţelesuri diferite de cele standard, aşa cum sunt definite de semantica standard (tabelele normale de adevăr, respectiv semantica substituţională şi obiectuală pentru cuantificatori). Acestea sunt interpretările non-normale pe care o formalizare completă trebuie să le facă imposibile, i.e., să le elimine.

3. ORIGINEA INTERPRETĂRILOR NON-NORMALE

Carnap (1942, 1943) distinge foarte atent între termenii logici semantici şi cei sintactici, demarcaţi lingvistic prin L-termeni (cei semantici, „L" referindu-se aici la logic) şi C-termeni (cei sintactici, „C" referindu-se aici la calcul). L-adevărul, L-falsitatea, L-implicaţia, L-disjuncţia, L-negaţia etc. vor fi termeni semantici, iar C-adevărul, C-falsitatea, C-implicaţia, C-disjuncţia, C-negaţia etc. vor fi termenii sintactici corespondenţi. De exemplu, C-adevărul este clasa teoremelor dintr-un calcul logic şi va corespunde într-un calcul logic corect şi complet propoziţiilor logic adevărate din semantica asociată.

Ceea ce observă Carnap (1943) este lipsa unei simetrii între anumite concepte semantice şi cele sintactice. Această asimetrie se datorează faptului că formalizările logice standard definesc condiţii numai pentru derivabilitatea logică (C-implicaţia) şi pentru teoremicitate (C-adevăr) şi astfel vor putea formaliza numai acele concepte semantice definibile pe baza conceptelor semantice de consecinţă logică şi adevăr logic (L-implicaţia şi L-adevărul). Există însă unele concepte logice semantice care nu pot fi definite pe baza L-implicaţiei şi a L-adevărului. De exemplu, L-exclusivitatea (două propoziţii sunt L-exclusive dacă şi numai dacă nu pot fi împreună adevărate) şi L-disjunctivitatea (două propoziţii sunt L-disjuncte dacă şi numai dacă nu pot fi împreună false) nu sunt definibile pe baza L-implicaţiei sau a L-adevărului şi astfel nu vor putea fi formalizate adecvat într-un calcul logic standard. L-exclusivitatea intervine în mod esenţial în formularea principiului logic semantic al contradicţiei excluse (sau principiul non-contradicţiei), iar L-disjunctivitatea intervine în mod esenţial în formularea principiului logic semantic al terţului exclus. În consecinţă, aceste principii logice semantice nu vor fi formalizate complet de formalizările standard. Aceasta înseamnă că ele vor fi valide numai în interpretările normale ale calculelor logice standard.

Pentru logica propoziţională, Carnap (1943:81) identifică două tipuri mutual exclusive de interpretări non-normale: un tip în care o anumită propoziţie şi negaţia ei sunt simultan adevărate (şi astfel toate propoziţiile sunt adevărate fiind consecinţe ale conjuncţiei lor) şi un tip în care o anumită propoziţie şi negaţia ei sunt simultan false, dar disjuncţia lor este adevărată (fiind o teoremă). Se poate observa uşor că aceste interpretări sunt admisibile (în sensul definit mai sus în nota 3 de subsol). În primul tip de interpretări non-normale toate propoziţiile sunt adevărate şi, *a fortiori*, şi teoremele vor fi adevărate, iar, nefiind nicio propoziţie falsă, toate relaţiile de derivabilitate vor fi reprezentate de relaţii de consecinţă logică (neexistând posibilitatea unui contraexemplu). În cel de-al doilea tip de interpretări non-normale vor fi adevărate numai teoremele logice şi false toate non-teoremele. Relaţia de derivabilitate va fi de asemenea reprezentată de relaţia de consecinţă logică deoarece singurul caz în care într-o secvenţă aveam toate premisele adevărate va fi acela în care acestea sunt teoreme, iar din teoreme decurg logic numai teoreme, care vor fi interpretate ca adevărate (neexistând nici în acest caz posibilitatea unui contraexemplu).

Un alt mod de a formula problema unei formalizări complete este prin termenul de categoricitate (la care vom reveni ulterior). O teorie este categorică dacă toate modelele/interpretările ei sunt izomorfe, i.e., identice structural. Existenţa interpretărilor non-normale ne indică faptul că un calcul logic standard este non-categoric, admiţând atât interpretări normale, cât şi non-normale. Particularizând noţiunea de categoricitate de la o teorie la un calcul logic, putem spune că un calcul logic este categoric dacă admite numai interpretarea standard intenţionată (atunci când aceasta este definită). Astfel, o teorie logică definită semantic este formalizată complet de un calcul logic dacă şi numai dacă acel calcul logic este unul categoric.

Soluţia lui Carnap pentru obţinerea unei formalizări complete a logicii propoziţionale este introducerea a două noi reguli primitive de inferenţă, o regulă care admite concluzii multiple şi o regulă de respingere (sau refutare):

1) $A_i \vee A_j \vdash \{ A_i, A_j\}^{\vee}$

2) $V^{\&} \vdash \Lambda^{\vee}$

Prima regulă determină cea de a patra linie din tabelul normal de adevăr pentru disjuncţie (linie care exprimă semantic ideea că o disjuncţie este falsă dacă ambii disjuncţi sunt falşi sau, contrapozitiv, dacă o disjuncţie este adevărată, atunci cel puţin un disjunct este adevărat) şi astfel cel de-al doilea tip de interpretare non-normală este eliminat. Cea de a două regulă impune existenţa unei propoziţii false într-o interpretare semantică. „$V^{\&}$" este mulţimea tuturor propoziţiilor considerate în conjuncţie (conjunctivul universal), care prin definiţie va fi adevărată atunci când toate propoziţiile sunt adevărate, iar „$\Lambda^{\vee}$" este mulţimea vidă de propoziţii considerate în disjuncţie (disjunctivul vid), care prin definiţie este falsă[4]. Prin urmare, dacă toate propoziţiile vor fi interpretate ca adevărate, atunci regula 2) va deveni invalidă şi astfel interpretarea nu va putea fi considerată una admisibilă.

În cazul logicii predicatelor de ordinal întâi, Carnap (1937: 173, 197; 1943: 135-50) observă că, dată fiind natura finită a calculelor logice standard (i.e., nu admit decât reguli cu un număr finit de premise), fiecare instanţă a unei propoziţii cuantificate universal este derivabilă din această propoziţie universală, dar nu există nicio regulă care să ne permită derivarea unei propoziţii cuantificate universal din mulţimea infinită a instanţelor sale atunci când această propoziţie universală nu decurge deja dintr-o submulţime finită a instanţelor sale. De asemenea, nu există nicio regulă care să ne permită derivarea disjuncţiei tuturor instanţelor unei propoziţii cuantificate existenţial din această propoziţie existenţială. Acest fapt permite interpretarea unei propoziţii cuantificate universal „$(\forall xPx)$" în sens non-normal ca „orice obiect este P şi b este Q" şi interpretarea unei propoziţii cuantificate existenţial „$(\exists xPx)$" ca „cel puţin un obiect este P sau b nu este Q". Se observă uşor că dualitatea

[4] Carnap (1942: 38-9) admite ca mulţimile de propoziţii construite conjunctiv sau disjunctiv să poată fi calificate drept adevărate sau false şi introduce definiţii semantice în acest sens.

cuantificatorilor va fi prezervată de către această interpretare atunci când atât propoziţia universală, cât şi cea existenţială sunt interpretate simultan non-normal. Pentru a elimina aceste interpretări non-normale ale cuantificatorilor, Carnap propune introducerea a cel puţin una din următoarele două reguli de inferenţă ca regulă primitivă:

1) $\{A_i\,(^{i}{}_{k})\}^{\&} \vdash A_i$
2) $(\exists i_k)A_i \vdash \{A_i\,(^{i}{}_{k})\}^{\vee}$, unde i_k este singura variabilă liberă în A_i.

Prima regulă stipulează că o propoziţie A_i ce conţine o variabilă liberă i_k este derivabilă din mulţimea infinită a instanţelor sale. Această propoziţie este echivalentă în formalizările standard cu închiderea ei universală, „$(\forall i_k)Ai_k$”, şi astfel se obţine echivalenţa deductivă între o propoziţie cuantificată universal şi mulţimea tuturor instanţelor sale. Cea de a doua regulă legitimează derivarea unei mulţimi infinite disjunctive a instanţelor unei propoziţii cuantificate existenţial din această propoziţie. Folosind astfel cele două reguli introduse mai sus pentru logica propoziţiilor şi introducând cel puţin una din aceste două reguli pentru logica predicatelor, vom obţine o formalizare completă a logicii propoziţiilor şi a predicatelor de ordinul întâi.

Ideea folosirii regulilor infinite de inferenţă are o aplicare mai generală în cadrul gândirii lui R. Carnap şi vom reveni la această idee atunci când vom discuta stadiul actual al discuţiei problemei unei formalizării complete în relaţie cu inferenţialismul logic şi cu incompletitudinea şi non-categoricitatea aritmeticii numerelor naturale. Carnap (1939:24; 1942:160, 224; 1943: 143, 145) subliniază în repetate rânduri necesitatea utilizării unor reguli infinite pentru a obţine un calcul logic simetric cu un anumit sistem semantic anterior definit (un calcul L-exclusiv în termenii lui Carnap). Regulile infinite de inferenţă sunt menite să construiască astfel o punte între sintaxă şi semantică, depăşind intervalul impus de prima teoremă de incompletitudine a lui Kurt Gödel pentru formalizările logice standard ale aritmeticii numerelor naturale[5]. Carnap a manifestat un optimism în privinţa posibilităţii formalizării sistemelor semantice, iar într-o scrisoare către Karl R. Popper din 29 ianuarie 1943 afirma că nu cunoaşte niciun sistem semantic pentru care nu ar putea fi construit un calcul logic L-exclusiv. Ideea aceasta este în acord cu interpretarea dată de Carnap (1937: 222) primului rezultat de incompletitudine al lui Gödel, potrivit căreia tot ceea ce este matematic poate fi formalizat, dar nu putem formaliza întreaga matematică cu ajutorul unui unic calcul logic. Formalizarea întregii matematici necesită o progresie infinită de calcule logice cu resurse din ce în ce mai bogate.

Deşi sintaxa şi semantica logicii nu erau sistematic delimitate şi dezvoltate la începutul anilor 1930, problema unei formalizări complete formulată de Carnap a

[5] Carnap (1937) consideră că un calcul logic adecvat este acel calcul în cadrul căruia toate propoziţiile au un caracter determinat, iar acest fapt poate fi stabilit cu ajutorul regulilor sintactice. Mai precis, determinate sunt acele propoziţii care sunt fie teoreme, fie contradicţii în cadrul calcului logic. Tocmai de aceea Carnap era interesat să formuleze un sistem logic care este complet faţă de negaţie. Introducerea regulii de inferenţă numită regula omega (*ω-rule*) conduce la completitudinea faţă de negaţie a aritmeticii Peano de ordinul întâi şi astfel primul rezultat de incompletitudine al lui Gödel este parţial depăşit (a se vedea Warren (2020: 325-30, 274-78) pentru o discuţie mai detaliată).

fost analizată mai înainte pentru logica propoziţiilor de către Bernstein şi Huntington în relaţie cu sistemul deductiv formulat de Whitehead şi Russell în *Principia Mathematica*. Vom urmări în continuare formularea acestei probleme în termeni algebrici pentru logica propoziţiilor.

4. SISTEMELE INDEPENDENTE ALE LUI BERNSTEIN PENTRU LOGICA BOOLEANĂ A PROPOZIŢIILOR

B.A. Bernstein (1932) analizează relaţia dintre teoria deducţiei pentru logica propoziţională prezentată de A.N. Whitehead şi B. Russell în *Principia Mathematica* (PM) şi ceea ce el denumeşte logica booleană a propoziţiilor[6]. Întrebarea specifică a lui Bernstein (1932:589) este următoarea: „Ce relaţie matematică există între teoria deducţiei şi logica booleană a propoziţiilor?". Rezultatul analizei sale este că teoria deducţiei din PM este „deductibilă" din logica booleană a propoziţiilor (într-un sens ce urmează a fi precizat), dar nu şi invers. Pentru a compara cele două sisteme, Bernstein le formulează într-un limbaj comun, şi anume, în limbajul algebrei booleene. Acest limbaj este descris în mod clar şi precis în Bernstein (1931), unde teoria deducţiei din PM este construită ca o ştiinţă matematică[7], mai exact, ca o algebră abstractă[8]. Bernstein (1931: 486) consideră că această formulare pune mai bine în evidenţă „matematica care stă la baza teoriei deducţiei".

Sistemul (**K, '**, +), ce constă dintr-o mulţime nedefinită K ce conţine elementele p, q, r …, o operaţie unară nedefinită „ ' " şi o operaţie binară nedefinită „ + ", care satisfac postulatele 1.1–1.71 de mai jos, este forma booleană matematizată a teoriei deducţiei, i.e., această teorie poate fi gândită ca o ştiinţă matematică (a se vedea Bernstein (1931: 488)). Semnul aserţiunii folosit în PM („⊦p") este substituit de Bernstein cu expresia „p = 1", a cărei semnificaţie informală este „p este adevărat".

---

[6] Aceasta este echivalentul logicii propoziţiilor aşa cum o definim astăzi semantic cu ajutorul tabelelor normale de adevăr.

[7] Pentru Bernstein (1931: 484), o ştiinţă matematică este un corp de propoziţii divizat în postulate şi teoreme. Aceste propoziţii se referă la „o totalitate de obiecte şi la anumite conexiuni între aceste obiecte" şi oferă „informaţii despre o anumită clasă de elemente şi despre anumite operaţii sau relaţii între aceste elemente". Clasa de elemente, operaţiile şi relaţiile constituie *ideile* ştiinţei, care sunt fie primitive, fie derivate. În plus, şi specific viziunii lui, Bernstein consideră că o ştiinţă matematică conţine idei „*belonging* to the science" şi „ideas that are *outside* the science". Propoziţiile *în afara* ştiinţei sunt de regulă principiile logice care permit derivarea teoremelor din postulate. Datorită acestei caracterizări, Bernstein consideră că prezentarea teoriei deducţiei dată de Whitehead şi Russell (1925) în PM nu este adecvată deoarece nu face evidentă distincţia dintre ideile ştiinţei şi cele din afara ei. Prezentarea algebrică ar fi astfel cea potrivită pentru acest scop. Definirea în aceşti termeni a unei ştiinţe matematice este criticată de Nelson (1934), iar apoi Church (1944: 495) reiterează critica acestuia argumentând că ideea de ştiinţă matematică definită de Bernstein lasă logica subiacentă unei teorii nedeterminată sau vag determinată.

[8] Reprezentarea teoriei deducţiei în termeni matematici printr-o algebră abstractă poate fi gândită ca având şi o motivaţie filosofică deoarece, aşa cum afirmă Huntington (1911: 152), „on account of the simpler nature of the concepts with which it deals, algebra is better suited than geometry to serve as an illustration of what is essentially involved in mathematical reasoning."

„1” este un element din K, aparţinând ştiinţei matematice, iar „=” exprimă o idee din afara ştiinţei matematice[9]:

1.1 Există un K-element 1 astfel încât din $p = 1$ şi $p' + q = 1$ decurge că $q = 1$.

1.2 $(p + p)' + p = 1$.

1.3 $q' + (p + q) = 1$.

1.4 $(p + q)' + (q + p) = 1$.

1.5 $[p + (q + r)]' + [q + (p + r)] = 1$. [10]

1.6 $(q' + r)' + [(p + q)' + (p + r)] = 1$.

1.7 Dacă p K-element, atunci p' este un K-element.

1.71 Dacă p şi q sunt K-elemente, atunci $p + q$ este un K-element.

Sistemul (**K, ', +**) se bazează pe asumpţia implicită că elementul definit de postulatul 1.1 există şi este unic. Sistemul mai conţine pe lângă aceste postulate trei termeni definiţi:

Def. 1 $p \supset q = p' + q$.

Def. 2 $pq = (p' + q')'$.

Def. 3 $(p \equiv q) = (p \supset q)\ (q \supset p) = (p' + q)\ (q' + p)$.

Logica booleană a propoziţiilor este sistemul (**K, +**) ce constă dintr-o mulţime nedefinită K şi o operaţie binară „+”ce satisface următoarele trei postulate:

A. Există un K-element 0 astfel încât $0 + a = a$, pentru orice K-element a.

B. Există un K-element 1 astfel încât $1 + a = 1$, pentru orice K-element a.

C. K constă în cele două elemente: 0, 1.

Ideile definite în sistemul (**K, +**) sunt următoarele:

Def. 1 $0' = 1$, $1' = 0$.

Def. 2 $ab = (a' + b')'$

Def. 3 $a < b = (a' + b = 1)$.

Operaţiile „a + b”, „ab” şi relaţia „a < b” sunt definite prin următoarele matrici[11]:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

x	0	1
0	0	0
1	0	1

<	0	1
0	+	+
1	–	+

Este important să remarcăm că sistemul (K, ', +) este o ştiinţă abstractă, de vreme ce sistemul (K, +) este o ştiinţă concretă. Cel din urmă poate fi gândit ca o instanţiere sau ca o interpretare a celui dintâi. Sistemul (K, +) este o algebră a valorilor de adevăr, unde 1 stă pentru adevăr, iar 0 pentru falsitate. De asemenea,

[9] Această modelare algebrică a teoriei deducţiei din PM este explicată de Bernstein (1931) şi discutată de Nelson (1934). Dintre postulatele teoriei deducţiei din PM (a se vedea mai jos secţiunea V), Bernstein (1931: 479) consideră că doar 1.7 şi 1.71 respectă cerinţele pentru un postulat al unei ştiinţe matematice. Celelalte postulate din PM fie nu conţin idei ale teoriei (postulatul 1.1 din PM), fie nu conţin idei din afara teoriei (postulatele 1.1–1.6 din PM).

[10] Huntington (1933: 292) remarcă că postulatul 1.5 este redundant, i.e., nu este independent, datorită demonstraţiei dată Bernays (1926) pentru sistemul din *Principia Mathematica*.

[11] Bernstein foloseşte simbolul „<” din matrice ca semnificând relaţia de consecinţă logică (diferită de implicaţia materială); „+” semnifică „are loc” („holds”), iar „-” semnifică „nu are loc” („does not hold”).

dacă „p” şi „q” sunt două elemente ale sistemului (K, ', +), atunci *a'*, *a* + *b* şi *ab* sunt valorile de adevăr ale elementelor „p'”, „p + q” şi „pq”.

Odată definite cele două sisteme, prima parte a tezei lui Bernstein este că teoria deducţiei este *derivabilă* din logica booleană a propoziţiilor. Acest fapt poate fi uşor demonstrat cu ajutorul matricilor definite mai sus, şi anume, arătând că fiecare postulat al sistemului (K, ', +) este satisfăcut atunci când este interpretat pe baza matricilor. Prin „derivabil” Bernstein pare să înţeleagă aici ceea ce înţelegem astăzi prin „model al unui sistem formal”: o structură este un model pentru un sistem formal dacă şi numai dacă face simultan adevărate toate axiomele şi teoremele sistemului. Cea de-a doua parte a tezei lui Bernstein este că logica booleană a propoziţiilor nu este derivabilă din teoria deducţiei. În terminologia lui Bernstein, sistemul (K, +) nu este derivabil din sistemul (K, ', +). Principala descoperire a lui Bernstein, care anticipează rezultatele lui Carnap (1943), este aceea că există propoziţii în logica booleană a propoziţiilor care nu sunt derivabile din teoria deducţiei – în particular, unele propoziţii care depind de postulatul **C** formulat mai sus al sistemului (K, +). De exemplu, următoarele trei propoziţii, care sunt adevărate în logica booleană a propoziţiilor, nu sunt derivabile în teoria deducţiei:

D. Pentru orice K-element a, fie $a = 1$, fie $a = 0$.

E. $a' \neq a$.

F. Dacă $a < b$ sau $a < c$, atunci $a < b + c$ (şi conversa).

Pentru a arăta că aceste propoziţii nu sunt *derivabile* din teoria deducţiei, Bernstein construieşte ceea ce el numeşte sisteme independente (*independence-systems*). El oferă două sisteme (K, ', +) care satisfac postulatele 1.1–1.71 formulate mai sus, dar propoziţiile C, D, E, F nu sunt derivabile din ele.

Mai întâi, dacă considerăm sistemul (K_1, ', +), unde K_1 conţine numai elementul e, $e' = e$ şi $e + e = e$, atunci propoziţiile C şi E nu sunt derivabile din sistemul (K_1, ', +). Acest sistem satisface postulatele 1.1–1.71, însă K conţine un singur element, fapt ce va face propoziţia C falsă. Acelaşi raţionament se aplică şi pentru propoziţia E.

În al doilea rând, dacă considerăm sistemul (K_2, ', +), unde K_2 este mulţimea infinită a regiunilor conţinute într-o regiune T a planului (incluzând pe T însăşi şi regiunea nulă N), *a'* este regiunea din T complementară lui *a* şi *a* + *b* este cea mai mică regiune care conţine atât pe *a*, cât şi pe *b*, atunci propoziţiile D şi F nu sunt derivabile din sistemul (K_2, ', +). De exemplu, D va fi falsă din moment ce planul are o infinitate de elemente. D ar fi fost adevărată dacă K_2 ar fi conţinut doar regiunile T şi N. De asemenea, regiunea *a* poate fi inclusă în regiunea *b* + *c*, însă de aici nu decurge că *a* este inclus în *b* sau *a* este inclus în *c*, deoarece *b* + *c* poate avea elemente care nu aparţin nici lui *b* şi nici lui *c*. Este cazul în care *a* este cea mai mică regiune disjunctă cu *b* şi *c* care le uneşte. Metaforic am putea spune că *a* este cel mai îngust coridor de trecere de la regiunea *b* la regiunea *c*.

Aşadar, ce sunt aceste sisteme independente şi în ce sens logica booleană a propoziţiilor nu este *derivabilă* din teoria deducţiei? Ce înseamnă „derivabil” în acest context? O ştiinţă matematică în viziunea lui Bernstein (1931: 484) este „structura logică pentru mai multe ştiinţe concrete". Sistemul (K, +), i.e., logica booleană a propoziţiilor, este o ştiinţă concretă care, am spune în terminologia de astăzi, satisface sistemul (K, ', +). Ceea ce indică Bernstein este că sistemul (K, +) nu este singura „ştiinţă concretă" care satisface sistemul abstract (K, ', +). Sistemul (K, ', +) este satisfăcut de asemenea de două „ştiinţe concrete" care diferă de logica booleană a propoziţiilor. Sistemele (K_1, ', +) şi (K_2, ', +) satisfac postulatele algebrice care definesc teoria deducţiei, însă nu sunt „izomorfe" cu sistemul algebric al logicii booleene a propoziţiilor (K, +). Există unele propoziţii, precum C, care sunt adevărate în unele modele/ştiinţe concrete ale sistemului (K, ', +), dar nu în altele. Prin urmare, propoziţia C nu este derivabilă din teoria deducţiei, i.e., din sistemul abstract (K, ', +), în sensul că ea nu este adevărată în toate aplicările concrete ale acestui sistem. În termeni moderni, neutilizaţi de Bernstein, putem spune că interpretările sistemului (K, ', +) nu sunt elementar echivalente (şi astfel non-izomorfe). Aceasta înseamnă că sistemul (K, ', +) este unul non-categoric. Concluzia lui Bernstein (1932: 592-93) este că teoria deducţiei din partea formală a PM, reprezentată printr-o ştiinţă matematică, este inadecvată ca „un calcul al propoziţiilor".

Bernstein (1932: 593) formulează unele remarci interesante în legătură cu propoziţiile D-F formulate mai sus ale logicii booleene a propoziţiilor şi presupusa lor reprezentare formală în *Principia Mathematica*. Următoarele propoziţii din PM:

2.11 $\vdash p \vee \sim p$

5.19 $\vdash \sim(p \equiv \sim p)$

4.78 $\vdash [(p \supset q) \vee (p \supset r)] \equiv [p \supset (q \vee r)]$

ar putea fi citite de către cineva astfel:

D_0 Orice propoziţie este fie adevărată, fie falsă.

E_0 O propoziţie nu este niciodată echivalentă cu contradictoria ei.

F_0 Dacă p implică q sau p implică r, atunci p implică q sau r (şi conversa),

dar Bernstein critică aceste citiri pe temeiul că încalcă distincţia dintre „p" and „⊢p"[12]. Datorită acestei distincţii, citirea propoziţiilor „~p" ca „p este falsă", a „p v q" ca „p este adevărată sau q este adevărată" sau a „p ⊃ q" ca „p implică q" sunt catalogate de către autor drept inadmisibile. De exemplu, „~p" ar trebui citit ca „non-p", şi nu ca „p este fals"[13]. Deşi citirile D_0 – F_0 sunt cele intenţionate (*the intended ones*), datorită posibilităţii unor interpretări non-intenţionate ale sistemului de deducţie din PM, ele nu sunt astfel singurele citiri *posibile* ale acelor formule din PM. Bernstein nu îşi propune să construiască o teorie a deducţiei din care să poată fi derivată întreaga logică booleană a propoziţiilor, sugestia lui fiind să înlocuim calculul propoziţional cu logica booleană a propoziţiilor, dar Huntington va formula un an mai târziu un sistem de postulate în acest sens.

[12] Bernstein (1931: 485) consideră că aserţiunea nu îşi are locul ca idee primitivă în sistemul abstract al teoriei deducţiei reprezentat printr-o ştiinţă matematică abstractă (K, ', +), deoarece „⊢p" nu face parte nici din clasa elementelor K şi nu este nici operaţie sau relaţie. Citirea ei ca „este adevărat că p" este doar una informală.

[13] Distincţia lui Bernstein este în esenţă corectă deoarece „~p" este în limbajul obiect al teoriei deducţiei, la fel cum „non-p" este în limbajul obiect al limbii române. „p este fals" este o propoziţie în metalimbaj care este formulată cu ajutorul conceptului semantic de falsitate.

5. POSTULATELE LUI HUNTINGTON PENTRU „SISTEMUL INFORMAL PRINCIPIA”

Rezultatul lui Bernstein este preluat şi particularizat un an mai târziu de către Huntington (1933), care va introduce două noi postulate pentru a reprezenta ceea ce el numeşte „partea informală” a teoriei deducţiei din *Principia Mathematica*. Înainte de a discuta această abordare specifică, să urmărim câteva idei generale despre metoda postulatelor aşa cum o concepe şi o descrie Huntington într-o lucrare mai târzie şi ce înţelege el mai exact prin *partea informală* a teoriei deducţiei din PM.

Huntington (1937: 484-485) pune în opoziţie la nivel conceptual metoda axiomelor cu metoda postulatelor, considerând că prima reflectă vechea tendinţă a minţii filosofilor şi oamenilor de ştiinţă, iar cea din urmă reflectă tendinţa modernă. Desigur, această diferenţă este generată în principal de înţelesul originar asignat termenului „axiomă”, şi anume acela de adevăr evident prin sine, care contrastează cu înţelesul termenului „postulat”, acela de „asumpţie sau ipoteză, adică ceva acceptat de dragul argumentului”. Deşi admite că în literatura matematică mulţi autori folosesc termenul de axiomă cu înţelesul definit aici pentru termenul „postulat”, el insistă pentru folosirea acestui termen şi numeşte metoda postulatelor „metoda dacă-atunci”. Huntington (1937: 485-486, 495) consideră definitorii pentru înţelegerea metodei postulatelor şi pentru aplicarea ei în gândirea filosofică modernă următoarele idei:

1. Distingerea netă între adevăruri evidente prin sine (axiome) şi postulate (care pot fi adevărate într-o interpretare, dar false în alta).
2. Definirea postulatelor pentru o arie sau un univers de discurs restricţionate şi precizate în prealabil.
3. Metoda postulatelor este în fiecare univers de discurs un mod de clasificare a diferitelor sisteme după structura lor logică sau după proprietăţile lor funcţionale.
4. Înţelegerea caracterului abstract al simbolurilor folosite şi definirea lor în cadrul unui sistem abstract („It is only within the structure of an abstract system that we can talk about postulates and theorems at all.”).
5. Caracterul non-redundant al postulatelor (i.e., ele sunt independente unul de celălalt). Această idee este însă considerată de Huntington (1937: 495) ca fiind una secundară („an aesthetic luxury”).

Orice sistem abstract definit prin metoda postulatelor cuprinde o clasă de elemente şi reguli pentru combinarea acestor elemente, iar Huntington (1937: 489) introduce sistemul algebrei booleene ca un exemplu de sistem abstract (K, x, '), definit de următoarele postulate:

1. Dacă a şi b sunt elemente din K, atunci ab este un element din K.
2. Dacă a este un element din K, atunci a' este un element din K.
3. Dacă a, b etc. sunt elemente din K, atunci ab = ba.
4. Dacă a, b, c etc. sunt elemente din K, atunci (ab) c = a (bc).
5. Dacă a, b etc. sunt elemente din K, atunci (a'b)' (a'b')' = a.

Desigur, acest sistem abstract poate primi aplicări diverse, în funcţie de interpretarea dată simbolurilor abstracte din postulate. Dacă elementele şi operaţiile din K sunt interpretate ca regiuni ale unui plan sau propoziţii şi operaţiile cu acestea, atunci vom obţine două ştiinţe concrete a căror structură logică este o algebră booleană.

Logica este prezentată ca un sistem algebric de Huntington încă din 1904, când introduce trei seturi de postulate pentru algebra logicii, cu obiectivul de a arăta

> how the whole algebra, in its abstract form, may be developed from a selected set of fundamental propositions, or postulates, which shall be independent of each other, and for which all the other propositions of the algebra can be deduced by purely formal processes (Huntington (1904: 288)).

Într-o lucrare care revine la, şi o continuă pe cea din 1904, Huntington (1933) adaugă trei noi seturi de postulate celor trei iniţiale în lumina noilor dezvoltări din logică: cel de-al patrulea set conţine şase postulate şi este considerat de autor ca fiind cel mai natural (el este corespondentul celui formulat în PM); cel de-al cincilea este modelat după setul lui Sheffer din 1913, dar, deşi are un postulat în minus, este considerat artificial datorită complicaţiilor rezultate din folosirea operatorului respingerii (*rejection*, definit a | b = (a + b)'), iar cel de-al şaselea este modelat după „*Principia*-Bernstein set” şi are un postulat în plus considerat „necesar pentru a face lista postulatelor suficiente pentru algebra booleană”.

Sistemul de postulate al lui Bernstein pentru PM este modificat de către Huntington (1933: 291), astfel: i) postulatul 1.5 este eliminat deoarece nu este independent de restul, ii) expresia „=1” este substituită prin „este într-o subclasă T”, fiind considerată mai apropiată de semnificaţia dată de Frege semnului aserţiunii (⊢) şi iii) există un nou postulat care nu apare ca propoziţie primitivă în PM. Sistemul este următorul (în paranteze este indicată corespondenţa cu postulatele lui Bernstein formulate mai sus):

Postulatul 6.1 (1.71) Dacă a şi b sunt în K, atunci a + b este în K.

Postulatul 6.2 (1.7) Dacă a este în K, atunci a' este în K.

Postulatul 6.3 (1.1.) Dacă a este în T şi a' + b este în T, atunci b este în T.

Postulatul 6.4 (1.2) Dacă a este în K, atunci (a + a)' + a este în T.

Postulatul 6.5 (1.3) Dacă a şi b sunt în K, atunci b' + (a + b) este în T.

Postulatul 6.6 (1.4) Dacă a şi b sunt în K, atunci (a + b)' + (b + a) este în K.

Postulatul 6.7 (1.6) Dacă a, b, c sunt în K, atunci (b' + c)' + [(a + b)' + (a + c)] este în T.

Postulatul 6.8 Dacă T are proprietăţile descrise în 6.3–6.7, atunci dacă a' + b este în T şi b' + a este în T, atunci a = b.

Postulatul 6.8 introduce explicit semnul egalităţii („=”) care apărea în primele şase postulatele formulate de Bernstein sub forma „=1”, substituită de Huntington prin „este în T”. Pentru a pune în evidenţă relaţia dintre algebra booleană şi *Principia Mathematica*, Huntington introduce un set de postulate menite să modeleze atât pentru partea formală, cât şi partea informală din PM. Ce este aşadar partea informală din PM?

În Secţiunea A a primei părţi din primul volum al *Principia Mathematica*, Whitehead şi Russell prezintă sub formă axiomatică (sau postulaţională) teoria deducţiei. Sistemul lor conţine următoarele idei şi propoziţii primitive:

Idei primitive:

1. Propoziţia elementară, denotată de p, q, r …
2. Funcţia propoziţională elementară, denotată de „ϕx” ...
3. Aserţiunea unei propoziţii elementare p, denotată prin „$\vdash$p”
4. Aserţiunea unei funcţii propoziţionale, denotată prin „$\vdash\phi$x”[14]
5. Negaţia unei propoziţii elementare, denotată prin „~p”
6. Disjuncţia a două propoziţii elementare p şi q, denotată prin „p v q”.

Propoziţii primitive:

1.1 Orice este implicat de o propoziţie elementară adevărată este adevărat.

1.11 Dacă ϕx poate fi asertat şi ϕx $\supset$ ψx poate fi asertat, atunci ψx poate fi asertat, unde x este peste tot o variabilă reală.

1.2 $\vdash$ (p v p) $\supset$ p

1.3 $\vdash$ q $\supset$ (p v q)

1.4 $\vdash$ (p v q) $\supset$ (q v p)

1.5 $\vdash$ p v (q v r) $\supset$ q v (p v r)

1.6 $\vdash$ (p $\supset$ r) $\supset$ ((p v q) $\supset$ (p v r))

1.7 Dacă p este o propoziţie elementară, atunci ~p este o propoziţie elementară.

1.71 Dacă p şi q sunt propoziţii elementare, atunci p v q este o propoziţie elementară.

1.72 Dacă ϕp şi ψp sunt funcţii propoziţionale elementare care au ca argument propoziţii elementare, atunci ϕp v ψp este o funcţie propoziţională elementară.

Axiomele 1.7–1.72 contribuie la o mai bună înţelegere a teoriei deducţiei, dar ele ca atare nu intervin în derivarea formală a teoremelor din axiome. Axiomele 1.11–1.6 şi teoremele numerotate din Secţiunea A a PM constituie partea formală a teoriei deducţiei din PM. Pe lângă aceste propoziţii numerotate, în Secţiunea A a PM mai există unele propoziţii introduse ca explicaţii sau comentarii. Aceste propoziţii constituie partea informală propriu-zisă a teoriei deducţiei din PM. De exemplu, toate explicaţiile sau comentariile în limbajul natural care urmează formulării propoziţiilor primitive fac parte din partea informală a PM.

Huntington (1933, 1934) introduce un sistem de postulate pentru a reprezenta matematic întreaga teorie a deducţiei din PM. Termenii primitivi ai sistemului de postulate pentru sistemul formal şi informal din *Principia Mathematica* sunt următorii:

K = o clasă nedefinită ce conţine elementele a, b, c, ... (ce pot fi interpretate ca propoziţii)

---

[14] În prima ediţie a PM apare ca idee primitivă şi aserţiunea unei funcţii propoziţionale elementare („$\vdash\phi$x”), însă aceasta este eliminată în ediţia a doua deoarece asertarea unei funcţii propoziţionale este echivalentă cu asertarea unei propoziţii, a închiderii sale universale „$\vdash(\forall x)\phi x$”. Odată eliminată această idee primitivă, poate fi eliminată şi propoziţia primitivă 1.11. A se vedea Whitehead şi Russell (1925: xiii).

T = o subclasă a lui K (interpretabilă drept clasa propoziţiilor adevărate, marcate în PM cu semnul aserţiunii ⊢)

a + b = rezultatul unei operaţii binare nedefinite (a + b fiind interpretabil ca „a sau b", denotat în PM prin „a v b")

a' = rezultatul unei operaţii unare nedefinite (a' fiind interpretabil ca „non-a", denotat în PM prin „~a")

Cu ajutorul acestor termeni primitivi sunt introduse următoarele postulate:

Postulatul 1 Dacă a şi b sunt în K, atunci a + b este în K.

Postulatul 2 Dacă a este în K, atunci a' este în K.

Postulatul 3 Dacă a, b sunt în K, atunci b' + (a + b) este în T.

Postulatul 4 Dacă a, b sunt în K, atunci (a + b)' + (b + a) este în T.

Postulatul 5 Dacă a, b, c sunt în K, atunci (b' + c)' + [(a + b)' + (a + c)] este în T.

Postulatul 6 Dacă a + b este în T, atunci cel puţin unul dintre a şi b este în T.

Postulatul 7 Dacă a' este în T, atunci a nu este în T.

Sistemul (K, T, +, '), definit pe baza celor şapte postulate, este numit de Huntington (1933: 302) „sistemul informal *Principia*" deoarece din acesta atât propoziţiile „formale", cât şi cele „informale" din secţiunea A a PM pot fi deduse. Mai mult, postulatele şase şi şapte nu sunt deductibile din partea „formală" a PM, i.e., sunt independente. Huntington (1933: 304) conchide că „acest fapt are o importanţă fundamentală pentru orice discuţie a adecvării «teoriei deducţiei» aşa cum este definită în partea formală a *Principia*".

Postulatul 6 formulează ideea că rezultatul operaţiei „+" este adevărat, i.e., în T, numai dacă cel puţin un element al său este adevărat, i.e., în T. Ideea aceasta este întocmai cea formulată în rândul al patrulea din tabelul normal de adevăr pentru disjuncţie. De asemenea, postulatul 7 stabileşte relaţia semantică între o propoziţie şi negaţia acesteia. Este evident aşadar că cele două postulate, în această formulare, fixează ceea ce Carnap ar numi *interpretarea normală* a celor două operaţii logice. Ceea ce este discutabil însă este modul în care această interpretare este fixată. Nu ar trebui oare ca interpretările intenţionate ale acestor operaţii să fie fixate în mod univoc numai cu ajutorul unor instrumente pur abstracte (în termenii lui Bernstein) sau pur sintactice (în termenii lui Carnap)? Satisfac postulatele 6 şi 7 această condiţie? Vom urmări în continuare câteva reacţii critice ale logicienilor A. Church, E. Nagel, C. Hempel şi F. B. Fitch, care au apărut imediat după publicarea cărţii lui Carnap, faţă de formularea acestei probleme şi faţă de încercarea de a o soluţiona.

6. POSIBILITATEA UNEI FORMALIZĂRI COMPLETE A LOGICII

Nagel (1943: 332) subliniază că problema unei formalizări complete a logicii poate fi înţeleasă numai dacă trasăm o distincţie netă între un calcul (i.e., un sistem de expresii neinterpretate şi de reguli sintactice pentru a opera cu aceste expresii) şi un sistem interpretat (i.e., un sistem de expresii şi de reguli semantice pentru a opera cu acestea). Problema lui Carnap este de a determina dacă calculele logice sunt de aşa natură astfel încât „o unică interpretare să poată fi asignată operatorilor propoziţionali”. Recenzia lui Nagel este una expozitivă, neformulând reacţii critice faţă de propunerea lui Carnap de formalizare completă. Nagel (1943: 333) introduce însă o precizare importantă din punctul meu de vedere pentru clarificarea relaţiei dintre problema unei formalizări complete şi statutul metodei postulatelor.

Metoda postulatelor permite construirea unui sistem abstract care în principiu este deschis unui număr nedefinit de interpretări (sau de ştiinţe concrete în termenii lui Bernstein). De exemplu, semnul „+” din postulatul „x + y = y + x” poate fi interpretat ca adunare, înmulţire, disjuncţie, conjuncţie etc. Dacă sistemul de postulate este categoric, atunci toate interpretările vor fi identice structural, i.e., „vor avea o structură abstractă identică”, dar, remarcă Nagel (1943: 333), chiar şi în acest caz putem avea interpretări concrete diferite care respectă această condiţie a identităţii structurale. Aşadar, de ce ar fi interesat Carnap să obţină o unică interpretare a unui calcul logic? Pentru a înţelege problema lui Carnap trebuie să ţinem seama că printr-o „interpretare” Carnap se referă explicit la asignarea de condiţii de adevăr semnelor asupra cărora se aplică operaţiile sintactice. Prin această condiţie interpretările unui calcul propoziţional sunt aşadar automat restricţionate. În consecinţă, conchide Nagel, nu există niciun conflict între rezultatul lui Carnap şi metoda postulatelor.

Hempel (1943) formulează problema analizată de Carnap ca pe o problemă de completitudine. Desigur, aşa cum vom vedea mai târziu, şi categoricitate este un tip de completitudine (completitudine descriptivă cum o va numi J. Hintikka). Calculele standard sunt formalizări complete ale adevărului logic şi ale consecinţei logice, dar nu sunt şi formalizări „complete” ale proprietăţilor termenilor logici. În acest sens, calculele standard nu sunt formalizări complete ale tabelelor de adevăr, dată fiind posibilitatea interpretărilor non-normale. El oferă o prezentare clară şi precisă a demersului lui Carnap, dar nu formulează reacţii critice faţă de soluţia propusă de Carnap. Un an mai târziu, Church (1944) şi Fitch (1944) vor formula unele critici care vor deschide direcţiile majore de analiză a problemei analizată de Bernstein, Huntington şi Carnap.

Fitch (1944: 452) descrie problema unei formalizări complete ca pe o încercare de a construi calcule logice ce nu pot fi interpretate greşit (sau în alt fel decât cel intenţionat). Fitch oferă o descriere detaliată a demersului carnapian şi formulează două critici foarte importante care se vor regăsi sub altă formă şi în recenzia publicată câteva luni mai târziu de Church (1944). Prima critică este că termenii C-adevăr, C-falsitate, C-disjuncţie nu exprimă concepte sintactice genuine. Aceasta deoarece termenul de „interpretare adevărată” (*true interpretation*) folosit de Carnap pentru a „citi” înţelesul semantic al operatorilor logici din axiomele şi regulile formale este unul semantic şi ca atare regulile împreună cu acest concept ne ajută să determinăm înţelesul operatorilor logici. În lipsa conceptului de „interpretare adevărată”, regulile şi axiomele nu ne spun nimic despre înţeles. O a doua critică pe care Fitch (1944: 453) o formulează este că formalizările lui Carnap, şi în special cele pentru logica predicatelor, necesită un metalimbaj extrem de puternic. În particular, ele necesită reguli transfinite şi astfel, consideră Fitch, ele eşuează în a fi formalizări în sensul obişnuit al termenului.

Church (1944) este singurul care se referă atât la abordarea lui Carnap, cât şi la cele două abordări anterioare[15]. Reacţia lui este cea mai comprehensivă şi va indica un diagnostic al problemei, cu consecinţe atât asupra soluţiei lui Huntington, cât şi asupra soluţiei lui Carnap, care este împărtăşit şi astăzi de către unii logicieni[16]. Church indică continuitatea ideatică între preocupările lui Bernstein, Huntington şi Carnap, dar nu consideră că existenţa interpretărilor non-normale ar constitui un defect al „formulării logistice" a logicii propoziţiilor. Prima critică formulată de Church este că atât soluţia lui Huntington, cât şi cea a lui Carnap asumă implicit noţiuni semantice. De exemplu, semnul „+" din postulatul 6 al lui Huntington se vrea a fi interpretat ca reprezentând disjuncţia, iar regula introdusă de Carnap ce admite concluzii multiple asumă implicit în concluzie semnificaţia standard a disjuncţiei. Sugestia lui Church (1944: 496) este că interpretările non-normale pot fi excluse numai prin instrumente semantice. Ca atare, o formalizare completă pur sintactică este un ideal irealizabil.

Cea de a doua critică formulată de Church vizează distincţia dintre sintaxa elementară şi cea teoretică, dar şi utilizarea regulilor non-efective (i.e., acele reguli cu un număr infinit de premise). Sintaxa elementară este acea parte a sintaxei care trebuie cunoscută cel puţin implicit de către un vorbitor pentru a utiliza limbajul-obiect în mod corect. Această sintaxă este o condiţie minimală aşadar pentru construirea oricărui calcul logic menit a fi utilizat de către o fiinţă umană. Sintaxa teoretică este mult mai puternică decât cea elementară deoarece tratează întrebări despre limbajul obiect şi structura sa matematică formală. Prin urmare, regulile non-efective de inferenţă introduse de Carnap pentru a obţine o formalizare completă a proprietăţilor cuantificatorilor nu pot face parte din sintaxa elementară deoarece, subliniază Church (1944: 498), „în mod clar nu este posibil pentru utilizatorii unui limbaj să urmeze o regulă non-efectivă în practică şi astfel aceste reguli trebuie excluse din

[15] De altfel, Huntington (1934: 130) îi mulţumeşte lui Church pentru anumite sugestii legate de unele deducţii în sistemul de postulate pentru partea informală a PM. Church (1952) revine la problema existenţei unor interpretări non-normale pentru calculul propoziţional şi generalizează noţiunile carnapiene de tabel de adevăr normal şi non-normal. În particular, el numeşte *caracteristice* pentru un calcul acele tabele de adevăr în cazul cărora propoziţiile logic adevărate pe care le definesc sunt aceleaşi cu teoremele calculului. Desigur, pot fi caracteristice şi tabele care au mai multe valori de adevăr, i.e., >2. Deoarece tabelele normale de adevăr constituie o algebră booleană, toate acele tabele cu mai multe valori care au ca imagine printr-o funcţie injectivă o algebră booleană cu două elemente sunt caracteristice dacă valorile designate au ca imagine unitatea definită de algebra booleană. Toate celelalte tabele vor fi non-normale (sau slab non-normale). Tabelele caracteristice au proprietatea *regularităţii*, în sensul că „p ⟶ q" va avea mereu o valoare nedesignată dacă „p" are o valoare designată şi „q" are o valoare nedesignată. Dacă regularitatea eşuează, se pot obţine tabele caracteristce ale calculului propoziţional care nu au ca imagine homomorfică o algebră booleană. Church (1952: 45) le numeşte pe acestea *non-normale în sens tare* şi oferă şi exemple în acest sens. El consideră că aceste tabele pot fi utile în a extinde metodele de demonstrare a independenţei axiomelor de la logica propoziţiilor la logica predicatelor de ordinul întâi şi de ordine superioare.

[16] A se vedea Koslow (2010) şi Bonnay şi Westerståhl (2016).

sintaxa elementară”. La această critică vom reveni în momentul discutării unor abordări recente, cum este cea a lui Warren (2020)[17].

7. REMARCI FINALE

Problema unei formalizări complete formulată de Carnap (1943) este gândită astăzi, după cum vom vedea mai detaliat în părţile următoare ale studiului, ca o problemă de categoricitate, deşi, aşa cum remarcă Dunn şi Hardegree (2001: 194), conceptul potrivit ar fi cel de „absolutitate”:

> Absoluteness is the appropriate analog for logics of the much studied property of theories called “categoricity”. One can expect of some theories that they be categorical in the sense of having abstractly only one model. This is an unreasonable expectation of a logic (which might be the logical basis of many different theories), but it still might be the case that abstractly the logic has only one class of models, and this is just absoluteness.

În alţi termeni, un calcul logic are proprietatea „absolutităţii” dacă şi numai dacă permite o singură clasă de modele, i.e., cele intenţionate sau standard. Mai intuitiv, după părerea mea, este să numim această proprietate *univocitate* sau *unicitate semantică*. Aceasta cu atât mai mult cu cât există un concept analog bine definit de *unicitate sintactică*: un sistem deductiv are proprietatea unicităţii sintactice dacă şi numai dacă oricare ar fi doi operatori sintactici $\#_1$ şi $\#_2$, care sunt guvernaţi de aceleaşi reguli sintactice, şi σ' este o propoziţie obţinută din σ substituind fiecare ocurenţă a lui $\#_1$ prin $\#_2$, atunci σ şi σ' sunt interderivabile.

Această proprietate este importantă *ab initio*, deoarece nu ne permite să interpretăm greşit un calcul logic. Tocmai de aceea inferenţialismul logic (model teoretic)[18] este interesat de utilizarea unor calcule logice care determină în mod unic semnificaţia termenilor logici. Utilizarea unor calcule logice cu concluzii multiple, introducerea unor calcule logice bilateraliste (care conţin în plus operaţiile de afirmare şi respingere), introducerea unor constrângeri semantice (pe linia sugerată de Church), redefinirea noţiunii de validitate pentru un calcul logic sau reconsiderarea regulilor infinite de inferenţă sunt propuneri de a soluţiona problema unei formalizări complete şi obiect de studiu ale următoarelor părţi ale acestui studiu. Problema unei formalizări complete nu este specifică numai logicii clasice, ci se poate formula, în principiu, pentru orice sistem de logică. În particular, vom vedea ce formă îmbracă această problemă şi pentru logica intuiţionistă şi cea modală.

---

[17] A se vedea Warren (2021) pentru o discuţie a posibilităţii utilizării unor reguli infinite de inferenţă de către mintea umană.

[18] Garson (2013) distinge între inferenţialismul model-teoretic şi cel demonstrativ. Ambele împărtăşesc ideea că înţelesul termenilor logici este determinat de axiomele sau regulile formale de inferenţă care le guvernează utilizarea într-un calcul logic, însă cel model-teoretic afirmă că înţelesul ar trebui caracterizat folosind termeni model-teoretici (condiţii de adevăr, referinţă etc.), iar cel demonstrativ afirmă că înţelesul ar trebui caracterizat folosind termeni demonstrativi (condiţii de derivabilitate, demonstraţii etc.).

BIBLIOGRAFIE

1. Bernays, Paul, 1926, „Axiomatische Untersuchungen des Asussagen-Kalkulus de *Principia Mathematica*”, *Mathematische Zeitschrift*, 25: 305–320.
2. Bernstein, Benjamin A., 1931, „Whitehead and Russell theory of deduction as a mathematical science”, *Bull. Amer. Math. Soc*. 37, 480–488.
3. Bernstein, Benjamin A., 1932, „Relation of Whitehead and Russell's theory of deduction to the Boolean logic of propositions”, *Bull. Amer. Math. Soc*. 38, no. 8, 589–593.
4. Bernstein, Benjamin A., 1933, „Remarks on Propositions *1.1 and *3.35 of Principia Mathematica”, *Bull. Amer. Math. Soc.* 39: 111–114.
5. Bonnay, Denis & Westerståhl, Dag, 2016, „Compositionality solves Carnap's problem”, *Erkenntnis*, 81(4), 721–739.
6. Brîncuş, Constantin C., 2022, „Inferential Quantification and the ω-rule”. Forthcoming in Antonio D'Aragona (ed), *Perspectives on deduction*, Springer, Synthese Library.
7. Brîncuş, Constantin C., 2023, „Carnap's Writtings on Semantics”. Forthcoming in Christian Damböck, Georg Schiemer (Eds), *Carnap Handbuch*, Verlag J.B. Metzler.
8. Carnap, Rudolf, 1934/1937, *Logical Syntax of Language*, London: K. Paul, Trench, Trubner & Co Ltd.
9. Carnap, Rudolf, 1939, *Foundations of Logic and Mathematics*, Chicago: University of Chicago Press.
10. Carnap, Rudolf, 1942, *Introduction to Semantics*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
11. Carnap, Rudolf, 1943, *Formalization of Logic*, Cambridge, Mass., Harvard University Press.
12. Church, Alonzo, 1944, „Review Formalization of Logic by R. Carnap”, *The Philosophical Review*, 53:5, pp. 493–498.
13. Church, Alonzo, 1953, „Non-normal truth-tables for the propositional calculus”, *Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana*, 10, No 1-1, pp. 41–52.
14. Dunn, Michael J. & Hardegree, Gary, 2001, *Algebraic Methods in Philosophical Logic*, Oxford, England: OUP.
15. Fitch, Frederic B., 1944, „Review of Introduction to Semantics and Formalization of Logic” *Philosophy and Phenomenological Research* 4:3, pp. 450–455.
16. Garson, James, 2013, *What Logics Mean: From Proof-Theory to Model-Theoretic Semantics*, Cambridge, Cambridge University Press.
17. Gödel, Kurt, 1930, „The completeness of the axioms of the functional calculus of logic”. In Solomon Feferman et al. (eds), *Kurt Gödel Collected Works, Vol I, Publications 1929–1936*, pp. 102–123.
18. Hempel, Carl G., 1943, „Review Formalization of Logic by R. Carnap”, *The Journal of Symbolic Logic*, 8:3, pp. 81–83.
19. Hilbert, David & Bernays, Paul, 1934, *Grundlagen der Mathematik*, Vol. I, Springer.
20. Huntington, Edward V., 1904, „Sets of Independent Postulates for the Algebra of Logic”, *Transactions of the American Mathematical Society* 5:3, pp. 288–309
21. Huntington, Edward V., 1911, „The fundamental propositions of algebra”. In *Monographs on Topics of Modern Mathematics Relevant to Elementary Field*, ed. J. W. A. Young, New York: Longmans, Green, and Co, pp. 150–207.
22. Huntington, Edward V., 1933, „New sets of independent postulates for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russell's *Principia Mathematica*”, *Trans. Amer. Math. Soc*. 35, 274–304.
23. Huntington, Edward V., 1934, „Independent Postulates for the "Informal" Part of *Principia Mathematica*”, *Bull. Amer. Math. Soc*. 40(2), 127–136
24. Huntington, Edward V., 1937, „The Method of Postulates”, *Philosophy of Science*, 4:4, 482–495.
25. Koslow, Arnold, 2010, „Carnap's Problem: What is it Like to be a Normal Interpretation of Classical Logic?”, *Abstracta*, 6(1), pp. 117–135
26. Nagel, Ernest, 1943, „Review Formalization of Logic by R. Carnap”, *Journal of Philosophy*, 40:12, pp. 332–334.

27. Nelson, Everett J., 1934, „Whitehead and Russell's Theory of Deduction as a Non-Mathematical Science", *Bull. Amer. Math. Soc*. 40:6, pp. 478–486.
28. Peregrin, Jaroslav, 2020, „Rudolf Carnap's Inferentialism". In: Schuster, R. (eds.) *The Vienna Circle in Czechoslovakia*, Vienna Circle Institute Yearbook, vol. 23, Springer, Cham.
29. Warren, Jared, 2020, *Shadows of Syntax. Revitalizing Logical and Mathematical Conventionalism*, OUP.
30. Warren, Jared, 2021, „Infinite Reasoning", *Philosophy and Phenomenological Research*, 103(2): 385–407.
31. Whitehead, Alfred North & Russell, Bertrand. 1910/1925. *Principia Mathematica*, Vol. I. Cambridge University Press (2nd edition, 1925).