# L'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES DE L'ANTIQUITÉ

Maurice CAVEING

RÉSUMÉ : La recherche historique dans le cours du dernier demi-siècle a amélioré notre connaissance des mathématiques de l'Antiquité. Les textes en provenance d'Égypte et de Mésopotamie ont été mieux compris et leur interprétation a dépassé l'alternative sommaire entre empirisme et rationalisme. Le panorama offert par la science grecque s'est enrichi et diversifié : il n'est plus possible de le réduire à la seule théorie géométrique. Les principaux problèmes que posait son histoire ont été l'objet de discussions approfondies. À partir de là des questions plus générales d'ordre épistémologique et philosophique sont soulevées. Y a-t-il un sens à chercher dans un lointain passé une « origine » unique des mathématiques ? Quel rapport y a-t-il entre la forme des mathématiques dans une civilisation et la structure de la société ? L'anthropologie culturelle peut-elle aider à interpréter la diversité et l'unité des mathématiques des divers peuples ? À partir de quand et sous quelles conditions une histoire unique des mathématiques peut-elle commencer ?

MOTS-CLÉS : Antiquité, Égypte, Mésopotamie, Grèce, mathématiques, histoire, anthropologie culturelle, épistémologie, calcul, structure déductive, domaine de rationalité.

*ABSTRACT : Historical research, during the last half-century, has improved our knowledge of the mathematics of Antiquity. Texts from Egypt and Mesopotamia have been better understood and their elucidation has left behind the crude alternative between empiricism and rationalism. The landscape offered by Greek science grew richer and became more varied : it is no longer possible to reduce it to the sole geometrical theory. The main problems which were raised by its history have been deeply discussed. Things being so, more general questions arise, from an epistemological or philosophical point of view. Does the search into some far past of a single « birth » of mathematics make any sense ? What link, if any, is there between the form of mathematics in such and such a civilization and its social structure ? Can cultural anthropology help to elucidate the variety and unity of mathematics among various peoples ? From what time and under what conditions is it possible for a single united historical progress of mathematics to begin ?*

*KEYWORDS : Antiquity, Egypt, Mesopotamia, Greece, mathematics, history, cultural anthropology, epistemology, calculation, deductive structure, sphere of rationality.*

*Revue de synthèse :* 4[e] S. n° 4, oct.-déc. 1998, p. 485-510.

ZUSAMMENFASSUNG : *Die historische Forschung der letzten 50 Jahre hat unsere Kenntnis der antiken Mathematik erheblich erweitert. Durch das bessere Verständnis und die Interpretation von Texten aus Ägypten und Mesopotamien wurde deutlich, daß man diese Dokumente nicht auf die einfache Alternative von Empirismus und Rationalismus zurückführen kann. Auch das Spektrum der griechischen Wissenschaft wurde erweitert; es ist heute nicht mehr möglich, sie allein auf eine geometrische Theorie zurückzuführen. Die wichtigsten Probleme ihrer Geschichte sind Gegenstand tiefschürfender Diskussionen gewesen. Außerdem sind allgemeinere philosophische und epistemologische Fragen gestellt worden. Ist es sinnvoll, in einer fernen Vergangenheit nach dem einmaligen « Ursprung » der Mathematik zu suchen? Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Form der Mathematik in einer bestimmten Kultur und der Struktur der jeweiligen Gesellschaft? Kann die Kulturanthropologie dazu beitragen, die Verschiedenheit und die Einheit der Mathematik bei verschiedenen Völkern zu erklären? Zu welchem Zeitpunkt und unter welchen Bedingungen war der Beginn einer einheitlichen Geschichte der Mathematik möglich?*

STICHWÖRTER : *Altertum, Ägypten, Mesopotamien, Griechenland, Mathematik, Geschichte, Kulturanthropologie, Epistemologie, Deduktion, Rationalität.*

Ancien élève de l'École normale supérieure et agrégé de philosophie, Maurice CAVEING a enseigné à l'université de Paris X-Nanterre la logique et l'épistémologie. Docteur en histoire des sciences et directeur de recherche au CNRS, il y a dirigé le laboratoire d'Histoire des sciences et des techniques.

*Adresse* : 13, bd Beaumarchais, 75004 Paris.

Nous nous proposons, dans les pages qui suivent, de fournir des éléments de réponse à la question que l'on peut légitimement se poser : qu'est-ce que faire l'histoire des mathématiques de l'Antiquité ? Les mathématiques ont constitué un des domaines de rationalité auxquels la civilisation grecque a donné le jour, de telle sorte qu'elles sont demeurées toujours présentes, à ce titre et sous cette forme, à la pensée des mathématiciens des périodes ultérieures, à Byzance, en pays d'Islam, dans l'Occident latin médiéval et moderne. Leur histoire s'étend du VI$^e$ siècle avant l'ère chrétienne, où une pensée scientifique est effectuée par les Ioniens d'Asie Mineure, jusqu'à la civilisation byzantine, soit plus d'un millénaire. Les villes d'origine des mathématiciens grecs se répartissent dans tout le domaine couvert par l'hellénisme, étant entendu qu'un rôle central exceptionnel revient, à partir du III$^e$ siècle, à Alexandrie. Si Archimède est syracusain, il ne semble pas en revanche que Rome ait jamais été un foyer théorique.

Ces mathématiques se sont développées sans communication avec celles qui ont vu le jour dans d'autres aires culturelles, notamment en Asie : mathématiques de l'Inde, de la Chine et du Japon. Une affirmation aussi tranchée serait toutefois hasardeuse dans le cas des mathématiques de l'Égypte et de la Mésopotamie anciennes. Les recherches conduites au cours du siècle qui s'achève ont montré qu'on ne peut exclure dogmatiquement l'hypothèse de communications entre les aires culturelles concernées : il s'agit plutôt d'apporter la preuve historique de leur existence. Le comparatisme qui, en tout état de cause et y compris pour le cas de l'Asie, présente un intérêt épistémologique indéniable, devient ici, en raison des proximités géographiques, un élément du débat historique lui-même. Nous n'exclurons donc pas, dans ce qui suit, cette problématique.

Le champ concerné par notre enquête se trouve ainsi délimité. On peut ajouter encore une caractérisation intrinsèque. Les mathématiques de l'Antiquité appartiennent aussi à la catégorie des mathématiques anciennes. Il faut entendre par là qu'elles ignorent l'usage généralisé du symbolisme opératoire et littéral, c'est-à-dire d'un système d'écriture qui dispose de symboles pour toutes les opérations effectuées et de lettres comme symboles des objets qui y sont soumis. L'introduction d'un tel symbolisme peut être considéré comme le sceau de l'avènement de mathématiques modernes.

Les mathématiques anciennes sont donc entièrement asservies à l'expression dans une langue vernaculaire dont la connaissance est indispensable à leur historien. De plus, l'information transmise depuis l'Antiquité est lacunaire. L'effort principal des copistes de manuscrits s'est porté, comme on peut s'y attendre, sur un « trésor » d'œuvres de premier plan. Mais l'écho de la vie complexe du progrès de la science ne nous parvient qu'à travers des fragments et des témoignages. Dans ces conditions, l'édition des sources est la première phase de toute recherche. De nouveaux développements de notre savoir historique dépendent avant tout de la prise en considération de sources nouvelles (manuscrits réellement découverts, manuscrits inédits, méconnus ou mal lus, traductions d'un original perdu, en d'autres langues). Les progrès de la codicologie et de la philologie à la fin du XIXe siècle ont fait apparaître comme dépassées les versions qui avaient été proposées depuis la Renaissance. C'est donc des deux dernières décennies du XIXe siècle que l'on peut dater le renouveau de l'histoire des mathématiques de l'Antiquité. Par une coïncidence historique, l'évolution contemporaine des mathématiques s'interrogeant sur leurs « fondements » conférait alors à cette histoire un intérêt épistémologique.

Un effort d'édition systématique se déploie et s'accompagne de la rénovation des études. La publication est en elle-même un processus scientifique de relativement longue durée. Depuis le début du siècle, les conséquences ont été lentes à se manifester sur le plan de l'histoire générale des sciences. À la veille de la Seconde Guerre mondiale, on dispose enfin d'un corpus suffisant auquel d'ailleurs s'ajoutent des textes non grecs, égyptiens d'abord, puis babyloniens en cours de publication. Dans la seconde moitié du siècle, les résultats deviennent sensibles. On assiste à une croissance significative du volume des travaux publiés et à un élargissement de la place faite aux mathématiques de l'Antiquité dans les ouvrages généraux et les périodiques spécialisés. De plus, dans ce domaine naguère réservé aux érudits européens, on voit dans la même période — en partie en raison de l'émigration dont le nazisme fut responsable — s'étendre la part prise par les chercheurs résidant aux États-Unis. Plus récemment encore, la mondialisation de la recherche s'est poursuivie.

En préface à l'histoire des mathématiques anciennes, il faut mentionner les travaux qui portent sur les systèmes de numération, lesquels constituent bien sûr un préalable à tout calcul. L'enquête ethnographique, dans laquelle l'histoire du nombre ne glanait naguère que quelques informations assez plates, s'est approfondie, en posant dans toute son ampleur la question de la présence du nombre dans la vie des sociétés humaines[1]. Plus particulièrement elle s'intéresse aux modes d'insertion du comput dans la culture de l'ethnie qui l'utilise[2], c'est-à-dire à la relation qui y est vécue entre la technique numérique, qui dépend des propriétés des symboles numéraux utilisés, et les grands mythes fondateurs du groupe, souvent

1. CRUMP, 1990.
2. LEAN, 1985-1986.

d'essence sexuelle et de signification cosmique. Ce genre d'enquête est exposé à déboucher sur des spéculations hasardeuses, par exemple si l'on prétend plaquer sur le fait ethnographique les thèses d'une épistémologie génétique, comme celle de J. Piaget[3]. Ce risque est naturellement inhérent à la découverte de nouveaux champs d'investigation, qui posent des problèmes épistémologiques inédits. Mais, d'un autre côté, ces explorations rejoignent parfois des faits très éloignés dans le temps et l'espace, retrouvés par l'historien : citons les archaïsmes de l'arithmologie antique, bien établis, par exemple pour le premier pythagorisme, par les études sémantiques de l'anthropologie historique. La liaison symbolique entre le numérique et, d'autre part, la multiplication de la progéniture et la prolifération stellaire, ne semble pas être le fait d'une seule culture.

L'inventaire ethnographique des computs ne paraît pas encore achevé. En revanche, celui des numérations écrites fait l'objet de travaux de synthèse[4]. Ce comparatisme aboutit à une typologie des systèmes historiquement attestés et à quelques conclusions de grande portée : les systèmes écrits sont dérivés de la nécessité de noter les grands nombres, pour les besoins du calendrier, ce qui fraie un autre chemin entre le numérique et les croyances cosmiques; la nécessité du choix d'une base principale se fait sentir universellement; tous les types théoriquement possibles ont été effectivement réalisés et « essayés » dans l'histoire; enfin, les procédures arithmétiques élémentaires sont dans une dépendance étroite à l'égard du système de représentation des entiers.

## I. — L'ANTIQUITÉ PROCHE-ORIENTALE

Les mathématiques du Proche-Orient ancien posent de considérables problèmes d'interprétation, que l'on ne peut aborder sans avoir pris rapidement connaissance au préalable de l'état des sources et des publications disponibles.

Dès le dernier quart du XIX^e siècle, l'existence de textes mathématiques égyptiens anciens est connue dans un milieu d'érudits extrêmement restreint et mal préparé à en comprendre la teneur. C'est en fait en 1923 que l'édition d'Eric Peet du papyrus Rhind[5] procure un document fiable, et c'est dans les années 1930 seulement que l'on dispose de certains autres textes grâce auxquels des recherches comparatives peuvent être conduites,

3. MIMICA, 1988.
4. GUITEL, 1975.
5. PEET, 1923.

en sorte qu'enfin des études d'ensemble permettent de concevoir un standard des modes de calcul égyptiens[6].

De même, après le déchiffrement de l'écriture cunéiforme, il faut attendre 1912 pour que soient publiées et traduites les premières tablettes mathématiques babyloniennes. L'initiative en revient à F. Thureau-Dangin qui, pendant un quart de siècle, les publie et commente inlassablement dans la *Revue d'assyriologie et d'archéologie orientale*, avant de les rassembler en un volume en 1938[7]. La publication est reprise et poursuivie avant la Seconde Guerre mondiale[8] et après[9] par O. Neugebauer, qui, de 1927 à 1963, multiplie les études en ce domaine. En 1959, K. Vogel propose une vue d'ensemble[10], mais les textes de Suse ne seront connus qu'en 1961[11].

### *Art du calcul et savoir mathématique en Égypte et à Babylone*

Nous sommes en présence de textes de deux sortes : d'une part, des *recueils d'exercices*, problèmes accompagnés ou non de leurs solutions, servant à la fois comme textes scolaires pour la formation des scribes et de répertoires de paradigmes pour leurs calculs professionnels ; d'autre part, des *tables de résultats précalculés* pour les opérations de base impliquées dans les procédures résolutoires. Celles-ci sont codifiées selon le type mathématique du problème à résoudre, lequel à son tour est indiqué le plus souvent par une thématique « concrète », largement conventionnelle, une affabulation empruntée à la vie sociale et économique.

Cette affabulation a d'abord fait illusion et les premiers commentaires insistaient volontiers sur le caractère pratique et purement utilitaire de ces mathématiques. Une étude détaillée invalide ce jugement. D'abord, l'invraisemblance fréquente des données numériques, accompagnée d'une précision excessive, parce que inutile, des résultats, trahit aussitôt le caractère artificiel et scolaire, voire parfois franchement ludique, de ces exercices : ceux-ci sont bien destinés à exercer l'esprit plutôt qu'à fournir simplement des « recettes ».

D'autre part, ces codes de calcul, systématiquement transmis pendant des siècles — en sorte que leur invariance, historiquement prouvée, compense en quelque manière le nombre limité de nos documents — sont fortement dépendants des particularités des systèmes de numération et des systèmes métrologiques en vigueur, dont ils exploitent les ressources avec ingéniosité. Ceux-ci sont très différents en Égypte et à Babylone. Il en résulte une hétérogénéité sensible des procédures résolutoires et des algo-

6. Voir, par ex., VOGEL, 1958, et, pour une synthèse plus récente, GILLINGS, 1972.
7. THUREAU-DANGIN, 1938.
8. NEUGEBAUER, 1935-1937.
9. NEUGEBAUER & SACHS, 1945.
10. VOGEL, 1959.
11. BRUINS, RUTTEN *et al.*, 1961.

rithmes enseignés ici et là. Ainsi, l'expression d'un quotient fractionnaire se fait-elle en Égypte au moyen d'une suite de quantièmes (1/n). Elle est alors toujours finie, mais jamais unique : il existe une infinité de possibilités, et donc un problème d'optimisation ; à Babylone elle se fait au moyen de fractions systématiques (sexagésimales) : elle est alors unique, mais souvent seulement approchée, parce que interminable. L'extraction d'une racine carrée irrationnelle conduit à une situation qui, dans le premier cas, est bien distincte de celle d'un quotient, et dans le second, en est indiscernable (sauf étude théorique).

Le trait commun aux deux civilisations, c'est qu'on ne trouve nulle part de justification de principe des procédures enseignées, ni même, sauf exception, un énoncé général des règles : celles-ci sont inculquées par l'exemple et la répétition. L'existence de codes fixés témoigne néanmoins que les calculateurs ont de leur domaine une connaissance en quelque sorte expérimentale, produit d'essais systématiques. Ils exploitent les propriétés des objets manipulés, par exemple les entiers, même si celles-ci ne sont ni thématisées pour elles-mêmes, ni verbalement désignées, mais simplement reconnues au plan opératoire. On peut parler d'un savoir implicite investi dans le calcul.

Celui-ci est en Égypte déjà fort étendu : la majeure part des propriétés qui relèvent de l'Arithmétique élémentaire des entiers (divisibilité) est mobilisée ; en outre, une conception originale du système fractionnaire repose en fait sur un usage régulier des proportions, lesquelles d'ailleurs fournissent la matière d'une série de problèmes typés, ainsi que le principe de la méthode de « fausse position ». Bien que cette dernière puisse s'appliquer à certains cas où interviennent des carrés, les problèmes que nous formulerions canoniquement au moyen d'équations du second degré, voire au-delà, n'apparaissent qu'à Babylone, où ils sont traités couramment, mais toujours de façon purement numérique, sur des exemples particuliers. D'autre part, en Mésopotamie, les tables précalculées sont si étendues et contiennent des nombres si grands (de l'ordre de $60^5$) que les spécialistes hésitent sur la manière dont elles ont été dressées.

Qu'en est-il, dans ces conditions, de la « géométrie » ? Il faut répondre que ce domaine, lui aussi, fournit matière à des problèmes numériques. Il fait donc partie de la « thématique », au même titre que les transformations métrologiques, les prix et profits commerciaux, les salaires, temps de travail, effectifs, rations, partages égaux ou progressifs, les prêts à intérêt, simples ou composés, les héritages, les changes et monnaies, ou les techniques (titres d'alliages, évaluation de matières premières). Les mensurations d'« objets » dont la morphologie peut être modélisée « géométriquement », terrains, cadastres, propriétés, édifices, les grands travaux (irrigation, urbanisme, architecture), les travaux d'art (dallages, décors, céramiques, mobiliers), voilà donc le secteur de cette « géométrie », dans laquelle les « figures », qui accompagnent éventuellement les textes, ont surtout le caractère de croquis cotés, dont les éléments ne sont utilisés que comme supports pour l'inscription de données numériques.

Le savoir implicitement utilisé dans les deux civilisations porte, comme on peut s'y attendre, sur la valeur des aires des quadrilatères usuels, des volumes des solides usuels, et cela s'étend, en Égypte, au moins jusqu'à celui de la pyramide. Mais les configurations étudiées par les Babyloniens sont plus complexes : elles incluent des triangles semblables, des relations métriques dans le cercle, des comparaisons volumétriques entre prisme et cylindre, tronc de pyramide et tronc de cône, et aussi les propriétés du triangle rectangle connues sous le nom de « théorème de Pythagore » (avec la recherche systématique de nombres satisfaisant ces relations), ou encore le partage de trapèzes par des parallèles aux bases. Ces indications sommaires permettent de situer le niveau de ce savoir, suffisamment pour qu'on aperçoive les problèmes épistémologiques soulevés par sa découverte.

*Le débat épistémologique*

Dans la mesure où les connaissances impliquées dans les textes orientaux étaient traditionnellement réputées être des découvertes grecques, la première réaction des historiens fut de minimiser leur importance, en soulignant le fait qu'elles n'étaient pas établies par voie démonstrative. Cette première attitude fut suivie d'une autre, diamétralement opposée, qui survalorise le savoir oriental, n'hésitant pas à parler, par exemple, de l'« algèbre des Babyloniens ». Cette tendance est particulièrement sensible dans l'œuvre de Neugebauer. D'ailleurs, convaincu de l'équivalence de principe entre les algorithmes anciens et les nôtres, cet auteur n'hésite pas, après avoir traduit un texte cunéiforme, à le transcrire dans la notation algébrique moderne et à interpréter ensuite comme des « erreurs » tout écart du texte par rapport aux « standards » actuels. Il arrive alors parfois que le texte ancien, loin d'être éclairé, devienne inintelligible, ou soit interprété à contre-sens. D'une façon générale, le procédé est illégitime, puisque le problème babylonien porte toujours sur des données numériques spécifiées. Il y a là un point de méthode capital, qui concerne l'histoire entière des mathématiques : on ne saurait transposer impunément une technique donnée pour s'en servir comme grille de lecture des mathématiques d'une époque antérieure. Une technique n'est pas neutre, elle véhicule des concepts déterminés. En faire un tel usage, c'est donc importer — en général indûment — en un point de l'histoire, des concepts qu'on déclarera ensuite y avoir précisément découverts, quitte à imputer quelques « erreurs » aux hommes du passé. Pour être exact, on ne saurait parler d'« algèbre babylonienne », mais seulement d'un calcul (numérique) à caractère algébrique limité (à l'usage des nombres sexagésimaux positifs, et aux puissances carrées et bicarrées).

L'ambivalence du jugement à l'égard du savoir oriental ancien a pris une forme en quelque manière philosophique. En effet, en matière d'épistémologie, la problématique traditionnelle n'avait à sa disposition que l'opposition sommaire du rationalisme et de l'empirisme. Si un savoir ne pouvait relever du premier, c'est-à-dire être dérivé logiquement des principes de la raison, il ne pouvait qu'être rangé sous l'étiquette du second. Terme ambigu, l'empirisme désignait, non seulement la doctrine qui engendre les idées de la répétition des sensations, mais aussi le processus d'acquisition d'un savoir sans réflexion, par essais et erreurs dénués d'ordre et de méthode, par « expérience vague », hésitante et aveugle, refaite au hasard, mémorisée par le succès, savoir aussitôt condamné par la formule méprisante : les recettes de l'empirisme.

Une telle conception, vulgarisatrice et réductrice, ne résiste pas à l'examen des textes. Il faut d'abord considérer que tout calcul est une technique et que, même préscientifique, aucune technique ne saurait être comprise comme une suite de gestes tâtonnants. On sait, depuis Bertrand Gille au moins, que toute technique forme système, lequel possède sa structure et ses lois de fonctionnement. Cela signifie qu'il n'y a pas de recettes isolées et que comprendre une technique relève d'un effort épistémologique spécifique. Cette remarque générale étant faite, il faut ajouter que les techniques intellectuelles sont des activités symboliques qui enveloppent nécessairement une part d'abstraction.

Cela se vérifie aisément dans le cas du calcul, pour les trois raisons suivantes : la première, déjà indiquée, c'est la nécessité de *représenter* les nombres dans un système de numération qui a des propriétés et des possibilités déterminées; la deuxième, c'est l'intervention nécessaire, dans tout calcul, de nombres qui n'expriment pas des comptes de choses ou d'objets, mais sont des *opérateurs*, ayant pour fonction de réaliser sur les autres nombres des transformations déterminées; la troisième, c'est que l'application d'une procédure résolutoire signifie le choix pertinent d'un code en fonction d'une *typologie* des problèmes correctement mémorisée. Travail avec des symboles liés en un système, emploi d'outils eux-mêmes symboliques, reconnaissance de types de problématiques requérant telle ou telle séquence ordonnée de gestes, voilà trois formes d'une activité mentale qui implique un certain degré de généralité, et donc d'abstraction [12].

Ajoutons une dernière considération : les recueils de problèmes orientaux sont destinés avant tout à un usage d'enseignement; de là deux impératifs, qui s'y manifestent clairement : d'abord le classement de la matière

12. CAVEING, 1994.

selon un ordre de difficulté croissante, forme de systématicité qui accompagne tout didactisme et qui est très visible dans certains recueils, ensuite un minimum de légitimation de ces leçons, qui se traduit par la présence presque constante de la « preuve » numérique de la justesse de la solution.

Ainsi, une connaissance plus attentive des mathématiques de l'Égypte et de la Mésopotamie antiques conduit à renvoyer dos à dos les deux termes de l'alternative : rationalisme ou empirisme. C'est en ce point de la réflexion qu'apparaît la thèse qui se voudrait le *deus ex machina* de cette aporie, c'est-à-dire l'hypothèse de la « science cachée ». L'élève — dit-on alors — ne reçoit que des consignes à appliquer au cas traité : le maître ne livre jamais la clef universelle, mais il la possède bel et bien ; jamais sans cela la complexité de certains de ces calculs ne serait possible.

En fait, le maître n'a d'autre supériorité que sa plus grande familiarité avec les codes qu'il transmet et qu'il ne songe que très rarement à perfectionner. Il est illusoire de croire que le non-dit, ce que nous avons appelé l'implicite, était écrit quelque part et a été perdu. Si cela eût été, c'est au contraire ce qu'il aurait fallu le plus précieusement conserver ! Ce qui était écrit, c'est ce qui nous est parvenu : même si l'échantillon est partiel, ses caractéristiques sont uniformes. Que le non-dit, c'est-à-dire la structure mathématique latente, agisse silencieusement comme régulateur des calculs et que quelques règles seulement émergent çà et là et soient parfois énoncées, c'est ce qui est parfaitement possible, au témoignage d'ailleurs de l'histoire des mathématiques elle-même, qui montre assez souvent le calcul précédant la théorie, et l'utilisation de propriétés bien avant qu'elles soient reconnues, désignées et rationnellement établies.

Quant au nombre, personnage central des mathématiques anciennes, ne croyons pas qu'il soit un simple indice des choses sensibles, moyen d'évaluation des collections matérielles. *En réalité*, il vit déjà de sa vie propre, séparé d'elles, dans le monde de la culture : présent *réellement* dans le hiéroglyphe sacré ou le signe cunéiforme, chacun, individualisé, est connu avec les attributs qui lui sont propres. Il peut certes être emporté dans le tourbillon de la spéculation et alimenter une arithmologie ésotérique, mais celle-ci est bien distincte — tous les textes en font foi — des calculs positifs. C'est précisément cette existence graphique qui lui permet, à la fois, d'entrer dans des calculs réglés et de symboliser des réalités invisibles en elles-mêmes, mais tout indique que les deux ordres, le technico-algorithmique et le mystico-magique, n'ont jamais été confondus. On peut dire qu'actuellement la problématique tournant autour de l'opposition de l'empirisme et du rationalisme est tout à fait dépassée. Les recherches récentes sur les mathématiques proche-orientales s'efforcent d'expliciter les relations entre mathématiques pures et appliquées, théorie et pratique, abstraction et calculs concrets, à l'intérieur du savoir lui-même tel qu'il est manifesté par les textes, ceux-ci étant replacés dans le contexte des méthodes didactiques propres au milieu scribal [13].

## II. — NOUVEAUX PARCOURS DANS LA MATHÉMATIQUE GRECQUE

L'approfondissement de la connaissance de la mathématique grecque s'est fait sur la base des résultats acquis dès les premières décennies du xx$^e$ siècle dans la publication des œuvres complètes des grands géomètres : Euclide [14], Archimède [15], Apollonius [16], des collections de Héron [17] ou de Pappus [18], ainsi que des commentaires de ce dernier [19] et de Proclus [20]. De plus, des découvertes nouvelles ont été faites : certains Livres des *Arithmétiques* de Diophante, perdus en grec, ont été retrouvés dans la version arabe de Qusta ibn Luqa [21]. Mais il faut ajouter que la connaissance des mathématiques a bénéficié aussi du progrès d'ensemble des études grecques reposant sur l'effort d'érudition : il s'agit alors des œuvres qui peuvent fournir un éclairage externe ou indirect des mathématiques, c'est-à-dire, soit les œuvres philosophiques qui en contiennent une épistémologie (Platon, Aristote), soit les œuvres scientifiques qui les utilisent (astronomie, optique, mécanique), soit celles enfin qui véhiculent des informations historiques, et qui vont des Fragments des présocratiques [22] aux doxographes les plus tardifs. La rigueur de la critique philologique oriente vers une meilleure connaissance des terminologies scientifiques, pendant que l'attention aux informations textuelles d'ordre astronomique (éclipses par exemple) permet d'améliorer les datations. L'histoire des mathématiques grecques peut de nos jours être replacée dans le contexte d'une histoire des sciences exactes [23].

### *Un paysage contrasté*

Le tableau qui en résulte est assez différent de la vision schématique qui a pu classiquement prévaloir. C'est en effet celui d'une pluralité de tradi-

13. HOYRUP, 1994.
14. *Euclidis opera omnia*, 1883-, et EUCLIDE d'Alexandrie, 1990-.
15. *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, 1910-1915.
16. *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, 1891-1893.
17. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 1899-.
18. *Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, 1876-1878.
19. JUNGE & THOMSON, éd., 1930.
20. PROCLUS, 1970.
21. DIOPHANTE d'Alexandrie, 1975, et SESIANO, 1982.
22. DIELS & KRANZ, 1951.
23. NEUGEBAUER, 1957.

tions, trait d'une civilisation qu'on pourrait dès le départ qualifier de pluridimensionnelle.

D'abord les calculs et leurs codes existent, contrairement à ce qu'une légende a pu longtemps laisser croire. Ils constituent la « logistique », dont Platon souhaitait la mise en forme théorique, dont nous entrevoyons la parenté avec celle de l'Égypte grâce à l'étude des papyrus d'époque hellénistique[24], et dont nous avons de multiples spécimens (calculs astronomiques, intervalles musicaux, mesure du cercle d'Archimède, formules d'approximation diverses, algorithme d'Euclide, règle d'Adraste, etc.). L'étude systématique des algorithmes, de leurs propriétés, de leur application à la géométrie a donné lieu à des hypothèses radicalement nouvelles sur l'histoire de la mathématique grecque et le rôle des méthodes d'approximation[25].

Dans le même esprit que la « géométrie » calculatoire des Orientaux, on trouve également une tradition de techniques de mensuration qui culmine dans le corpus héronien[26], et à laquelle n'est pas étranger le traité euclidien *Sur la division* (des figures).

En Arithmétique, à côté de la présentation démonstrative et théorématique qui s'impose chez Euclide, aux Livres VII à IX des *Éléments*, d'autres traditions subsistent jusqu'aux dernières périodes de l'Antiquité : d'une part, l'étude des nombres entiers par la description de leurs propriétés caractéristiques en tant qu'éléments des séries arithmétiques[27], une voie qui s'approche du concept de congruence, d'autre part, la résolution de problèmes d'analyse indéterminée par des expressions rationnelles, à laquelle reste attaché le nom de Diophante.

Les recherches actuelles ont donc tendance à souligner le caractère non monolithique de la mathématique grecque et la situation « concurrentielle » dans laquelle s'est élaborée la voie démonstrative.

Celle-ci, attribut classique du « géométrisme » grec, sollicite l'attention de nos contemporains dans la mesure où nous disposons des moyens de la logique et de l'épistémologie modernes pour réévaluer la rigueur que la tradition lui reconnaît et étudier avec une acuité nouvelle sa structure déductive[28]. Un autre angle de vue est celui de la genèse, sous lequel des entreprises plus risquées s'efforcent de reconstituer les cheminements qui ont abouti à l'ordonnancement des *Éléments* euclidiens, peut-être sous l'effet de la découverte des incommensurables[29]. Un grand nombre d'articles est

---

24. Parker, 1972.
25. Caveing, 1998, et Fowler, 1987.
26. *Heronis Alexandrini Metrica*, 1964.
27. Nichomachus of Gerasa, 1926.
28. Mueller, 1981, et Gardies, 1997.
29. Knorr, 1975.

consacré à proposer, sur tel ou tel point d'histoire, des hypothèses, plus ingénieuses les unes que les autres, qu'il est convenu d'appeler des « reconstructions », forme de travail tout à fait spécifique d'une matière historique dont la documentation est fort lacunaire ; ce genre est exposé à l'erreur relevée ci-dessus, la lecture rétrospective et illusoire du passé, influencée par nos connaissances mathématiques actuelles.

Traditionnellement, la forme théorique, « axiomatique » et déductive de la géométrie grecque était rapportée au rationalisme supposé inhérent à l'« esprit grec ». Cette « explication » n'est plus guère de saison, encore qu'elle reparaisse fréquemment sous d'autres formes. Il importe aussi de considérer que l'usage canonique de la règle et du compas n'est peut-être qu'un requisit de principe souligné par les philosophes, auquel la recherche effective ne s'astreignait pas.

L'expression du savoir géométrique sous forme de chaînes de théorèmes est d'ailleurs loin d'épuiser l'activité du mathématicien : celle-ci en fait consiste à résoudre des problèmes. En suivre le développement et les répercussions est une façon pertinente quoique inédite d'écrire l'histoire[30]. Plutôt qu'en amont des *Éléments* d'Euclide, ce mouvement de recherche porte en aval, vers une géométrie supérieure, celle qui brille dans les derniers siècles de la science grecque et fait un usage systématique de la méthode analytique, dont l'importance, dans l'histoire de la pensée mathématique, s'est imposée à l'attention dans ces dernières décennies.

Le paysage qu'offrent ainsi, à l'heure actuelle, les mathématiques de la Grèce ancienne est donc plus riche, complexe et contrasté que ne le laissait supposer un simple schéma de progression linéaire traduisant un rationalisme foncier donné une fois pour toutes. Mais au-delà de ces traits généraux, certaines questions plus spécifiques ont été renouvelées.

*Le problème historique du commencement*

Pendant longtemps cette question a été dominée par l'image du pythagorisme qui prévalait alors. Selon une tradition encore vivace, c'est lui qui aurait fait des mathématiques une « discipline libérale », qui aurait séparé le nombre des choses sensibles, qui, en énonçant des théorèmes fondamentaux, aurait jeté les bases de la science ; c'est en son sein qu'auraient été découvertes les grandeurs incommensurables, et que, par voie de conséquence, serait survenue la fameuse « crise des fondements ».

Nous savons aujourd'hui, grâce à une critique textuelle vigilante qui s'est exercée sur l'ensemble de la doctrine, que cette image flatteuse date en fait du IIe siècle avant notre ère et qu'elle est le produit d'un effort idéologique relevant, en quelque sorte, de la recherche en paternité ! Le pytha-

30. KNORR, 1986.

gorisme originel réel n'a point ces traits dont certains appartiennent au contraire au platonisme. Affranchie de cette image, une lecture froide du témoignage d'Aristote révèle une doctrine composite et bizarre, née d'une forme de pensée analogique, proche d'un syncrétisme archaïsant. Cela ne signifie pas nécessairement que cette École n'ait pas stimulé les recherches mathématiques, mais on ne peut lui attribuer une première « théorie » qui aurait ensuite subi une « crise » et l'on doit user de prudence avant de faire remonter jusqu'à elle des séquences entières de théorèmes d'Euclide[31].

On a songé à éclairer « les débuts » par l'examen philologique des termes qui reçoivent, à un moment donné, un sens mathématique : c'est une voie légitime, mais périlleuse. L'exploration complète du champ sémantique d'un terme est précieuse pour l'analyse de la formation d'une notion, mais elle est longue et requiert une documentation qui, là aussi, fait parfois défaut. C'est pourquoi les tentatives en ce sens ne mènent pas toujours à des conclusions définitives et incontestables[32]. On en retiendra qu'aucune méthode en ce domaine ne doit être employée isolément.

Le fait principal qui suscite interrogation et qui distingue la Grèce, c'est le rôle qu'y joue dès les débuts la *figure* de géométrie. Il ne va pas de soi qu'un croquis puisse être autre chose qu'un support de données numériques et une occasion de calculs. C'est bien là pourtant l'originalité des Grecs, pour qui la figure devient un objet d'étude interrogé en lui-même, le lieu d'observation du réseau de relations internes entre ses parties constitutives. Elle va ainsi manifester un sens neuf au cours des variations imaginaires qui métamorphosent les ensembles perceptifs visuels. Elle, et ses éléments, vont être nommés, dans une terminologie technique spéciale. Elle est ainsi le corrélat d'une pensée qui se présente comme une méditation intuitive, en grec nommée « *théôria* » (contemplation) et se pénètre peu à peu d'un discours (« *logos* ») explicatif avant d'être logique. En outre, cette pensée est habitée, quand il s'agit de mesure, par le souci de la précision; les approximations ne lui suffisent pas, il lui faut découvrir le principe, la méthode d'une mesure exacte, savoir quand et pourquoi elle est possible : c'est là un second aspect de la « *théôria* », dont le sens alors se rapproche de celui de « théorie »[33].

Il y a là un faisceau de caractères qui est en fait surprenant, et qui, en donnant sa personnalité à la mathématique grecque, lui tracera du même coup ses limites. Or, il est clair que, pour les besoins techniques, où l'homme n'a affaire qu'à ses propres productions artificielles, les approximations ont toujours suffi. Il faut donc que ce savoir ait un autre sens. Sa postulation de rigueur ne peut provenir que du sérieux de son enjeu. Une

31. Ce qui est le cas, par ex., *in* Van der Waerden, 1950.
32. Szabo, 1969.
33. Caveing, 1997.

hypothèse se dessine, que soutient la qualité d'astronomes des premiers géomètres : c'est que la représentation figurée n'ait pas seulement le sens d'une modélisation d'objets techniques, mais que, en inventoriant les relations pures entre points, droites, cercles et angles, elle soit en quête de situations typiques, dont les configurations astronomiques soient des combinaisons. Or, on ne peut oublier que la connaissance du Cosmos est pour un Grec celle de l'Être même : en tant que telle, elle ne saurait souffrir d'être approchée ; il lui faut être « science », ce que précisément dit le mot « *mathèma* ».

*L'épineuse question de l'algèbre*

Autre question spécifique du domaine grec, elle fut soulevée autrefois par Paul Tannery à propos d'une méthode exposée aux Livres I et VI des *Éléments* d'Euclide et des relations établies géométriquement au Livre II. Cet ensemble fournit les moyens de résoudre géométriquement certaines formes de l'équation du second degré et d'obtenir les relations caractéristiques des trois coniques. On le désigna par l'expression « algèbre géométrique ».

La découverte des calculs algébriques babyloniens donna une nouvelle dimension à la question : en effet, les formes de problèmes identifiées dans les textes cunéiformes sont exactement celles que les méthodes géométriques grecques permettent de résoudre. Les Grecs ont-ils donc géométrisé, en vue de les traiter théoriquement, des problèmes logistiques qui leur étaient communs avec les Orientaux ? Bien entendu, aucun transfert d'une civilisation à l'autre n'a pu être mis en évidence. Mais la question du sens des théorèmes grecs subsistait : contenaient-ils ou non une algèbre ? Elle divisait profondément les historiens. À partir de 1975, une polémique s'institua dans la revue *Archive for the history of exact sciences* et se poursuivit dans plusieurs numéros.

Chez les défenseurs de la thèse qui analyse les théorèmes en termes purement géométriques, se dissimule à peine la conception classique de la spécificité et de l'autonomie absolues de la science grecque, en tant que modèle de rationalité en aucun cas tributaire d'apports barbares : déjà Plutarque stigmatisait la « malignité d'Hérodote » qui voyait en Thalès un homme d'origine phénicienne !

En fait, l'intérêt de la controverse est essentiellement épistémologique. Elle oblige à préciser la notion d'algèbre d'un point de vue historique[34]. Les adversaires de l'« algèbre géométrique » soulignent à juste titre qu'il n'y a en Grèce ni symboles ni nombres réels. Mais, à ce compte, les symboles sont absents aussi de la science arabe. D'autre part — nous l'avons

34. CAVEING, 1997.

dit —, la science grecque n'est pas purement géométrique : la logistique semble même connaître certains développements à l'époque hellénistique. Un Alexandrin comme Héron connaît des démonstrations des théorèmes du Livre II des *Éléments*, conservées d'ailleurs par an-Nayrizi, qu'on a pu qualifier de semi-algébriques, car, n'usant ni de symboles ni des figures, elles n'utilisent que l'argumentation logique. Diophante inversement précise que certains des problèmes qu'il traite sont susceptibles de « figuration ». Nous savons de plus par des scholiastes que les problèmes de logistique répondaient à certains types, et qu'on les reconnaissait à la nature des choses dont il fallait trouver le nombre inconnu. Le problème « des Bœufs » d'Archimède, quoique relevant de l'analyse indéterminée, peut donner une idée de ce procédé. Mais ceux que traite Diophante sont déjà abstraits et font intervenir des expressions rationnelles, sans faire mention de quantités concrètes.

Les Grecs, cela est clair, n'ont pas ignoré les procédures calculatoires, mais, plutôt que dans les ensembles de nombres qu'ils considèrent ou non, nous situerions leurs limitations d'une part dans l'absence de thématisation générale des opérations et de leurs propriétés, d'autre part dans la restriction, imposée par le géométrisme, de l'étude des grandeurs irrationnelles aux segments de droite et aux aires rectilignes planes.

*L'archéologie des concepts*

La mathématique grecque nous intéresse enfin par la contribution qu'elle peut fournir à l'histoire de trois notions capitales : le parallélisme, les proportions et le continu. Sur le premier point, les tentatives antiques de démonstration du cinquième postulat d'Euclide sont connues depuis longtemps. Mais le statut logique des postulats est défini par Aristote et c'est un point sur lequel se porte un intérêt récent pour la confrontation entre l'œuvre des mathématiciens et celle des philosophes, Aristote plus spécialement, dans la mesure où l'étude attentive de son Corpus, débarrassé de la lecture scolastique, a montré l'exactitude de son information mathématique[35]. On a donc pu rechercher systématiquement dans son œuvre les traces de discussion sur le problème des parallèles[36]. Que les Grecs aient connu l'embryon d'une géométrie non euclidienne reste néanmoins du domaine des hypothèses.

La théorie des proportions, exposée au Livre V d'Euclide, retient l'attention des mathématiciens eux-mêmes au point que des colloques internationaux sont consacrés à l'histoire de cette notion jusque dans les Temps modernes. Le problème de sa genèse relève, lui aussi, de la confrontation entre Aristote et Euclide et roule autour du rôle d'Eudoxe[37]. Sous sa forme

35. HEATH, 1949.
36. TOTH, 1967.
37. GARDIES, 1988.

générale euclidienne, la théorie des proportions porte sur les grandeurs, c'est-à-dire aussi bien sur les couples de grandeurs qui ont une expression numérique que sur ceux qui n'en ont pas, c'est-à-dire dont les termes sont incommensurables. Historiquement, elle suppose un développement complet du concept d'incommensurabilité[38], déductivement elle en commande l'usage au Livre X d'Euclide. Mais surtout la théorie antique est à l'origine de deux séries de développements de première importance. À la période alexandrine en effet, elle préside à l'étude des « lieux », d'Apollonius à Pappus. Autrement dit, elle est l'outil principal de l'étude des courbes ; il suffirait de considérer la variation proportionnelle d'une grandeur par rapport à une autre pour avoir, sur un cas simple, élémentaire, le germe de la notion d'une fonction et de sa variable. La théorie se déploie dans le domaine des « grandeurs archimédiennes », auxquelles, par le fait même, — et c'est la seconde série de conséquences — s'applique la « méthode d'exhaustion ». On sait que celle-ci fut brillamment employée, avec plusieurs variantes, par Archimède, et qu'elle représente, avant la lettre, une méthode d'intégration. Tels sont les outils principaux dont disposeront — outre l'algèbre — les hommes de la Renaissance et encore ceux du XVIIᵉ siècle, ce que Descartes en somme nomme « l'Analyse des Anciens ». Les transformations méthodologiques et conceptuelles qui allaient donner naissance aux mathématiques « classiques » focalisent du même coup un intérêt certain sur ce legs de l'Antiquité.

Par là même, on conçoit aussi l'attention portée au problème du continu. Les méthodes précitées supposent le continu géométrique, c'est un premier fait. Mais c'est la nouvelle élaboration de son concept, consécutive à son arithmétisation, vers la fin du XIXᵉ siècle, qui a ramené le projecteur sur les Grecs. La doctrine de l'infini potentiel, qui semblait suffire aux géomètres depuis l'aube des Temps modernes et à laquelle s'accrochait Cauchy, venait en effet en droite ligne d'Aristote. Chez le Philosophe, elle était liée à la solution des apories de Zénon d'Élée[39] — et paraissait à ce titre indépassable —, en même temps qu'à une conception du continu physique qui interdisait tout retour à l'atomisme. De plus, comme il l'avait lui-même souligné, cette conception devait suffire au mathématicien, qui « n'a pas besoin » de l'infini (sous-entendu : actuel). La théorie du continu et de l'infini potentiel est l'une des plus systématiques et des mieux intégrées de tout l'aristotélisme[40]. Battue en brèche, au point de vue physique, par les progrès de la théorie du vide, puis de l'atomisme, elle subsistait au point de vue mathématique, et il semble bien que les méthodes des géomètres grecs aient été conçues en compatibilité avec elle. Aussi les discussions modernes

38. CAVEING, 1998.
39. CAVEING, 1982a.
40. CAVEING, 1982b.

entre partisans de l'infini actuel et de l'infini potentiel ont-elles suscité, dans l'épistémologie historique, un regain d'intérêt pour la comparaison des concepts qui, chez Euclide et chez Aristote à nouveau confrontés, permettent de penser ou de manier — jusqu'à un certain point — le continu.

## III. — DE L'HISTOIRE À L'ÉPISTÉMOLOGIE

Au-delà des questions épistémologiques particulières, il en est de plus générales suscitées par l'ensemble du champ des mathématiques anciennes, en fonction des nouvelles données historiographiques. La toute première est celle de l'origine.

*Le mythe de l'origine*

Symbolisée par Renan dans la formule du « miracle », la question de l'origine a été posée en réalité par les Grecs eux-mêmes, sous la forme spécifique de « l'origine de la Géométrie ». D'Hérodote à Proclus, ils ont éprouvé le besoin, toujours réactivé par la suite, de se désigner un ancêtre, l'Égypte en l'occurrence, puis de marquer leur différence. De l'*Epinomis* à Proclus encore, n'affirment-ils pas que, ce que les Grecs empruntent aux Barbares, ils le portent à la perfection, ils en font une discipline libérale ?

De cette façon, l'ancêtre est rejeté dans l'empirisme et l'utilitaire, et la question de l'origine devient celle de l'origine de la Raison. C'est dire qu'elle devient une question philosophique : de Kant à Husserl, il ne s'agit plus d'assigner la place et le rôle de quelque Thalès protofondateur, mais d'exhiber les structures *a priori* censées déterminer l'activité cognitive. Dans ce dispositif intellectuel, une problématique philosophique s'articule sans accepter de le reconnaître sur un certain schéma d'histoire culturelle. Ce schéma s'est constitué sur la dénégation de rationalité infligée aux civilisations autres que la grecque. Les nouvelles tendances de l'historiographie peuvent le remettre en cause. Mais la révision peut emprunter des voies inégalement judicieuses.

L'une des tentations consiste à reculer chronologiquement d'un cran — si l'on peut dire — la problématique de la raison. Les mathématiques ne sont pas nées en Grèce, mais à Babylone, ou à Sumer, ou bien en Égypte — non plus celle d'Hérodote bien sûr, mais celle de nos actuels historiens. Dès lors, il faut montrer que celles de l'Inde, ou de la Chine, et aussi les grecques, en procèdent. Un pas de plus est franchi quand on veut découvrir un fonds primordial, commun à un ensemble de civilisations, et dont tout proviendrait. C'est ce qu'a prétendu faire un auteur comme B. L. Van der Waerden[41], qui croit trouver dans le « théorème de Pythagore » le noyau

41. VAN DER WAERDEN, 1983.

indo-européen, et même néolithique, d'où procède la géométrie des ensembles mégalithiques celtes, de Babylone, d'Égypte, d'Inde, de Chine et de Grèce. Il s'agit toujours, dans de telles tentatives, de trouver le concentré minimum essentiel de mathématiques que l'on pourrait considérer comme le commencement absolu dont dériverait tout le reste.

Or ce que montre l'historiographie récente est précisément tout opposé à cette quête vaine et épuisante du point de départ inspirée par la chimère de l'origine. Ce qu'on constate en effet, c'est que, dans ce qu'on pourrait nommer « l'espace des civilisations » — dont le temps local peut sans doute être rapporté formellement à une temporalité historique universelle — apparaissent en des points divers — et probablement indépendamment les unes des autres — des formes symboliques à efficacité opératoire, qui reçoivent leurs caractères de ces civilisations, et qui sont susceptibles d'être reconnues, d'un point de vue transculturel, comme appartenant à un seul et même domaine, dénommé « mathématiques ». On acceptera de porter attention au fait que la situation n'est pas très différente en ce qui concerne l'art, les langues, les écritures, les États, les formes de parenté, ou les rites funéraires. L'esprit humain est partout le même, et partout différent. Il n'y a pas d'origine absolue. Il n'y a pas de point obligé par où la pensée mathématique devrait nécessairement « commencer », une fois pour toutes, et pour toujours. Tous les peuples, en tous les âges, sont capables de mathématiques. Mais, quelles sont les conditions historiques qui déterminent le « passage à l'acte », telle est la vraie question.

*Anthropologie culturelle et rationalité*

La liquidation du phantasme de l'origine est immédiatement suivie par la transformation du problème de la Raison. Comme on sait, la critique du mythe philosophique de la Raison grecque ne s'est pas faite sur le seul terrain de l'aventure mathématique. Elle s'est imposée au fur et à mesure que l'on s'est convaincu que le « rationnel » mène le plus souvent dans l'Histoire une existence éclatée entre divers domaines. Le plus souvent même, il coexiste avec ce qui semble le nier, tantôt en s'y opposant, tantôt en y étant mêlé. Mieux vaut donc parler de formes de rationalité, variables et spécifiques. Ainsi en est-il dans les institutions politiques, dans le champ de la preuve juridique, dans celui de l'éthique individuelle, dans les systèmes techniques, trop souvent oubliés quand il s'agit de la Grèce : administration de l'eau, urbanisme, navigation, grand commerce. La même méthode est valable pour les formes de la culture, par exemple l'interprétation des mythes.

Dans ces nouvelles perspectives méthodologiques, il est possible de jeter un autre regard sur les données comparées de l'Orient et de la Grèce. À Babylone, par exemple, on est en présence d'un savoir de scribes. Formés dans des écoles spéciales pour le service du pouvoir temporel ou pour celui des temples, les scribes constituent une caste fermée, que son savoir et ses fonctions au service d'une hiérarchie isolent du reste de la société. Détenteurs jaloux d'une technique sophistiquée qu'ils cultivent sans avoir autrement à rendre compte de leurs procédés que par leur réussite, ils forment un milieu plus enclin au secret et au ritualisme qu'à la libre discussion, mais qui n'exclut pas, étant donné l'extrême spécialisation, une certaine activité ludique entre initiés, un jeu d'énigmes auquel les mathématiques se prêtent. Quant à la transmission du savoir, elle a des buts professionnels, une forme hiérarchique, un contenu fixe, des méthodes dogmatiques. Elle doit développer l'habileté de l'élève à user de techniques éprouvées dans des situations où elles sont prévues, plus que sa capacité d'innover : de là vient la tendance, très typique d'une certaine forme d'enseignement mathématique, à lui tendre des pièges.

Le tableau qu'offre la Grèce est évidemment différent. Rappelons qu'un des aspects spécifiques de la mathématique grecque, c'est sa fonction de connaissance des propriétés « immuables » des figures, susceptible d'être appliquée à l'intellection d'un *Kosmos* géométrisé dans la forme de la sphère, et qu'un autre aspect, lié au premier, c'est la formation d'un discours technique logiquement normé, maîtrisant des méthodes de preuve irréfutables et garantissant contre l'erreur éventuelle. Or ces deux composantes renvoient elles-mêmes à une seule et même structure organisatrice de la culture grecque.

Il faut ici laisser la parole à l'anthropologie historique. D'après ses conclusions, la représentation sphérique du *Kosmos*, forme symbolique inexistante hors de l'Hellade, se comprend comme objectivation de la structure du cosmos humain, univers clos organisé par l'ordre juridico-politique de la « Cité » (« *polis* ») où règne l'« *isonomia* », l'égalité de tous et de chacun en référence au centre symbolique où repose la puissance publique. Le cercle est ainsi la figure désignée de l'espace social d'une cité où règnent la justice et l'équité, et cette forme parfaite se transfère au *Kosmos* dont tous les éléments observent les règles d'une justice éternelle dans l'ordre de leurs mouvements périodiques[42].

Or, c'est évidemment cet espace social qui est aussi le lieu de l'argumentation discursive : il forme en effet un univers socioculturel où celui qui prétend enseigner le vrai est tenu de justifier ses dires devant un interlocuteur disposant d'un droit égal à un jugement autonome et à son expression. Les relations intellectuelles ne s'établissent pas en effet en dehors des modalités générales reçues pour les relations sociales. Aussi la mise en place de la méthode démonstrative doit-elle quelque chose aux techniques de la parole produites au sein de cette culture, par exemple la dialectique,

42. VERNANT, 1962.

comme art de découvrir les contradictions dans la pensée de l'interlocuteur. Inversement, la mathématique a constitué un terrain de choix pour le perfectionnement logique. La démonstration est en réalité l'intériorisation en un discours unique d'un dialogue méticuleux avec un objecteur idéal auquel l'homme de science est tenu de rendre des comptes, tenu de rendre raison, par le caractère universel de la preuve essentiellement. Ainsi, cette structure de dialogue renvoie à un espace social où règne, entre égaux, la liberté de discussion, l'espace même de la Cité.

*Problèmes d'une anthropologie*

Par les considérations qui précèdent s'annonce une problématique bien différente de celle qui soutenait la vision historique du rationalisme occidental. Ce qui se dessine, c'est une anthropologie des formes de rationalité, sans que soit donné d'avance un paradigme de la Raison. C'est l'analyse des caractéristiques intrinsèques de chacune de ces formes qui doit permettre de la définir, en évitant les écueils de l'arbitraire.

C'est que, sur une telle voie, les problèmes surgissent nombreux. On peut craindre tout d'abord, s'agissant de mathématiques, une chute dans le relativisme, pour qui tout se vaut. Ce serait un retour déguisé au psychologisme, soit ethnique, soit historique, qui ramènerait en arrière, en-deçà d'un siècle d'épistémologie mathématique. Il faut donc tenir fermement pour une anthropologie qui ne soit pas une psychologie des groupes ou des peuples. L'étude des formes de parenté, ou celle des langues, suggère une approche qui ne doit rien à la mise en jeu de déterminations psychologiques, et qui se propose de décrire les conditions de fait dans lesquelles certaines *possibles* s'actualisent.

Un autre écueil peut alors apparaître, sous la forme de l'idée d'hétérogénéité radicale des cultures : rien de commun entre les Grecs et les Babyloniens, les Chinois et les Indiens, etc. Il est clair qu'une incommunicabilité complète nierait l'idée même de rationalité, mais il est certain d'autre part qu'il ne va pas de soi qu'une culture soit d'emblée perméable et intelligible pour une autre. On supposera néanmoins que l'obstacle peut être franchi et l'on se donnera le droit de parler, en des lieux et des temps divers, de « mathématiques ». Pourquoi peut-il en être ainsi, telle est la question véritable à laquelle il faut répondre. En même temps, la règle de méthode qui veut que l'historien s'interdise les lectures rétrospectives et l'assimilation du passé au présent, invite à maintenir fermement les différences.

La méthode anthropologique rencontre là sa difficulté principale : penser à la fois les différences et l'universalité. La raison apparaît à l'horizon d'une démarche inductive, qui prend appui sur l'identification préalable, et laborieuse, des formes de rationalité. À terme, il est supposé qu'on puisse mettre en évidence l'existence d'*universaux* (au sens des linguistes). Mais, là comme ailleurs, ce genre de recherche est encore loin de compte. C'est cependant de cette façon seulement que peut être posée valablement la question de l'*a priori*. La raison ne serait évidemment pas déterminée comme une synthèse *a posteriori* des formes de rationalité, mais comme une dynamique des universaux, déterminant *a priori* les possibles, et dont les manifestations sont facilitées ou entravées par les systèmes symboliques et les modes de communication en vigueur dans une civilisation donnée. Cette dynamique ne peut être saisie que dans ces manifestations elles-mêmes, comme le langage doit être saisi, non comme faculté psychologique, mais dans l'étude des langues qui le manifestent.

*L'histoire, mais quand ?*

Corrélativement, l'idée de l'histoire doit être transformée. En effet, la conception du rationalisme grec comme « source » des mathématiques universelles s'accompagne organiquement de l'idée d'une histoire *unique* de la science, depuis « Thalès ». On dut certes y ajouter, sous la pression des découvertes, une protohistoire; puis — nous l'avons dit — certains reculèrent l'aurore jusque dans la préhistoire, avec la géométrie des alignements de mégalithes. Ne revenons pas sur la critique de cette recherche chimérique du commencement absolu. En fait, la présence des mathématiques s'atteste de façon multilocale.

Or, pour certaines civilisations, actuellement disparues, il n'y a pas d'histoire, du moins dans l'état de notre documentation. Les mêmes types de procédures se retrouvent inchangés à dix siècles et plus d'intervalle. Ailleurs, il y a sans doute changement, voire progrès, mais à l'intérieur d'une aire culturelle sans communication apparente avec d'autres : c'est le cas de la Chine. Celui de la Grèce est complexe : on lui reconnaît une postérité, mais il serait erroné d'admettre, de l'une à l'autre, une continuité simple. Bien individualisées par deux caractères privatifs : l'absence de la notion d'espace géométrique avec pour corollaire la notion limitative de « figure », la limitation de la notion de nombre aux entiers avec pour corollaire la notion de « grandeur », les mathématiques grecques disparaissent avec eux. Elles diffèrent en cela essentiellement des nôtres, et cela explique l'indifférence relative du mathématicien à l'égard d'une science dont la base conceptuelle n'est plus la nôtre. Ce n'est plus en elles que s'annonce l'avenir des découvertes, et leur fécondité est connue pour avoir donné tout ce qu'elle pouvait. Si l'historien réactive leurs procédures, c'est pour vérifier ses hypothèses, comme l'archéologue taille des silex afin de s'assurer qu'il a bien reconstitué la technique.

Faire l'histoire des mathématiques suppose donc que l'on sache répondre d'abord à la question suivante : à partir de quand y a-t-il une histoire unique des mathématiques et pourquoi ? Lorsque Descartes, à la Deuxième

Partie du *Discours de la méthode*, évoque l'analyse géométrique des Anciens et l'algèbre des Modernes, c'est d'abord pour les *récuser*, l'une pour son assujettissement à la considération des figures, l'autre pour la confusion et l'obscurité de son symbolisme. Il aperçoit nettement que l'une et l'autre sont édifiées sur des terrains différents, ce qui revient à dire qu'il n'y aurait pas eu une histoire unique. Sauf à mieux connaître certaines voies ouvertes par des mathématiciens arabes, on ne conçoit pas qu'une science unique puisse spontanément découler du mixage des deux disciplines. Si Descartes finit cependant par « emprunter tout le meilleur » de chacune d'elles, et par « corriger tous les défauts de l'une par l'autre », c'est qu'il interpose une réflexion méthodique, trouve le moyen d'établir une correspondance claire entre lignes et symboles, et innove en associant à certaines courbes certaines équations : par suite, tout l'acquis de l'analyse des « proportions » des Anciens peut s'exprimer par les voies et moyens de l'algèbre des Arabes.

Méditant cet exemple, on conviendra que la question de l'*histoire*, en mathématiques, est liée à la question du *dépassement des limitations*. Les mathématiques grecques ont une histoire, jusqu'au moment où elles butent sur leurs limites conceptuelles et techniques. Quand disparaît la civilisation où s'est constituée leur forme de rationalité, leur fécondité est à peu près épuisée.

Une mathématique a un avenir, si elle a en elle de quoi surmonter certaines limitations qui viendraient à se manifester, et si elle est en mesure de reprendre sur son propre terrain l'ensemble des résultats acquis dans les autres civilisations : l'histoire qui s'annonce pour elle sera, dans ces conditions, l'unique histoire des mathématiques. L'historicité provient, par conséquent, du caractère provisoire et surmontable des limitations, parce que le terrain même où elles se manifestent offre les ressources nécessaires pour les dépasser, tandis qu'en revanche n'ont pas d'histoire les mathématiques dont les limitations sont définitives et préconditionnées par la culture environnante. On peut donc penser que l'historicité est liée au degré de généralité et d'abstraction des notions fondamentales sur lesquelles est bâti l'édifice mathématique. Cela n'a lieu que dans certaines conditions, et si ce degré est assez élevé, d'autres paliers pourront être franchis. Il y aura véritablement alors essor des mathématiques. L'unité n'est donc pas dans les débuts comme dans un seul germe. Au contraire, il y a des racines multiples. L'unité explicite serait éventuellement au terme, s'il existait, comme fin idéale de l'histoire.

Quelles que soient les questions envisagées, c'est donc à une sorte d'inversion épistémologique qu'aboutit la réflexion sur l'historiographie récente des mathématiques anciennes. Ce dont nous sommes instruits par là même, c'est l'erreur de l'empirisme historique : succession n'est pas raison, l'historicité même a une histoire. Les mathématiques de la période moderne aussi doivent être comprises à cette lumière.

Maurice CAVEING
(mai 1998).

### LISTE DES RÉFÉRENCES


*Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, 1891-1893, 2 vol., éd. I. L. HEIBERG, Leipzig, B. G. Teubner, réimpr. Stuttgart, B. G. Teubner, 1974.

*Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*, 1910-1915, 3 vol., éd. I. L. HEIBERG, Leipzig, B. G. Teubner, réimpr. Stuttgart, B. G. Teubner, 1972.

BRUINS (E. M.), RUTTEN (M.) *et al.*, 1961, *Textes mathématiques de Suse*, Paris, Geuthner (Mémoires de la Mission archéologique en Iran, XXXIV).

CAVEING (M.), 1982a, *Zénon d'Élée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Étude historique et critique des Fragments et Témoignages*, Paris, Vrin.

CAVEING (M.), 1982b, « Le traitement du continu dans Euclide et dans Aristote », in *Penser les mathématiques*, éd. Séminaire de philosophie et mathématiques de l'ENS (J. DIEUDONNÉ, M. LOI et R. THOM), Paris, Seuil.

CAVEING (M.), 1994, *Essai sur le savoir mathématique dans la Mésopotamie et l'Égypte anciennes*, Lille, Presses universitaires de Lille.

CAVEING (M.), 1997, *La Figure et le nombre. Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, Lille, Presses universitaires du Septentrion.

CAVEING (M.), 1998, *L'Irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Lille, Presses universitaires du Septentrion.

CRUMP (Th.), 1990, *The Anthropology of numbers*, Cambridge, MA, Cambridge University Press.

DIELS (H.) & KRANZ (W.), 1951, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 3 vol., 6e éd. Berlin, Weidmann, réimpr. Dublin/Zurich, 1968.

DIOPHANTE d'Alexandrie, 1975, *Les Arithmétiques* (L'art de l'algèbre), éd. R. RASHED, Le Caire, Impr. de la Bibl. Nat. (Héritage scientifique arabe) ; texte, trad. franc. et comment. : *Les Arithmétiques*, 2 vol., Paris, Belles-Lettres (Collection des universités de France), 1984.

*Euclidis opera omnia*, 1883-, éd. I. L. HEIBERG & H. MENGE, Leipzig, B. G. Teubner, 8 vol. : 1883, 1884, 1886, 1885, 1888, 1896, 1895, 1916 ; post Heiberg, éd. E. S. STAMATIS, Leipzig, B. G. Teubner, 6 vol. : 1969, 1970, 1972, 1973, 1977, 1977.

EUCLIDE d'Alexandrie, 1990-, *Les Éléments*, trad. et comment. par B. VITRAC, Paris, Presses universitaires de France, vol. I : Introduction générale, Livres I-IV, 1990 ; vol. II : Livres V-IX, 1994 ; vol. III : Livre X, 1998 ; vol. IV : Livres XI-XIII, à paraître (Bibliothèque d'histoire des sciences).

FOWLER (D. H.), 1987, *The Mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction*, Oxford, Clarendon Press.

GARDIES (J. L.), 1988, *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*, Paris, Vrin.

GARDIES (J. L.), 1997, *L'Organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Paris, Vrin.

GILLINGS (R. J.), 1972, *Mathematics in the time of pharaohs*, Cambridge, MA, The MIT Press.

GUITEL (G.), 1975, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion (Nouvelle bibliothèque scientifique).

HEATH (Th. L.), 1949, *Mathematics in Aristotle*, Oxford, Clarendon Press, repr. 1970.

*Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia*, 1899-, éd. W. SCHMIDT, Leipzig, B. G. Teubner, 5 vol. : 1899, 1900, 1903, 1912, 1914.

*Heronis Alexandrini Metrica*, 1964, éd. E. M. BRUINS, Leyde, Brill (Textus minores, 34).

HOYRUP (J.), 1994, *In measure, number and weight. Studies in mathematics and culture*, Albany, State University of New York Press.

JUNGE (G.) & THOMSON (W.), éd., 1930, *The Commentary of Pappus on Book X of Euclid's* Elements, Cambridge, MA, Harvard University Press, repr. New York/Londres, Johnson Repr. Co., 1968.

KNORR (W. R.), 1975, *The Evolution of the Euclidean* Elements, Dordrecht/Boston, Reidel Publ. Co. (Synthese Historical Library, 15).

KNORR (W. R.), 1986, *The Ancient Tradition of geometric problems*, Boston, Birkhaüser.

LEAN (G. A.), 1985-1986, *Counting Systems of Papua New Guinea*, 8 vol., Lae, Papua New Guinea University of Technology (Dept. of Maths).

MIMICA (J.), 1988, *Intimation of infinity. The cultural meanings of the Iqwaye counting system of number*, Oxford/New York/Hambourg, Berg Publ. ltd. (Explorations in Anthropology).

MUELLER (I.), 1981, *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid's* Elements, Cambridge, MA/Londres, The MIT Press.

NEUGEBAUER (O.), 1935-1937, *Mathematische Keilschrift-Texte*, in *Quellen und Studien zur Gesch. d. Math., Astr., u. Phys.*, Abt. A, III, 1 + 2 vol., Berlin.

NEUGEBAUER (O.), 1957, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2ᵉ éd. Providence, RI, Brown University Press, 1957, trad. franç. par P. SOUFFRIN, *Les Sciences exactes dans l'Antiquité*, Arles, Actes Sud, 1990.

NEUGEBAUER (O.) & SACHS (A.), 1945, *Mathematical Cuneiform Texts*, Newhaven, CT.

NICOMACHUS of Gerasa, 1926, *Introduction to arithmetic*, trad. & comment. by M. L. D'OOGE, Londres/New York, Macmillan.

*Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt*, 1876-1878, éd. F. HULTSCH, 3 vol., Berlin, Weidmann, repr. Amsterdam, A. M. Hakkert, 1965.

PARKER (R. A.), 1972, *Demotic Mathematical Papyri*, Providence, RI, Brown University Press.

PEET (E.), 1923, *The Rhind Mathematical Papyrus*, Liverpool/Londres, University Press of Liverpool.

PROCLUS, 1970, *A commentary on the first Book of Euclid's* Elements, trad. G. R. MORROW, Princeton, NJ, Princeton University Press.

SESIANO (J.), 1982, *Books IV to VII of Diophantus* Arithmetica *in the Arabic translation attributed to Qusta ibn Luqa*, New York/Heidelberg, Springer Verlag.

SZABO (A.), 1969, *Anfänge der griechischen Mathematik*, Munich/Vienne/Budapest, Akademiai Kiado.

THUREAU-DANGIN (F.), 1938, *Textes mathématiques babyloniens*, Leyde, Brill.

TOTH (I.), 1967, « Das parallelenproblem im Corpus Aristotelicum », *Archive for history of exact sciences*, III, p. 249-422.

VAN DER WAERDEN (B. L.), 1950, *Ontwakende wetenschap. Egyptische, babylonische, en griekse wiskunde*, Groningue, trad. angl. *Science awakening*, Groningue, P. Noordhoff ltd., s.d.

VAN DER WAERDEN (B. L.), 1983, *Geometry and algebra in ancient civilizations*, Berlin/Heidelberg/New York/Tokyo, Springer Verlag.

VERNANT (J.-P.), 1962, *Les Origines de la pensée grecque*, Paris, Presses universitaires de France, 2e éd. 1969.

VOGEL (K.), 1958, *Vorgriechische Mathematik*. I : *Vorgeschichte und Ägypten*, Hanovre/Paderborn, H. Schroedel & F. Schöningh Verlag.

VOGEL (K.), 1959, *Vorgriechische Mathematik*. II : *Die Mathematik der Babylonier*, Hanovre/Paderborn, H. Schroedel & F. Schöningh Verlag.