Document généré le 24 avr. 2024 06:26

Philosophiques

Quelques réflexions sur Descartes et les mathématiques

William Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, Canton, MA, Science History Publications, U.S.A., 1991

Louis Charbonneau

Volume 22, numéro 2, automne 1995

URI : https://id.erudit.org/iderudit/027339ar
DOI : https://doi.org/10.7202/027339ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Société de philosophie du Québec

ISSN

0316-2923 (imprimé)
1492-1391 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Charbonneau, L. (1995). Quelques réflexions sur Descartes et les mathématiques / William Shea, *The Magic of Numbers and Motion: The Scientific Career of René Descartes*, Canton, MA, Science History Publications, U.S.A., 1991. *Philosophiques*, *22*(2), 353–359. https://doi.org/10.7202/027339ar

Tous droits réservés © Société de philosophie du Québec, 1995

Ce document est protégé par la loi sur le droit d'auteur. L'utilisation des services d'Érudit (y compris la reproduction) est assujettie à sa politique d'utilisation que vous pouvez consulter en ligne.

https://apropos.erudit.org/fr/usagers/politique-dutilisation/

Cet article est diffusé et préservé par Érudit.

Érudit est un consortium interuniversitaire sans but lucratif composé de l'Université de Montréal, l'Université Laval et l'Université du Québec à Montréal. Il a pour mission la promotion et la valorisation de la recherche.

https://www.erudit.org/fr/

PHILOSOPHIQUES, VOL XXII, NUMÉRO 2, AUTOMNE 1995, P. 353-369

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR DESCARTES ET LES MATHÉMATIQUES

par Louis Charbonneau

Le livre du professeur William R. Shea *The Magic of Numbers and Motion, The Scientific Career of René Descartes**, est un vrai plaisir à lire. Il faut dire d'entrée de jeu que le ton de ce livre en est un à la fois de grand respect pour l'œuvre de Descartes mais aussi un de non compromission envers ce qu'il écrit. La personnalité de Descartes y apparaît complexe, et sous un jour qui n'est pas toujours flatteur pour le soldat-philosophe. Tout homme a ses contradictions et souvent elles sont à la mesure de la qualité intellectuelle de l'œuvre produite. Descartes n'y échappe pas. Le professeur Shea a été attentif à mettre en lumière ces incohérences tout en les présentant dans le cadre du dynamisme d'une pensée qui se construit.

Il ne saurait être question de réagir ici à l'ensemble du livre. D'une part, je ne me juge pas la compétence pour le faire, et, de toute façon, le temps ne le permet pas. Je me limiterai donc à parler des mathématiques de Descartes. Mon attention se portera sur le chapitre trois intitulé *The Mathematical Breakthrough*, mais je ne m'attarderai pas tellement au contenu mathématique qu'à des éléments contextuels, principalement à l'importance de l'algèbre dans la méthode et à un corollaire, l'idée de nombre sous-jacente à cette algèbre, thèmes que j'aurais aimé voir développés davantage dans le livre.

De la machine à l'algèbre, par la géométrie

Permettez-moi dans cette première section de résumer brièvement, trop brièvement, ce troisième chapitre, sans entrer toutefois dans les détails techniques.

La rencontre fortuite de Descartes et du mathématicien hollandais Beeckman, le 10 novembre 1618, ouvre au jeune soldat français de nouveaux horizons en lui permettant d'avoir un interlocuteur de qualité sur les questions de physique et de mathématiques. En 1619, Descartes met au point deux instruments géométriques, le compas de proportions, un instrument qu'il considère comme remarquable, et le trisecteur. Ces deux instruments permettent de résoudre mécaniquement deux problèmes grecs classiques, la duplication du cube et la trisection de l'angle. De fait, le compas de proportion fait beaucoup plus. Théoriquement, il permet de trouver autant de moyennes

* Science History Publications, U.S.A., 1991, 371 pages.

proportionnelles que l'on désire entre deux segments donnés. Autrement dit, étant donné deux segments a et b, avec le compas de proportions, on peut trouver les segments $w, x, y, \ldots, z$ tels que, en notation moderne,

$$\frac{a}{w}=\frac{w}{x}=\frac{x}{y}= \ldots =\frac{z}{b}$$

Descartes montre qu'il est possible de résoudre certaines équations du troisième degré en employant cet instrument. Mais plus intéressant pour lui, et pour nous, est le fait qu'il considère ce genre de résolution comme étant aussi « géométrique » que l'usage, usuel dans la géométrie grecque classique, de la règle et du compas. Dès lors, le compas de proportion ouvre selon Descartes une toute nouvelle science qui « résout généralement toute question relative à toute espèce de grandeurs[1] ». Cette nouvelle science repose sur l'analogie structurelle entre, d'une part, la solution de problèmes impliquant des grandeurs qui nécessitent parfois l'usage 1) des naturels, ou 2) parfois des irrationnels ou encore 3) parfois des imaginaires (solution imaginable mais non réalisable), et d'autre part la solution des problèmes géométriques qui eux sont résolubles soit 1) par la règle et le compas, ou encore 2) par des courbes issues de mouvements continus, c'est-à-dire issues de la combinaison de plusieurs mouvements dépendant les uns des autres, ou enfin 3) par des courbes issus de la combinaison de mouvements indépendants les uns des autres, comme la quadratrice. La prise de conscience de la différence entre les courbes tracées par des mouvements continus et celles issues de mouvements indépendants est fondamentale. Les premières sont caractérisées par une relation entre les mouvements. C'est cette relation qui sera exprimable par une expression symbolique. La recherche de ces expressions deviendra ultérieurement une préoccupation. Pour l'instant, en 1619, la priorité repose du côté de la mécanique de résolution par les machines. Pour lui, résoudre un problème géométrique consiste à déterminer géométriquement un segment dont la longueur satisfait les conditions du problème. Mais dès 1620, la découverte par Descartes du fait que l'on peut déterminer deux moyennes proportionnelles par l'intersection d'un cercle et d'une parabole induit un intérêt grandissant pour la représentation algébrique de la relation, entre deux segments, qui caractérise ces courbes.

Vers 1628, à l'époque présumée de la rédaction des *Regulæ ad Directionem Ingenii*, Descartes pousse plus loin son étude de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré et montre qu'elles sont résolubles aussi bien en déterminant le point d'intersection de deux coniques que par l'usage de son compas de proportions. Il est toutefois conscient que l'usage de son compas correspond à employer des courbes qui sont d'un degré supérieur à 2 et donc qu'il est préférable, au nom de la simplicité, d'employer les coni-

1. Traduction libre de Shea, 1991, p. 42 et 44. Remarquons que c'est aussi ce qu'affirme Viète à la fin de son *In artem analyticen Isagoge* publié en 1591.

ques. À ce point-ci, Descartes ne voit dans l'équation qu'un outil pour étudier la relation caractéristique d'un lieu géométrique. Il commence alors à restreindre le champ des courbes « géométriques » en disant que celles dont les points ne peuvent être mis en relation à deux segments par un nombre fini d'opérations algébriques élémentaires (+, -, x, ÷, √) ne sont pas du domaine géométrique.

Descartes s'attaque au célèbre problème de Pappus en 1631, après que le mathématicien Golius le lui ait soumis. Il s'agit de déterminer le lieu géométrique des points qui satisfont des conditions relatives à la distance de chacun de ces points à un certain nombre de droites. Il réussit à exprimer ces conditions par une équation. Toutefois, comme nous l'avons dit, pour Descartes, à ce point de son évolution mathématique, l'équation représentant une relation n'est pas en soi une solution puisqu'elle ne permet pas de tracer géométriquement la courbe par un mouvement continu. Le problème de Pappus permet à Descartes de voir que la forme de l'équation qu'il obtient peut révéler de fait la nature de la courbe. Ainsi, il constate que le lieu qu'il cherche, dans le cas où il y a 4 droites, est une conique. Mais, dans le cas où il y a 5 droites, même s'il peut exhiber une équation, il ne peut associer à cette équation aucune courbe connue. Dès lors, pour tracer le lieu, il doit se rabattre sur un traçage point par point. Alors, Descartes fait une affirmation, qu'il ne démontre pas : « Et pour ce que cette façon de tracer une ligne courbe, en trouvant indifferemment plusieurs de ses poins, ne s'estend qu'a celles qui peuuent aussi estre descrites par un mouuement regulier & continu, on ne la doit pas entierement reietter de la Geometrie[2] ». Ainsi, le champ des courbes géométriques est-il étendu au-delà du champ des courbes qui peuvent être tracées mécaniquement. Il ajoute alors les pratiques des jardiniers pour tracer les coniques comme des techniques aussi acceptables dans le cadre de la géométrie[3].

L'élargissement du domaine de ce qui est acceptable dans le sein de la géométrie aux lieux qu'on ne peut tracer que point par point montre un progrès significatif de l'importance de l'expression symbolique de la relation caractéristique d'un lieu géométrique au détriment de la façon de tracer le lieu en question. Descartes n'est pas encore totalement conscient de ce changement mais ses successeurs le verront.

---

2. R. Descartes, *La Géométrie*, 1637, p. 340. Dans les *Œuvres de Descartes*, publié par Adam, Charles, et Tannery, Paul, réimpression à Paris : Vrin, 1964-1974, voir le tome VI, p. 412. Par la suite, nous nous y référerons simplement par *La Géométrie* suivi des pages de l'édition de 1637, puis, à la suite, de celles de l'édition de Adam et Tannery (A.T.).
3. En fait, il ne m'apparaît pas très clair qu'il y ait effectivement ajout. Certes, dans la *Dioptrique*, il indique que ces façons de tracer les courbes ne sont pas celles des géomètres, mais Descartes ne fait pas moins un raisonnement précis lui permettant de montrer que les rayons parallèles qui frappent une surface réfléchissante elliptique sont concentrés vers l'un des foyers.

Méthode et algèbre

Je n'ai pas besoin de citer à des philosophes le célèbre extrait du *Discours de la Méthode* dans lequel Descartes résume en quatre points sa méthode. On peut les résumer ainsi :

1. Clarté et évidence
   Évidence des notions premières : intuition.
2. Séparation du distinct
   Distinction des parties : diviser le champ d'investigation.
3. Ordre
   Mise dans un certain ordre pour permettre à la pensée de cheminer. (Ordre non nécessairement naturel)
4. Complétude
   Dénombrement exhaustif pour ne rien omettre.

Comme exemple de sa méthode, Descartes se tourne vers l'arithmétique et la géométrie, en ce que a) leur objet est pur et simple et b) leurs déductions sont claires et rigoureuses. Il s'explique à ce sujet dans la règle V[4].

Toutefois, pour appliquer sa méthode à des problèmes mathématiques, Descartes dépasse le cadre de l'arithmétique et de la géométrie. Il choisit le langage algébrique. Non pas que l'algèbre prime sur la géométrie. Bien au contraire, comme le montre bien le professeur Shea, Descartes reste avant tout un géomètre. L'algèbre est d'abord un outil qui permet de clarifier le raisonnement géométrique. Cela explique d'ailleurs pourquoi souvent, pour un lecteur moderne, Descartes semble s'arrêter en cours de route et ne pas aller au bout de ses raisonnements algébriques. C'est qu'alors il a obtenu de l'algèbre ce qu'il recherchait et il passe à la suite de la résolution géométrique du problème qu'il étudie, que ce soit le tracé d'un lieu géométrique ou la résolution géométrique d'une équation.

Au tout début de *La Géométrie*, il décrit « Comment il faut venir aux Equations qui servent à resoudre les problesmes » :

> Ainsi voulant resoudre quelque problesme, on doit d'abord le considerer comme desia fait, & donner des noms a toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le construire, aussy bien a celles qui sont inconnuës, qu'aux autres. Puis sans considerer aucune difference entre ces lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui monste le plus naturellement de tous enqu'elle sorte elles dependent mutuellement les unes des autres, jusques a ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une mesme quantité en deux façons : ce qui se nomme une Equation, car les termes de l'une de ces deux façons sont esgaux a ceux de l'autre. Et on doit trouver autant de telles Equations, qu'on a supposé de lignes, qui estoient inconnuës. [...] [5]

4. W. R. Shea, *op. cit.*, p. 132.
5. *La Géométrie*, p. 300, A.T. p. 372.

Par la suite, il faut ramener toutes ces équations à une seule (dans certains cas plusieurs) qui donnera des informations sur la nature même du problème.

En quoi ce processus satisfait-il les quatre exigences de la méthode de Descartes[6] ?

Dans un premier temps, *donner des noms à toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le* (le problème) *à construire*. Voilà certes qui applique l'exigence de clarté, mais aussi celle de la séparation du distinct. Les lettres, qui sont le nom des éléments constituant du problème, permettent de suivre très exactement chacun de ces éléments dans les raisonnements qui mènent à la résolution du problème. Il en va autrement des nombres ou mêmes des objets géométriques qui, eux, se métamorphosent et se combinent, éludant de la sorte le rôle de chaque composante dans le raisonnement. Lorsque les équations sont produites, les relations géométriques sont exprimées sous une forme condensée mais explicite. Le chemin à suivre par la suite est alors tracé. Il est celui menant presque automatiquement à la détermination d'une équation qui condense en elle les relations caractéristiques du problème. L'exigence d'un ordre dans lequel l'esprit doit parcourir la question sera ainsi satisfaite à son tour.

L'exigence de complétude quant à elle est satisfaite dans le cadre de la théorie des équations, que Descartes développe au livre III de *La Géométrie*. Au-delà de la théorie purement algébrique, on y trouve des constructions géométriques qui correspondent aux divers types d'équations. On atteint non seulement une complétude algébrique mais aussi une complétude géométrique, véritable but de ce troisième livre, jugée sans doute plus importante que la théorie des équations .

Dans ces brèves remarques sur l'adéquation entre la méthode de Descartes et son actualisation pour la résolution de problèmes géométriques, nous n'avons rien dit sur les premiers mots de la citation ci-dessus : *on doit d'abord le considerer comme desia fait*. Cette première action intellectuelle renvoie à l'analyse qui avait réintroduit l'univers des mathématiques depuis le deuxième tiers du XVI^{e} siècle. Malheureusement, le livre du professeur Shea n'aborde pas cette filiation avec un mouvement qui marque profondément les mathématiques des XV^{e} et XVI^{e} siècles. Je voudrais dans ce qui suit montrer l'importance de l'analyse et établir un lien avec l'algèbre de Descartes.

Méthode, algèbre et analyse

Le retour de l'analyse dans la pensée mathématique occidentale a été renforcé par la redécouverte en 1560, par Antoine Maria Pazzi, d'une copie des *Livres arithmétiques* de Diophante et de la publication de la première traduction latine, par Xylander, en 1575. De plus, en 1588 paraît la traduction

6. La réponse proposée s'inspire de J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu*, épistémologie et histoire, Paris, CEDIC/ Fernand Nathan, p. 136-137.

latine, par Commandino, de la *Collection mathématique* de Pappus. Diophante aura une influence immédiate sur Bombelli qui tentera d'assurer une certaine autonomie de l'algèbre par rapport à la géométrie. Cette influence de Diophante se trouve aussi omniprésente chez Viète. Cependant, elle s'y enrichit de celle du livre VII de la *Collection mathématique* de Pappus dans lequel Pappus décrit une méthode permettant de résoudre un problème ou de déterminer un résultat en géométrie. Cette méthode est l'Analyse[7].

Je me permets de reprendre la définition de Pappus de l'analyse :

> La voie qui part de la chose cherchée, considérée comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, en supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution[8].

Par ailleurs, Pappus définit ainsi la synthèse :

> Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme étant déjà obtenue, et disposant dès lors ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse[9].

L'on peut schématiser cela plus simplement en remarquant qu'il s'agit, pour l'analyse, de trouver une proposition vraie, ou pouvant l'être[10], qui découle de la proposition faisant l'objet du théorème ou de la proposition caractérisant le problème :

$$P_{\text{cherchée}} \Longrightarrow P_n \Longrightarrow \ldots$$

$$\Longrightarrow P_1 \Longrightarrow P_{\text{vraie}}.$$

La synthèse par ailleurs correspond à trouver la suite des implications menant d'une proposition vraie à la proposition cherchée :

$$P_{\text{vraie}} \Longrightarrow P_1 \Longrightarrow \ldots$$

$$\Longrightarrow P_{\text{cherchée}}.$$

7. K. H. Parshall, « The Art of Algebra from al-Khwarizmi to Viète : A Study in the Natural Selection of Ideas », *History of Science*, xxvi (1988), p. 129 à 164, voir p. 152 à 153.
8. Pappus d'Alexandrie, *La collection mathématique*, 2 vol., traduction et introduction de P. Ver Eecke, Paris, Bruges (Desclée de Brower), 1933, t. 2, p. 477.
9. *Idem*.
10. Ainsi, en algèbre, la proposition cherchée correspond de fait à l'équation de départ et la proposition vraie, ou pouvant l'être, est la valeur de x à laquelle la résolution de l'équation nous mène.

L'analyse permet la découverte des résultats alors que la synthèse est en général pour les Grecs le moyen obligé pour véritablement prouver ces résultats. Ainsi, lorsque Pappus résout un problème en étudiant les relations entre les données pour en déduire une relation que l'on sait vraie ou que l'on peut supposer vraie, il doit, pour montrer qu'il a bien résolu le problème, effectuer un raisonnement synthétique.

Mahoney a montré l'importance de l'analyse dans l'édification de l'algèbre à la Renaissance[11]. La filiation entre l'algèbre et l'analyse a été remarquée par le grand pédagogue français Pierre de la Ramée.

Face aux nouvelles générations de jeunes étudiants auxquelles il doit enseigner, la Ramée se rebiffe contre les méthodes anciennes. En mathématiques, il cherche davantage à convaincre qu'à prouver. Aussi, son édition des *Éléments* d'Euclide a-t-elle été remaniée en éliminant les preuves synthétiques et en les remplaçant par des arguments généraux ou, plus souvent, par des exemples. La Ramée sait que les étudiants seront davantage convaincus de la véracité d'un énoncé par quelques exemples que par une longue et difficile démonstration, certes inattaquable, mais inaccessible à la très grande majorité d'entre eux. L'analyse géométrique des Grecs n'est d'ailleurs pas pour lui une bonne approche pédagogique. La pensée analytique prend toutefois diverses formes. Ainsi, la Ramée remarque que l'algèbre, de traditions allemande et italienne, présente les caractéristiques de l'analyse. De ce point de vue, l'algèbre convient davantage à l'enseignement que la géométrie. Comme dans l'analyse géométrique, en algèbre on suppose dans un premier temps le problème résolu et, partant de là, on étudie les relations qui en découlent nécessairement. Cette façon de faire assure une plus grande clarté des enjeux du problème, la concision de son écriture. François Viète fut un disciple de la Ramée. Le nom même de sa « nouvelle algèbre » qu'il met au point dans la dernière décennie du XVI^e^ siècle l'annonce : l'art analytique. Viète applique les préceptes de la Ramée dans l'édification d'une remarquable théorie mathématique, dans une présentation, il faut le dire, rarement pédagogique. Mais lorsqu'à partir des années 1630 l'œuvre de Viète sera popularisée, certains auteurs auront à cœur de présenter les mathématiques, en particulier la géométrie, dans l'esprit de la Ramée. Le *Cursus Mathematicus* de Pierre Hérigone en est un exemple. Ainsi, *Les Éléments* d'Euclide y sont traduits dans un langage complètement symbolisé dans le but de condenser les raisonnements et ainsi de les rendre plus facilement intelligibles.

11. M. S. Mahoney, *The Royal Road : The Development of Algebraic Analysis from 1550 to 1650, With Special Reference to the Work of Pierre de Fermat*, Ph.D. thesis, Princeton Univ. 1967, chapitre III. Aussi, M. Mahoney, « The Beginnings of Algebraic Thought in the Seventheenth Century », in Gaukroger, Stephen (éd.), *Descartes, Philosophy, Mathematics and Physics*, Sussex et New Jersey, 1980, p. 141 à 155.

Descartes participe de ce mouvement. Le professeur Shea, qui ne mentionne la Ramée et Viète qu'une seule fois, dit qu'au début Descartes n'avait lu ni Viète, ni la Ramée[12]. En ce qui a trait à Viète, cela semble relativement bien établi. Pour la Ramée, peut-être faut-il parler tout de même d'une atmosphère d'influence ramusienne qui imbibait certains milieux. Une étude de cette question reste à faire.

La première exigence de la méthode de Descartes, celle de la clarté et de l'évidence, se rapproche de l'idée ramusienne qu'il vaut mieux être convaincu par l'évidence ou la clarté des idées présentées que par la perfection d'une preuve qui, par ailleurs, ne nous informe pas sur la véritable nature des relations entre les composantes de la situation étudiée. N'est-ce pas ce que dit Descartes dans la seconde réponse aux *Objections faites par des personnes très doctes contre les précédentes méditations*. Je me permets de le citer *in extenso* : (C'est moi qui souligne)

> La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou resolution, & l'autre par la synthèse ou composition.
>
> L'analyse montre *la vraye voye par laquelle une chose a esté methodiquement inventée, & fait voir comment les effets dépendent des causes* ; en sorte que, si le lecteur la veut suivre, & jeter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, & ne la rendra pas moins sienne, que si luy-mesme l'avoit inventée.
>
> Mais cette sorte de demonstration n'est pas propre à convaincre les lecteurs opiniastres ou attentifs : car si on laisse échaper, sans y prendre garde, la moindre des choses qu'elle propose, la nécessité de ses conclusions ne paroistra point ; & on n'a pas coûtume d'y exprimer fort amplement les choses qui sont assez claires de soy-mesme, bien que ce soit ordinairement celles ausquelles il faut le plus prendre garde[13].
>
> La synthèse, au contraire, par une voie toute autre, & comme en examinant les causes par leurs effets (bien que la preuve qu'elle contient soit souvent aussi des effets par les causes), démontre à la verité clairement ce qui est contenu en ses conclusions, & se sert d'une longue suite de définitions, de demandes, d'axiomes, de theoremes & de problemes, afin que, si on luy nie quelques consequences, elle fasse voir comment elles sont contenuës dans les antecedents, & qu'elle arrache le consentement du lecteur, tant obstiné & opiniastre qu'il puisse estre ; mais elle ne donne pas, comme l'autre, une entière satisfaction, aux esprits de ceux qui désirent d'aprendre, *parce qu'elle n'enseigne pas la méthode par laquelle la chose a esté inventée*.

---

12. W. R. Shea, *op. cit.*, p. 48.
13. Descartes fait tout probablement référence au fait que l'Analyse n'assure pas *a priori* que l'on puisse passer de la proposition vraie à la proposition cherchée. Il faut de fait s'assurer que la chaîne des implications de l'analyse est de fait une chaîne d'équivalences.

> Les anciens géomètres avoient coutume de se servir seulement de cette synthese dans leurs écrits, non qu'ils ignorassent entièrement l'analyse, mais, à mon avis, parce qu'ils en faisoient tant d'état, qu'ils la reservoient pour eux seuls, comme un secret d'importance.
> Pour moy, j'ai suivi seulement la voye analytique dans mes Meditations, pource qu'elle me semble estre la plus vraye, & la plus propre pour enseigner ; mais, quant à la synthese, laquelle sans doute est celle que vous désirez icy de moy, encore que, touchant les choses qui se traitent en la Geométrie, elle puisse utilement estre mise après l'analyse, elle ne convient pas toutefois si bien aux matieres qui apartiennent à la Metaphysique[14].

Dans les années 1620, Descartes n'est pas aussi explicite sur la nature et le rôle de l'analyse. Toutefois, il s'y réfère implicitement lorsqu'il parle de l'algèbre. L'algèbre exhibe le pourquoi. Et le pourquoi éclaire. Il convainc[15].

> [...] je suis convaincu que depuis longtemps, sans autre guide sans doute que la nature, les plus grands esprits en ont eu quelque idée. [de la méthode] [...] Nous en avons la preuve dans les plus faciles des sciences, l'arithmétique & la géométrie : car nous remarquons que les anciens géomètres se sont servis d'une analyse, qu'ils étendaient à la résolution de tous les problèmes. Et maintenant il existe une espèce d'arithmétique, qu'on nomme algèbre, faite pour exécuter sur des nombres ce que les anciens faisaient sur des figures.
> *[Les mathématiciens grecs]* connaissaient certaine mathématique bien différente de la mathématique vulgaire de notre temps ; [...] En vérité il me semble que des traces de cette vraie mathématique se voient encore chez Pappus et Diophante, qui sans appartenir au premier âge, ont cependant vécu bien des siècles avant nous. Mais je croirais volontiers que par une malice mauvaise ces auteurs l'ont ensuite cachée eux-mêmes ; car, ainsi que beaucoup d'artisans l'ont fait, cela est certain, pour leurs inventions, ils ont craint peut-être, qu'étant très facile et simple, leur méthode ne perdit de son prix une fois divulguée, et, pour que nous les admirions, ils ont préféré nous donner à la place, comme des fruits de leur méthode, quelques vérités stériles déduites avec subtilité, plutôt que de nous enseigner la méthode même, qui aurait fait disparaître toute admiration. Il y eut enfin des hommes d'un grand esprit, qui se sont efforcés en ce siècle à la ressusciter : car la méthode, qu'on appelle du nom étranger d'algèbre, n'est pas autre chose, semble-t-il, pourvu toutefois qu'on parvienne à la débarrasser des chiffres nombreux et des figures embrouillées qui la surchargent, afin qu'elle possède désormais cette clarté et cette facilité suprême, qui doit se trouver, comme nous l'avons dit, dans la vraie

14. C'est moi qui mets en italiques. Descartes, *Œuvres et lettres*, édité par André Bridoux, Paris, NRF (Bibliothèque de la Pléiade), 1953, p. 387-388, A.T. tome IX-1, p. 121-122.
15. R. Descartes, *Regulæ ad Directionem Ingenii*, traduction de G. Le Roy dans René Descartes, *Œuvres et lettres*, édité par André Bridoux, Paris, NRF (Bibliothèque de la Pléiade), 1953, règle IV, p. 47, 49 à 51. A.T. tome X, p. 373, 376-377 et 379.

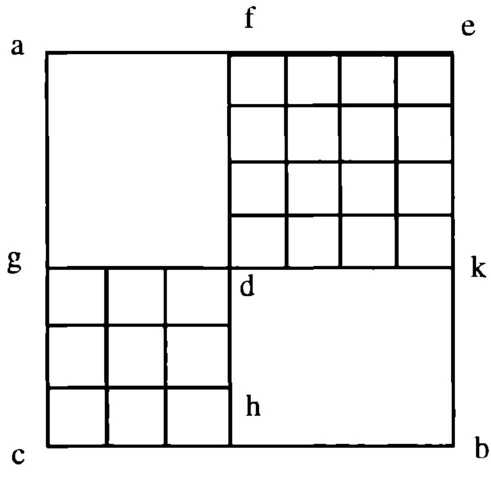
> cette facilité suprême, qui doit se trouver, comme nous l'avons dit, dans la vraie mathématique.
> [...] C'est pourquoi j'ai cultivé jusqu'à maintenant, autant qu'il a été en moi, cette mathématique universelle, si bien que désormais je crois pouvoir m'occuper, sans que ce soit par zèle prématurée, de sciences un peu plus élevées.

L'algèbre est donc une « mathématique universelle » qui permet une application facilitée de l'analyse.

L'algèbre et le nombre

Afin de se donner des assises pour discuter de la nature du nombre chez Descartes, arrêtons-nous un instant sur deux façons de résoudre une équation du second degré.

1) D'abord la résolution de l'équation $x^2 = 6x + 7$, telle que décrite dans le commentaire de Beeckman, suite à la visite de Descartes du 8 octobre 1628, reprises par Shea[16] :



Supposons que x^2 soit le carré *acbe*. Selon l'équation donnée, en retranchant $6x$ de ce carré il me restera 7. Or, pour enlever $6\,x$, on peut enlever deux fois un rectangle dont les dimension sont 3 et x. Les rectangles congrus *achf* et *gcbk* sont de tels rectangles. Mais, si on les enlève tous les deux, on aura enlevé deux fois le carré *gchd* . Donc, il faudra ajouter 9 à ce qui reste pour qu'on ait une aire égale à l'aire du carré *dkef*. Autrement dit

$$x^2 - 6x + 9 = 7 + 9.$$

On sait ainsi que le carré *dkef* est égal à 16 et donc que son côté est 4. Il en découle que x vaut 3 + 4, c'est-à-dire 7. Notons qu'on retrouve ici, en mots, la formule bien connue :

16. W. R. Shea, *op. cit.*, p. 141.

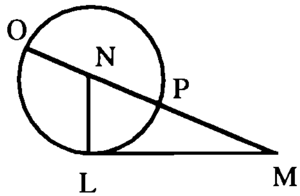
$$x = \sqrt{7 + \left(\frac{6}{2}\right)^2} + \frac{6}{2}$$

Notons aussi que le raisonnement sous-jacent n'est pas vraiment un raisonnement algébrique mais bien un raisonnement géométrique de nature analytique.

2) Le contraste est frappant avec le tout début de *La Géométrie*.[17] Pour résoudre l'équation

$$z^2 = az + bb,$$

Descartes propose une construction toute différente.



Il lui suffit de tracer un segment LN de longueur $\frac{a}{2}$ puis un segment LM perpendiculaire à LN et de longueur b. La racine de l'équation est alors la longueur du segment OM où O est le point d'intersection du prolongement de la droite NM et du cercle de centre N et de rayon LN. Cette construction n'est qu'une traduction géométrique de la formule

$$x = \sqrt{bb + \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{a}{2}$$

Elle n'en démontre en aucune façon la justesse. Bien au contraire, sa justesse dépend de la justesse du processus algébrique correspondant à cette formule.

Les deux procédés diffèrent sur un point fondamental. Le premier, qui date de la période de la rédaction des *Regulæ,* repose sur un raisonnement qui se fait sur l'aire de quadrilatères mesurés par une unité de mesure, un carré dont le côté est l'unité de mesure linéaire. Dans la foulée de la règle XVIII, l'équation se lit comme une égalité d'aires et est donc avant tout, nous l'avons dit, géométrique.

Dans le second procédé, la construction de la racine positive implique uniquement des segments. Elle correspond à une lecture géométrique du procédé algébrique.

Ces deux procédés représentent deux types de liens, bien différents l'un de l'autre, entre l'algèbre et la géométrie. Le professeur Shea montre clairement que dans l'esprit de Descartes, la géométrie prédomine. Descartes est un

17. *La Géométrie*, p. 302-303. A.T. tome VI, p. 374-375.

géomètre avant d'être un algébriste. Comme nous l'avons vu, Descartes le dit clairement dans sa règle IV. Le regard que nous portons maintenant sur ce lien algèbre-géométrie ne remet en aucune façon en cause cette prédominance de la géométrie. Il nous permet de montrer que Descartes est, de fait, un novateur et que, passant du premier au second type de relation, il éclipse, sans même le savoir, son plus illustre prédécesseur, François Viète.

L'art analytique de Viète s'organise en grande partie autour de l'usage des proportions. Pour ce mathématicien, le travail de l'analyste commence dès le moment où ce dernier lit le problème proposé. Si le problème est de nature numérique, la solution, ou plutôt le processus de résolution, devra être, aussi, numérique. Si le problème est de nature géométrique, la solution, ou plutôt le processus de résolution, devra être, aussi, géométrique. Pour arriver à trouver ce processus, Viète propose de passer par ce qu'il appelle le Zététique. Il s'agit dans un premier temps de supposer le problème résolu et de réécrire le problème en termes algébriques. Nous retrouvons là la première étape de l'analyse. Le but : arriver, comme pour Descartes, à une équation. Mais pas n'importe laquelle. En effet, cette équation, qu'il appelle ordonnée, doit pouvoir se transformer en une proportion, de sorte que l'on puisse traduire en des constructions purement géométriques la relation qu'exprime l'équation. La partie de l'analyse qui consiste en cette réécriture effective des relations mises en évidence par l'analyse zététique, Viète la nomme l'Exégétique. Puisque les problèmes sont soit arithmétiques soit géométriques, l'Exégétique peut être soit arithmétique ou géométrique.

Le Zététique est une algèbre des lettres. Il se présente, sous la plume de Viète, dans une forme essentiellement axiomatique. Ainsi, les opérations ne sont pas définies quant à leur signification. Ce sont plutôt leurs propriétés qui sont données. Le Zététique est une science des relations. Les lettres et les symboles ne servent qu'à exprimer explicitement ces relations. Elles-mêmes n'ont pas un sens précis. La nécessité de pouvoir exprimer aussi bien des relations géométriques que des relations numériques, et, donc, la nécessité que ces relations puissent s'écrire sous forme de proportions, oblige toutefois les équations du Zététique à être homogènes, c'est-à-dire que tous les termes doivent être du même degré. En effet, un rapport ne peut s'établir qu'entre grandeurs de même nature : de segment à segment, de surface à surface, etc. Dès lors, la multiplication et la division sont nécessairement des opérations non fermées. À chaque lettre est associée une dimension, le produit de deux lettres aura pour dimension la somme de leur dimension respective.

Dans l'algèbre de Viète, en particulier dans le Zététique, les lettres représentent des grandeurs aussi bien que des nombres, connues ou inconnues. Le lien qui s'établit entre le calcul symbolique et la géométrie est un lien structurel qui repose sur les proportions. Même s'il a poussé à la limite son calcul algébrique, Viète reste tributaire de la géométrie, comme les autres algébristes de son temps. Les nombres vus comme résultats d'un processus de mesure de grandeurs ne joue de rôle que dans le cadre restreint de l'Exégétique numérique[18] et non pas dans le Zététique. Au fond, l'algèbre de Viète repose sur des arithmétiques implicites des grandeurs. De ce point de vue, Viète se rattache aussi, même s'il l'a grandement dépassée, à une tradition qui date de l'algèbre arabe et babylonienne[19].

Rappelons au passage que Descartes, l'inventeur du compas de proportions, a lui aussi donné aux proportions une grande importance au début de ses travaux en mathématiques. Nous ne devons pas oublier que les proportions étaient l'outil privilégié pour étudier les relations entre grandeurs, géométriques ou non. Mais ce qui, à mon sens, donne à Descartes une grande importance et le fait aller au-delà de ce que Viète avait fait, c'est avant tout ce que j'appelle sa théorie de la mesure. Il nous est difficile, avec nos yeux du XX^e^ siècle, d'évaluer l'importance de cette théorie. Les sciences reposent en très grande partie sur des théories de la mesure qui font que, maintenant, tout est quantifié et mesuré. L'omniprésence du numérique marque notre époque. Il en va bien différemment dans cette première moitié du XVII^e^ siècle.

Dès le second paragraphe de *La Géométrie*, Descartes annonce implicitement l'importance de se donner une unité de mesure qui permettra de fait de réécrire les problèmes géométriques en termes de l'une des quatre opérations arithmétiques, auxquelles il ajoute l'extraction de racine, « qu'on peut prendre comme une espèce de division », comme il le dit[20]. Cette réécriture ne pose pas de difficultés pour l'addition et la soustraction. Toutefois, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, si l'on considère la multiplication comme la mesure de l'aire d'une surface, il en va tout autrement pour les trois autres opérations. Paradoxalement à certains égard, ce seront les proportions qui donneront à Descartes la liberté nécessaire pour réaliser son projet. Je dis paradoxalement car la théorie des proportions avait, au contraire, contraint Viète à créer une gymnastique particulière pour tenir compte du statut particulier de ces opérations[21].

En ce qui a trait à la multiplication, voyons ce que dit Descartes[22] :

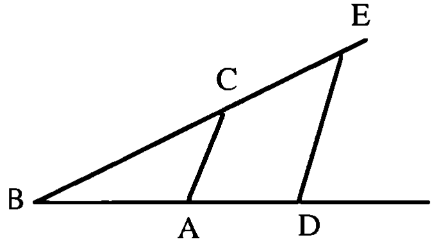
> [...] en ayant une (ligne), que je nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en

18. N'oublions pas que Viète utilisent les nombres décimaux. Dans son *De Numerosa...* où il décrit sa méthode de détermination, et éventuellement d'approximation, des racines d'une équation, il fait explicitement référence à ces nombres.
19. Voir J. Hoyrup, Sub-scientific Mathematics : Observations on a Pre-Modern Phenomenon, *Hist. Sci.*, xxvii (1989), p. 63-87.
20. *La Géométrie*, p. 297. A.T. tome VI, p. 369.
21. Il faut dire que la relation entre algèbre et géométrie chez Viète est de nature tout à fait différente que chez Descartes. Viète considère l'algèbre comme un moyen de découvrir les constructions géométriques nécessaire à la résolution d'un problème. Chez Descartes, la relation est beaucoup plus directe, les lettres sont des représentations d'une qualité mesurable des objets géométriques. Mais ces représentations peuvent être comparées directement entre elles.
22. *La Géométrie*, p. 297. A.T. tome VI, p. 370.

> ayant encore deux autres (lignes), en trouver une quatriesme, qui soit à l'une de ces deux , comme l'autre est a l'unité, ce qui est le mesme que la Multiplication, [...]

Ce qui géométriquement correspond à dire, dans la figure suivante, que si BA est l'unité,

BD x BC = BE.



Voilà une façon de donner du sens au produit de la mesure de BD par la mesure de BC, ces deux mesures étant faites à partir de l'unité BA. Le produit est alors la mesure de BE par rapport à l'unité BA.

Notons bien dans quel sens il faut lire cette véritable définition. Ce n'est pas le produit des mesures qui donne la mesure de BE, mais bien la mesure de BE qui donne le produit BD x BC. C'est d'ailleurs ce que me semble impliquer Descartes lorsqu'il écrit, vers la fin de la règle XIV :

> Je sais en effet quel est l'ordre qui existe entre A et B, sans rien considérer d'autre que les deux extrêmes ; mais je ne sais pas quel est le rapport de grandeur entre deux et trois, si je ne considère un troisième terme, à savoir l'unité, qui est la commune mesure des deux autres[23].

Autrement dit, le rapport de deux à trois n'a de sens que si 2 et 3 sont la mesure de deux segments mesurés par rapport à un segment-unité commun. Ainsi, le segment précède le nombre. Même plus, le segment est le nombre.

Descartes précise, à la suite du texte précédant, que « au moyen d'une unité d'emprunt les grandeurs continues peuvent être ramenées à la quantité, parfois tout entière et toujours au moins en partie ; [...] » et que la longueur et la largeur sont, parmi les grandeurs continues, celles que « l'on conçoive plus distinctement ». Dès lors, ce seront les surfaces rectilignes et rectangulaires ou les lignes droites qui représenteront les grandeurs continues. Plus, les lignes droites ont un avantage sur les surfaces rectangulaires. Comme le dit Descartes,

23. R. Descartes, *Regulæ ad Directionem Ingenii*, traduction de Georges Le Roy dans René Descartes, *Œuvres et lettres*, édité par André Bridoux, Paris, NRF (Bibliothèque de la Pléiade), 1953, règle XIV, p. 105. A.T. tome X, p. 451-452.

> elles ne nous servent pas moins que les surfaces à nous représenter un sujet vraiment étendu, comme nous l'avons dit plus haut ; qu'enfin il faut représenter par ces mêmes figures, soit les grandeurs continues, soit aussi la quantité ou le nombre, et que, pour faire comprendre toutes les différences des rapports, l'esprit humain ne peut rien trouver de plus simple[24].

L'édifice algébrique de Descartes repose ainsi sur le fait que toute étendue peut être représentée par une grandeur simple (segment ou surface) dont les règles d'opérations se ramènent à celles de l'arithmétique, du moins en ce qui a trait aux propriétés des opérations. Puisque, comme le dit Descartes dans sa règle XV, les surfaces rectangulaires peuvent être représentées en tant qu'étendue par des segments, il suffit à Descartes de faire une théorie de la mesure des segments par rapport à une unité de mesure, théorie applicable à tout segment, commensurable ou non avec l'unité de mesure. Ce n'est qu'en autant qu'une telle théorie existe que l'algèbre, dont Descartes discute l'usage dans les règles XVI et XVII, pourra être vraiment utilisée et ce sans doute méthodologique. C'est pourquoi la règle XVIII aborde de front la question des opérations. On y voit, comme le mentionne le professeur Shea, page 141, que Descartes traîne encore la non fermeture de la multiplication et de la division. Il s'apprête à nous expliquer comment passer du produit vu comme l'aire d'un rectangle au produit vu comme la longueur d'un segment lorsque le texte s'arrête. Seuls les énoncés des trois dernières règles, sans plus de commentaires, terminent le livre.

Pourquoi cet arrêt inopiné ?

Le professeur Shea suggère que : « The interpretation of root extraction as the discovery of mean proportionnals is not really amenable to imaginative representation[25]. » Descartes se trouve alors confronté à une difficulté majeur puisque sa méthode nécessite qu'on ait une vision intuitive des fondements.

Je crois qu'il y a là effectivement un élément important qui retient Descartes. Mais, à mon sens, une autre difficulté se présente ici, celle de donner à sa théorie de la mesure une cohérence qu'elle n'a pas encore. De ce point de vue, *La Géométrie* m'apparaît comme une suite mathématiquement naturelle de la règle XVIII. Mais cette suite survient après que l'auteur ait fait un choix important, celui de tout réduire aux segments, éliminant ainsi les surfaces rectangulaires. D'une part, le conflit relatif à la plus grande portée intuitive de l'algèbre des surfaces se trouve désamorcé par le fait que Descartes a grandement réduit, au cours des années 1630, le rôle de l'intuition dans sa méthode. D'autre part, sa théorie acquiert une plus grande simplicité. Les premiers mots de *La Géométrie* sont d'ailleurs :

24. *Id.*, p. 106 (traduction), A.T. tome X, p. 452.
25. W. R. Shea, *op. cit.*, p. 141.

> Tous les Problesmes de Geometrie se peuvent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par apres que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire[26].

Remarquons que Descartes paie un certain tribut à la tradition algébriste mais ce tribut montre qu'il est conscient du pas qu'il franchit. Pour passer de l'interprétation de *ab* comme une aire à un interprétation comme un segment de droite, Descartes indique qu'il suffit de considérer que *ab* correspond à l'aire d'un rectangle dont les côtés sont d'une part *ab* et d'autre part l'unité commune ayant servi à mesurer *a* et *b*. Malgré cette constatation, dans *La Géométrie,* les équations relatives aux problèmes géométriques sont toujours homogènes (tous les termes de même degré). Toutefois, l'homogénéité ne joue plus aucun rôle. Les successeurs de Descartes le verront et élimineront peu après ce reliquat d'un temps révolu. Viète tombera dans l'oubli.

Descartes identifie donc lettres et segments. Les lettres sont les nombres réels positifs. Le nombre est un être algébrique qui repose sur une arithmétique des segments donnant lieu à une théorie de la mesure des segments.

Conclusion

Le livre du professeur Shea brosse un large tableau de la « carrière » scientifique de Descartes. On y apprend beaucoup. Toutefois, comme historien des mathématiques, je reste quelque peu sur ma faim. Descartes est certes important pour sa découverte de certains résultats mathématiques. Toutefois, son influence repose plutôt sur sa façon de passer d'un contexte à une représentation mathématique de celui-ci. C'est pourquoi, je me suis permis d'insister, dans ce qui précède, non pas tant sur les découvertes de Descartes mais plutôt sur un mode de fonctionnement, l'analyse, un outil, l'algèbre, et le noyau dur de cette algèbre, la notion de nombre.

Il y a encore beaucoup à faire. Ainsi une étude sur l'influence de la popularisation des nombres décimaux sur l'évolution des idées de Descartes en physique aussi bien qu'en mathématiques ajouterait à notre compréhension de la pensée du philosophe.

Il serait intéressant aussi de comparer Descartes avec les petits maîtres du milieu du XVII^{e} siècle. On remarque, par exemple, chez James Hume, un pseudo-traducteur de Viète qui publie en 1636 une traduction libre de plusieurs livres de Viète, la grande importance qu'il attribue au numérique, au point d'éliminer de sa « traduction » la géométrie si chère à son maître déclaré. À cette époque, une jonction s'effectue entre l'algèbre théorique (à la Viète et aussi à la Descartes, c'est-à-dire une algèbre avec un support théorique) et l'algèbre dite alors vulgaire, cette algèbre directement issue des abaquistes de la fin du Moyen Âge, basée sur l'utilisation de règles pour résoudre les problèmes strictement numériques. Là aussi, beaucoup de travail reste à faire.

26. *La Géométrie*, p. 297. A.T. tome VI, p. 370.

Le livre du professeur Shea n'aborde pas ces questions. Pourtant, elles sont intimement liées à l'évolution de la pensée de Descartes.

Département de mathématiques
Université du Québec à Montréal