

## THEORIE LEGISLATIVE DE LA NEGATION PURE

Jean-Yves BÉZIAU<sup>1</sup>

### Abstract

In this paper negation is studied alone, independently of other connectives. The background framework is the concept of normal logic and of logical law (not rule of deduction). Two groups of laws are presented, members of the latter are weaker versions of members of the former. The relations between these laws are described. Classical and intuitionistic negations are characterized by various sets of laws.

Then we show that if we take as an underlying morphological structure (often called the language) not the usual absolute free algebra (Peano's algebra) but what we call a symmetric domain (connected with  $\mathbb{Z}$ ) then the disparity between weak and strong laws disappears and intuitionistic negation collapses into classical negation; that is to say that a logical move results only from a slight morphological move reasonably motivated by the search for symmetry.

### 0. Introduction

La négation est une notion fondamentale en logique et en mathématiques. Un type de raisonnement comme le raisonnement par l'absurde peut être considéré comme la base à partir de laquelle se sont érigées les mathématiques (cf. [Szabó 69]). Cependant la négation n'a guère été étudiée directement, pour elle-même. Bien sûr beaucoup de recherches telles que le développement de la logique intuitionniste ou de la logique paraconsistante renvoient indirectement à la négation, mais une étude directe et indépendante reste à faire. Comme le note Vakarelov (cf. [Vakarelov 89]), l'étude de la négation apparaît dérisoire par rapport à la quantité phénoménale de travaux portant sur les opérateurs modaux.

Les résultats que nous présentons ici ne sont pas tous nouveaux, cependant ceux déjà connus sont décrits de façon nouvelle; en fait l'intérêt de notre étude réside dans les aspects suivants:

<sup>1</sup> Ce travail a été réalisé alors que l'auteur sejourrait à l'Université de Sao Paulo grâce à une bourse du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique. L'auteur remercie N.C.A. da Costa et I. Urbas pour différents commentaires qu'ils lui ont adressés.

- il s'agit d'une étude systématique et "pure" (au sens où nous étudions la négation indépendamment des autres connecteurs),
- nous explicitons clairement le cadre conceptuel à partir duquel nous travaillons au cours d'une discussion assez longue (première partie) visant à établir un certain nombre de distinctions et à expliquer ce que nous entendons par "lois" gouvernant la négation, concept à partir duquel nous travaillons ici (approche *législative*).

H.B.Curry dans son ouvrage remarquable, mais relativement peu connu, *Leçons de logique algébrique* (1952), fut sans doute le premier à présenter une étude systématique et uniforme de la négation. Notre travail se place dans la lignée de celui de Curry et peut être vu, en un certain sens, comme une reformulation de la théorie de Curry.

Dans la dernière partie nous développons une idée nouvelle qui illustre le fait que le cadre conceptuel que l'on adopte n'est pas anodin: nous montrons que si l'on considère la structure sous-jacente (le "langage"  $T$ ) comme une structure symétrique, alors les lois logiques pour la négation n'ont plus la même signification et il devient impossible de différencier la négation intuitionniste de la négation classique.

## 1. Cadre conceptuel

### 1.1. Une théorie pure

Notre but est ici d'étudier les lois gouvernant la négation indépendamment des autres connecteurs. C'est ce que nous appelons la *théorie pure de la négation*.

Bien souvent la négation est étudiée en présence de l'implication (cf. par exemple [Gabbay 86]); une tendance importante, vivace notamment chez les intuitionnistes, consiste même à réduire carrément la négation à l'implication. H.B.Curry écrivait ainsi: "Dans la logique intuitionniste la négation n'est pas si importante que l'implication, et il y a des logiciens qui veulent l'éliminer tout à fait" ([Curry 52], p.97). Remarquons à ce propos que l'on peut aussi "éliminer" la négation en logique classique, en la définissant à partir de l'implication, comme on le fait en logique intuitionniste; c'est ce que montre notamment Curry. La différence entre la logique intuitionniste et la logique classique apparaît alors essentiellement au niveau de l'implication.

Curry lui-même n'arrive pas à se débarrasser de l'implication et ce qu'il appelle "faute de mieux" la "théorie de la négation pure" est l'étude des "propriétés qui ne contiennent que l'implication et la négation" ([Curry 52], p.107). Vakarelov dans une étude sur la négation plus récente [Vakarelov 89] n'emploie pas l'implication mais il prend pour base fondamentale une

théorie contenant la conjonction et la disjonction, c'est-à-dire qu'il part en fait de la théorie des treillis, à l'instar de H.Rasiowa (cf. [Rasiowa 74]).

### 1.2. Algèbre, syntaxe, déduction

On pourrait qualifier l'approche de Curry, ou celle de Rasiowa-Vakarelov, d'algébrique, par opposition à une approche "syntaxique" en termes de systèmes de déduction. Cependant cette distinction usuelle est confuse; nous ne voulons pas dire qu'elle n'est pas légitime, mais, au contraire, qu'elle n'est pas suffisamment déterminée et que la terminologie usuelle contribue à la confusion, au du moins ne contribue pas à la dissiper. Souvent on assimile le symbole  $\vdash$  au symbole  $\leq$ , notamment en nommant les lois usuelles gouvernant  $\vdash$ , lois de réflexivité, de symétrie et de transitivité (cf. [Scott 74]). On confond alors ces lois avec certaines règles de déduction gentzenniennes. Or cela peut conduire à de graves erreurs comme celle qui consiste à confondre règle dérivée et règle permmissible. Nous présenterons dans deux autres articles une analyse plus poussée des idées de Curry et de Scott. Ici nous nous contenterons d'insister sur les points suivants:

- Au niveau propositionnel (logique classique ou autre), lorsque l'on opère avec un système de déduction (de style hilbertien, ou de déduction naturelle, ou un calcul des séquents, etc.), le langage propositionnel est une algèbre absolument libre (ce concept est systématiquement utilisé par les polonais, une bonne présentation se trouve dans [Barnes et Mack 75]), c'est ce qui permet d'ailleurs de faire des preuves par induction sur la complexité des formules, comme par exemple la preuve d'élimination des coupures.
- Par contre tel n'est pas le cas lorsqu'on utilise ce que l'on appelle l'"approche algébrique" (on voit donc en quoi la référence à l'algèbre peut s'avérer ambiguë).
- Dans l'approche algébrique, les preuves que l'on opère, contrairement à ce qui se passe dans l'approche "syntaxique", sont des preuves informelles. Cependant elles peuvent être ramenées, plus ou moins directement, soit à des preuves formelles d'une logique propositionnelle ou à des métaprouves d'une telle logique, soit à des preuves formelles d'une théorie de la logique classique de premier ordre. Par exemple l'étude des algèbres de Heyting peut se ramener à une théorie algébrique en logique classique de premier ordre ou bien à l'étude de la logique propositionnelle intuitionniste.
- L'approche en termes d'opérateur de conséquence structural développée par Łos et Suszko (cf. [Łos et Suszko 58]) consiste cependant à effectuer des preuves informelles, tout comme dans l'approche algébrique, en supposant toutefois que le langage est une algèbre absolument libre. il s'agit

donc d'une sorte de mixture entre l'approche syntaxique et l'approche algébrique.

### 1.3. Structures

Curry envisage une structure de type  $\langle \mathbb{U}; \leq \rangle$  où  $\leq$  est une relation (binaire) d'ordre compatible avec les opérateurs de l'algèbre  $\mathbb{U}$  qui obéissent en outre à certaines autres propriétés.

Łos et Suszko considèrent une structure de type  $\langle \mathbb{U}; Cn \rangle$  où  $\mathbb{U}$  est une algèbre absolument libre et  $Cn$  est une fonction (*opérateur de conséquence*) de  $\mathcal{P}(\mathbb{A})$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{A})$  ( $\mathbb{A}$  est le domaine de l'algèbre  $\mathbb{U}$ ), obéissant au moins aux trois fameux axiomes de Tarski, ainsi qu'à la condition de structuralité, i.e.  $Cn$  est stable pour les endomorphismes de l'algèbre  $\mathbb{U}$  (i.e. stable par substitution).

Ici nous considérerons une structure de type  $\langle \mathbb{U}; \vdash \rangle$  où  $\mathbb{U}$  est une algèbre contenant un opérateur unaire, notée  $\neg$  et appelée *négation* et où  $\vdash$  est une relation sur  $\mathcal{P}(\mathbb{A}) \times \mathcal{P}(\mathbb{A})$  obéissant à des lois, en un certain sens équivalentes aux axiomes de Tarski pour l'opérateur de conséquence  $Cn$ , qui sont bien connues et que nous allons énoncer un peu plus loin. Mais précisons tout d'abord que notre étude ne présuppose ni la compatibilité (Curry), ni la structuralité (Łos et Suszko). C'est-à-dire que nos résultats restent valables dans le cas où la négation n'est pas compatible avec d'autres opérateurs (le théorème de remplacement est faux) et dans le cas où la condition de structuralité n'est pas vérifiée (le théorème de substitution est faux).

### 1.4. Lois et règles

Les lois pour  $\vdash$  sont les suivantes:

- (1) Si  $a \in T$  alors  $T \vdash a$
- (2) Si  $T$  est incluse dans  $T'$  et  $T \vdash a$ , alors  $T' \vdash a$
- (3) Si pour tout  $a \in T'$ ,  $T \vdash a$ , et si  $T' \vdash b$ , alors  $T \vdash b$ .

Nous n'insisterons pas sur les notations facilement compréhensibles que nous utilisons ( $a$  désigne un élément de  $\mathbb{A}$ ,  $T$  une partie de  $\mathbb{A}$ , etc.). Il convient cependant d'insister sur le fait que  $T \vdash a$  signifie  $\langle T; a \rangle \in \vdash$  et qu'il faut donc distinguer  $T \vdash a$  de  $\langle T; a \rangle$ . Cela semble évident, mais ne l'est pas tant que cela, puisque certains auteurs écrivent par exemple la règle de déduction hilbertienne  $\langle \{a, a \rightarrow b\}; b \rangle$  sous la forme  $\{a, a \rightarrow b\} \vdash b$ . Cette distinction importante est liée à la distinction entre *loi* et *règle* sur laquelle nous reviendrons plus loin.

Comme on le sait toute logique (nous appelons logique n'importe quelle structure de type  $\langle \mathbb{L}; \vdash \rangle$ , la structure de l'ensemble  $\mathbb{L}$  pouvant ou non être spécifiée) définie par un système de déduction hilbertien obéit à ces trois lois (i.e. c'est une logique *normale*, cf [Béziau 94]) et il en va de même

pour les systèmes gentzenniens comprenant les règles structurelles habituelles, cependant il convient de ne pas confondre ces règles structurelles avec les lois vérifiées par la logique induite par un système de règles contenant ces règles, ce que l'on est facilement tenté de faire.

Ainsi considérons une version un peu différente de la loi (3):

(3') Si  $T \vdash a$  et  $T' \cup \{a\} \vdash b$ , alors  $T, T' \vdash b$ .

On peut représenter cette loi de façon symbolique de la manière suivante:

$$\frac{T \vdash a \quad T' \cup \{a\} \vdash b}{T, T' \vdash b}$$

ou encore, si l'on abrège  $T' \cup \{a\}$  par  $T'', a$

$$\frac{T \vdash a \quad T'', a \vdash b}{T, T' \vdash b}$$

Cette loi ressemble alors étrangement à la *règle* de coupure de Gentzen (en logique intuitionniste, ou au niveau abstrait comme formulée dans le premier article de Gentzen inspiré par Hertz, cf. [Gentzen 32]) telle qu'on la formule aujourd'hui en faisant usage du symbole  $\vdash$  au lieu du symbole  $\rightarrow$  originellement employé par Gentzen (par référence à Hertz). La différence superficielle réside dans le fait que  $T$  est un ensemble quelconque, et non nécessairement un ensemble fini, ou une séquence finie (même remarque pour  $T'', a$ ). Mais la différence fondamentale n'est pas là, elle réside dans le fait qu'une logique peut obéir à la loi (3'), tout en étant définie par un système de règles de déduction où la règle ressemblant à cette loi n'est ni une règle primitive ni une règle dérivée du système; c'est exactement ce qui se passe dans la logique intuitionniste induite par le système *LJ* sans la règle de coupure.

Donc lorsque nous disons qu'une logique obéit à la loi (3') nous faisons référence à une logique qui peut être définie de bien des façons et notamment par un système de déduction ne contenant la règle ressemblant à cette loi ni comme règle primitive, ni comme règle dérivée.

Ce que nous appelons lois logiques ce sont donc des conditions d'ordres très divers concernant la relation  $\vdash$ , similairement à ce qui se passe lorsque l'on traite en mathématiques d'une relation de type  $\leq$ . Une loi concernant  $\vdash$  peut ressembler à une règle d'un système gentzennien ou non. Par exemple la loi suivante ne ressemble pas à une telle règle:

$T \vdash a$  ssi il existe  $T_0$  finie et incluse dans  $T$  telle que  $T_0 \vdash a$ .

Par contre c'est une loi à laquelle obéissent en général les logiques définies par des systèmes de déduction. Ici nous ne supposons pas que cette loi soit valide, les lois concernant la négation que nous étudierons ne dépendant nullement de cette loi.

Malgré la confusion possible, nous utiliserons des écritures symboliques bi-dimensionnelles, pour représenter les lois, qui ressemblent à la façon dont on écrit aujourd'hui les règles de certains systèmes gentzenniens. Cela facilite en effet grandement la lecture et nous avons suffisamment insisté sur la distinction, de sorte que le lecteur retiendra qu'il ne s'agit pas là de déduction naturelle ou de calcul des séquents même s'il ne comprend pas l'exacte distinction entre loi et règle sur laquelle il n'est pas question de nous attarder plus longuement ici. Par ailleurs l'usage du symbole  $\vdash$  dans l'écriture des lois semble plus proche de sa signification frégréenne originelle (*assertion*) que son usage dans l'écriture des règles (où en fait il n'indique qu'une juxtaposition).

Les écritures symboliques des lois que nous allons utiliser sont cependant moins parfaites que les écritures symboliques des règles, notamment en vertu des différentes quantifications possibles des objets  $y$  apparaissant, comme nous le verrons plus loin.

### 1.5. Preuves

Nous utiliserons également le symbolisme bi-dimensionnel pour représenter les preuves que nous opérerons. Par exemple lorsque nous prouvons que tel ensemble de lois implique telle loi, nous écrivons cette preuve de façon schématique. Ainsi nous écrivons la preuve que la loi (3') se déduit des lois (1), (2), (3) de la façon suivante:

$$\frac{\frac{T \vdash a}{T, T' \vdash a}^{(2)} \quad \frac{\overline{T' \vdash a_1}^{(1)}}{T, T' \vdash a_1}^{(2)} \quad \dots \quad \frac{\overline{T' \vdash a_\alpha}^{(1)}}{T, T' \vdash a_\alpha}^{(2)} \quad \dots \quad T', a+b}{T, T' \vdash b}^{(3)}$$

où  $a_1, \dots, a_\alpha, \dots$  est une énumération (finie ou transfinie) des éléments de  $T$ .

D'autres faits généraux de ce genre peuvent être prouvés. Ces résultats font partie de ce que l'on peut appeler *logique abstraite*, c'est-à-dire l'étude des structures logiques dans lesquelles le domaine (ou "langage") n'est pas spécifié (cf. [Béziau 94]). Nous ne nous attarderons pas ici sur cette théorie, mais nous prouverons seulement deux théorèmes dont nous aurons besoin dans ce qui suit, les théorèmes de pliage et d'inversion.

*Pliage*

Considérons les lois suivantes pour la négation:

$$\frac{T \vdash \neg\neg a}{T \vdash a} \quad \frac{T \vdash a \quad U \vdash \neg a}{T, U \vdash b}$$

Nous allons montrer qu'elles sont respectivement équivalentes aux lois suivantes:

$$\neg\neg a \vdash a \quad a, \neg a \vdash b$$

*Théorème de pliage*

Soit  $a_1, \dots, a_\alpha, \dots$  une suite (finie ou transfinie) d'éléments de  $\mathbb{A}$ :

$$\left. \frac{\forall T_1, \dots, T_\alpha, \dots}{T_1 \vdash a_1 \quad \dots \quad T_\alpha \vdash a_\alpha \dots} \right] \Leftrightarrow a_1, \dots, a_\alpha, \dots \vdash a$$

*Preuve.*

$\Rightarrow$ )

$$\frac{\frac{}{a_1 \vdash a_1} \text{ (1)} \quad \dots \quad \frac{}{a_\alpha \vdash a_\alpha} \text{ (1)}}{a_1, \dots, a_\alpha, \dots \vdash a} \lrcorner$$

$\Leftarrow$ )

$$\frac{\frac{\frac{}{T_1 \vdash a_1} \text{ (2)}}{T_1, \dots, T_\alpha, \dots \vdash a_1} \text{ (2)} \quad \dots \quad \frac{\frac{}{T_\alpha \vdash a_\alpha} \text{ (2)}}{T_1, \dots, T_\alpha, \dots \vdash a_\alpha} \text{ (2)}}{a_1, \dots, a_\alpha, \dots \vdash a} \lrcorner}{T_1, \dots, T_\alpha \vdash a} \text{ (3)}$$

Nous nous servons de la flèche  $\lrcorner$  pour indiquer l'usage de l'hypothèse, ailleurs nous indiquons quelle loi nous appliquons.

*Inversion*

Nous voudrions maintenant montrer que  $\frac{T \vdash \neg\neg a}{T \vdash a}$  est également équiva-

lente à la loi:  $\frac{T, a \quad \vdash x}{T, \neg\neg a \vdash x}$

*Théorème d'inversion*Soient  $a, b$  fixés:

$$\forall T \frac{T \vdash a}{T \vdash b} \Leftrightarrow \forall T \forall x \frac{T, b \vdash x}{T, a \vdash x}$$

*Preuve.* $\Rightarrow$ )

$$\begin{array}{c} a \vdash a \\ \overline{a \vdash b} \quad \lrcorner \quad T, b \vdash x \\ \hline T, a \vdash x \end{array}^{(3)}$$

 $\Leftarrow$ )

$$\begin{array}{c} b \vdash b \\ T \vdash a \quad \overline{a \vdash b} \quad \lrcorner \\ \hline T \vdash b \end{array}^{(3)}$$

*2. Lois et logiques de la négation**2.1. Lois pour la négation*

On considère un groupe de douze lois pour la négation pouvant être classées par paires, composées d'une version forte et d'une version faible de la même loi (le # indique la version faible).

- lois de *reductio ad absurdum* [RA], [RA#]

$$\frac{T, \neg a \vdash b \quad U, \neg a \vdash \neg b}{T, U \vdash a}^{\text{RA}} \quad \frac{T, a \vdash b \quad U, a \vdash \neg b}{T, U \vdash \neg a}^{\text{RA\#}}$$

- lois de contraposition [CP], [CP#]

$$\frac{T, \neg a \vdash b}{T, b \vdash a}^{\text{CP}} \quad \frac{T, a \vdash b}{T, \neg b \vdash \neg a}^{\text{CP\#}}$$



- lois de contraposition bis [CP'], [CP'#]

$$\frac{T, \neg a \vdash b}{T, \neg b \vdash a}^{CP'} \quad \frac{T, a \vdash \neg b}{T, b \vdash \neg a}^{CP' \#}$$

- lois de Curry [CY], [CY#]

$$\frac{}{T \vdash a}^{CY} \quad \frac{}{T \vdash \neg a}^{CY \#}$$

- lois de la double négation [D], [D#]

$$\frac{T \vdash \neg \neg a}{T \vdash a}^D \quad \frac{T \vdash a}{T \vdash \neg \neg a}^{D \#}$$

- loi du *ex-contradictio sequitur quod libet* [EC],[EC#]

$$\frac{T \vdash a \quad U \vdash \neg a}{T, U \vdash b}^{EC} \quad \frac{T \vdash a \quad U \vdash \neg a}{T, U \vdash \neg b}^{EC \#}$$

*Théorème* (géographie de la négation) On a les relations suivantes:

RA $\Rightarrow$ CP	RA# $\Rightarrow$ CP#
RA $\Rightarrow$ D	RA# $\Rightarrow$ D#
RA $\Rightarrow$ CY	RA# $\Rightarrow$ CY#
RA $\Rightarrow$ EC	RA# $\Rightarrow$ EC#
RA $\Rightarrow$ RA#	RA# et D $\Rightarrow$ RA
CY et EC $\Rightarrow$ RA	CY# et EC# $\Rightarrow$ RA#
CP $\Rightarrow$ EC	CP# $\Rightarrow$ C#
CP' $\Rightarrow$ EC	CP#' $\Rightarrow$ EC#'
CY et CP $\Rightarrow$ RA	CY# et CP# $\Rightarrow$ RA#
CY et CP' $\Rightarrow$ RA	CY# et CP#' $\Rightarrow$ RA#

*Preuve.*

RA  $\Rightarrow$  CP

$$\frac{\frac{}{a \vdash a}^{(1)} \quad \frac{T, \neg b \vdash \neg a \quad \frac{}{\neg b, a \vdash a}^{(2)}}{T, a \vdash b}^{(\neg)}}{\frac{}{T, a \vdash b}^{(\neg)}} \quad \frac{\frac{}{\neg a \vdash \neg a}^{(1)} \quad \frac{T, b \vdash a \quad \frac{}{b, \neg a \vdash \neg a}^{(2)}}{T, \neg a \vdash \neg b}^{(\neg)}}{\frac{}{T, \neg a \vdash \neg b}^{(\neg)}}$$

RA  $\Rightarrow$  D

$$\frac{\frac{T \vdash \neg\neg A}{T, \neg a \vdash \neg\neg a}^{(2)} \quad \frac{}{\neg a \vdash \neg a}^{(1)}}{T \vdash a}^{(\neg)}$$

RA#  $\Rightarrow$  D#

$$\frac{\frac{T \vdash a}{T, \neg a \vdash a}^{(2)} \quad \frac{}{\neg a \vdash \neg a}^{(1)}}{T \vdash \neg\neg a}^{(\neg)}$$

RA  $\Rightarrow$  CY

$$\frac{T, \neg a \vdash a \quad \frac{}{\neg a \vdash \neg a}^{(1)}}{T \vdash a}^{(\neg)}$$

RA#  $\Rightarrow$  CY#

$$\frac{T, a \vdash \neg a \quad \frac{}{a \vdash a}^{(1)}}{T \vdash \neg a}^{(\neg)}$$

RA  $\Rightarrow$  EC

$$\frac{\frac{T \vdash a}{T, \neg b \vdash a}^{(2)} \quad \frac{U \vdash \neg a}{U, \neg b \vdash \neg a}^{(2)}}{T, U \vdash b}^{(\neg)}$$

RA#  $\Rightarrow$  EC#

$$\frac{\frac{T \vdash a}{T, b \vdash a}^{(2)} \quad \frac{U \vdash \neg a}{U, b \vdash \neg a}^{(2)}}{T, U \vdash \neg b}^{(\neg)}$$

RA  $\Rightarrow$  RA#

$$\frac{\frac{T, a \vdash b}{T, \neg\neg a \vdash b}^D \quad \frac{U, a \vdash \neg b}{U, \neg\neg a \vdash \neg b}^D}{T, U \vdash \neg a}^{(\neg)}$$

RA# et D  $\Rightarrow$  RA

$$\frac{\frac{T, \neg a \vdash b \quad U, \neg a \vdash \neg b}{T, U \vdash \neg\neg a}^{\text{RA\#}}}{T, U \vdash a}^{(D)}$$

CY et EC  $\Rightarrow$  RA

$$\frac{T, \neg a \vdash b \quad U, \neg a \vdash \neg b}{T, U, \neg a \vdash a}^{(EC)}$$

$$\frac{}{T, U \vdash a}^{(CY)}$$

CY# et EC#  $\Rightarrow$  RA#

$$\frac{T, a \vdash b \quad U, a \vdash \neg b}{T, U, a \vdash \neg a}^{(EC\#)}$$

$$\frac{}{T, U \vdash \neg a}^{(CY\#)}$$

CP  $\Rightarrow$  EC

$$\frac{}{\neg a \vdash \neg a}^{(1)}$$

$$\frac{}{\neg a, \neg b \vdash \neg a}^{(2)}$$

$$\frac{}{\neg a, a \vdash b}^{(\neg)}$$

CP#  $\Rightarrow$  EC#

$$\frac{}{a \vdash a}^{(1)}$$

$$\frac{}{a, b \vdash a}^{(2)}$$

$$\frac{}{a, \neg a \vdash \neg b}^{(\neg)}$$

CP'  $\Rightarrow$  EC

$$\frac{}{a \vdash a}^{(1)}$$

$$\frac{}{a, \neg b \vdash a}^{(2)}$$

$$\frac{}{a, \neg a \vdash b}^{(\neg)}$$

CP#  $\Rightarrow$  EC#

$$\frac{}{\neg a \vdash \neg a}^{(1)}$$

$$\frac{}{\neg a, b \vdash \neg a}^{(2)}$$

$$\frac{}{\neg a, a \vdash \neg b}^{(\neg)}$$

2.2. Logiques de la négation

Logique de Johansson

Logique de Brouwer-Heyting

$$\frac{T, a \vdash \neg a}{T \vdash \neg a}^{(CY\#)} \quad \rightarrow \quad \frac{T \vdash a \quad U \vdash \neg a}{T, U \vdash b}^{(EC)}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{T, \neg a \vdash a}{T \vdash a}^{(CY)}$$

Logique de Curry

$$\swarrow \searrow$$

Logique classique

Ce schéma est à lire de façon suivante: *la logique de Johansson* obéit à  $CY\#$ , *la logique de Curry* est obtenue à partir de la logique de Johansson en ajoutant  $CY$ , *la logique de Brouwer-Heyting* est obtenue à partir de la logique de Johansson en ajoutant  $EC$  et enfin *la logique classique* (ou *logique de la négation classique pure*) est obtenue à partir de la logique de Johansson en ajoutant  $EC$  et  $CY$ .

Notre classification diffère de celle de Curry non seulement en ce que nous n'utilisons pas d'implication, mais aussi de façon plus fondamentale. Une transposition "sensée" de la classification de Curry serait un peu différente. Appelons logique de Carnot (cf. [da Costa/Béziau 93] et [Urbas 94]) une logique obéissant à  $RA\#$ . La logique de Carnot est une extension stricte de ce que nous appelons logique de Johansson, dont la logique de Brouwer-Heyting est une extension stricte. Une transposition correcte de la théorie de la négation de Curry consisterait à appeler logique de Johansson ce que nous appelons logique de Carnot. Cela n'aurait pas d'incidence sur la définition de la logique de Brouwer-Heyting, comme nous le verrons, par contre la logique obtenue à partir de la logique de Carnot en ajoutant  $CY$  correspondant à ce que Curry appelle la logique de la négation stricte qui est évidemment une extension stricte de la logique de Curry.

Notre choix a été guidé par des résultats que nous exposerons ailleurs ("Negation and Abstract Logic") d'après lesquels (ce que nous appelons ici) la logique de Johansson et la loi lui correspondant (à savoir  $CY\#$ ) jouissent de propriétés remarquables qui justifient en quelque sorte l'adjectif "minimal" associé au nom de Johansson.

*Théorème (déterminations de la négation classique)* Les ensembles de lois suivants sont équivalents et définissent la négation classique:

- { $RA$ }
- { $RA\#, D$ }
- { $CY, EC$ }
- { $CY, CP$ } { $CY, CP''$ }
- { $CY\#, EC\#, D$ }
- { $CY\#, CP\#, D$ } { $CY\#, CP'\#, D$ }

*Preuve.* C'est un corollaire immédiat du théorème précédent.

Comme nous l'avons dit, la logique de Brouwer-Heyting peut être présentée de façon légèrement différente, c'est ce que montre le résultat suivant.

*Proposition* { $RA\#, EC$ } est équivalent à { $CY\#, EC$ }.

*Preuve.* Elle est immédiate vu que ( $CY\#$  et  $EC \Rightarrow RA\#$ ) découle de ( $CY\#$  et  $EC\# \Rightarrow RA\#$ ) parce que ( $EC \Rightarrow EC\#$ ).

*Théorème (caractérisation de la négation de Brouwer-Heyting)* La loi suivante définit la négation de Brouwer-Heyting:

$$(T, a \vdash x \text{ pour tout } x) \Leftrightarrow T \vdash \neg a$$

Nous dénoterons par [NID] la partie  $\Rightarrow$  et [NIG] la partie  $\Leftarrow$ .

*Preuve.*

CY#  $\Rightarrow$  + NID

$T, a \vdash x$  pour tout  $x$

$$\frac{}{T, a \vdash \neg a} \text{instanciation du } x$$

$$\frac{}{T \vdash \neg a} \text{(CY\#)}$$

EC  $\Rightarrow$  NIG

Soit  $b$  quelconque,

$T \vdash \neg a$

$$\frac{}{T, a \vdash \neg a} \quad a \vdash a$$

$$\frac{}{T, a \vdash b} \text{(EC)}$$

NIG  $\Rightarrow$  EC

$T \vdash \neg a$

$$\frac{}{T, a \vdash x \text{ pour tout } x} \neg$$

$$T \vdash a \quad \frac{}{T, a \vdash b} \text{instanciation du } x \text{ par un } b \text{ quelconque}$$

$$\frac{}{T \vdash b} \text{G}$$

NIG et NID  $\Rightarrow$  CY#

$T, a \vdash \neg a$

$$\frac{}{T, a \vdash x \text{ pour tout } x} \text{NIG}$$

$$\frac{}{T \vdash \neg a} \text{NID}$$

*Théorème (caractérisation de la négation classique) La loi suivante définit la négation classique:*

$$(T, \neg a \vdash x \text{ pour tout } x) \Leftrightarrow T \vdash a.$$

*Preuve.* Elle est symétrique à la preuve précédente; on montre que cette loi est équivalente à  $\{CY, EC\}$ .

Si l'on a en vue les deux caractérisations de la négation classique et de la négation de Brouwer-Heyting que nous venons de donner, on est frappé par leur ressemblance, on aurait du mal même à expliquer en quoi elle différencierait radicalement et en fait il suffit de peu pour qu'elles soient une seule et même chose, comme nous allons le montrer dans la section qui suit.

### *3. Elimination de la différence entre lois faibles et lois fortes par l'utilisation d'un domaine symétrique*

Entre les lois faibles et les lois fortes, il y a une certaine symétrie mais aussi un certain déséquilibre, que nous avons justement mis en avant par la dualité faibles/fortes.

Nous allons montrer maintenant que ce déséquilibre entre les lois faibles et les lois fortes est relatif et qu'il peut s'évanouir, de sorte que les lois faibles deviennent en fait parfaitement symétriques aux lois fortes, et qu'elles cessent alors d'être plus faibles que leurs consœurs.

Jusqu'à présent nous avons considéré que le domaine des logiques de la négation étaient des algèbres de type  $\langle \mathbb{A}; \neg \rangle$  et nous n'avons pas apporté de spécifications locales supplémentaires concernant la fonction  $\neg$ . Par spécifications locales nous entendons des conditions imposées sur  $\langle \mathbb{A}; \neg \rangle$  indépendamment de la relation de déductibilité, conditions purement morphologiques.

La doctrine linguistico-formelle a conduit les logiciens à une autre approche. Considérant les propositions comme des suites de signes, ils ont été amenés à penser que  $a, \neg a, \neg\neg a, \neg\neg\neg a, \dots$ , étaient nécessairement des objets tous différents les uns des autres (indépendamment du fait qu'ils puissent être identifiés *a posteriori*). Cela revient à considérer que  $\langle \mathbb{A}; \neg \rangle$  est une algèbre absolument libre, en l'occurrence une algèbre de Peano avec un nombre infini de générateurs.

En fait on peut envisager de multiples autres façons le domaine d'une logique; ici nous allons considérer une idée assez intuitive: il s'agit de prendre comme modèle non pas les entiers, mais les entiers relatifs.

Soit *ATOM* un ensemble d'objets quelconques notés  $p, q, \dots$ , nous considérons comme domaine de notre logique le produit cartésien  $\mathbb{Z}X_{ATOM}$ .

Nous appelons *domaine symétrique* un tel domaine: un élément d'un domaine symétrique est donc par exemple  $\langle -4; p \rangle$ , que nous noterons  $-4p$  et qu'il faut comprendre comme signifiant  $\neg \neg \neg \neg p$ .

Cela peut sembler fantaisiste; nous ferons remarquer cependant que la présentation originale linguistico-fromelle l'est tout autant du point de vue du mathématicien qui ne considérera jamais la proposition:  $\neg \neg \neg \neg \neg \neg \neg (0 < 2)$  (le mathématicien classique se borne à la distinction entre  $p$  et  $\neg p$  et le mathématicien intuitionniste à la distinction ternaire entre  $p$ ,  $\neg p$  et  $\neg \neg p$ .)

Nous considérons à présent les deux lois suivantes pour une logique (de la négation) de domaine symétrique:

$$\frac{T, xp \vdash yq \quad U, xp \vdash (y \pm 1)q}{T, U \vdash (x - 1)p} \quad x, y \in \mathbb{Z}[\text{RA-}]$$

$$\frac{T, xp \vdash yq \quad U, xp \vdash (y \pm 1)q}{T, U \vdash (x + 1)p} \quad x, y \in \mathbb{Z}[\text{RA+}]$$

$y \pm 1$  signifie  $y+1$  ou  $y-1$ . La loi RA-, correspondant à la version forte de loi de *reductio ad absurdum*, fait diminuer le nombre de négations de l'objet conduisant à l'absurde alors que la loi RA+, correspondant à la version faible, le fait augmenter. Ces deux lois correspondent donc à deux phénomènes symétriques et pour peu que la symétrie requise se trouve aussi au niveau morphologique, comme c'est le cas lorsque l'on utilise un domaine symétrique, alors elles sont équivalentes, comme nous allons le montrer.

*Théorème Dans une logique à domaine symétrique RA- et RA+ sont équivalentes.*

Preuve. On montre facilement  $\text{RA-} \Rightarrow \text{RA+}$  en adaptant la preuve de  $\text{RA} \Rightarrow \text{RA\#}$ . Pour prouver  $\text{RA+} \Rightarrow \text{RA-}$ , on commence d'abord par prouver  $\text{RA+} \Rightarrow \text{D+}$  (où D+ est ce que l'on imagine; nous l'utiliserons dans sa forme "inversée"), le reste de la preuve s'expose comme suit:

$$\frac{\frac{T, xp \vdash q}{T, (x-2)p \vdash q}^{D+} \quad \frac{U, xp \vdash (y \pm 1)q}{U, (x-2)p \vdash (y \pm 1)q}^{D+}}{T, U \vdash (x-1)p}^{RA+}$$

D'autres résultats similaires peuvent être obtenus avec les autres lois.

L'équivalence de RA- et de RA+ signifie que si l'on utilise comme structure sous-jacente un domaine symétrique alors la négation intuitionniste (de Brouwer-Heyting) se confond avec la négation classique et perd son autonomie.

On connaît déjà la différence étonnante entre la logique intuitionniste et la logique classique en calcul des séquents: différence structurelle et non différence logique, la logique intuitionniste possédant exactement les mêmes règles logiques que la logique classique mais étant induite par des séquents unitaires à droite.

Le résultat présent se prête à deux commentaires en rapport avec cette différence mise en avant par Gentzen. D'une part ici aussi un trait non purement logique, mais pré-logique, en l'occurrence morphologique, nous fait repenser le rapport entre logique intuitionniste et logique classique. D'autre part la logique intuitionniste semble se distinguer par son absence de symétrie: en calcul des séquents, la symétrie des séquents transforme la logique intuitionniste en logique classique, ici la symétrie morphologique a le même effet.

Enfin ce n'est pas seulement la négation intuitionniste pure qui se confond avec la négation classique lorsque l'on utilise un domaine symétrique, mais également toute négation vérifiant la loi RA#, c'est-à-dire toute négation de Carnot.

Universidade de Sao Paulo  
JYB@ALPHA.LNCC.BR

#### BIBLIOGRAPHIE

- Barnes, D.W. et J.M.Mack, *An algebraic introduction to mathematical logic*, Springer, Berlin, 1975.
- Béziau, J.-Y., "Recherche sur la logique abstraite: les logiques normales", *Acta Universitatis Wratislaviensis, Serie Logika*, 16 (1994).
- Béziau, J.-Y., "Negation : what it is and what it is not", *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 15 (1995), pp.37-43.
- Béziau, J.-Y., "About the distinctions and confusions between rules and laws, proof and consequence, Gentzen and Tarski", en préparation.
- Béziau, J.-Y., "La leçon de Curry", en préparation.



- Béziau, J.-Y., "Negation and Abstract Logic", en préparation.
- da Costa, N.C.A. et J.-Y. Béziau, "Carnot's logic", *Bulletin of the Section of Logic*, 22 (1993), pp.98-105
- Curry, H.B., *Leçons de logique algébrique*, Gauthier-Villars, Paris et E.Nauwelaerts, Louvain, 1952.
- Gabbay, D., "What is negation in a system ?." in *Logic Colloquium'86*, F.R.Drake et J.K.Truss (eds), North-Holland, Amsterdam, 1986, pp.95-112.
- Gentzen, G., "Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen", *Mathematische Annalen*, 107 (1932), pp.329-350.
- Łos J. et R.Suszko, "Remarks on sentential calculus", *Indigationes Mathematicae*, 20 (1958), pp.177-183.
- Rasiowa, H., *An algebraic approach to non-classical logics*, PWN, Warsaw/ North-Holland, Amsterdam, 1974.
- Scott, D.S., "Completeness and axiomatizability in many-valued logic" in *Proceedings of the Tarski Symposium*, L.Henkin (ed.), American Mathematical Society, Providence, pp.411-435.
- Szabó, A., *Anfänge der griechischen Mathematik*, Akademiai Kiado, Budapest, 1969.
- Urbas, I., "A note on Carnot's logic", *Bulletin of the Section of Logic*, 23 (1994), pp.118-125.
- Vakarelòv, D., "Consistency, Completeness and Negation". in *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, G.Priest, R.Routley et J.Norman (eds), Philosophia Verlag, München, 1989, pp.328-363.