UNIVERSITÄT GREIFSWALD

Ein Redehandlungskalkül

Ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens nebst Metatheorie

Moritz Cordes und Friedrich Reinmuth

30.01.2011

VERSION 2.0

Kommentare willkommen!

In dieser Arbeit wird aufbauend auf den Arbeiten von PETER HINST und GEO SIEGWART ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens entwickelt und die Äquivalenz der Konsequenzrelation für den Kalkül mit der modelltheoretischen Konsequenzrelation bewiesen.

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

In dieser Arbeit[1] wird aufbauend auf den Arbeiten von PETER HINST und GEO SIEGWART zur Pragmatisierung von Kalkülen des natürlichen Schließens[2] ein (klassischer) Redehandlungskalkül[3] für das natürliche Schließen entwickelt, für den gilt: (i) Jede Satzsequenz $\mathfrak{H}$, d.h. hier: jede Sequenz aus Annahme- und Folgerungssätzen, ist keine Ableitung einer Aussage aus einer Aussagenmenge oder es gibt genau eine Aussage Γ und genau eine Aussagenmenge X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist, wobei dies für jede Satzsequenz ohne Rückgriff auf metasprachliche Kommentarmittel feststellbar ist.[4] (ii) Die klassische modelltheoretische Konsequenzrelation für die erste Stufe ist äquivalent zu der Konsequenzrelation für den Kalkül.

Bei der Entwicklung des Kalküls wird der von PETER HINST und GEO SIEGWART entwickelte grammatische Rahmen pragmatisierter Sprachen erster Stufe vorausgesetzt und um einige zusätzliche Begrifflichkeiten ergänzt (1). Sodann wird die Rede von der Verfügbarkeit von Aussagen etabliert: Im Gegensatz zu den von HINST und SIEGWART entwickelten Kalkülen wird bei der Formulierung der Redehandlungsregeln für diesen Kalkül nicht auf eine Abhängigkeitsrelation zwischen Aussagenmengen und Aussagen zurückgegriffen, sondern auf eine Verfügbarkeitsrelation zwischen Aussagen, Satzsequenzen und Stellen (natürlichen Zahlen im Definitionsbereich von Sequenzen). Dabei ist die Gestaltung der Verfügbarkeitsrede von der etwa im KALISH-MONTAGUE-MAR-Kalkül umgesetzten Idee inspiriert, dass – mit Ausnahme der Konklusion – die Aussagen in einem

---

1 In dieser Version des Textes (2.0) sind gegenüber Version 1.0 einige Fehler korrigiert, die Ausdrucksverkettung modifiziert, kleinere Hilfstheoreme ergänzt und einige Begrifflichkeiten, Definitionen und Beweise etwas vereinfacht worden.

2 Siehe HINST, P.: *Pragmatische Regeln*, *Logischer Grundkurs*, *Logik* und SIEGWART, G.: *Vorfragen*, *Denkwerkzeuge* und *Alethic Acts*.

3 Den Ausdruck 'Redehandlungskalkül' zur Bezeichnung pragmatisierter Kalküle des natürlichen Schließens übernehmen wir von SEBASTIAN PAASCH.

4 Dabei regulieren wir das Prädikat '.. ist eine Ableitung von .. aus ..' so, dass die an dritter Stelle genannte Aussagenmenge die Menge der in der an erster Stelle genannten Satzsequenz tatsächlich auftretenden und nicht eliminierten Annahmen ist. Reguliert man das Prädikat, wie auch üblich, so, dass die an dritter Stelle genannte Aussagenmenge eine Obermenge der Menge der in der betreffenden Satzsequenz tatsächlich auftretenden und nicht eliminierten Annahmen ist, dann gewährleistet der Kalkül dementsprechend, dass jede Satzsequenz $\mathfrak{H}$ entweder keine Ableitung einer Aussage aus einer Aussagenmenge ist oder aber dass es eine Aussage Γ und Aussagenmenge X gibt, so dass für jede Aussage Δ und Aussagenmenge Y gilt: $\mathfrak{H}$ ist eine Ableitung von Δ aus Y gdw $\Delta = \Gamma$ und $X \subseteq Y$.

Unterbeweis nach Schließung dieses Unterbeweises nicht mehr verfügbar sein sollen.[5] Allerdings werden hier nur Unterbeweise, die auf Subjunktoreinführung (SE), Negatoreinführung (NE) oder Partikularquantorbeseitigung (PB) abzielen, so behandelt und der Kalkül wird so etabliert, dass auf den Einsatz graphischer Mittel oder metasprachlicher Kommentare verzichtet werden kann: Welche Aussagen in einer Sequenz verfügbar sind, lässt sich für jede Sequenz ohne Rückgriff auf irgendeine Art von Kommentar eindeutig feststellen (2).

Sodann wird der Redehandlungskalkül etabliert. Dieser enthält, wie für pragmatisierte Kalküle des natürlichen Schließens üblich, neben einer Annahmeregel, die das Annehmen beliebiger Aussagen erlaubt, für jeden logischen Operator zwei Regeln, von denen jeweils die eine seine Einführung und die andere seine Beseitigung reguliert. Abgesehen von der Regel der Identitätseinführung (IE), die die prämissenlose Folgerung von Selbstidentitätsaussagen erlaubt, verlangen die Einführungs- und Beseitigungsregeln immer, dass bereits entsprechende Prämissen gewonnen wurden, d.h. verfügbar sind. So erlaubt etwa die Regel der Subjunktorbeseitigung (SB), dass man Γ folgern darf, wenn man Δ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ bereits gewonnen hat, d.h. wenn Δ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ verfügbar sind. Gewonnen bzw. verfügbar gemacht werden Aussagen dabei, indem sie gefolgert oder angenommen werden. Sodann gewinnt man eine Aussage Γ im Ausgang von einer Annahme, wenn diese Annahme die letzte vor bzw. bei der Gewinnung von Γ gemachte Annahme ist, die noch verfügbar ist.

Drei der Regeln, nämlich SE, NE und PB, erlauben es ihrerseits, sich von gemachten Annahmen auch wieder zu befreien: Hat man im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ eine Aussage Γ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ folgern und sich so von der gemachten Annahme von Δ befreien (SE); hat man im Ausgang von der Annahme einer Aussage Δ Aussagen Γ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ folgern und sich so von der gemachten Annahme von Δ befreien (NE), ist eine Partikularquantifikation $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ verfügbar und hat man im Ausgang von der repräsentativen Ersatzannahme [β, ξ, Δ] eine Aussage Γ gewonnen, dann darf man Γ folgern und sich so von der gemachten Ersatzannahme befreien (PB). Die Befreiung von der jeweils gemachten Eingangsannah-

5 Siehe KALISH, D.; MONTAGUE, R.; MAR, G.: *Logic*. Siehe auch LINK, G.: *Collegium Logicum,* S. 299–363.

me wird dabei dadurch erreicht, dass mit der Anwendung von SE, NE und PB jeweils der gesamte Unterbeweis von der entsprechenden Annahme an geschlossen wird. Dies hat dann zum einen zur Folge, dass die jeweiligen Eingangsannahmen nicht mehr verfügbar sind, aber es macht auch die im Zuge des Unterbeweises gemachten Zwischenfolgerungen als Prämissen unverfügbar – diese dienten ja nur dazu, die entsprechende Regelanwendung vorzubereiten, und sind unter der jeweiligen Annahme gewonnen worden. Ist die Annahme nicht mehr verfügbar, dann sollen dementsprechend auch keine Aussagen, die nur unter dieser Annahme zu gewinnen waren, verfügbar sein. Man vergegenwärtige sich dies etwa an dem zur Vorbereitung von NE zu gewinnenden Paar Γ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$.

Im Anschluss an die Etablierung des Kalküls wird dann ein Ableitungs- und Konsequenzbegriff für den Kalkül etabliert. Dabei ist dann eine Satzsequenz $\mathfrak{H}$ genau dann eine Ableitung einer Aussage Γ aus einer Aussagenmenge X, wenn sich $\mathfrak{H}$ gemäß den Regeln des Kalküls äußern lässt, Γ die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{H}$ und X die Menge der in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahmen ist. Sodann wird eine Aussage Γ genau dann deduktive Konsequenz einer Aussagenmenge X sein, wenn es eine Ableitung von Γ aus einem $Y \subseteq X$ gibt (3).

Um den Beweis der Adäquatheit des so etablierten deduktiven Konsequenzbegriffs vorzubereiten, sind sodann u.a. Reflexivität, Abgeschlossenheit unter Einführung und Beseitigung und Transitivität der deduktiven Konsequenzschaft zu beweisen (4). Im Anschluss wird dann eine zum grammatischen Rahmen passende Fassung des üblichen modelltheoretischen Konsequenzbegriffs etabliert (5). Sodann wird die Korrektheit und die Vollständigkeit des deduktiven gegenüber diesem modelltheoretischen Konsequenzbegriff gezeigt (6). Den Abschluss bilden einige Bemerkungen zum möglichen Ausbau des hier verfolgten Ansatzes (7).

Als Rahmen für die Entwicklung des Kalküls setzen wir eine gängige Mengen- oder Klassen-Mengen-Lehre, wie etwa ZF oder NBG(U), voraus, wobei wir zur Bezeichnung von Mengen auch die Klassenschreibweise verwenden. Da wir keine Entscheidung für eine reine Mengenlehre treffen wollten, müssen wir an einigen Stellen Forderungen – wie etwa $X \in \{X\}$ – erheben, die im Rahmen einer reinen Mengenlehre trivial, im Rahmen einer Klassen-Mengen-Lehre jedoch informativ sind. Die Entwicklung und metatheoretische Analyse des Redehandlungskalküls greift stark auf übliche mengentheoretische und (meta)logische Instrumente und Beweistechniken zurück, wie sie in den im Literaturverzeichnis aufgeführten Werken präsentiert werden, ohne dass dies immer einzeln ausgewiesen wäre.

Ein Benutzerhinweis: Die Einträge im Inhaltsverzeichnis sind mit den entsprechenden Kapiteln verknüpft und als Lesezeichen vorhanden. Ferner sind alle Querverweise sowie alle Nennungen von Postulaten, Definitionen, Theoremen und Regeln mit den entsprechenden Stellen verknüpft. Man kann daher durch Klicken auf Verweise und mit den Funktionen "Vorherige Ansicht" (Alt+Nach-Links-Taste) und "Nächste Ansicht" (Alt+Nach-Rechts-Taste) zwischen den einschlägigen Verweisstellen und dem gerade gelesenen Abschnitt wechseln.

Wir danken SEBASTIAN PAASCH dafür, uns auf Probleme, die die Entwicklung unseres Kalküls angestoßen und angetrieben haben, aufmerksam gemacht zu haben, für wertvolle Hinweise und für seine konstruktive Kritik an einer früheren Fassung dieses Textes. Sodann danken wir GEO SIEGWART für wertvolle Hinweise, Geduld und ein offenes Ohr.

1 Zum grammatischen Rahmen

Der Redehandlungskalkül und seine Metatheorie werden für abzählbare pragmatisierte Sprachen erster Stufe entwickelt.[6] Um die folgende Darstellung zu vereinfachen, wird jedoch der Sprachbezug unterdrückt bzw. eine beliebig, aber fest gewählte Sprache dieser Art mit abzählbar unendlichem Inventar, die Sprache L, vorausgesetzt. Deren Inventar und Syntax sind zunächst zu spezifizieren (1.1). Sodann sind Substitutionsbegrifflichkeiten für die weitere Arbeit zu entwickeln und einige Substitutionstheoreme zu beweisen (1.2).

1.1 Inventar und Syntax

L soll als beliebig, aber fest gewählter Vertreter für Sprachen des gewünschten Typs mit abzählbar unendlichem nicht-logischen Inventar stehen, wobei der Kalkül natürlich auch für Sprachen mit endlich vielen deskriptiven Konstanten einschlägig ist. Da L nicht eine konkret konstruierte Sprache ist, wird nun einfach gefordert, dass ein entsprechendes Inventar und eine passende Ausdrucksverkettungsoperation existieren. Welches Inventar im konkreten Fall gewählt bzw. wie es konstruiert wird (und wie es mengentheoretisch etwa unter Rückgriff auf Teilmengen von ℕ in NBG oder ZF modelliert bzw. wie es etwa unter Rückgriff auf axiomatisch charakterisierte (Mengen von) Urelemente(n) in NBGU beschrieben wird) und wie die Verkettungsoperation für Ausdrücke ausgestaltet wird (etwa einfach durch Rückgriff auf endliche Folgen oder durch eine eigens entwickelte Konkatenationsoperation) wird offen gelassen. Mit dem ersten Postulat wird nun die Existenz passender Mengen von Grundausdrücken für das Inventar von L gefordert:

Postulat 1-1. *Das Inventar von* L *(KONST, PAR, VAR, FUNK, PRÄ, JUNK, QUANT, PERF, HZ)*

Folgende Mengen sind wohldefiniert, paarweise disjunkt und haben ∅ nicht zum Element:

(i) Die abzählbar unendliche Menge KONST = $\{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$: $c_i \neq c_j$ und $c_i \in \{c_i\}$, (*die Menge der Individuenkonstanten; Metavariablen:* α, α', α*, …),

---

[6] Siehe dazu die in Fußnote 2 angegebene Literatur. Für eine rigorose Entwicklung des grammatischen Rahmens siehe insbesondere HINST, P.: *Logik*, Kap. 1.

(ii) Die abzählbar unendliche Menge PAR = $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$: $x_i \neq x_j$ und $x_i \in \{x_i\}$, (*die Menge der Parameter; Metavariablen:* β, β', β*, …),

(iii) Die abzählbar unendliche Menge VAR = $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, wobei für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$: $x_i \neq x_j$ und $x_i \in \{x_i\}$, (*die Menge der Variablen; Metavariablen:* ξ, ζ, ω, ξ', ζ', ω', ξ*, ζ*, ω*, …),

(iv) Die abzählbar unendliche Menge FUNK = $\{f_{i.j} \mid i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $j \in \mathbb{N}\}$, wobei für alle $i, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $j, l \in \mathbb{N}$ mit $(i, j) \neq (k, l)$: $f_{i.j} \neq f_{k.l}$ und $f_{i.j} \in \{f_{i.j}\}$, (*die Menge der Funktoren; Metavariablen:* φ, φ', φ*, …),

(v) Die abzählbar unendliche Menge PRÄ = $\{=\} \cup \{P_{i.j} \mid i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $j \in \mathbb{N}\}$, wobei $\{=\} \not\subseteq \{P_{i.j} \mid i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $j \in \mathbb{N}\}$ und für alle $i, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $j, l \in \mathbb{N}$ mit $(i, j) \neq (k, l)$: $P_{i.j} \neq P_{k.l}$ und $P_{i.j} \in \{P_{i.j}\}$, (*die Menge der Prädikatoren; Metavariablen:* Φ, Φ', Φ*, …),

(vi) Die Fünfermenge JUNK = $\{\neg, \rightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee\}$ (*die Menge der Junktoren; Metavariablen:* ψ, ψ', ψ*, …),

(vii) Die Zweiermenge QUANT = $\{\bigwedge, \bigvee\}$ (*die Menge der Quantifikatoren; Metavariablen:* Π, Π', Π*, …),

(viii) Die Zweiermenge PERF = {Sei, Also} (*die Menge der Performatoren; Metavariablen:* Ξ, Ξ', Ξ*, …) und

(ix) Die Dreiermenge HZ = {(} ∪ {)} ∪ {,} (*die Menge der Hilfszeichen*).

Die metasprachlichen Ausdrücke, durch die die Elemente der Mengen PERF und HZ *bezeichnet* werden, werden im Folgenden außerdem als metasprachliche Performatoren und Hilfszeichen *verwendet*, gleiches gilt für den Identitätsprädikator. Um Konfusionen zu vermeiden und die intuitive Lesbarkeit zu erhöhen, werden daher im Folgenden Quasianführungszeichen ('⌜', '⌝') verwendet, wenn objektsprachliche Ausdrücke bezeichnet werden sollen. Als allgemeine Metavariablen für objektsprachliche Ausdrücke dienen: μ, τ, μ', τ', μ*, τ*, …. Das Inventar von L soll nun einfach die Menge aus den in Postulat 1-1 geforderten Mengen sein:

Definition 1-1. *Das Inventar von L (INV)*
INV = {KONST, PAR, VAR, FUNK, PRÄ, JUNK, QUANT, PERF, HZ}.

Die Syntax von L enthält die Kategorien der Terme, Quantoren, Formeln und Sätze gemäß der weiter unten angegebenen Definitionen. Zunächst wird jedoch die Menge der Grundausdrücke etabliert:

Definition 1-2. *Die Menge der Grundausdrücke (GAUS)*
$\mathrm{GAUS} = \bigcup \mathrm{INV}$.

Nun wird die Existenz einer passenden Verkettungsoperation für Ausdrücke postuliert, wobei – wie bereits bemerkt – offen gelassen wird, wie diese im Einzelnen auszugestalten ist. Dazu wird zuerst die Verkettung für Grundausdrücke und dann, nach der Definition der Menge der Ausdrücke und der Ausdruckslängenfunktion, die allgemeine Verkettung von beliebigen Ausdrücken reguliert.

Postulat 1-2. *Verkettung von Grundausdrücken*[7]
Die durch Juxtaposition angezeigte Ausdrucksverkettungsoperation ist wohldefiniert und es gilt:

(i) Für alle k, $j \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: Wenn $\{\mu_0, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$ und $\{\mu'_0, \ldots, \mu'_{j\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$, dann: $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{j\text{-}1}\urcorner$ gdw $j = k$ und für alle $i < k$ gilt: $\mu_i = \mu'_i$,

(ii) Wenn $\mu \in \mathrm{GAUS}$, dann gibt es kein $k \in \mathbb{N}\setminus\{0, 1\}$, so dass $\{\mu_0, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$ und $\mu = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$, und

(iii) Für alle $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$: Wenn $\{\mu_0, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$, dann ist $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner \neq \emptyset$ und $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner \in \{\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner\}$.

Mit der Darstellung durch Juxtaposition wird bereits die Assoziativität der Ausdrucksverkettungsoperation vorausgesetzt. Diese Eigenschaft kann daher als implizit postuliert betrachtet werden. Als Obermenge zu allen im weiteren Verlauf zu definierenden grammatischen Kategorien wird nun die Menge aller Ausdrücke und im Anschluss die Längenfunktion für Ausdrücke definiert:

Definition 1-3. *Die Menge der Ausdrücke (AUS; Metavariablen:* $\mu, \tau, \mu', \tau', \mu^*, \tau^*, \ldots$*)*
$\mathrm{AUS} = \{\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner \mid k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\mu_0, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}\}$.

Definition 1-4. *Ausdruckslänge (AUSL)*
$\mathrm{AUSL} = \{(\mu, k) \mid \mu \in \mathrm{AUS}, k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und es gibt $\{\mu_0, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$ mit $\mu = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner\}$.

---

[7] Hier und im Folgenden setzen wir voraus, dass gilt: Wenn $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{a_0, \ldots, a_{k\text{-}1}\} \subseteq X$, wobei $X \in \{X\}$, dann gilt für alle $i < k$: $a_i \in \{a_0, \ldots, a_{k\text{-}1}\}$.

Theorem 1-1. *AUSL ist eine Funktion auf AUS*

(i) Dom(AUSL) = AUS und

(ii) Für alle $\mu \in$ AUS, $k, l \in \mathbb{N}$: Wenn $(\mu, k), (\mu, l) \in$ AUSL, dann $k = l$.

Beweis: (i) ergibt sich direkt aus Definition 1-3 und Definition 1-4. *Zu (ii)*: Seien $\mu \in$ AUS, $k, l \in \mathbb{N}$ mit $(\mu, k), (\mu, l) \in$ AUSL. Dann gibt es $\{\mu_0, \ldots, \mu_{k-1}\} \subseteq$ GAUS mit $\mu = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner$ und es gibt $\{\mu'_0, \ldots, \mu'_{l-1}\} \subseteq$ GAUS mit $\mu = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{l-1}\urcorner$. Nach Postulat 1-2-(i) ist dann $k = l$. ■

Theorem 1-2. *Ausdrücke sind Verkettungen von Grundausdrücken*

Wenn $\mu \in$ AUS, dann gibt es $\{\mu_0, \ldots, \mu_{\text{AUSL}(\mu)-1}\} \subseteq$ GAUS, so dass $\mu = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{\text{AUSL}(\mu)-1}\urcorner$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Definition 1-3 und Definition 1-4. ■

Theorem 1-3. *Identifizierung von Gliedern einer Ausdrucksverkettung*

Wenn $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS, dann gilt für alle $s < \sum_{j=0}^{k-1}$ AUSL(μ_j):

(i) $s <$ AUSL(μ_0)

oder

(ii) AUSL$(\mu_0) \leq s$ und es gibt l, r, so dass

a) $0 < l < k$ und $r <$ AUSL(μ_l) und $s = (\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r$ und

b) Für alle l', r': Wenn $0 < l' < k$ und $r' <$ AUSL$(\mu_{l'})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l'-1}$ AUSL$(\mu_n))+r'$, dann $l' = l$ und $r' = r$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und gelte für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS. Sei nun $s < \sum_{j=0}^{k-1}$ AUSL(μ_j). Dann ist $s <$ AUSL(μ_0) oder AUSL$(\mu_0) \leq s$. Im ersten Fall gilt die Behauptung. Sei nun AUSL$(\mu_0) \leq s$. Dann ist $1 < k$, denn sonst wäre $1 = k$ und somit AUSL$(\mu_0) = \sum_{j=0}^{k-1}$ AUSL$(\mu_j) > s$. Also gibt es wenigstens ein i, nämlich 1, so dass $0 < i < k$ und $\sum_{n=0}^{i-1}$ AUSL$(\mu_n) \leq s$. Sei nun $l = \max(\{i \mid 0 < i < k$ und $\sum_{n=0}^{i-1}$ AUSL$(\mu_n) \leq s\})$. Dann ist $0 < l < k$ und $\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n) \leq s$. Dann gibt es ein r, so dass $(\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r = s$. Wäre nun AUSL$(\mu_l) \leq r$. Nun ist $l < k$-1 oder $l = k$-1. Angenommen $l < k$-1. Dann ist l+1 $< k$. Dann wäre $\sum_{n=0}^{l}$ AUSL$(\mu_n) = (\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+$AUSL$(\mu_l) \leq (\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r = s$, was der Maximalität von l widerspricht. Angenommen $l = k$-1. Dann wäre l-1 = k-2 und somit $\sum_{n=0}^{k-1}$ AUSL$(\mu_n) = (\sum_{n=0}^{k-2}$ AUSL$(\mu_n))+$AUSL$(\mu_{k-1}) \leq (\sum_{n=0}^{k-2}$ AUSL$(\mu_n))+r = s$, was der Annahme über s widerspricht. Also führt die Annahme, dass AUSL$(\mu_l) \leq r$ in beiden Fällen zu einem Widerspruch. Also ist r < AUSL(μ_l). Also ist insgesamt $0 < l < k$ und r < AUSL(μ_l) und $s = (\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r$ und somit gilt a).

Nun ist noch b), also die eindeutige Bestimmtheit von l, r, zu zeigen. Sei dazu $0 < l' < k$ und r' < AUSL($\mu_{l'}$) und $s = (\sum_{n=0}^{l'-1}$ AUSL$(\mu_n))+r'$. Dann ist $\sum_{n=0}^{l'-1}$ AUSL$(\mu_n) \leq s$. Damit ergibt sich aus der Maximalität von l, dass $l' \leq l$. Wäre nun $l' < l$. Dann wäre $l' \leq l$-1 und damit wäre $(\sum_{n=0}^{l'-1}$ AUSL$(\mu_n))$+AUSL$(\mu_{l'}) = \sum_{n=0}^{l'}$ AUSL$(\mu_n) \leq \sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n) \leq s = (\sum_{n=0}^{l'-1}$ AUSL$(\mu_n))+r'$. Damit wäre dann aber AUSL$(\mu_{l'}) \leq r'$, was der Annahme über r' widerspricht. Also ist $l' = l$. Damit ist dann aber $(\sum_{n=0}^{l'-1}$ AUSL$(\mu_n))+r'$ = $(\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r' = s = (\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r$ und somit auch $r' = r$. ■

Postulat 1-3. *Verkettung von Ausdrücken*

Wenn $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS und $\mu_i = \ulcorner\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\urcorner$, wobei $\{\mu^{\mu_i}{}_0, \ldots, \mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\} \subseteq$ GAUS, dann gibt es $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\{\mu^*{}_0, \ldots, \mu^*{}_{m-1}\} \subseteq$ GAUS, so dass für alle $i < k$:

$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner$
=
$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{i-1}\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\mu_{i+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$
=
$\ulcorner\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{m-1}\urcorner$, wobei

a) $m = \sum_{j=0}^{k-1}$ AUSL(μ_j) und

b) Für alle $s < m$:
$\mu^*{}_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls s < AUSL(μ_0) und
$\mu^*{}_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$ und r < AUSL(μ_l) und $s = (\sum_{n=0}^{l-1}$ AUSL$(\mu_n))+r$, falls AUSL$(\mu_0) \leq s$.

Als unmittelbare Konsequenz aus Postulat 1-3 ergibt sich zunächst, dass jede Verkettung von Ausdrücken mit einer Verkettung von Grundausdrücken identisch und somit ein Ausdruck ist. Nun folgen zunächst einige allgemeine Theoreme zu Ausdrücken und ihren Verkettungen (Theorem 1-4 bis Theorem 1-8), bevor die Stelligkeit von Operatoren und sodann die Kategorien der Terme, Quantoren und Formeln definiert werden.

Theorem 1-4. *Zur Identität von Ausdrucksverkettungen (a)*

Wenn $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS und $\mu_i = \ulcorner\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\urcorner$, wobei $\{\mu^{\mu_i}{}_0, \ldots, \mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\} \subseteq$ GAUS, dann:

(i) $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{k\text{-}1})\text{-}1}\urcorner$,

(ii) $\mathrm{AUSL}(\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j)$ und

(iii) Wenn $m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\{\mu'_0, \ldots, \mu'_{m\text{-}1}\} \subseteq$ GAUS, dann:
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{k\text{-}1})\text{-}1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{m\text{-}1}\urcorner$
gdw
$m = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j)$ und für alle $s < m$: $\mu'_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$, und $\mu'_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$ und $r < \mathrm{AUSL}(\mu_l)$ und $s = (\sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$.

Beweis: Sei $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS und $\mu_i = \ulcorner\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\urcorner$, wobei $\{\mu^{\mu_i}{}_0, \ldots, \mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\} \subseteq$ GAUS. *Zu (i)*: Durch Induktion über i wird zunächst gezeigt, dass für alle $i < k$ gilt:

$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\mu_{i+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$.

Damit gilt dies dann auch für $i = k$-1 und damit gilt dann (i). Gelte die Behauptung nun für alle $l < i$. Sei nun $i < k$. Dann ist $i = 0$ oder $0 < i$. Sei nun $i = 0$. Wegen $\mu_0 = \ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\urcorner$ ist dann nach Postulat 1-3:

$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\mu_1\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$.

Sei nun $0 < i$. Dann gilt für alle $l < i$, dass $l < k$ und damit nach I.V.:

$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_l}{}_0\ldots\mu^{\mu_l}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_l)\text{-}1}\mu_{l+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$.

Da nun i-1 < i, gilt damit:

$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$
$=$

$$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{i\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{i\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{i\text{-}1})\text{-}1}\mu_i\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner.$$

Wegen $\mu_i = \ulcorner\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\urcorner$ gilt dann mit Postulat 1-3:

$$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{i\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{i\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{i\text{-}1})\text{-}1}\mu_i\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{i\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{i\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{i\text{-}1})\text{-}1}\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\mu_{i+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\mu_{i+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner.$$

Damit gilt dann insgesamt:

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)\text{-}1}\mu_{i+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner.$$

Zu (ii) und (iii): Nach Postulat 1-3 gibt es $m^* \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\mu^*_0, \ldots, \mu^*_{m^*\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$, so dass $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{m^*\text{-}1}\urcorner$ und $m^* = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j)$ und für alle $s < m^*$: $\mu^*_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$, und $\mu^*_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$, $r < \mathrm{AUSL}(\mu_l)$ und $s = (\sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$. Dann gilt zunächst $\sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j) = m^* = \mathrm{AUSL}(\ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{m^*\text{-}1}\urcorner) = \mathrm{AUSL}(\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner)$. Damit gilt (ii). Sei nun für (iii) $m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\mu'_0, \ldots, \mu'_{m\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$. (*L*-*R*): Sei $\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{k\text{-}1})\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{m\text{-}1}\urcorner$. Mit (i) gilt dann $\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{m\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{m^*\text{-}1}\urcorner$. Mit Postulat 1-2-(i) gilt dann $m = m^* = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j)$ und für alle $s < m$ gilt $\mu'_s = \mu^*_s$. Damit gilt dann für alle $s < m$: $\mu'_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$, und $\mu'_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$, $r < \mathrm{AUSL}(\mu_l)$ und $s = (\sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$.

(*R*-*L*): Sei $m = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j)$ und gelte für alle $s < m$: $\mu'_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$, und $\mu'_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$, $r < \mathrm{AUSL}(\mu_l)$ und $s = (\sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$. Dann gilt $m^* = m$ und für alle $s < m$ gilt $\mu'_s = \mu^*_s$. Damit gilt dann mit Postulat 1-2-(i), dass $\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{m\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{m^*\text{-}1}\urcorner$. Damit gilt mit (i): $\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{k\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{k\text{-}1})\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{m^*\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{m\text{-}1}\urcorner$. ■

Theorem 1-5. *Zur Identität von Ausdrucksverkettungen (b)*

Wenn k, $k' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS und $\mu_i = \ulcorner\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\urcorner$, wobei $\{\mu^{\mu_i}{}_0, \ldots, \mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\} \subseteq$ GAUS, und für alle $i < k'$: $\mu'_i \in$ AUS und $\mu'_i = \ulcorner\mu'^{\mu'_i}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\urcorner$, wobei $\{\mu'^{\mu'_i}{}_0, \ldots, \mu'^{\mu'_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\} \subseteq$ GAUS, und wenn $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{k'-1}\urcorner$, dann:

(i) $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)-1}\ldots\mu^{\mu_{k-1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{k-1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{k-1})-1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu'^{\mu'_0}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{k'-1}}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_{k'-1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{k'-1})-1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{k'-1}\urcorner$,

(ii) $\mathrm{AUSL}(\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_j) = \sum_{j=0}^{k'-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_j) = \mathrm{AUSL}(\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{k'-1}\urcorner)$ und

(iii) Für alle $i < k$, k': Wenn $\mathrm{AUSL}(\mu_j) = \mathrm{AUSL}(\mu'_j)$ für alle $j \leq i$, dann:

a) $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_i\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)-1}\ldots\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu'^{\mu'_0}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_i}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\urcorner$
$=$
$\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_i\urcorner$ und

b) Für alle $j \leq i$: $\mu_j = \mu'_j$.

Beweis: Seien k, $k' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und für alle $i < k$: $\mu_i \in$ AUS und $\mu_i = \ulcorner\mu^{\mu_i}{}_0\ldots\mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\urcorner$, wobei $\{\mu^{\mu_i}{}_0, \ldots, \mu^{\mu_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_i)-1}\} \subseteq$ GAUS, und für alle $i < k'$: $\mu'_i \in$ AUS und $\mu'_i = \ulcorner\mu'^{\mu'_i}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\urcorner$, wobei $\{\mu'^{\mu'_i}{}_0, \ldots, \mu'^{\mu'_i}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\} \subseteq$ GAUS, und sei $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{k'-1}\urcorner$. Dann gelten (i) und (ii) mit Theorem 1-4-(i) und -(ii).

Sei nun für (iii) $i < k$, k' und sei $\mathrm{AUSL}(\mu_j) = \mathrm{AUSL}(\mu'_j)$ für alle $j \leq i$. Zunächst gilt mit Postulat 1-3: Es gibt $m^* \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\{\mu^*_0, \ldots, \mu^*_{m-1}\} \subseteq$ GAUS, so dass $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{m-1}\urcorner$ und $m = \sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n)$ und für alle $s < m$: $\mu^*_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$, und $\mu^*_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$, $r < \mathrm{AUSL}(\mu_l)$ und $s = (\sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$, und es gibt $m' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\{\mu'^*_0, \ldots, \mu'^*_{m'-1}\} \subseteq$ GAUS, so dass $\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{k'-1}\urcorner = \ulcorner\mu'^*_0\ldots\mu'^*_{m'-1}\urcorner$ und $m' = \sum_{n=0}^{k'-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_n)$ und für alle $s < m'$: $\mu'^*_s = \mu'^{\mu'_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$, und $\mu'^*_s = \mu'^{\mu'_{l'}}{}_{r'}$ für die eindeutig bestimmten l', r', für die $0 < l' < k'$, $r' < \mathrm{AUSL}(\mu'_{l'})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l'-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_n))+r'$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu'_0) \leq s$.

Dann ist mit (ii) $m = m'$. Sodann ist mit (i):

$\ulcorner\mu*_0\ldots\mu*_{m*-1}\urcorner$
=
$\ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)-1}\ldots\mu^{\mu_{k-1}}{}_0\ldots\mu^{\mu_{k-1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{k-1})-1}\urcorner$
=
$\ulcorner\mu'^{\mu'_0}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{k'-1}}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_{k'-1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{k'-1})-1}\urcorner$
=
$\ulcorner\mu'*_0\ldots\mu'*_{m'-1}\urcorner$.

Mit Postulat 1-2-(i) gilt dann für alle $s < m = m'$: $\mu*_s = \mu'*_s$. Sodann ist $i = 0$ oder $0 < i$. Sei $i = 0$. Nach Annahme ist $\mathrm{AUSL}(\mu_0) = \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$. Sei nun $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$. Dann ist $s < \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$ und $s < m = m'$. Dann ist $\mu*_s = \mu^{\mu_0}{}_s$ und $\mu'*_s = \mu'^{\mu'_0}{}_s$. Damit ist dann $\mu^{\mu_0}{}_s = \mu'^{\mu'_0}{}_s$. Also gilt für alle $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0) = \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$, dass $\mu^{\mu_0}{}_s = \mu'^{\mu'_0}{}_s$ und damit nach Postulat 1-2-(i), dass $\mu_0 = \ulcorner\mu^{\mu_0}{}_0\ldots\mu^{\mu_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_0)-1}\urcorner = \ulcorner\mu'^{\mu'_0}{}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\urcorner = \mu'_0$. Damit gilt a) für $i = 0$. Sodann gilt bei $i = 0$ für alle $j \leq i$, dass $j = i = 0$ und damit gilt in diesem Fall auch b).

Sei nun $0 < i$. Aus der Annahme, dass $\mathrm{AUSL}(\mu_j) = \mathrm{AUSL}(\mu'_j)$ für alle $j \leq i$, ergibt sich: $\sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu_n) = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu'_n)$. Sodann gilt mit Postulat 1-3: Es gibt $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\mu^+_0, \ldots, \mu^+_{t-1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$, so dass $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_i\urcorner = \ulcorner\mu^+_0\ldots\mu^+_{t-1}\urcorner$ und $t = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu_n)$ und für alle $s < t$: $\mu^+_s = \mu^{\mu_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$, und $\mu^+_s = \mu^{\mu_{l°}}{}_{r°}$ für die eindeutig bestimmten $l°$, $r°$, für die $0 < l° < i+1$, $r° < \mathrm{AUSL}(\mu_{l°})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l°-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r°$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$, und es gibt $t' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\mu'^+_0, \ldots, \mu'^+_{t'-1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$, so dass $\ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_i\urcorner = \ulcorner\mu'^+_0\ldots\mu'^+_{t'-1}\urcorner$ und $t' = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu'_n)$ und für alle $s < t'$: $\mu'^+_s = \mu'^{\mu'_0}{}_s$, falls $s < \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$, und $\mu'^+_s = \mu'^{\mu'_{l'°}}{}_{r'°}$ für die eindeutig bestimmten $l'°$, $r'°$, für die $0 < l'° < i+1$, $r'° < \mathrm{AUSL}(\mu'_{l'°})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l'°-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_n))+r'°$, falls $\mathrm{AUSL}(\mu'_0) \leq s$. Dann ist $t = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu_n) = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu'_n) = t'$. Wegen $\sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu_n) \leq \sum_{n=0}^{k-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n)$ gilt zudem $t \leq m = m'$.

Sei nun $s < t$. Dann ist $s < t'$ und $s < m = m'$. Sodann ist $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$ oder $\mathrm{AUSL}(\mu_0) \leq s$. Sei nun $s < \mathrm{AUSL}(\mu_0)$. Wegen $0 < i$ ist dann nach Annahme $\mathrm{AUSL}(\mu_0) = \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$ und damit auch $s < \mathrm{AUSL}(\mu'_0)$. Dann ist $\mu*_s = \mu^{\mu_0}{}_s = \mu^+_s$ und $\mu'*_s = \mu'^{\mu'_0}{}_s = \mu'^+_s$. Wegen $\mu*_s = \mu'*_s$ ist damit $\mu^+_s = \mu'^+_s$. Sei nun $\mathrm{AUSL}(\mu_0) = \mathrm{AUSL}(\mu'_0) \leq s$. Dann gilt:

$\mu*_s = \mu^{\mu_l}{}_r$ für die eindeutig bestimmten l, r, für die $0 < l < k$, $r < \mathrm{AUSL}(\mu_l)$ und $s = (\sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_n))+r$,
und
$\mu'*_s = \mu'^{\mu'_{l'}}{}_{r'}$ für die eindeutig bestimmten l', r', für die $0 < l' < k'$, $r' < \mathrm{AUSL}(\mu'_{l'})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l'-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_n))+r'$,
und

> $\mu^{+}_{s} = \mu^{\mu_{l°}}{}_{r°}$ für die eindeutig bestimmten $l°$, $r°$, für die $0 < l° < i+1$, $r° < \mathrm{AUSL}(\mu_{l°})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l°-1} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}))+r°$,
> und
> $\mu'^{+}_{s} = \mu'^{\mu'_{l'°}}{}_{r'°}$ für die eindeutig bestimmten $l'°$, $r'°$, für die $0 < l'° < i+1$, $r'° < \mathrm{AUSL}(\mu'_{l'°})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l'°-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_{n}))+r'°$.

Mit $l°$, $l'° < i+1$ gilt dann $l°$, $l'° \leq i$. Damit gilt nach Annahme $\mathrm{AUSL}(\mu_{l'°}) = \mathrm{AUSL}(\mu'_{l'°})$ und $\sum_{n=0}^{l'°-1} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}) = \sum_{n=0}^{l'°-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_{n})$. Damit gilt $0 < l'° < i+1$ und $r'° < \mathrm{AUSL}(\mu_{l'°})$ und $s = (\sum_{n=0}^{l'°-1} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}))+r'°$. Dann ist nach Theorem 1-3 $l'° = l°$ und $r'° = r°$. Wäre nun $i+1 \leq l$. Dann wäre $i \leq l\text{-}1$. Damit wäre aber $t = \sum_{n=0}^{i} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}) \leq \sum_{n=0}^{l-1} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}) \leq s$. Widerspruch! Also ist $l < i+1$. Damit ergibt sich dann $l = l°$ und $r = r°$. Analog ergibt sich, dass $l' = l'°$ und $r' = r'°$, womit dann insgesamt gilt: $l = l° = l'° = l'$ und $r = r° = r'° = r'$. Damit ist dann $\mu^{*}_{s} = \mu^{\mu_{l}}{}_{r} = \mu^{+}_{s}$ und $\mu'^{*}_{s} = \mu'^{\mu'_{l}}{}_{r} = \mu'^{+}_{s}$. Wegen $\mu^{*}_{s} = \mu'^{*}_{s}$, ist damit $\mu^{+}_{s} = \mu'^{+}_{s}$. Also gilt für alle $s < t = t'$, dass $\mu^{+}_{s} = \mu'^{+}_{s}$ und damit nach Postulat 1-2-(i), dass $\ulcorner\mu_{0}\ldots\mu_{i}\urcorner = \ulcorner\mu^{+}_{0}\ldots\mu^{+}_{t\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'^{+}_{0}\ldots\mu'^{+}_{t'\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_{0}\ldots\mu'_{i}\urcorner$. Sodann gilt mit Theorem 1-4-(i), dass $\ulcorner\mu_{0}\ldots\mu_{i}\urcorner = \ulcorner\mu^{\mu_{0}}{}_{0}\ldots\mu^{\mu_{0}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{0})\text{-}1}\ldots\mu^{\mu_{i}}{}_{0}\ldots\mu^{\mu_{i}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{i})\text{-}1}\urcorner$ und $\ulcorner\mu'_{0}\ldots\mu'_{i}\urcorner = \ulcorner\mu'^{\mu'_{0}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{0}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{0})\text{-}1}\ldots\mu'^{\mu'_{i}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{i}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{i})\text{-}1}\urcorner$. Damit gilt dann auch für $0 < i$, dass a) gilt.

Sei nun für b) $j \leq i$. Für den Fall $j = 0$ wurde oben bereits gezeigt, dass dann $\mu_{j} = \mu'_{j}$ gilt. Sei nun $0 < j \leq i$. Sei nun $r < \mathrm{AUSL}(\mu_{j}) = \mathrm{AUSL}(\mu'_{j})$. Dann ist $(\sum_{n=0}^{j-1} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}))+r = (\sum_{n=0}^{j-1} \mathrm{AUSL}(\mu'_{n}))+r < t = t' \leq m = m'$. Dann gilt mit $s = (\sum_{n=0}^{j-1} \mathrm{AUSL}(\mu_{n}))+r$, dass $\mu^{+}_{s} = \mu^{\mu_{j}}{}_{r}$ und $\mu'^{+}_{s} = \mu'^{\mu'_{j}}{}_{r}$. Da $s < t = t'$ gilt dann, wie eben gezeigt, dass $\mu^{+}_{s} = \mu'^{+}_{s}$ und damit auch $\mu^{\mu_{j}}{}_{r} = \mu'^{\mu'_{j}}{}_{r}$. Also gilt für alle $r < \mathrm{AUSL}(\mu_{j}) = \mathrm{AUSL}(\mu'_{j})$, dass $\mu^{\mu_{j}}{}_{r} = \mu'^{\mu'_{j}}{}_{r}$. Damit gilt dann mit Postulat 1-2-(i), dass $\mu_{j} = \ulcorner\mu^{\mu_{j}}{}_{0}\ldots\mu^{\mu_{j}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu_{j})\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'^{\mu'_{j}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{j}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{j})\text{-}1}\urcorner = \mu'_{j}$. Damit gilt b) auch für $0 < i$. ■

Theorem 1-6. *Zur Identität von Ausdrucksverkettungen (c)*
Wenn k, $s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\{\mu_{0}, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{AUS}$ und $\{\mu'_{0}, \ldots, \mu'_{s\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{AUS}$ und $j < k$ und $\mu_{j} = \ulcorner\mu'_{0}\ldots\mu'_{s\text{-}1}\urcorner$, dann: $\ulcorner\mu_{0}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu_{0}\ldots\mu_{j\text{-}1}\mu'_{0}\ldots\mu'_{s\text{-}1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$.

Beweis: Seien k, $s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\{\mu_{0}, \ldots, \mu_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{AUS}$ und $\{\mu'_{0}, \ldots, \mu'_{s\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{AUS}$ und $j < k$ und $\mu_{j} = \ulcorner\mu'_{0}\ldots\mu'_{s\text{-}1}\urcorner$. Dann gibt es mit $\{\mu'_{0}, \ldots, \mu'_{s\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{AUS}$ und Theorem 1-2 für alle $i < s$ $\{\mu'^{\mu'_{i}}{}_{0}, \ldots, \mu'^{\mu'_{i}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{i})\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GAUS}$, so dass $\mu'_{i} = \ulcorner\mu'^{\mu'_{i}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{i}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{i})\text{-}1}\urcorner$. Mit Theorem 1-4-(i) ist $\mu_{j} = \ulcorner\mu'_{0}\ldots\mu'_{s\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'^{\mu'_{0}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{0}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{0})\text{-}1}\ldots\mu'^{\mu'_{s\text{-}1}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{s\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s\text{-}1})\text{-}1}\urcorner$. Mit Postulat 1-3 gilt $\ulcorner\mu_{0}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu_{0}\ldots\mu_{j\text{-}1}\mu'^{\mu'_{0}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{0}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{0})\text{-}1}\ldots\mu'^{\mu'_{s\text{-}1}}{}_{0}\ldots\mu'^{\mu'_{s\text{-}1}}{}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s\text{-}1})\text{-}1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k\text{-}1}\urcorner$. Durch Induktion über i wird zunächst gezeigt, dass für alle $i < s$ gilt:

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\ldots\mu'_i\mu'^{\mu'_{i+1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{i+1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{i+1})-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner.$$

Damit gilt dies dann auch für $i = s\text{-}1$ und damit gilt dann

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\ldots\mu'_{s-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner.$$

Damit gilt dann das Theorem. Gelte die Behauptung nun für alle $l < i$. Sei nun $i < s$. Dann ist $i = 0$ oder $0 < i$. Sei $i = 0$. Wegen $\mu'_0 = \ulcorner\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\urcorner$ ist dann nach Postulat 1-3:

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\mu'^{\mu'_1}_0\ldots\mu'^{\mu'_1}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_1)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner.$$

Sei nun $0 < i$. Dann gilt für alle $l < i$, dass $l < s$ und damit nach I.V.:

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\ldots\mu'_l\mu'^{\mu'_{l+1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{l+1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{l+1})-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner.$$

Da nun mit $0 < i$ gilt, dass $i\text{-}1 < i$, gilt damit:

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\ldots\mu'_{i-1}\mu'^{\mu'_i}_0\ldots\mu'^{\mu'_i}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner.$$

Wegen $\mu'_i = \ulcorner\mu'^{\mu'_i}_0\ldots\mu'^{\mu'_i}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\urcorner$ gilt dann mit Postulat 1-3:

$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'^{\mu'_0}_0\ldots\mu'^{\mu'_0}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_0)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\ldots\mu'_{i-1}\mu'^{\mu'_i}_0\ldots\mu'^{\mu'_i}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_i)-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{j-1}\mu'_0\ldots\mu'_i\mu'^{\mu'_{i+1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{i+1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{i+1})-1}\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_0\ldots\mu'^{\mu'_{s-1}}_{\mathrm{AUSL}(\mu'_{s-1})-1}\mu_{j+1}\ldots\mu_{k-1}\urcorner.$$

Damit gilt die Behauptung für alle $i < s$ und das Theorem ergibt sich wie oben angeben. ■

Theorem 1-7. *Eindeutige Anfangs- und Endausdrücke*
Wenn μ, μ', μ^*, $\mu^+ \in$ AUS, dann:

(i) Wenn $\ulcorner\mu\mu^*\urcorner = \ulcorner\mu\mu^+\urcorner$, dann: $\mu^* = \mu^+$,
(ii) Wenn $\ulcorner\mu^*\mu\urcorner = \ulcorner\mu^+\mu\urcorner$, dann: $\mu^* = \mu^+$, und
(iii) Wenn μ, $\mu' \in$ GAUS und $\ulcorner\mu\mu^*\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^+\urcorner$, dann $\mu = \mu'$.

Beweis: Seien μ, μ', μ^*, $\mu^+ \in$ AUS. Dann gibt es $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass $\{\mu_0, \ldots, \mu_{i-1}\} \subseteq$ GAUS und $\mu = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{i-1}\urcorner$ und $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass $\{\mu^*_0, \ldots, \mu^*_{j-1}\} \subseteq$ GAUS und $\mu^* = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{j-1}\urcorner$ und $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass $\{\mu^+_0, \ldots, \mu^+_{k-1}\} \subseteq$ GAUS und $\mu^+ = \ulcorner\mu^+_0\ldots\mu^+_{k-1}\urcorner$. Sei nun für (i) $\ulcorner\mu\mu^*\urcorner = \ulcorner\mu\mu^+\urcorner$. Dann gilt mit Theorem 1-5-(ii): $i+j = i+k$ und somit $j = k$ und damit mit Theorem 1-5-(iii): $\mu^* = \mu^+$. (ii) ergibt sich analog. Seien nun für (iii) μ, $\mu' \in$ GAUS und $\ulcorner\mu\mu^*\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^+\urcorner$. Dann ist $\ulcorner\mu\mu^*_0\ldots\mu^*_{j-1}\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^+_0\ldots\mu^+_{k-1}\urcorner$. Dann gilt mit AUSL($\mu$) = 1 = AUSL($\mu'$) und Theorem 1-5-(iii) $\mu = \mu'$. ■

Theorem 1-8. *Kein Ausdruck enthält sich selbst echt*
Wenn μ', μ^*, $\mu^+ \in$ AUS, dann:

(i) $\mu' \neq \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$,
(ii) $\mu' \neq \ulcorner\mu^*\mu'\mu^+\urcorner$ und
(iii) $\mu' \neq \ulcorner\mu^*\mu'\urcorner$.

Beweis: Seien μ', μ^*, $\mu^+ \in$ AUS. Dann gibt es $i \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass $\{\mu'_0, \ldots, \mu'_{i-1}\} \subseteq$ AUS und $\mu' = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{i-1}\urcorner$ und $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass $\{\mu^*_0, \ldots, \mu^*_{j-1}\} \subseteq$ AUS und $\mu^* = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{j-1}\urcorner$ und $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so dass $\{\mu^+_0, \ldots, \mu^+_{k-1}\} \subseteq$ AUS und $\mu^+ = \ulcorner\mu^+_0\ldots\mu^+_{k-1}\urcorner$.Wäre nun $\mu' = \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$ oder $\mu' = \ulcorner\mu^*\mu'\mu^+\urcorner$ oder $\mu' = \ulcorner\mu^*\mu'\urcorner$. Mit Theorem 1-5-(ii) wäre dann $i = i+j$ oder $i = j+i+k$ oder $i = j+i$ und andererseits mit i, j, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$: $i \neq i+j$ und $i \neq j+i+k$ und $i \neq j+i$. Widerspruch! Also $\mu' \neq \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$ und $\mu' \neq \ulcorner\mu^*\mu'\mu^+\urcorner$ und $\mu' \neq \ulcorner\mu^*\mu'\urcorner$. ■

Nun werden alle Operatoren nach ihrer Stelligkeit bestimmt, wobei die unter Definition 1-5-(vi) beschriebenen Operatoren in Definition 1-8 als Quantoren definiert werden, welche eine eigene Kategorie bilden. Nach der Stelligkeitsdefinition können dann weiterhin die Kategorien der Terme und der Formeln eingeführt und sodann die eindeutige Lesbarkeit für die bereits etablierten Kategorien gezeigt werden. Im Anschluss werden dann weitere grammatische Begrifflichkeiten bis hin zu den Satzsequenzen entwickelt.

Definition 1-5. *Stelligkeit*

μ <u>ist i-stellig</u>
gdw

(i) $\mu \in$ FUNK und es gibt $j \in \mathbb{N}$, so dass $\mu = \ulcorner f_{i.j} \urcorner$ oder
(ii) $\mu \in$ PRÄ und es gibt $j \in \mathbb{N}$, so dass $\mu = \ulcorner P_{i.j} \urcorner$ oder
(iii) $\mu = \ulcorner = \urcorner$ und $i = 2$ oder
(iv) $\mu = \ulcorner \neg \urcorner$ und $i = 1$ oder
(v) $\mu \in$ JUNK$\backslash\{\ulcorner \neg \urcorner\}$ und $i = 2$ oder
(vi) Es gibt $\Pi \in$ QUANT und $\xi \in$ VAR und $\mu = \ulcorner \Pi\xi \urcorner$ und $i = 1$ oder
(vii) $\mu \in$ PERF und $i = 1$.

Definition 1-6. *Die Menge der Terme (TERM; Metavariablen:* $\theta, \theta', \theta^*, \ldots$*)*

TERM $= \bigcap\{R \mid R \subseteq$ AUS und

(i) KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR $\subseteq R$ und
(ii) Wenn $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1}\} \subseteq R$ und $\varphi \in$ FUNK n-stellig, dann $\ulcorner \varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1}) \urcorner \in R\}$.

Hinweis: Leerzeichen dienen hier und im Folgenden nur der besseren Lesbarkeit, sie sind kein Teil der Ausdrücke. So steht etwa $\ulcorner f_{3.1}(c_0, c_0, c_1) \urcorner$ für $\ulcorner f_{3.1}(c_0,c_0,c_1) \urcorner$.

Definition 1-7. *Atomare und funktorale Terme (ATERM und FTERM)*

(i) ATERM = KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR,
(ii) FTERM = TERM$\backslash$ATERM.

Definition 1-8. *Die Menge der Quantoren (QUANTOR)*

QUANTOR $= \{\ulcorner \Pi\xi \urcorner \mid \Pi \in$ QUANT und $\xi \in$ VAR$\}$.

Definition 1-9. *Die Menge der Formeln (FORM; Metavariablen:* A, B, Γ, Δ, A', B', Γ', Δ', A*, B*, Γ^*, Δ^*, …*)*

FORM $= \bigcap\{R \mid R \subseteq$ AUS und

(i) Wenn $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1}\} \subseteq$ TERM und $\Phi \in$ PRÄ n-stellig, dann $\ulcorner \Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1}) \urcorner \in R$,
(ii) Wenn $\Delta \in R$, dann $\ulcorner \neg\Delta \urcorner \in R$,
(iii) Wenn $\Delta_0, \Delta_1 \in R$ und $\psi \in$ JUNK$\backslash\{\ulcorner \neg \urcorner\}$, dann $\ulcorner (\Delta_0\ \psi\ \Delta_1) \urcorner \in R$, und
(iv) Wenn $\Delta \in R$ und $\xi \in$ VAR und $\Pi \in$ QUANT, dann $\ulcorner \Pi\xi\Delta \urcorner \in R\}$.

Definition 1-10. *Atomare, junktorale und quantorale Formeln (AFORM, JFORM, QFORM)*

(i) AFORM = $\{\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner \mid \Phi \in$ PRÄ n-stellig und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\} \subseteq$ TERM$\}$,

(ii) JFORM = $\{\ulcorner\neg\Delta\urcorner \mid \Delta \in$ FORM$\} \cup \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\backslash\{\ulcorner\neg\urcorner\}\}$,

(iii) QFORM = $\{\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner \mid \Delta \in$ FORM und $\Pi \in$ QUANT und $\xi \in$ VAR$\}$.

Das folgende Theorem führt direkt zur eindeutigen Lesbarkeit hin.

Theorem 1-9. *Terme resp. Formeln haben keine Terme resp. Formeln als echte Anfangsausdrücke*

(i) Wenn $\theta, \theta' \in$ TERM und $\mu \in$ AUS, dann $\theta' \neq \ulcorner\theta\mu\urcorner$, und

(ii) Wenn $\Delta, \Delta' \in$ FORM und $\mu \in$ AUS, dann $\Delta' \neq \ulcorner\Delta\mu\urcorner$.

Beweis: *Zu (i)*: Seien $\theta, \theta' \in$ TERM und $\mu \in$ AUS. Der Beweis wird mittels Induktion über AUSL(θ') geführt. Gelte dazu die Behauptung für alle $\theta^* \in$ TERM mit AUSL(θ^*) < AUSL(θ'). Für AUSL(θ') = 1, also $\theta' \in$ ATERM, gilt die Behauptung trivial, weil es nach Postulat 1-2-(ii) keine θ, $\mu \in$AUS gibt, so dass $\theta' = \ulcorner\theta\mu\urcorner$. Sei nun 1 < AUSL($\theta'$). Dann gilt $\theta' \notin$ ATERM, also $\theta' \in$ FTERM. Also gibt es $n' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\varphi' \in$ FUNK, wobei φ' n'-stellig, und $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\theta' = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$. Wäre nun $\theta' = \ulcorner\theta\mu\urcorner$. Wäre $\theta \in$ ATERM. Dann wäre $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR und daher würde nach Theorem 1-7-(iii) mit $\ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner = \theta' = \ulcorner\theta\mu\urcorner$ gelten, dass $\varphi' = \theta \in$ KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR. Widerspruch! Also ist $\theta \in$ FTERM und es gibt $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\varphi \in$ FUNK, wobei φ n-stellig, und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\theta = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner$. Also $\ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\mu\urcorner$. Dann gilt mit Theorem 1-7-(iii) $\varphi' = \varphi$ und damit nach Definition 1-5 und Postulat 1-1-(iv) $n = n'$. Also $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n-1})\urcorner = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\mu\urcorner$, wobei für alle $i < n$ auch gilt, dass AUSL(θ'_i), AUSL(θ_i) < AUSL(θ').

Sodann gilt mit $\{\mu\} \cup$ TERM $\subseteq$ AUS, dass es $\{\mu^*_0, \ldots, \mu^*_{\text{AUSL}(\mu)-1}\} \subseteq$ GAUS und $\{\mu^{\theta'_0}_0, \ldots, \mu^{\theta'_0}_{\text{AUSL}(\theta'_0)-1}\} \cup \ldots \cup \{\mu^{\theta'_{n-1}}_0, \ldots, \mu^{\theta'_{n-1}}_{\text{AUSL}(\theta'_{n-1})-1}\} \subseteq$ GAUS und $\{\mu^{\theta_0}_0, \ldots, \mu^{\theta_0}_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}\} \cup \ldots \cup \{\mu^{\theta_{n-1}}_0, \ldots, \mu^{\theta_{n-1}}_{\text{AUSL}(\theta_{n-1})-1}\} \subseteq$ GAUS gibt, so dass $\mu = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{\text{AUSL}(\mu)-1}\urcorner$ und für alle $i < n$: $\theta'_i = \ulcorner\mu^{\theta'_i}_0\ldots\mu^{\theta'_i}_{\text{AUSL}(\theta'_i)-1}\urcorner$ und $\theta_i = \ulcorner\mu^{\theta_i}_0\ldots\mu^{\theta_i}_{\text{AUSL}(\theta_i)-1}\urcorner$.

Dann ist mit Theorem 1-5-(i)

$$\ulcorner\varphi(\mu^{\theta'_0}_0\ldots\mu^{\theta'_0}_{\text{AUSL}(\theta'_0)-1}, \ldots, \mu^{\theta'_{n-1}}_0\ldots\mu^{\theta'_{n-1}}_{\text{AUSL}(\theta'_{n-1})-1})\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\varphi(\mu^{\theta_0}_0\ldots\mu^{\theta_0}_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}, \ldots, \mu^{\theta_{n-1}}_0\ldots\mu^{\theta_{n-1}}_{\text{AUSL}(\theta_{n-1})-1})\mu^*_0\ldots\mu^*_{\text{AUSL}(\mu)-1}\urcorner$$

und damit mit Theorem 1-7-(i)

$$\ulcorner\mu^{\theta'_0}{}_0\ldots\mu^{\theta'_0}{}_{AUSL(\theta'_0)\text{-}1}, \ldots, \mu^{\theta'_{n\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\theta'_{n\text{-}1}}{}_{AUSL(\theta'_{n\text{-}1})\text{-}1})\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\theta_0}{}_0\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta_0)\text{-}1}, \ldots, \mu^{\theta_{n\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\theta_{n\text{-}1}}{}_{AUSL(\theta_{n\text{-}1})\text{-}1})\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{AUSL(\mu)\text{-}1}\urcorner.$$

Wäre nun AUSL(θ'_i) = AUSL(θ_i) für alle $i < n$. Dann wäre mit Theorem 1-5-(iii) und Theorem 1-7-(i) $\ulcorner)\urcorner = \ulcorner)\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{AUSL(\mu)\text{-}1}\urcorner$, während andererseits mit Postulat 1-2-(ii) gilt: $\ulcorner)\urcorner \neq \ulcorner)\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{AUSL(\mu)\text{-}1}\urcorner$. Widerspruch! Also gibt es ein kleinstes i mit AUSL(θ'_i) $\neq$ AUSL(θ_i). Sei i so und zunächst AUSL(θ'_i) < AUSL(θ_i). Angenommen $i = 0$. Dann ergibt sich mit Theorem 1-5-(iii) für alle j < AUSL(θ'_0), dass $\mu^{\theta'_0}{}_j = \mu^{\theta_0}{}_j$ und damit nach Postulat 1-2-(i): $\theta'_0 = \ulcorner\mu^{\theta'_0}{}_0\ldots\mu^{\theta'_0}{}_{AUSL(\theta'_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\theta_0}{}_0\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta'_0)\text{-}1}\urcorner$. Wegen AUSL($\theta'_0$) < AUSL($\theta_0$) gilt dann aber mit Theorem 1-6, dass $\ulcorner\theta'_0\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta'_0)}\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\theta_0}{}_0\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta'_0)\text{-}1}\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta'_0)}\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\theta_0}{}_0\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta_0)\text{-}1}\urcorner = \theta_0$, im Widerspruch zur I.V. Angenommen $i > 0$. Dann gilt mit Theorem 1-5-(iii):

$$\ulcorner\mu^{\theta'_0}{}_0\ldots\mu^{\theta'_0}{}_{AUSL(\theta'_0)\text{-}1}, \ldots, \mu^{\theta'_{i\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\theta'_{i\text{-}1}}{}_{AUSL(\theta'_{i\text{-}1})\text{-}1},\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\theta_0}{}_0\ldots\mu^{\theta_0}{}_{AUSL(\theta_0)\text{-}1}, \ldots, \mu^{\theta_{i\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\theta_{i\text{-}1}}{}_{AUSL(\theta_{i\text{-}1})\text{-}1},\urcorner.$$

Also mit Theorem 1-7-(i):

$$\ulcorner\mu^{\theta'_i}{}_0\ldots\mu^{\theta'_i}{}_{AUSL(\theta'_i)\text{-}1}, \ldots, \mu^{\theta'_{n\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\theta'_{n\text{-}1}}{}_{AUSL(\theta'_{n\text{-}1})\text{-}1})\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\theta_i}{}_0\ldots\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta_i)\text{-}1}, \ldots, \mu^{\theta_{n\text{-}1}}{}_0\ldots\mu^{\theta_{n\text{-}1}}{}_{AUSL(\theta_{n\text{-}1})\text{-}1})\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{AUSL(\mu)\text{-}1}\urcorner.$$

Mit Theorem 1-5-(iii) gilt sodann für alle j < AUSL(θ'_i), dass $\mu^{\theta'_i}{}_j = \mu^{\theta_i}{}_j$ und damit nach Postulat 1-2-(i): $\theta'_i = \ulcorner\mu^{\theta'_i}{}_0\ldots\mu^{\theta'_i}{}_{AUSL(\theta'_i)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\theta_i}{}_0\ldots\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta'_i)\text{-}1}\urcorner$. Wegen AUSL($\theta'_i$) < AUSL($\theta_i$) gilt dann aber mit Theorem 1-6, dass $\ulcorner\theta'_i\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta'_i)}\ldots\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta_i)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\theta_i}{}_0\ldots\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta'_i)\text{-}1}\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta'_i)}\ldots\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta_i)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\theta_i}{}_0\ldots\mu^{\theta_i}{}_{AUSL(\theta_i)\text{-}1}\urcorner = \theta_i$, ebenfalls im Widerspruch zur I.V. Bei AUSL(θ_i) < AUSL(θ'_i) ergibt sich analog ein Widerspruch. Also führt die Annahme, dass $\theta' = \ulcorner\theta\mu\urcorner$ für ein $\theta \in$ TERM, zum Widerspruch.

Zu (ii): Seien nun Δ, $\Delta' \in$ FORM und $\mu \in$ AUS. Der Beweis wird mittels Induktion über AUSL(Δ') geführt. Gelte dazu die Behauptung für alle $\Delta^* \in$ FORM mit AUSL(Δ^*) < AUSL(Δ'). Mit $\Delta' \in$ FORM gilt $\Delta' \in$ AFORM $\cup$ $\{\ulcorner\neg\Delta^*\urcorner \mid \Delta^* \in \text{FORM}\} \cup \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in \text{FORM und } \psi \in \text{JUNK}\backslash\{\ulcorner\neg\urcorner\}\} \cup$ QFORM. Diese *vier* Fälle werden nun unterschieden.

Erstens: Sei $\Delta' \in$ AFORM. Der Beweis wird analog zum Induktionsschritt für (i) unter Rückgriff auf (i) gezeigt. Angenommen $\Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner$. Also gibt es $n' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ und $\Phi' \in$

PRÄ und $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\Delta' = \ulcorner\Phi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$. Wäre $\Delta \in$ JFORM $\cup$ QFORM. Dann gäbe es $\mu' \in \{\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner(\urcorner\} \cup$ QUANT und $\mu^* \in$ AUS, so dass $\Delta = \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$. Also würde mit Theorem 1-6 gelten $\ulcorner\Phi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner = \Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^*\mu\urcorner$ und damit nach Theorem 1-7-(iii) $\Phi' = \mu'$. Also $\Phi' \in \{\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner(\urcorner\} \cup$ QUANT. Widerspruch! Also $\Delta \notin$ JFORM $\cup$ QFORM, sondern $\Delta \in$ AFORM. Damit gibt es $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\Phi \in$ PRÄ, Φ n-stellig, und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner$. Also $\ulcorner\Phi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\mu\urcorner$. Dann gilt mit Theorem 1-7-(iii) $\Phi' = \Phi$ und damit nach Definition 1-5 und Postulat 1-1-(v) $n = n'$. Also $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n-1})\urcorner = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\mu\urcorner$. Ab hier läuft der Beweis für $\Delta' \in$ AFORM vollkommen analog zum Induktionsschritt für (i), wobei der resultierende Widerspruch hier nicht mit der I.V., sondern mit (i) besteht.

Zweitens: Sei nun $\Delta' \in \{\ulcorner\neg\Delta^*\urcorner \mid \Delta^* \in \text{FORM}\}$. Dann gibt es $\Delta^\# \in$ FORM, so dass $\Delta' = \ulcorner\neg\Delta^\#\urcorner$, wobei AUSL$(\Delta^\#) <$ AUSL(Δ'). Angenommen $\Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner$ und damit $\ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner\neg\Delta^\#\urcorner$. Wäre $\Delta \in$ AFORM $\cup \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}\} \cup$ QFORM. Dann gäbe es $\mu' \in$ PRÄ $\cup \{\ulcorner(\urcorner\} \cup$ QUANT und $\mu^* \in$ AUS, so dass $\Delta = \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$. Also würde mit Theorem 1-6 gelten $\ulcorner\neg\Delta^{\#}\urcorner = \ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^*\mu\urcorner$ und damit nach Theorem 1-7-(iii) $\ulcorner\neg\urcorner = \mu'$. Also $\ulcorner\neg\urcorner \in$ PRÄ $\cup \{\ulcorner(\urcorner\} \cup$ QUANT. Widerspruch! Also $\Delta \in \{\ulcorner\neg\Delta^*\urcorner \mid \Delta^* \in \text{FORM}\}$ und es gibt $\Delta^+ \in$ FORM, so dass $\Delta = \ulcorner\neg\Delta^+\urcorner$. Also $\ulcorner\neg\Delta^\#\urcorner = \ulcorner\neg\Delta^+\mu\urcorner$. Mit Theorem 1-7-(i) gilt $\Delta^\# = \ulcorner\Delta^+\mu\urcorner$, im Widerspruch zur I.V.

Drittens: Sei nun $\Delta' \in \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}\}$. Dann gibt es $\Delta'_0, \Delta'_1 \in$ FORM und $\psi' \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}$, so dass $\Delta' = \ulcorner(\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner$, wobei AUSL$(\Delta'_0) <$ AUSL(Δ') und AUSL$(\Delta'_1) <$ AUSL(Δ'). Angenommen $\Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner$ und damit $\ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner(\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner$. Wäre $\Delta \in$ AFORM $\cup \{\ulcorner\neg\Delta^*\urcorner \mid \Delta^* \in \text{FORM}\} \cup$ QFORM. Dann gäbe es $\mu' \in$ PRÄ $\cup \{\ulcorner\neg\urcorner\} \cup$ QUANT und $\mu^* \in$ AUS, so dass $\Delta = \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$. Also würde mit Theorem 1-6 gelten $\ulcorner(\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner = \Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^*\mu\urcorner$ und damit nach Theorem 1-7-(iii) $\ulcorner(\urcorner = \mu'$. Also $\ulcorner(\urcorner \in$ PRÄ $\cup \{\ulcorner\neg\urcorner\} \cup$ QUANT. Widerspruch! Also $\Delta \in \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}\}$ und es gibt $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}$, so dass $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$, wobei AUSL$(\Delta_0)$, AUSL$(\Delta_1) <$ AUSL(Δ'). Also $\ulcorner(\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\mu\urcorner$. Mit Theorem 1-7-(i) gilt $\ulcorner\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner = \ulcorner\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\mu\urcorner$. Sodann gilt mit $\{\mu\} \cup$ FORM $\subseteq$ AUS, dass es $\{\mu^*_0, \ldots, \mu^*_{\text{AUSL}(\mu)-1}\} \subseteq$ GAUS und $\{\mu^{\Delta'_0}_0, \ldots, \mu^{\Delta'_0}_{\text{AUSL}(\Delta'_0)-1}\} \cup \{\mu^{\Delta'_1}_0, \ldots, \mu^{\Delta'_1}_{\text{AUSL}(\Delta'_1)-1}\} \subseteq$ GAUS und $\{\mu^{\Delta_0}_0, \ldots, \mu^{\Delta_0}_{\text{AUSL}(\Delta_0)-1}\} \cup \{\mu^{\Delta_1}_0, \ldots, \mu^{\Delta_1}_{\text{AUSL}(\Delta_1)-1}\} \subseteq$ GAUS gibt, so dass $\mu = \ulcorner\mu^*_0\ldots\mu^*_{\text{AUSL}(\mu)-1}\urcorner$ und für alle $i < 2$: $\Delta'_i = \ulcorner\mu^{\Delta'_i}_0\ldots\mu^{\Delta'_i}_{\text{AUSL}(\Delta'_i)-1}\urcorner$ und $\Delta_i = \ulcorner\mu^{\Delta_i}_0\ldots\mu^{\Delta_i}_{\text{AUSL}(\Delta_i)-1}\urcorner$.

Dann ergibt sich mit Theorem 1-5-(i):

$$\ulcorner\mu^{\Delta'_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)-1}\psi'\mu^{\Delta'_1}{}_0\ldots\mu^{\Delta'_1}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_1)-1})\urcorner$$
$$=$$
$$\ulcorner\mu^{\Delta_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)-1}\psi\mu^{\Delta_1}{}_0\ldots\mu^{\Delta_1}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_1)-1})\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{\mathrm{AUSL}(\mu)-1}\urcorner.$$

Wäre nun $\mathrm{AUSL}(\Delta'_0) < \mathrm{AUSL}(\Delta_0)$. Dann gilt mit Theorem 1-5-(iii) für alle $j < \mathrm{AUSL}(\Delta'_0)$, dass $\mu^{\Delta'_0}{}_j = \mu^{\Delta_0}{}_j$, und damit nach Postulat 1-2-(i) $\Delta'_0 = \ulcorner\mu^{\Delta'_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)-1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\Delta_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)-1}\urcorner$. Damit gilt dann mit Theorem 1-6, dass $\ulcorner\Delta'_0\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)}\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)-1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\Delta_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)-1}\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)}\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)-1}\urcorner = \ulcorner\mu^{\Delta_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)-1}\urcorner = \Delta_0$; im Widerspruch zur I.V. Bei $\mathrm{AUSL}(\Delta_0) < \mathrm{AUSL}(\Delta'_0)$ ergibt sich analog ein Widerspruch. Also $\mathrm{AUSL}(\Delta'_0) = \mathrm{AUSL}(\Delta_0)$. Damit gilt mit Theorem 1-5-(iii) $\ulcorner\mu^{\Delta'_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta'_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)-1}\psi'\urcorner = \ulcorner\mu^{\Delta_0}{}_0\ldots\mu^{\Delta_0}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)-1}\psi\urcorner$ und damit mit Theorem 1-7-(i) auch $\ulcorner\mu^{\Delta'_1}{}_0\ldots\mu^{\Delta'_1}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_1)-1})\urcorner = \ulcorner\mu^{\Delta_1}{}_0\ldots\mu^{\Delta_1}{}_{\mathrm{AUSL}(\Delta_1)-1})\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{\mathrm{AUSL}(\mu)-1}\urcorner$. Wie eben für Δ'_0, Δ_0 zeigt man, dass $\mathrm{AUSL}(\Delta'_1) = \mathrm{AUSL}(\Delta_1)$. Damit gilt dann aber mit Theorem 1-5-(iii), dass $\Delta'_1 = \Delta_1$, und damit mit Theorem 1-7-(i), dass $\ulcorner)\urcorner = \ulcorner)\mu^*{}_0\ldots\mu^*{}_{\mathrm{AUSL}(\mu)-1}\urcorner$, was Postulat 1-2-(ii) widerspricht.

Viertens: Sei nun $\Delta' \in \mathrm{QFORM}$. Dann gibt es $\Delta^\# \in \mathrm{FORM}$ und $\Pi' \in \mathrm{QUANT}$ und $\xi' \in \mathrm{VAR}$, so dass $\Delta' = \ulcorner\Pi'\xi'\Delta^{\#}\urcorner$, wobei $\mathrm{AUSL}(\Delta^\#) < \mathrm{AUSL}(\Delta')$. Angenommen $\Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner$ und damit $\ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner\Pi'\xi'\Delta^{\#}\urcorner$. Wäre $\Delta \in \mathrm{AFORM} \cup \mathrm{JFORM}$. Dann gäbe es $\mu' \in \mathrm{PRÄ} \cup \{\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner(\urcorner\}$ und $\mu^* \in \mathrm{AUS}$, so dass $\Delta = \ulcorner\mu'\mu^*\urcorner$. Also würde mit Theorem 1-6 gelten $\ulcorner\Pi'\xi'\Delta^{\#}\urcorner = \ulcorner\Delta\mu\urcorner = \ulcorner\mu'\mu^*\mu\urcorner$ und damit $\Pi' = \mu'$. Also $\Pi' \in \mathrm{PRÄ} \cup \{\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner(\urcorner\}$. Widerspruch! Also $\Delta \in \mathrm{QFORM}$ und es gibt $\Delta^+ \in \mathrm{FORM}$ und $\Pi \in \mathrm{QUANT}$ und $\xi \in \mathrm{VAR}$, so dass $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta^{+}\urcorner$. Also $\ulcorner\Pi'\xi'\Delta^{\#}\urcorner = \ulcorner\Pi\xi\Delta^+\mu\urcorner$. Mit Theorem 1-7-(iii) und -(i) gilt zunächst $\ulcorner\xi'\Delta^{\#}\urcorner = \ulcorner\xi\Delta^+\mu\urcorner$ und schließlich $\Delta^\# = \ulcorner\Delta^+\mu\urcorner$, im Widerspruch zur I.V.

In allen vier Fällen führt $\Delta' = \ulcorner\Delta\mu\urcorner$ zum Widerspruch. Also $\Delta' \neq \ulcorner\Delta\mu\urcorner$. ■

Theorem 1-10. *Eindeutige Lesbarkeit ohne Sätze (a – Eindeutige Kategorie)*

(i) KONST ∩ (PAR ∪ VAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(ii) PAR ∩ (KONST ∪ VAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(iii) VAR ∩ (KONST ∪ PAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(iv) FTERM ∩ (KONST ∪ PAR ∪ VAR ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(v) QUANTOR ∩ (KONST ∪ PAR ∪ VAR ∪ FTERM ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(vi) AFORM ∩ (KONST ∪ PAR ∪ VAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(vii) {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∩ (KONST ∪ PAR ∪ VAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM) = ∅,

(viii) {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∩ (KONST ∪ PAR ∪ VAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ QFORM) = ∅ und

(ix) QFORM ∩ (KONST ∪ PAR ∪ VAR ∪ FTERM ∪ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}}) = ∅.

Beweis: Sei μ ∈ KONST. Dann ist nach Postulat 1-1 μ ∉ PAR ∪ VAR und nach Definition 1-7 μ ∉ FTERM. Wäre μ ∈ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM. Dann gäbe es μ' ∈ GAUS und μ* ∈ AUS, so dass μ = ⌜μ'μ*⌝. Das widerspricht Postulat 1-2-(ii). Also μ ∉ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM.

Für μ ∈ PAR und μ ∈ VAR verläuft der Beweis analog.

Sei nun μ ∈ FTERM. Nach Definition 1-7 ist dann μ ∉ KONST ∪ PAR ∪ VAR und es ist μ ∈ TERM. Nach Definition 1-6 gibt es damit φ ∈ FUNK und μ^+ ∈ AUS, so dass μ = ⌜φμ^+⌝. Wäre μ ∈ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM. Dann gäbe es μ' ∈ PRÄ ∪ QUANT ∪ {'¬', '('} und μ* ∈ AUS, so dass μ = ⌜μ'μ*⌝. Dann müsste nach Theorem 1-7-(iii) μ' = φ sein und damit μ' ∈ FUNK. Das widerspricht Postulat 1-1. Also μ ∉ QUANTOR ∪ AFORM ∪ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM} ∪ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} ∪ QFORM.

Für μ ∈ QUANTOR, μ ∈ AFORM, μ ∈ {⌜¬Δ⌝ | Δ ∈ FORM}, μ ∈ {⌜(Δ_0 ψ Δ_1)⌝ | Δ_0, Δ_1 ∈ FORM und ψ ∈ JUNK\{⌜¬⌝}} und μ ∈ QFORM verläuft der Beweis analog. ■

Theorem 1-11. *Eindeutige Lesbarkeit ohne Sätze (b – Eindeutige Zerlegbarkeit)*
Wenn $\mu \in$ TERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ FORM, dann:

(i) $\mu \in$ ATERM oder

(ii) $\mu \in$ FTERM und es gibt $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\varphi \in$ FUNK und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\mu = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner$ und für alle $n' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\varphi' \in$ FUNK und $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1}\} \subseteq$ TERM mit $\mu = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$ gilt: $n = n'$ und $\varphi = \varphi'$ und für alle $i < n$: $\theta_i = \theta'_i$, oder

(iii) $\mu \in$ QUANTOR und es gibt $\Pi \in$ QUANT und $\xi \in$ VAR, so dass $\mu = \ulcorner\Pi\xi\urcorner$ und für alle $\Pi' \in$ QUANT und $\xi' \in$ VAR mit $\mu = \ulcorner\Pi'\xi'\urcorner$ gilt: $\Pi = \Pi'$ und $\xi = \xi'$, oder

(iv) $\mu \in$ AFORM und es gibt $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\Phi \in$ PRÄ und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\mu = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner$ und für alle $n' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\Phi' \in$ PRÄ und $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1}\} \subseteq$ TERM mit $\mu = \ulcorner\Phi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$ gilt: $n = n'$ und $\Phi = \Phi'$ und für alle $i < n$: $\theta_i = \theta'_i$, oder

(v) $\mu \in \{\ulcorner\neg\Delta\urcorner \mid \Delta \in$ FORM$\}$ und es gibt $\Delta \in$ FORM, so dass $\mu = \ulcorner\neg\Delta\urcorner$ und für alle $\Delta' \in$ FORM mit $\mu = \ulcorner\neg\Delta'\urcorner$ gilt: $\Delta = \Delta'$, oder

(vi) $\mu \in \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}\}$ und es gibt $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}$, so dass $\mu = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$ und für alle $\Delta'_0, \Delta'_1 \in$ FORM und $\psi' \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}$ mit $\mu = \ulcorner(\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner$ gilt: $\Delta_0 = \Delta'_0$ und $\Delta_1 = \Delta'_1$ und $\psi = \psi'$, oder

(vii) $\mu \in$ QFORM und es gibt $\Pi \in$ QUANT, $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, so dass $\mu = \ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner$ und für alle $\Pi' \in$ QUANT, $\xi' \in$ VAR und $\Delta' \in$ FORM mit $\mu = \ulcorner\Pi'\xi'\Delta'\urcorner$ gilt: $\Pi = \Pi'$ und $\xi = \xi'$ und $\Delta = \Delta'$.

Beweis: Sei $\mu \in$ TERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ FORM. Also $\mu \in$ ATERM $\cup$ FTERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ AFORM $\cup$ $\{\ulcorner\neg\Delta\urcorner \mid \Delta \in$ FORM$\}$ $\cup$ $\{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in$ JUNK$\setminus\{\ulcorner\neg\urcorner\}\}$ $\cup$ QFORM. Es werden diese *sieben* Fälle unterschieden. *Erstens*: Angenommen $\mu \in$ ATERM. Damit ist (i) trivial erfüllt.

Zweitens: Sei $\mu \in$ FTERM. Dann gibt es nach Definition 1-6 und Definition 1-7 $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\varphi \in$ FUNK und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\mu = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner$. Seien nun auch $n' \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\varphi' \in$ FUNK und $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\mu = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$. $\varphi = \varphi'$ folgt mit Theorem 1-7-(iii). Mit Theorem 1-7-(i) folgt damit $\ulcorner\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner = \ulcorner\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$. Dann lässt sich durch Induktion über i zeigen, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt: Wenn $i < n$, dann $i < n'$ und $\theta_i = \theta'_i$. Gelte dazu die Behauptung für alle $k < i$. Angenommen $i < n$. Angenommen $i = 0$. Dann gilt, dass $0 < n'$. Außerdem gilt, dass es $\{\mu_0, \ldots, \mu_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}\} \cup \{\mu'_0, \ldots, \mu'_{\text{AUSL}(\theta'_0)-1}\} \subseteq$ GAUS gibt, so dass $\theta_0 = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}\urcorner$ and $\theta'_0 = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\text{AUSL}(\theta'_0)-1}\urcorner$ und somit mit Theorem 1-6 $\ulcorner\mu_0\ldots\mu_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\text{AUSL}(\theta'_0)-1}, \ldots, \theta'_{n'-1})\urcorner$. Wäre $\text{AUSL}(\theta_0) < \text{AUSL}(\theta'_0)$. Dann wäre mit Theorem 1-5-(iii) für alle $l < \text{AUSL}(\theta_0)$ $\mu_l = \mu'_l$ und damit nach Postulat 1-2-(i) $\theta_0 = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\text{AUSL}(\theta_0)-1}\urcorner$. Damit wäre dann aber mit Theorem 1-6

$\ulcorner\theta_0\mu'_{\mathrm{AUSL}(\theta_0)}\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\theta'_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\theta_0)\text{-}1}\mu'_{\mathrm{AUSL}(\theta_0)}\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\theta'_0)\text{-}1}\urcorner = \theta'_0$, was Theorem 1-9-(i) widerspricht. Ebenso folgt ein Widerspruch für $\mathrm{AUSL}(\theta'_0) < \mathrm{AUSL}(\theta_0)$. Also gilt, dass $\mathrm{AUSL}(\theta_0) = \mathrm{AUSL}(\theta'_0)$ und somit mit Theorem 1-5-(iii) auch $\theta_0 = \theta'_0$.

Angenommen $0 < i$. Dann gilt für alle $k < i$: $k < n$. Mit I.V. gilt mithin für alle $k < i$, dass $k < n'$ und $\theta_k = \theta'_k$. Dann gilt mit Theorem 1-5-(iii), dass $\ulcorner\theta_0, \ldots, \theta_{i\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\theta'_0, \ldots, \theta'_{i\text{-}1}\urcorner$. Außerdem gilt, dass $i\text{-}1 < n'$ und somit, dass $i \leq n'$. Wäre $i = n'$. Dann wäre $\ulcorner\theta_0, \ldots, \theta_{i\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'\text{-}1}\urcorner$. Mit Theorem 1-7-(i) wäre dann jedoch $\ulcorner, \theta_i, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner = \ulcorner)\urcorner$, was Postulat 1-2-(ii) widerspricht. Also gilt $i < n'$. Damit ergibt sich wiederum mit Theorem 1-7-(i), dass $\ulcorner\theta_i, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner = \ulcorner\theta'_i, \ldots, \theta'_{n'\text{-}1})\urcorner$. Daraus ergibt sich $\theta_i = \theta'_i$ in derselben Weise wie $\theta_0 = \theta'_0$ für $i = 0$. Also gilt für alle $i < n$, dass $i < n'$ und $\theta_i = \theta'_i$. Analog zeigt man, dass für alle $i < n'$ gilt: $i < n$ und $\theta'_i = \theta_i$. Zusammen ergibt sich damit dann, dass $n = n'$ und dass für alle $i < n$: $\theta_i = \theta'_i$.

Drittens: Sei $\mu \in$ QUANTOR. Dann gibt es nach Definition 1-8 $\Pi \in$ QUANT und $\xi \in$ VAR, so dass $\mu = \ulcorner\Pi\xi\urcorner$. Seien nun auch $\Pi' \in$ QUANT, $\xi' \in$ VAR, so dass $\mu = \ulcorner\Pi'\xi'\urcorner$. Aus Theorem 1-7-(iii) und -(i) folgt sofort $\Pi = \Pi'$ und $\xi = \xi'$.

Viertens: Sei $\mu \in$ AFORM. Dann gibt es nach Definition 1-10-(i) $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\Phi \in$ PRÄ und $\{\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\mu = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner$. Seien nun auch $n' \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\Phi' \in$ PRÄ und $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'\text{-}1}\} \subseteq$ TERM, so dass $\mu = \ulcorner\Phi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'\text{-}1})\urcorner$. $\Phi = \Phi'$ ergibt sich aus Theorem 1-7-(iii). Damit gilt dann mit Theorem 1-7-(i), dass $\ulcorner\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner = \ulcorner\theta'_0, \ldots, \theta'_{n'\text{-}1})\urcorner$. Daraus ergibt sich wie im zweiten Fall, dass $n = n'$ und dass für alle $i < n$: $\theta_i = \theta'_i$.

Fünftens: Sei $\mu \in \{\ulcorner\neg\Delta\urcorner \mid \Delta \in \mathrm{FORM}\}$. Dann gibt es $\Delta \in$ FORM, so dass $\mu = \ulcorner\neg\Delta\urcorner$. Sei nun auch $\Delta' \in$ FORM, so dass $\mu = \ulcorner\neg\Delta'\urcorner$. Aus Theorem 1-7-(i) folgt sofort $\Delta = \Delta'$.

Sechstens: Sei $\mu \in \{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \mid \Delta_0, \Delta_1 \in \mathrm{FORM}$ und $\psi \in \mathrm{JUNK}\backslash\{\ulcorner\neg\urcorner\}\}$. Dann gibt es $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und $\psi \in \mathrm{JUNK}\backslash\{\ulcorner\neg\urcorner\}$, so dass $\mu = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$. Seien nun auch Δ'_0, $\Delta'_1 \in$ FORM und $\psi' \in \mathrm{JUNK}\backslash\{\ulcorner\neg\urcorner\}$, so dass $\mu = \ulcorner(\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner$. Dann gilt zunächst mit Theorem 1-7-(i) $\ulcorner\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner = \ulcorner\Delta'_0\ \psi'\ \Delta'_1)\urcorner$. Sodann gibt es $\{\mu_0, \ldots, \mu_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)\text{-}1}\} \cup \{\mu'_0, \ldots, \mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)\text{-}1}\} \subseteq$ GAUS, so dass $\Delta_0 = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)\text{-}1}\urcorner$ und $\Delta'_0 = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)\text{-}1}\urcorner$. Wäre $\mathrm{AUSL}(\Delta_0) < \mathrm{AUSL}(\Delta'_0)$. Dann wäre mit Theorem 1-5-(iii) $\mu_i = \mu'_i$ für alle $i < \mathrm{AUSL}(\Delta_0)$. Damit wäre dann nach nach Postulat 1-2-(i) $\Delta_0 = \ulcorner\mu_0\ldots\mu_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)\text{-}1}\urcorner$. Mit Theorem 1-6 wäre dann aber $\ulcorner\Delta_0\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)}\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)\text{-}1}\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta_0)}\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)\text{-}1}\urcorner = \ulcorner\mu'_0\ldots\mu'_{\mathrm{AUSL}(\Delta'_0)\text{-}1}\urcorner = \Delta'_0$, entgegen Theorem 1-9-(ii). Für $\mathrm{AUSL}(\Delta'_0) < \mathrm{AUSL}(\Delta_0)$ ergibt sich auf analoge Weise ein Widerspruch.

Also AUSL(Δ_0) = AUSL(Δ'_0) und damit $\Delta_0 = \Delta'_0$. Mit Theorem 1-7 gilt dann $\ulcorner\psi\ \Delta_1)\urcorner = \ulcorner\psi'\ \Delta'_1)\urcorner$, dann $\psi = \psi'$, weiter $\ulcorner\Delta_1)\urcorner = \ulcorner\Delta'_1)\urcorner$ und schließlich $\Delta_1 = \Delta'_1$.

Siebtens: Sei $\mu \in$ QFORM. Dann gibt es nach Definition 1-10-(iii) $\Pi \in$ QUANT, $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, so dass $\mu = \ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner$. Seien nun auch $\Pi' \in$ QUANT, $\xi' \in$ VAR, $\Delta' \in$ FORM, so dass $\mu = \ulcorner\Pi'\xi'\Delta'\urcorner$. Aus Theorem 1-7-(iii) und -(i) folgt sofort $\Pi = \Pi'$ und $\xi = \xi'$ und $\Delta = \Delta'$. ■

Nach Theorem 1-10 und Theorem 1-11 lassen sich nun in der üblichen Weise Funktionen auf den Mengen TERM, FORM und ihrer Vereinigungsmenge über den induktiven Aufbau der Terme und Formeln definieren. Die folgenden Term- und Formelgraddefinitionen (Definition 1-11 und Definition 1-12) erlauben es, Eigenschaften von Formeln und Termen durch Beweise mittels Induktion über die natürlichen Zahlen in bequemerer Weise zu führen als dies unter Rückgriff auf AUSL möglich ist.

Definition 1-11. *Termgrad*[8] *(TGRAD)*

TGRAD ist eine Funktion auf TERM und

(i) Wenn $\theta \in$ ATERM, dann TGRAD(θ) = 0,

(ii) Wenn $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner \in$ FTERM, dann
TGRAD($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner$) = max({TGRAD($\theta_0$), …, TGRAD($\theta_{n\text{-}1}$)})+1.

Definition 1-12. *Formelgrad (FGRAD)*

FGRAD ist eine Funktion auf FORM und

(i) Wenn $\Delta \in$ AFORM, dann FGRAD(Δ) = 0,

(ii) Wenn $\ulcorner\neg\Delta\urcorner \in$ JFORM, dann FGRAD($\ulcorner\neg\Delta\urcorner$) = FGRAD($\Delta$)+1,

(iii) Wenn $\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM, dann
FGRAD($\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$) = max({FGRAD($\Delta_0$), FGRAD($\Delta_1$)})+1,

(iv) Wenn $\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner \in$ QFORM, dann FGRAD($\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner$) = FGRAD($\Delta$)+1.

Für den Identitätsprädikator wird im Weiteren die übliche Infixnotation ohne Klammern verwendet, also $\ulcorner\theta = \theta^*\urcorner$ für $\ulcorner{=}(\theta, \theta^*)\urcorner$. Auch werden bei Formeln oft die äußeren Klammern weggelassen, also $\ulcorner A\ \psi\ B\urcorner$ für $\ulcorner(A\ \psi\ B)\urcorner$. Mit Definition 1-13 können nun die

8 'min(..)' sei für nicht-leere Teilmengen von $\mathbb{N}$ und 'max(..)' für nicht-leere und endliche Teilmengen von $\mathbb{N}$ wie üblich definiert. Falls X keine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, sei min(X) = 0, und falls X keine nicht-leere endliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist, sei auch max(X) = 0.

freien Variablen eines Terms oder einer Formel und auf dieser Basis in Definition 1-16 die Sätze bestimmt werden.

Definition 1-13. *Zuordnung der Menge der Variablen, die in einem Term* θ *oder einer Formel* Γ *frei vorkommen (FV)*

FV ist eine Funktion auf TERM $\cup$ FORM und

(i) Wenn $\alpha \in$ KONST, dann FV(α) = $\emptyset$,

(ii) Wenn $\beta \in$ PAR, dann FV(β) = $\emptyset$,

(iii) Wenn $\xi \in$ VAR, dann FV(ξ) = $\{\xi\}$,

(iv) Wenn $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner \in$ FTERM, dann
FV($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner$) = $\bigcup\{\mathrm{FV}(\theta_i) \mid i < n\}$,

(v) Wenn $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner \in$ AFORM, dann
FV($\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner$) = $\bigcup\{\mathrm{FV}(\theta_i) \mid i < n\}$,

(vi) Wenn $\ulcorner\neg\Delta\urcorner \in$ JFORM, dann FV($\ulcorner\neg\Delta\urcorner$) = FV($\Delta$),

(vii) Wenn $\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM, dann FV($\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$) = FV($\Delta_0$) $\cup$ FV(Δ_1), und

(viii) Wenn $\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner \in$ QFORM und, dann FV($\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner$) = FV($\Delta$)$\setminus\{\xi\}$.

Definition 1-14. *Die Menge der geschlossenen Terme (GTERM)*

GTERM = $\{\theta \mid \theta \in$ TERM und FV(θ) = $\emptyset\}$.

Hinweis: Man beachte, dass Parameter nach Definition 1-14 geschlossene Terme sind.

Definition 1-15. *Die Menge der geschlossenen Formeln (GFORM)*

GFORM = $\{\Delta \mid \Delta \in$ FORM und FV(Δ) = $\emptyset\}$.

Geschlossene Formeln werden auch als Aussagen angesprochen. Man beachte, dass geschlossene Formeln durchaus Parameter zum Teilausdruck (siehe Definition 1-20) haben können.

Definition 1-16. *Die Menge der Sätze (SATZ; Metavariablen:* Σ, Σ', Σ^*, …*)*

SATZ = $\{\ulcorner\Xi\Gamma\urcorner \mid \Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM$\}$.

Definition 1-17. *Annahme- und Folgerungssätze (ASATZ und FSATZ)*

(i) ASATZ = $\{\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner \mid \Gamma \in$ GFORM$\}$,

(ii) FSATZ = $\{\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner \mid \Gamma \in$ GFORM$\}$.

Theorem 1-12. *Eindeutige Kategorie und eindeutige Zerlegbarkeit für Sätze*
Wenn $\Sigma \in$ SATZ, dann $\Sigma \notin$ TERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ FORM und

(i) $\Sigma \in$ ASATZ und $\Sigma \notin$ FSATZ und es gibt $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ und für alle $\Gamma' \in$ GFORM mit $\Sigma = \ulcorner$Sei $\Gamma'\urcorner$ gilt: $\Gamma = \Gamma'$, oder

(ii) $\Sigma \in$ FSATZ und $\Sigma \notin$ ASATZ und es gibt $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ und für alle $\Gamma' \in$ GFORM mit $\Sigma = \ulcorner$Also $\Gamma'\urcorner$ gilt: $\Gamma = \Gamma'$.

Beweis: Sei $\Sigma \in$ SATZ. Also gibt es $\Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner\Xi\Gamma\urcorner$. Wäre $\Sigma \in$ TERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ FORM, dann wäre $\Sigma \in$ ATERM oder $\Sigma \in$ FTERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ FORM. Im ersten Falle wäre im Widerspruch zu Postulat 1-2-(ii) $\Sigma \in$ GAUS. Im zweiten Falle gäbe es $\mu \in$ FUNK $\cup$ QUANT $\cup$ PRÄ $\cup$ $\{\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner(\urcorner\}$ und $\mu' \in$ AUS, so dass $\Sigma = \ulcorner\mu\mu'\urcorner$. Damit wäre $\Xi = \mu$ und mithin $\Xi \in$ FUNK $\cup$ QUANT $\cup$ PRÄ $\cup$ $\{\ulcorner\neg\urcorner, \ulcorner(\urcorner\}$, im Widerspruch zu Postulat 1-1. Also $\Sigma \notin$ TERM $\cup$ QUANTOR $\cup$ FORM.

Wenn nun $\Sigma \in$ SATZ, dann mit Postulat 1-1-(viii) $\Sigma \in$ ASATZ oder $\Sigma \in$ FSATZ. Es werden diese *zwei* Fälle unterschieden. *Erstens*: Sei $\Sigma \in$ ASATZ. Dann gibt es $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$. Wäre darüber hinaus $\Sigma \in$ FSATZ, dann gäbe es Γ^*, so dass $\Sigma = \ulcorner$Also $\Gamma^*\urcorner$ und nach Theorem 1-7-(iii) $\ulcorner$Sei$\urcorner = \ulcorner$Also$\urcorner$. Dann wäre entgegen Postulat 1-1-(viii) $\{\ulcorner$Sei$\urcorner, \ulcorner$Also$\urcorner\}$ keine Zweiermenge. Also $\Sigma \notin$ FSATZ. Sei nun auch $\Gamma' \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner$Sei $\Gamma'\urcorner$. Also $\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner = \ulcorner$Sei $\Gamma'\urcorner$. Mit Theorem 1-7-(i) folgt sofort $\Gamma = \Gamma'$.

Zweitens: Sei $\Sigma \in$ FSATZ. Dann gibt es $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$. Wäre nun auch $\Sigma \in$ ASATZ, dann ergäbe sich analog zum ersten Fall ein Widerspruch. Also $\Sigma \notin$ ASATZ. Sei nun auch $\Gamma' \in$ GFORM, so dass $\Sigma = \ulcorner$Also $\Gamma'\urcorner$. Also $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner = \ulcorner$Also $\Gamma'\urcorner$. Mit Theorem 1-7-(i) folgt sofort $\Gamma = \Gamma'$. ■

Nach Theorem 1-12 lassen sich nun auch Funktionen auf der Menge TERM $\cup$ FORM $\cup$ SATZ in der üblichen Weise über den Aufbau der Terme, Formeln und Sätze definieren.

Definition 1-18. *Satzaussagenzuordnung (A)*
A = $\{(\ulcorner\Xi\Gamma\urcorner, \Gamma) \mid \Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM$\}$.

Hinweis: Mit Definition 1-16 und Theorem 1-12 ergibt sich sofort, dass A eine Funktion auf SATZ ist. Daher wird im Weiteren die Funktionsschreibweise verwendet: $A(\ulcorner\Xi\Gamma\urcorner) = \Gamma$. Die Menge der Grundausdrücke und die definierten grammatischen Kategorien können nun als die eigentlichen Ausdrücke zusammengefasst werden.

Definition 1-19. *Die Menge der eigentlichen Ausdrücke (EAUS)*
EAUS = GAUS ∪ QUANTOR ∪ TERM ∪ FORM ∪ SATZ.

Definition 1-20. *Die Teilausdruckfunktion (TA)*
TA ist eine Funktion auf EAUS und

(i) Wenn $\tau \in$ GAUS, dann TA(τ) = $\{\tau\}$,

(ii) Wenn $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner \in$ FTERM, dann
TA($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner$) = $\{\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner, \varphi\} \cup \bigcup\{TA(\theta_i) \mid i < n\}$,

(iii) Wenn $\ulcorner\Pi\xi\urcorner \in$ QUANTOR, dann TA($\ulcorner\Pi\xi\urcorner$) = $\{\ulcorner\Pi\xi\urcorner, \Pi, \xi\}$,

(iv) Wenn $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner \in$ AFORM, dann
TA($\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner$) = $\{\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n\text{-}1})\urcorner, \Phi\} \cup \bigcup\{TA(\theta_i) \mid i < n\}$,

(v) Wenn $\ulcorner\neg\Delta\urcorner \in$ JFORM, dann TA($\ulcorner\neg\Delta\urcorner$) = $\{\ulcorner\neg\Delta\urcorner, \ulcorner\neg\urcorner\} \cup$ TA(Δ),

(vi) Wenn $\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM, dann
TA($\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$) = $\{\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner, \psi\} \cup$ TA(Δ_0) $\cup$ TA(Δ_1),

(vii) Wenn $\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner \in$ QFORM, dann
TA($\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner$) = $\{\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner\} \cup$ TA($\ulcorner\Pi\xi\urcorner$) $\cup$ TA(Δ), und

(viii) Wenn $\ulcorner\Xi\Delta\urcorner \in$ SATZ, dann TA($\ulcorner\Xi\Delta\urcorner$) = $\{\ulcorner\Xi\Delta\urcorner, \Xi\} \cup$ TA(Δ).

Definition 1-21. *Die Teiltermfunktion (TT)*
TT ist eine Funktion auf TERM ∪ FORM ∪ SATZ und für alle $\tau \in$ TERM ∪ FORM ∪ SATZ ist TT(τ) = TA(τ) ∩ TERM.

Definition 1-22. *Die Teilformelfunktion (TF)*
TF ist eine Funktion auf FORM ∪ SATZ und für alle $\tau \in$ FORM ∪ SATZ ist TF(τ) = TA(τ) ∩ FORM.

Die folgenden Definitionen beschreiben die Syntax von L insoweit sie über die Satzebene hinausgeht. Wie oben bemerkt, wird – wie schon bei den vorhergehenden Definitionen – der explizite Bezug auf L unterdrückt. Definition 1-23 zeichnet endliche Folgen aus Folgerungs- und Annahmesätzen als (Satz)Sequenzen aus:

Definition 1-23. *(Satz)Sequenzen (Metavariablen: $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}^*$, …)*
$\mathfrak{H}$ <u>ist eine Sequenz</u>
gdw
$\mathfrak{H}$ ist eine endliche Folge und für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$) gilt: $\mathfrak{H}_i \in$ SATZ.

Definition 1-24. *Menge der (Satz)Sequenzen (SEQ)*
SEQ = $\{\mathfrak{H} \mid \mathfrak{H}$ ist eine Sequenz$\}$.

Definition 1-25. *Konklusionszuordnung (K)*
K = $\{(\mathfrak{H}, \Gamma) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}\backslash\{\emptyset\}$ und $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1})\}$.

Hinweis: Aus dieser Definition ergibt sich direkt, dass K eine Funktion auf SEQ\{∅} ist.

Definition 1-26. *Zuordnung der Teilmenge einer Sequenz $\mathfrak{H}$, deren Glieder die Annahmesätze von $\mathfrak{H}$ sind (ANS)*
ANS = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $X = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}_i \in \mathrm{ASATZ}\}\}$.

Definition 1-27. *Zuordnung der Menge der Annahmen (AN)*
AN = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $X = \{\Gamma \mid$ Es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$, so dass $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)\}\}$.

Definition 1-28. *Zuordnung der Teilmenge einer Sequenz $\mathfrak{H}$, deren Glieder die Folgerungssätze von $\mathfrak{H}$ sind (FS)*
FS = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $X = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}_i \in \mathrm{FSATZ}\}\}$.

Hinweis: Aus diesen Definitionen ergibt sich direkt, dass ANS, AN und FS Funktionen auf SEQ sind.

Definition 1-29. *Zuordnung der Menge der Teilterme der Glieder einer Sequenz $\mathfrak{H}$ (TTSEQ)*
TTSEQ = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $X = \bigcup\{\mathrm{TT}(\mathfrak{H}_i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}\}$.

Hinweis: Aus dieser Definition ergibt sich direkt, dass TTSEQ eine Funktion auf SEQ ist.

Definition 1-30. *Zuordnung der Menge der Teilterme der Elemente einer Formelmenge X (TTFM)*
TTFM = $\{(X, Y) \mid X \subseteq \mathrm{FORM}$ und $Y = \bigcup\{\mathrm{TT}(\mathrm{A}) \mid \mathrm{A} \in X\}\}$.

Hinweis: Aus dieser Definition ergibt sich direkt, dass TTFM eine Funktion auf Pot(FORM) ist.

1.2 Substitution

Für die metalogische Arbeit sind nun Substitutionsbegrifflichkeiten zu etablieren. Dabei wird die übliche Substitutionskonzeption eingeschränkt: Die Substituenda dürfen nur atomare Terme sein und von den Substituentia wird Geschlossenheit verlangt. Dies macht es auch überflüssig, gebundene Umbenennungen vorzunehmen, um Variablenkollisionen zu verhindern, da die Substituentia eben geschlossen sind. Die Aufgaben, die in vielen Kalkülen und in der Modelltheorie üblicherweise von freien Variablen übernommen werden, leisten im Redehandlungskalkül und in der hier entwickelten Modelltheorie die Parameter – welche geschlossene Terme sind (siehe Definition 1-14). Sodann können nicht nur Terme und Formeln Substitutionsorte sein, sondern auch Sätze und Sequenzen (Klausel (ix) und (x) von Definition 1-31).

Definition 1-31. *Substitution von geschlossenen Termen für atomare Terme in Termen, Formeln, Sätzen und Sequenzen*[9]

Die Substitution ist eine 3-stellige Funktion auf $\{\langle\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \mu\rangle \mid k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle \in {}^{k}\text{GTERM}, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle \in {}^{k}\text{ATERM} \text{ und } \mu \in \text{TERM} \cup \text{FORM} \cup \text{SATZ} \cup \text{SEQ}\}$. Als Substitutionsoperator wird '[.., .., ..]' verwendet. Die Werte werden wie folgt zugeordnet:

(i) Wenn $\theta^+ \in \text{ATERM}$ und $\theta^+ = \theta_{k-1}$, dann $[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^+] = \theta'_{k-1}$,

(ii) Wenn $\theta^+ \in \text{ATERM}$, $\theta^+ \neq \theta_{k-1}$ und $k = 1$, dann $[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^+] = \theta^+$,

(iii) Wenn $\theta^+ \in \text{ATERM}$, $\theta^+ \neq \theta_{k-1}$ und $k \neq 1$, dann
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^+] = [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-2}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-2}\rangle, \theta^+]$,

(iv) Wenn $\ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{l-1})\urcorner \in \text{FTERM}$, dann
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{l-1})\urcorner]$
$= \ulcorner\varphi([\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^*_0], \ldots, [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^*_{l-1}])\urcorner$,

(v) Wenn $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{l-1})\urcorner \in \text{AFORM}$, dann
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner\Phi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{l-1})\urcorner]$
$= \ulcorner\Phi([\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^*_0], \ldots, [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \theta^*_{l-1}])\urcorner$,

(vi) Wenn $\ulcorner\neg\Delta\urcorner \in \text{JFORM}$, dann
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner\neg\Delta\urcorner] = \ulcorner\neg[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \Delta]\urcorner$,

(vii) Wenn $\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in \text{JFORM}$, dann
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner]$
$= \ulcorner([\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \Delta_0]\ \psi\ [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \Delta_1])\urcorner$,

[9] Es gelte ${}^{X}Y = \{f \mid f \in \text{Pot}(X \times Y)$ und f ist Funktion auf X und $\text{Ran}(f) \subseteq Y\}$. Für die Verwendung des Tupeloperators gelte: $\langle a_0, \ldots, a_{k-1}\rangle = \{(i, a_i) \mid i < k\}$. Bei der Angabe von Substitutionen werden im Folgenden für 1-Tupel einfach deren Werte notiert. Also etwa $[\theta'_0, \theta_0, \Delta]$ statt $[\langle\theta'_0\rangle, \langle\theta_0\rangle, \Delta]$.

(viii) Wenn $\ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner \in$ QFORM, dann sei $\langle i_0, \ldots, i_{s-1}\rangle$ so, dass $s = |\{j \mid j < k$ und $\theta_j \neq \xi\}|$ und für alle $l < s$ gilt $i_l \in \{j \mid j < k$ und $\theta_j \neq \xi\}$ und für alle $k < l < s$ gilt $i_k < i_l$, und es sei
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi[\langle\theta'_{i_0}, \ldots, \theta'_{i_{s-1}}\rangle, \langle\theta_{i_0}, \ldots, \theta_{i_{s-1}}\rangle, \Delta]\urcorner$, falls $|\{j \mid j < k$ und $\theta_j \neq \xi\}| \neq 0$, $[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi\Delta\urcorner$ sonst,

(ix) Wenn $\ulcorner\Xi\Delta\urcorner \in$ SATZ, dann
$[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \ulcorner\Xi\Delta\urcorner] = \ulcorner\Xi[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \Delta]\urcorner$, und

(x) Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann $[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}]$
$= \{(j, [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}_j]) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$.

In Klausel (viii) wird die Substitution in Quantorformeln reguliert. Falls Glieder der Substituendumfolge nicht mit der durch den betreffenden Quantor gebundene Variable identisch sind, dann soll die Substitution innerhalb der quantifizierten Formel für und nur für diese Glieder der Substituendumfolge durchgeführt werden. Dementsprechend müssen in diesem Fall die erwünschten Substituendumglieder und die ihnen korrespondierenden Substituensglieder herausgegriffen werden. Dies geschieht durch die (jeweils eindeutig bestimmte) Zahlenfolge $\langle i_0, \ldots, i_{s-1}\rangle$, die gerade die Indizes herausgreift, deren Werte in der Substituendumfolge verschieden von der gebundenen Variable sind. Durch Komposition der ursprünglichen Substituendum- resp. Substituensfolgen mit $\langle i_0, \ldots, i_{s-1}\rangle$ entstehen dann gerade die neue Substituendum- resp. Substituensfolgen, die die gewünschten Eigenschaften haben. Sind dagegen alle Glieder der Substituendumfolge mit der gebundenen Variable identisch, dann soll das Substitutionsergebnis mit dem Substitutionsort – also der betreffenden Quantorformel – identisch sein.

Nun sind einige Theoreme zu etablieren, die für die Metatheorie des Redehandlungskalküls – insbesondere *ab* Kap. 4 – benötigt werden. Es empfiehlt sich für den ungeduldigeren Leser, diese Theoreme zunächst zu überspringen und dann im Bedarfsfall hierher zurückzukehren. Zunächst folgt ein Theorem, das Induktionsbeweise über den Formel*grad* vereinfacht. Es wird mittels Induktion über den Formel*aufbau* bewiesen.

Theorem 1-13. *Formelgraderhaltung bei Substitution*
Wenn $\theta \in$ GTERM, $\theta' \in$ ATERM und $\Delta \in$ FORM, dann FGRAD(Δ) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta]$).

Beweis: Seien $\theta \in$ GTERM, $\theta' \in$ ATERM und $\Delta \in$ FORM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner \in$ AFORM. Dann ist nach Definition 1-12 FGRAD(Δ) = 0. Dabei gilt $[\theta, \theta', \Delta] = [\theta, \theta', \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{n-1})\urcorner] = \ulcorner\Phi([\theta, \theta', \theta_0], \ldots, [\theta, \theta', \theta_{n-1}])\urcorner \in$ AFORM. Also auch FGRAD($[\theta, \theta', \Delta]$) = 0.

Gelte die Behauptung nun für Δ_0, $\Delta_1 \in$ FORM. Also FGRAD(Δ_0) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta_0]$) und FGRAD($\Delta_1$) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta_1]$).

Zu JFORM: Sei nun $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner$. Dann ist FGRAD($\Delta$) = FGRAD($\ulcorner\neg\Delta_0\urcorner$) = FGRAD($\Delta_0$)+1 = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta_0]$)+1 = FGRAD($\ulcorner\neg[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner$) = FGRAD($[\theta, \theta', \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]$) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta]$). Sei nun $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$ für ein $\psi \in$ JUNK\{$\ulcorner\neg\urcorner$}. Dann ist FGRAD(Δ) = FGRAD($\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$) = max({FGRAD($\Delta_0$), FGRAD($\Delta_1$)})+1 = max({FGRAD($[\theta, \theta', \Delta_0]$), FGRAD($[\theta, \theta', \Delta_1]$)})+1 = FGRAD($\ulcorner([\theta, \theta', \Delta_0]\ \psi\ [\theta, \theta', \Delta_1])\urcorner$) = FGRAD($[\theta, \theta', \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner]$) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta]$).

Zu QFORM: Sei nun $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner$. Sei zunächst $\xi \neq \theta'$. Dann ist FGRAD(Δ) = FGRAD($\ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner$) = FGRAD($\Delta_0$)+1 = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta_0]$)+1 = FGRAD($\ulcorner\Pi\xi[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner$) = FGRAD($[\theta, \theta', \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]$) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta]$). Sei sodann $\xi = \theta'$. Dann ist FGRAD(Δ) = FGRAD($\ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner$) = FGRAD($[\theta, \theta', \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]$) = FGRAD($[\theta, \theta', \Delta]$). ■

Theorem 1-14. *Für alle Substituenda und Substitutionsorte gilt, dass entweder alle geschlossenen Terme Teilterme des jeweiligen Substitutionsergebnisses sind oder für alle geschlossenen Terme das jeweilige Substitutionsergebnis mit dem Substitutionsort identisch ist*

Wenn $\theta' \in$ ATERM, $\theta^* \in$ TERM, $\Delta \in$ FORM, dann:

(i) $\theta \in$ TT($[\theta, \theta', \theta^*]$) für alle $\theta \in$ GTERM oder $[\theta, \theta', \theta^*] = \theta^*$ für alle $\theta \in$ GTERM und

(ii) $\theta \in$ TT($[\theta, \theta', \Delta]$) für alle $\theta \in$ GTERM oder $[\theta, \theta', \Delta] = \Delta$ für alle $\theta \in$ GTERM.

Beweis: Seien $\theta' \in$ ATERM, $\theta^* \in$ TERM, $\Delta \in$ FORM. *Zu (i)*: Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von θ^* geführt. Sei $\theta^* \in$ ATERM. Falls $\theta' = \theta^*$, dann ist $[\theta, \theta', \theta^*] = \theta$ und mithin $\theta \in$ TT($[\theta, \theta', \theta^*]$) für alle $\theta \in$ GTERM. Falls $\theta' \neq \theta^*$, dann ist $[\theta, \theta', \theta^*] = \theta^*$ für alle $\theta \in$ GTERM. Gelte die Behauptung nun für $\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{r\text{-}1} \in$ TERM und sei $\theta^* = \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{r\text{-}1})\urcorner \in$ FTERM. Dann ist $[\theta, \theta', \theta^*] = [\theta, \theta', \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{r\text{-}1})\urcorner] = \ulcorner\varphi([\theta, \theta', \theta^*_0], \ldots, [\theta, \theta', \theta^*_{r\text{-}1}])\urcorner$ für alle $\theta \in$ GTERM. Nun gilt nach I.V. für alle $i < r$: $\theta \in$ TT($[\theta, \theta', \theta^*_i]$) für alle $\theta \in$ GTERM oder $[\theta, \theta', \theta^*_i] = \theta^*_i$ für alle $\theta \in$ GTERM. Angenommen es gibt ein $i < r$, so dass $\theta \in$ TT($[\theta, \theta', \theta^*_i]$) für alle $\theta \in$ GTERM. Dann ist auch $\theta \in$ TT($\ulcorner\varphi([\theta, \theta', \theta^*_0], \ldots, [\theta, \theta', \theta^*_{r\text{-}1}])\urcorner$) = TT($[\theta, \theta', \theta^*]$) für alle $\theta \in$ GTERM. Angenommen es gibt kein $i < r$, so dass $\theta \in$ TT($[\theta, \theta', \theta^*_i]$) für alle $\theta \in$ GTERM. Dann gilt nach I.V. $[\theta, \theta', \theta^*_i] = \theta^*_i$ für alle $\theta \in$ GTERM und alle $i < r$. Also $[\theta, \theta', \theta^*] = \ulcorner\varphi([\theta, \theta', \theta^*_0], \ldots, [\theta, \theta', \theta^*_{r\text{-}1}])\urcorner = \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{r\text{-}1})\urcorner = \theta^*$ für alle $\theta \in$ GTERM.

Zu (ii): Sei $\Delta \in$ FORM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Der Fall verläuft analog zum FTERM-Fall unter Verwendung von (i).

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist $[\theta, \theta', \Delta] = [\theta, \theta', \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\neg[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner$ für alle $\theta \in$ GTERM. Nun gilt nach I.V. $\theta \in \mathrm{TT}([\theta, \theta', \Delta_0])$ für alle $\theta \in$ GTERM oder $[\theta, \theta', \Delta_0] = \Delta_0$ für alle $\theta \in$ GTERM. Im ersten Fall gilt auch $\theta \in \mathrm{TT}(\ulcorner\neg[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner) = \mathrm{TT}([\theta, \theta', \Delta])$ für alle $\theta \in$ GTERM. Im zweiten Fall gilt $[\theta, \theta', \Delta] = \ulcorner\neg[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner = \Delta$ für alle $\theta \in$ GTERM. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner$. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner$. Sei zunächst $\xi = \theta'$. Dann ist $[\theta, \theta', \Delta] = [\theta, \theta', \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner = \Delta$ für alle $\theta \in$ GTERM. Sei sodann $\xi \neq \theta'$. Dann ist $[\theta, \theta', \Delta] = [\theta, \theta', \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner$ für alle $\theta \in$ GTERM. Nun gilt nach I.V. $\theta \in \mathrm{TT}([\theta, \theta', \Delta_0])$ für alle $\theta \in$ GTERM oder $[\theta, \theta', \Delta_0] = \Delta_0$ für alle $\theta \in$ GTERM. Im ersten Fall gilt auch $\theta \in \mathrm{TT}(\ulcorner\Pi\xi[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner) = \mathrm{TT}([\theta, \theta', \Delta])$ für alle $\theta \in$ GTERM. Im zweiten Fall gilt $[\theta, \theta', \Delta] = \ulcorner\Pi\xi[\theta, \theta', \Delta_0]\urcorner = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner = \Delta$ für alle $\theta \in$ GTERM. ■

Theorem 1-15. *Basen für die Substitution von geschlossenen Termen in Termen*
Wenn $\theta \in$ TERM, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\backslash\mathrm{TT}(\theta)$, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$, dann gibt es ein $\theta^+ \in$ TERM, wobei $\mathrm{FV}(\theta^+) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \cup \mathrm{FV}(\theta)$ und $\mathrm{TT}(\theta^+) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} = \emptyset$, so dass $\theta = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \theta^+]$.

Beweis: Durch Induktion über den Termaufbau von θ. Sei $\theta \in$ ATERM. Sei nun $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\backslash\mathrm{TT}(\theta)$, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle i, $j < k$ mit $i \neq j$. Dann ist $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR. Sei zunächst $\theta \in$ PAR $\cup$ KONST. Dann gibt es kein $i < k$, so dass $\theta = \theta_i$, oder es gibt ein $i < k$, so dass $\theta = \theta_i$. Im *ersten Fall* ergibt sich $\theta = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]$ sowie $\mathrm{FV}(\theta) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \cup \mathrm{FV}(\theta)$ und $\mathrm{TT}(\theta) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} = \emptyset$. Im *zweiten Fall* ist dann für ein $i < k$ $\theta = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \xi_i]$. Wegen $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$, gilt damit aber auch $\theta = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \xi_i] = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \xi_i]$ und es ist $\mathrm{FV}(\xi_i) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \cup \mathrm{FV}(\theta)$ und $\mathrm{TT}(\xi_i) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} = \emptyset$. Sei nun $\theta \in$ VAR. Dann ist wegen $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\backslash\mathrm{TT}(\theta)$ ebenfalls $\theta = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]$ und $\mathrm{FV}(\theta) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \cup \mathrm{FV}(\theta)$ und wegen $\mathrm{TT}(\theta) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} \subseteq \mathrm{VAR} \cap \mathrm{GTERM} = \emptyset$ auch $\mathrm{TT}(\theta) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\} = \emptyset$.

Gelte die Behauptung nun für $\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1} \in$ TERM und sei $\theta = \ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner \in$ FTERM. Sei nun $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq$ VAR\TT(θ), wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$. Mit $\bigcup\{\mathrm{TT}(\theta'_i) \mid i < r\} \subseteq \mathrm{TT}(\theta)$, gilt dann für alle $i < r$, dass $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq$ VAR\TT(θ'_i). Damit gibt es nach I.V. für jedes θ'_i ($i < r$) ein $\theta^+_i \in$ TERM, so dass $\theta'_i = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \theta^+_i]$ und $\mathrm{FV}(\theta^+_i) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \cup \mathrm{FV}(\theta'_i)$ und $\mathrm{TT}(\theta^+_i) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. Dann gibt es kein $i < k$, so dass $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = \theta_i$, oder es gibt ein $i < k$, so dass $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = \theta_i$. Im *ersten Fall* ist $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = \ulcorner\varphi([\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \theta^+_0], \ldots, [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \theta^+_{r\text{-}1}])\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner]$. Sodann ist $\mathrm{FV}(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1}\rangle\urcorner) = \bigcup\{\mathrm{FV}(\theta^+_i) \mid i < r\}$ und somit mit I.V. $\mathrm{FV}(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner) \subseteq \bigcup\{\mathrm{FV}(\theta'_i) \mid i < r\} \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} = \mathrm{FV}(\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$. Sodann ist nach Fallannahme und I.V. $\mathrm{TT}(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = (\{\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner\} \cup \bigcup\{\mathrm{TT}(\theta^+_i) \mid i < r\}) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = (\{\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner\} \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\}) \cup (\bigcup\{\mathrm{TT}(\theta^+_i) \mid i < r\} \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\}) = \emptyset \cup \bigcup\{\mathrm{TT}(\theta^+_i) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \mid i < r\} = \emptyset$. Im *zweiten Fall* ist dann für ein $i < k$ $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \xi_i]$. Wegen $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$, gilt aber auch $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \xi_i] = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \xi_i]$ und $\mathrm{FV}(\xi_i) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \cup \mathrm{FV}(\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner)$ und wegen $\xi_i \notin$ GTERM auch $\mathrm{TT}(\xi_i) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. ■

Theorem 1-16. *Basen für die Substitution von geschlossenen Termen in Formeln*
Wenn $\Delta \in$ FORM, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$,$\{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq$ VAR\TT(Δ), wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$, dann gibt es ein $\Delta^+ \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta^+) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \cup \mathrm{FV}(\Delta)$ und $\mathrm{TT}(\Delta^+) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$, so dass $\Delta = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+]$.

Beweis: Durch Induktion über den Formelaufbau von Δ. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner \in$ AFORM. Sei nun $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq$ VAR\TT($\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner$), wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$. Mit $\bigcup\{\mathrm{TT}(\theta'_i) \mid i < r\} = \mathrm{TT}(\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner)$, gilt dann für alle $i < r$, dass $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq$ VAR\TT(θ'_i). Dann gibt es nach Theorem 1-15 für jedes θ'_i ($i < r$) ein $\theta^+_i \in$ TERM, so dass $\theta'_i = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \theta^+_i]$ und $\mathrm{FV}(\theta^+_i) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \cup \mathrm{FV}(\theta'_i)$ und $\mathrm{TT}(\theta^+_i) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. Dann ist $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = \ulcorner\Phi([\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \theta^+_0], \ldots, [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \theta^+_{r\text{-}1}])\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner]$. Sodann ist $\mathrm{FV}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner) = \bigcup\{\mathrm{FV}(\theta^+_i) \mid i < r\}$ und daher $\mathrm{FV}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner) \subseteq \bigcup\{\mathrm{FV}(\theta'_i) \mid i < r\} \cup \{\xi_0,$

$\ldots, \xi_{k\text{-}1}\} = \mathrm{FV}(\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$. Sodann ist $\mathrm{TT}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r\text{-}1})\urcorner) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \bigcup\{\mathrm{TT}(\theta^+_i) \mid i < r\} \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \bigcup\{\mathrm{TT}(\theta^+_i) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \mid i < r\} = \emptyset$.

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in \mathrm{FORM}$ und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in \mathrm{JFORM}$. Sei nun $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GTERM}$ und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\setminus\mathrm{TT}(\ulcorner\neg\Delta_0\urcorner)$, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$. Mit $\mathrm{TT}(\Delta_0) = \mathrm{TT}(\ulcorner\neg\Delta_0\urcorner)$ gilt dann $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\setminus\mathrm{TT}(\Delta_0)$. Dann gibt es nach I.V. für Δ_0 ein $\Delta^+_0 \in \mathrm{FORM}$, so dass $\Delta_0 = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_0]$ und $\mathrm{FV}(\Delta^+_0) \subseteq \mathrm{FV}(\Delta_0) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$ und $\mathrm{TT}(\Delta^+_0) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. Dann ist $\ulcorner\neg\Delta_0\urcorner = \ulcorner\neg[\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_0]\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \ulcorner\neg\Delta^+_0\urcorner]$. Sodann ist $\mathrm{FV}(\ulcorner\neg\Delta^+_0\urcorner) = \mathrm{FV}(\Delta^+_0)$ und daher $\mathrm{FV}(\ulcorner\neg\Delta^+_0\urcorner) \subseteq \mathrm{FV}(\Delta_0) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} = \mathrm{FV}(\ulcorner\neg\Delta_0\urcorner) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$. Sodann ist $\mathrm{TT}(\ulcorner\neg\Delta^+_0\urcorner) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \mathrm{TT}(\Delta^+_0) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$.

Sei nun $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in \mathrm{JFORM}$. Sei nun $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GTERM}$ und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\setminus\mathrm{TT}(\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner)$, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$. Mit $\mathrm{TT}(\Delta_0) \cup \mathrm{TT}(\Delta_1) = \mathrm{TT}(\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner)$ gilt dann $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\setminus(\mathrm{TT}(\Delta_0) \cup \mathrm{TT}(\Delta_1))$. Dann gibt es nach I.V. für Δ_0, Δ_1 jeweils ein $\Delta^+_0, \Delta^+_1 \in \mathrm{FORM}$, so dass für $l < 2$: $\Delta_l = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_l]$ und $\mathrm{FV}(\Delta^+_l) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \cup \mathrm{FV}(\Delta_l)$ und $\mathrm{TT}(\Delta^+_l) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. Dann ist $\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner = \ulcorner([\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_0]\ \psi\ [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_1])\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \ulcorner(\Delta^+_0\ \psi\ \Delta^+_1)\urcorner]$. Sodann ist $\mathrm{FV}(\ulcorner(\Delta^+_0\ \psi\ \Delta^+_1)\urcorner) = \mathrm{FV}(\Delta^+_0) \cup \mathrm{FV}(\Delta^+_1)$ und daher $\mathrm{FV}(\ulcorner(\Delta^+_0\ \psi\ \Delta^+_1)\urcorner) \subseteq \mathrm{FV}(\Delta_0) \cup \mathrm{FV}(\Delta_1) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} = \mathrm{FV}(\ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$. Sodann ist $\mathrm{TT}(\ulcorner(\Delta^+_0\ \psi\ \Delta^+_1)\urcorner) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = (\mathrm{TT}(\Delta^+_0) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\}) \cup (\mathrm{TT}(\Delta^+_1) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\}) = \emptyset$.

Sei nun $\Delta = \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner \in \mathrm{QFORM}$ und weiter $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{GTERM}$ und $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\setminus\mathrm{TT}(\ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner)$, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$. Damit gilt insbesondere $\zeta \notin \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$. Sodann gilt mit $\mathrm{TT}(\Delta_0) \subseteq \mathrm{TT}(\ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner)$, dass $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \subseteq \mathrm{VAR}\setminus\mathrm{TT}(\Delta_0)$. Damit gibt es nach I.V. für Δ_0 ein $\Delta^+_0 \in \mathrm{FORM}$, so dass $\Delta_0 = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_0]$ und $\mathrm{FV}(\Delta^+_0) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} \cup \mathrm{FV}(\Delta_0)$ und $\mathrm{TT}(\Delta^+_0) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. Da $\zeta \notin \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$ ist dann $\ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner = \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \Delta^+_0]\urcorner = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta^+_0\urcorner]$. Sodann ist $\mathrm{FV}(\ulcorner\Pi\zeta\Delta^+_0\urcorner) = \mathrm{FV}(\Delta^+_0)\setminus\{\zeta\} \subseteq (\mathrm{FV}(\Delta_0)\setminus\{\zeta\}) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\} = \mathrm{FV}(\ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner) \cup \{\xi_0, \ldots, \xi_{k\text{-}1}\}$. Sodann ist mit $\mathrm{VAR} \cap \mathrm{GTERM} = \emptyset$ schließlich $\mathrm{TT}(\ulcorner\Pi\zeta\Delta^+_0\urcorner) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = (\mathrm{TT}(\Delta^+_0) \cup \{\zeta\}) \cap \{\theta_0, \ldots, \theta_{k\text{-}1}\} = \emptyset$. ■

Theorem 1-17. *Alternative Basen für die Substitution von geschlossenen Termen für Variablen in Termen*
Wenn $\{\xi, \zeta\} \cup X \subseteq$ VAR, wobei $\{\xi, \zeta\} \cap X = \emptyset$, und $\theta \in$ TERM, wobei FV(θ) $\subseteq \{\xi\} \cup X$, dann gibt es ein $\theta^* \in$ TERM, wobei FV(θ^*) $\subseteq \{\zeta\} \cup X$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \theta] = [\theta', \zeta, \theta^*]$.

Beweis: Seien $\{\xi, \zeta\} \cup X \subseteq$ VAR, wobei $\{\xi, \zeta\} \cap X = \emptyset$, und sei $\theta \in$ TERM, wobei FV(θ) $\subseteq \{\xi\} \cup X$. Falls $\xi = \zeta$, dann ergibt sich mit $\theta^* = \theta$ sofort die Behauptung. Sei nun $\xi \neq \zeta$. Der Beweis wird nun mittels Induktion über den Termaufbau von θ geführt. Sei $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR. Dann gilt mit $\theta^* = \theta$, dass FV(θ^*) $= \emptyset \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \theta] = [\theta', \zeta, \theta^*]$. Sei nun $\theta \in$ VAR. Angenommen $\theta = \xi$. Dann gilt mit $\theta^* = \zeta$, dass FV(θ^*) $\subseteq \{\zeta\} \cup X$ und für alle $\theta' \in$ GTERM: $[\theta', \xi, \theta] = \theta' = [\theta', \zeta, \theta^*]$. Angenommen $\theta \neq \xi$. Dann ist $\theta \in X$ und damit $\theta \notin \{\xi, \zeta\}$. Dann gilt mit $\theta^* = \theta$, dass FV(θ^*) $= \{\theta\} \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \theta] = \theta = \theta^* = [\theta', \zeta, \theta^*]$.

Gelte die Behauptung nun für $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ TERM und sei $\theta = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Dann gilt für alle $i < r$: FV(θ_i) $\subseteq \{\xi\} \cup X$. Dann gibt es nach I.V. für alle $i < r$ ein $\theta^*_i \in$ TERM, wobei FV(θ^*_i) $\subseteq \{\zeta\} \cup X$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \theta_i] = [\theta', \zeta, \theta^*_i]$. Dann gilt mit $\theta^* = \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots \theta^*_{r-1})\urcorner$, dass FV($\theta^*$) $\subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \theta] = [\theta', \xi, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner] = \ulcorner\varphi([\theta', \xi, \theta_0], \ldots [\theta', \xi, \theta_{r-1}])\urcorner = \ulcorner\varphi([\theta', \zeta, \theta^*_0], \ldots [\theta', \zeta, \theta^*_{r-1}])\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots \theta^*_{r-1})\urcorner] = [\theta', \zeta, \theta^*]$. ■

Theorem 1-18. *Alternative Basen für die Substitution von geschlossenen Termen für Variablen in Formeln*
Wenn $\{\xi, \zeta\} \cup X \subseteq$ VAR, wobei $\{\xi, \zeta\} \cap X = \emptyset$, und $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin$ TT(Δ), dann gibt es ein $\Delta^* \in$ FORM, wobei FV(Δ^*) $\subseteq \{\zeta\} \cup X$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \Delta] = [\theta', \zeta, \Delta^*]$.

Beweis: Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Seien $\{\xi, \zeta\} \cup X \subseteq$ VAR, wobei $\{\xi, \zeta\} \cap X = \emptyset$, und FV($\Delta$) $\subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin$ TT(Δ). Dann gilt für alle $i < r$: FV(θ_i) $\subseteq \{\xi\} \cup X$. Nach Theorem 1-17 gibt es dann für alle $i < r$ ein $\theta^*_i \in$ TERM, wobei FV(θ^*_i) $\subseteq \{\zeta\} \cup X$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \theta_i] = [\theta', \zeta, \theta^*_i]$. Dann gilt mit $\Delta^* = \ulcorner\Phi(\theta^*_0, \ldots \theta^*_{r-1})\urcorner$, dass

$FV(\Delta^*) \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner] = \ulcorner\Phi([\theta', \xi, \theta_0], \ldots [\theta', \xi, \theta_{r-1}])\urcorner = \ulcorner\Phi([\theta', \zeta, \theta^*_0], \ldots [\theta', \zeta, \theta^*_{r-1}])\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner\Phi(\theta^*_0, \ldots \theta^*_{r-1})\urcorner] = [\theta', \zeta, \Delta^*]$.

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta \in$ JFORM. Seien $\{\xi, \zeta\} \cup X \subseteq$ VAR, wobei $\{\xi, \zeta\} \cap X = \emptyset$, und $FV(\Delta) \subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin TT(\Delta)$. Sei zunächst $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner$. Dann gilt $FV(\Delta_0) = FV(\Delta) \subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin TT(\Delta_0)$. Dann gibt es nach I.V. $\Delta^*_0 \in$ FORM, wobei $FV(\Delta^*_0) \subseteq \{\zeta\} \cup X$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \Delta_0] = [\theta', \zeta, \Delta^*_0]$. Dann gilt mit $\Delta^* = \ulcorner\neg\Delta^*_0\urcorner$, dass $FV(\Delta^*) \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\neg[\theta', \xi, \Delta_0]\urcorner = \ulcorner\neg[\theta', \zeta, \Delta^*_0]\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner\neg\Delta^*_0\urcorner] = [\theta', \zeta, \Delta^*]$.

Sei nun $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Dann gilt $FV(\Delta_0) \subseteq FV(\Delta) \subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin TT(\Delta_0)$ und $FV(\Delta_1) \subseteq FV(\Delta) \subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin TT(\Delta_1)$. Dann gibt es nach I.V. $\Delta^*_0, \Delta^*_1 \in$ FORM, wobei $FV(\Delta^*_0) \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und $FV(\Delta^*_1) \subseteq \{\zeta\} \cup X$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \Delta_0] = [\theta', \zeta, \Delta^*_0]$ und $[\theta', \xi, \Delta_1] = [\theta', \zeta, \Delta^*_1]$. Dann gilt mit $\Delta^* = \ulcorner(\Delta^*_0\ \psi\ \Delta^*_1)\urcorner$, dass $FV(\Delta^*) \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner] = \ulcorner([\theta', \xi, \Delta_0]\ \psi\ [\theta', \xi, \Delta_1])\urcorner = \ulcorner([\theta', \zeta, \Delta^*_0]\ \psi\ [\theta', \zeta, \Delta^*_1])\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner(\Delta^*_0\ \psi\ \Delta^*_1)\urcorner] = [\theta', \zeta, \Delta^*]$.

Sei nun $\Delta = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Seien $\{\xi, \zeta\} \cup X \subseteq$ VAR, wobei $\{\xi, \zeta\} \cap X = \emptyset$, und $FV(\Delta) \subseteq \{\xi\} \cup X$ und $\zeta \notin TT(\Delta)$. Dann gilt insbesondere $\zeta \neq \xi'$. Sei zunächst $\xi = \xi'$. Dann ist $[\theta', \xi, \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner$ für alle $\theta' \in$ GTERM und $FV(\Delta) \subseteq X$. Sei dann $\Delta^* = \Delta = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner$. Da $\zeta \notin TT(\Delta)$ gilt auch $[\theta', \zeta, \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner$ für alle $\theta' \in$ GTERM und $FV(\Delta^*) = FV(\Delta) \subseteq X \subseteq \{\zeta\} \cup X$. Sei nun $\xi \neq \xi'$. Dann gilt $FV(\Delta_0) \subseteq FV(\Delta) \cup \{\xi'\} \subseteq \{\xi\} \cup X \cup \{\xi'\}$ und $\zeta \notin TT(\Delta_0)$. Dann gibt es nach I.V. $\Delta^*_0 \in$ FORM, wobei $FV(\Delta^*_0) \subseteq \{\zeta\} \cup X \cup \{\xi'\}$, so dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \Delta_0] = [\theta', \zeta, \Delta^*_0]$. Dann gilt mit $\Delta^* = \ulcorner\Pi\xi'\Delta^*_0\urcorner$, dass $FV(\Delta^*) \subseteq \{\zeta\} \cup X$ und dass für alle $\theta' \in$ GTERM gilt: $[\theta', \xi, \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi'[\theta', \xi, \Delta_0]\urcorner = \ulcorner\Pi\xi'[\theta', \zeta, \Delta^*_0]\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner\Pi\xi'\Delta^*_0\urcorner] = [\theta', \zeta, \Delta^*]$. ■

Theorem 1-19. *Eindeutige Substitutionsorte (a) für Terme*
Wenn θ, $\theta^+ \in$ TERM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(θ) $\cup$ TT(θ^+)) und $\theta^\S \in$ ATERM und wenn $[\theta^*, \theta^\S, \theta] = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+]$, dann $\theta = \theta^+$.

Beweis: Durch Induktion über den Termaufbau von θ. Sei $\theta \in$ ATERM. Sei nun $\theta^+ \in$ TERM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(θ) $\cup$ TT(θ^+)) und $\theta^\S \in$ ATERM und sei $[\theta^*, \theta^\S, \theta] = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+]$. Sei nun $\theta^\S = \theta$. Dann ist $[\theta^*, \theta^\S, \theta] = \theta^*$. Dann ist $\theta^* = [\theta^*, \theta, \theta^+]$. Da nach Voraussetzung $\theta^* \notin$ TT(θ^+) und mithin $\theta^+ \neq \theta^*$, ist dann $\theta = \theta^+$. Sei nun $\theta^\S \neq \theta$. Dann ist $[\theta^*, \theta^\S, \theta] = \theta$. Dann ist $\theta = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+]$, womit sich wegen $\theta^* \notin$ TT(θ) mit Theorem 1-14-(i) ebenfalls ergibt, dass $\theta = \theta^+$.

Gelte die Behauptung nun für $\{\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1}\} \subseteq$ TERM und sei $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r\text{-}1})\urcorner \in$ FTERM. Sei nun $\theta^+ \in$ TERM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r\text{-}1})\urcorner$) $\cup$ TT(θ^+)) und $\theta^\S \in$ ATERM und sei $[\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner] = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+]$. Also $[\theta^*, \theta^\S, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner \in$ FTERM. Wäre $\theta^+ \in$ ATERM. Dann wäre $\theta^\S \neq \theta^+$ oder $\theta^\S = \theta^+$. Angenommen $\theta^\S \neq \theta^+$. Dann ist $\theta^+ = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner \in$ FTERM. Widerspruch! Angenommen $\theta^\S = \theta^+$. Dann ist $\theta^* = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner$. Mit Theorem 1-14-(i) gilt dann für alle $i < r$: $[\theta^*, \theta^\S, \theta_i] = \theta_i$ oder es gibt ein $i < r$, so dass $\theta^* \in$ TT($[\theta^*, \theta^\S, \theta_i]$). Wenn $[\theta^*, \theta^\S, \theta_i] = \theta_i$ für alle $i < r$, dann $\theta^* = \ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner$ und damit entgegen der Voraussetzung $\theta^* \in$ TT($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r\text{-}1})\urcorner$). Wenn es andererseits ein $i < r$ gibt, so dass $\theta^* \in$ TT($[\theta^*, \theta^\S, \theta_i]$), dann ist θ^* echter Teilterm von $\ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner$, also echter Teilterm von sich selbst. Widerspruch zu Theorem 1-8. Also $\theta^+ \notin$ ATERM, sondern $\theta^+ \in$ FTERM. Also gibt es $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{k\text{-}1}\} \subseteq$ TERM und $\varphi' \in$ FUNK, so dass $\theta^+ = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{k\text{-}1})\urcorner$. Damit ist $\ulcorner\varphi'([\theta^*, \theta^\S, \theta'_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta'_{k\text{-}1}])\urcorner = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{k\text{-}1})\urcorner] = [\theta^*, \theta^\S, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner$. Mit Theorem 1-11-(ii) gilt dann $k = r$ und $\varphi' = \varphi$ und $[\theta^*, \theta^\S, \theta_i] = [\theta^*, \theta^\S, \theta'_i]$ für alle $i < r$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\theta_i = \theta'_i$ für alle $i < r$. Damit ist dann $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{k\text{-}1})\urcorner = \theta^+$. ■

Theorem 1-20. *Eindeutige Substitutionsorte (a) für Formeln*
Wenn Δ, $\Delta^+ \in$ FORM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(Δ) $\cup$ TT(Δ^+)) und $\theta^\S \in$ ATERM und wenn $[\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+]$, dann $\Delta = \Delta^+$.

Beweis: Seien Δ, $\Delta^+ \in$ FORM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(Δ) $\cup$ TT(Δ^+)) und $\theta^\S \in$ ATERM und $[\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+]$. Wie im Induktionsschritt des vorangehenden Beweises für funktorale Terme lässt sich für alle Formeln zeigen, dass Substitutionsorte (Δ bzw. Δ^+) der gleichen Kategorie angehören und denselben Hauptoperator (Prädikator, Junktor oder Quantor) haben wie die Substitutionsergebnisse ($[\theta^*, \theta^\S, \Delta]$ bzw. $[\theta^*, \theta^\S, \Delta^+]$). Der Beweis wird nun mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \theta^\S, \Delta] = \ulcorner\Phi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r-1}])\urcorner \in$ AFORM und es gibt $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}\} \subseteq$ TERM mit $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r-1})\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner\Phi([\theta^*, \theta^\S, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta_{r-1}])\urcorner = [\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+] = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r-1})\urcorner] = \ulcorner\Phi([\theta^*, \theta^\S, \theta'_0], \ldots, [\theta^*, \theta^\S, \theta'_{r-1}])\urcorner \in$ AFORM. Mit Theorem 1-11-(iv) gilt dann $[\theta^*, \theta^\S, \theta_i] = [\theta^*, \theta^\S, \theta'_i]$ für alle $i < r$. Mit Theorem 1-19 ergibt sich, dass $\theta_i = \theta'_i$ für alle $i < r$. Damit ist dann $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner = \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r-1})\urcorner = \Delta^+$.

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \theta^\S, \Delta] = \ulcorner\neg[\theta^*, \theta^\S, \Delta_0]\urcorner \in$ JFORM und es gibt $\Delta'_0 \in$ FORM mit $\ulcorner\neg\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner\neg[\theta^*, \theta^\S, \Delta_0]\urcorner = [\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+] = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\neg\Delta'_0\urcorner] = \ulcorner\neg[\theta^*, \theta^\S, \Delta'_0]\urcorner \in$ JFORM. Mit Theorem 1-11-(v) gilt dann $[\theta^*, \theta^\S, \Delta_0] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta'_0]$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\Delta_0 = \Delta'_0$ und damit $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner = \ulcorner\neg\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \theta^\S, \Delta] = \ulcorner([\theta^*, \theta^\S, \Delta_0]\ \psi\ [\theta^*, \theta^\S, \Delta_1])\urcorner \in$ JFORM und es gibt $\Delta'_0, \Delta'_1 \in$ FORM mit $\ulcorner(\Delta'_0\ \psi\ \Delta'_1)\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner([\theta^*, \theta^\S, \Delta_0]\ \psi\ [\theta^*, \theta^\S, \Delta_1])\urcorner = [\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+] = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner(\Delta'_0\ \psi\ \Delta'_1)\urcorner] = \ulcorner([\theta^*, \theta^\S, \Delta'_0]\ \psi\ [\theta^*, \theta^\S, \Delta'_1])\urcorner \in$ JFORM. Mit Theorem 1-11-(vi) gilt dann $[\theta^*, \theta^\S, \Delta_0] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta'_0]$ und $[\theta^*, \theta^\S, \Delta_1] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta'_1]$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\Delta_0 = \Delta'_0$ und $\Delta_1 = \Delta'_1$ und damit $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner = \ulcorner(\Delta'_0\ \psi\ \Delta'_1)\urcorner = \Delta^+$.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \theta^\S, \Delta] \in$ QFORM und es gibt $\Delta'_0 \in$ FORM mit $\ulcorner\Pi\xi\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. Angenommen $\xi = \theta^\S$. Dann ist $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+] = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\Pi\xi\Delta'_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. Angenommen $\xi \neq \theta^\S$. Dann ist $\ulcorner\Pi\xi[\theta^*, \theta^\S, \Delta_0]\urcorner = [\theta^*, \theta^\S, \Delta] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta^+] = [\theta^*, \theta^\S, \ulcorner\Pi\xi\Delta'_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi[\theta^*, \theta^\S, \Delta'_0]\urcorner \in$ QFORM. Mit Theorem 1-11-(vii) gilt dann $[\theta^*, \theta^\S, \Delta_0] = [\theta^*, \theta^\S, \Delta'_0]$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\Delta_0 = \Delta'_0$ und damit $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner = \ulcorner\Pi\xi\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. ■

Theorem 1-21. *Eindeutige Substitutionsorte (a) für Sätze*
Wenn $\Sigma, \Sigma^+ \in$ SATZ, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(Σ) $\cup$ TT(Σ^+)) und $\theta^\S \in$ ATERM und wenn $[\theta^*, \theta^\S, \Sigma] = [\theta^*, \theta^\S, \Sigma^+]$, dann $\Sigma = \Sigma^+$.

Beweis: Analog zum Negatorfall im Beweis zu Theorem 1-20 unter Rückgriff auf Theorem 1-20 und Theorem 1-12. ■

Theorem 1-22. *Eindeutige Substitutionsorte (b) für Terme*
Wenn θ, $\theta^+ \in$ TERM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(θ) $\cup$ TT(θ^+)), $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR und $[\theta^*, \xi, \theta] = [\theta^*, \beta, \theta^+]$, dann $\theta^+ = [\beta, \xi, \theta]$.

Beweis: Durch Induktion über den Termaufbau von θ. Sei $\theta \in$ ATERM. Sei nun $\theta^+ \in$ TERM, $\theta^* \in$ GTERM\(TT(θ) $\cup$ TT(θ^+)), $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR und $[\theta^*, \xi, \theta] = [\theta^*, \beta, \theta^+]$. Dann ist $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR. Sei nun $\theta \in$ KONST. Dann ist $[\theta^*, \xi, \theta] = \theta$. Dann ist $\theta = [\theta^*, \beta, \theta^+]$, womit sich wegen $\theta^* \notin$ TT(θ) und Theorem 1-14-(i) ergibt, dass $\theta = \theta^+$ und wegen $\theta \neq \xi$: $\theta^+ = \theta = [\beta, \xi, \theta]$. Sei nun $\theta \in$ PAR. Dann ist $[\theta^*, \xi, \theta] = \theta$. Dann ist $\theta = [\theta^*, \beta, \theta^+]$, womit sich wegen $\theta^* \notin$ TT(θ) und Theorem 1-14-(i) ergibt, dass auch $\theta = \theta^+$ und wegen $\xi \neq \theta$: $\theta^+ = \theta = [\beta, \xi, \theta]$. Sei nun $\theta \in$ VAR. Angenommen $\theta = \xi$. Dann ist $[\theta^*, \xi, \theta] = \theta^*$. Dann ist $\theta^* = [\theta^*, \beta, \theta^+]$. Dann ist wegen $\theta^* \neq \theta^+$ $\beta \in$ TT(θ^+). Damit ist $\theta^* \in$ TT($[\theta^*, \beta, \theta^+]$). Wäre nun $\theta^+ \neq \beta$ ergäbe sich dann mit $\theta^* = [\theta^*, \beta, \theta^+]$, dass θ^* im Widerspruch zu Theorem 1-8 echter Teilterm von sich selbst wäre. Also gilt $\theta^+ = \beta = [\beta, \xi, \theta]$. Sei nun $\theta \neq \xi$. Dann ist $\theta = [\theta^*, \xi, \theta]$. Dann ist $\theta = [\theta^*, \beta, \theta^+]$. Dann ist wegen $\theta^* \notin$ TT(θ) und Theorem 1-14-(i) $\theta = \theta^+$ und wegen $\theta \neq \xi$: $\theta^+ = \theta = [\beta, \xi, \theta]$.

Gelte die Behauptung nun für $\{\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\} \subseteq$ TERM und sei $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Sei nun $\theta^+ \in$ TERM, $\theta^* \in$ TERM\(TT($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$) $\cup$ TT(θ^+)), $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR und $[\theta^*, \xi, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner] = [\theta^*, \beta, \theta^+]$. Also $[\theta^*, \beta, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner \in$ FTERM. Wäre $\theta^+ \in$ ATERM. Dann wäre $\beta \neq \theta^+$ oder $\beta = \theta^+$. Angenommen $\beta \neq \theta^+$. Dann ist $\theta^+ = [\theta^*, \beta, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner \in$ FTERM. Widerspruch! Angenommen $\beta = \theta^+$. Dann ist $\theta^* = [\theta^*, \beta, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner$. Mit Theorem 1-14-(i) gilt dann für alle $i < r$: $[\theta^*, \xi, \theta_i] = \theta_i$ oder es gibt ein $i < r$, so dass $\theta^* \in$ TT($[\theta^*, \xi, \theta_i]$). Wenn $[\theta^*, \xi, \theta_i] = \theta_i$ für alle $i < r$, dann $\theta^* = \ulcorner\varphi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$ und damit entgegen der Voraussetzung $\theta^* \in$ TT($\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner$). Wenn es andererseits ein $i < r$ gibt, so dass $\theta^* \in$ TT($[\theta^*, \xi, \theta_i]$), dann ist θ^* echter Teilterm von $\ulcorner\varphi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner$, also echter Teilterm von sich selbst. Widerspruch zu Theorem 1-8. Also $\theta^+ \notin$ ATERM, sondern $\theta^+ \in$ FTERM. Also gibt es $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\} \subseteq$ TERM und $\varphi' \in$ FUNK, so dass $\theta^+ = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1})\urcorner$. Damit ist $\ulcorner\varphi'([\theta^*, \beta, \theta'_0], \ldots, [\theta^*, \beta, \theta'_{k-1}])\urcorner = [\theta^*, \beta, \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1})\urcorner] = [\theta^*, \beta, \theta^+] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner$. Mit Theorem 1-11-(ii) gilt dann $k = r$ und $\varphi' = \varphi$ und $[\theta^*, \beta, \theta'_i] = [\theta^*, \xi, \theta_i]$ für alle $i < r$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\theta'_i = [\beta, \xi, \theta_i]$ für alle $i < r$. Damit ist dann $\theta^+ = \ulcorner\varphi'(\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1})\urcorner = \ulcorner\varphi([\beta, \xi, \theta_0], \ldots, [\beta, \xi, \theta_{r-1}])\urcorner = [\beta, \xi, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]$. ■

Theorem 1-23. *Eindeutige Substitutionsorte (b) für Formeln*
Wenn $\Delta, \Delta^+ \in$ FORM, $\theta^* \in$ TERM$\backslash$(TT(Δ) $\cup$ TT(Δ^+)), $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR und $[\theta^*, \xi, \Delta] = [\theta^*, \beta, \Delta^+]$, dann $\Delta^+ = [\beta, \xi, \Delta]$.

Beweis: Seien $\Delta, \Delta^+ \in$ FORM, $\theta^* \in$ GTERM$\backslash$(TT(Δ) $\cup$ TT(Δ^+)) und $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR und $[\theta^*, \xi, \Delta] = [\theta^*, \beta, \Delta^+]$. Wie im Induktionsschritt des vorangehenden Beweises für funktorale Terme lässt sich für alle Formeln zeigen, dass Substitutionsorte (Δ bzw. Δ^+) der gleichen Kategorie angehören und denselben Hauptoperator (Prädikator, Junktor oder Quantor) haben wie die Substitutionsergebnisse ($[\theta^*, \xi, \Delta]$ bzw. $[\theta^*, \beta, \Delta^+]$). Der Beweis wird nun mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r\text{-}1})\urcorner \in$ AFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \xi, \Delta] = \ulcorner\Phi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner \in$ AFORM und es gibt $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1}\} \subseteq$ TERM mit $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner\Phi([\theta^*, \xi, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \xi, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner = [\theta^*, \xi, \Delta] = [\theta^*, \beta, \Delta^+] = [\theta^*, \beta, \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner] = \ulcorner\Phi([\theta^*, \beta, \theta'_0], \ldots, [\theta^*, \beta, \theta'_{r\text{-}1}])\urcorner \in$ AFORM. Mit Theorem 1-11-(iv) gilt dann $[\theta^*, \xi, \theta_i] = [\theta^*, \beta, \theta'_i]$ für alle $i < r$. Mit Theorem 1-22 ergibt sich, dass $\theta'_i = [\beta, \xi, \theta_i]$ für alle $i < r$. Damit ist dann $\Delta^+ = \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r\text{-}1})\urcorner = \ulcorner\Phi([\beta, \xi, \theta_0], \ldots, [\beta, \xi, \theta_{r\text{-}1}])\urcorner = [\beta, \xi, \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner] = [\beta, \xi, \Delta]$.

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \xi, \Delta] = \ulcorner\neg[\theta^*, \xi, \Delta_0]\urcorner \in$ JFORM und es gibt $\Delta'_0 \in$ FORM mit $\ulcorner\neg\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner\neg[\theta^*, \xi, \Delta_0]\urcorner = [\theta^*, \beta, \Delta^+] = [\theta^*, \beta, \ulcorner\neg\Delta'_0\urcorner] = \ulcorner\neg[\theta^*, \beta, \Delta'_0]\urcorner \in$ JFORM. Mit Theorem 1-11-(v) gilt dann $[\theta^*, \xi, \Delta_0] = [\theta^*, \beta, \Delta'_0]$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\Delta'_0 = [\beta, \xi, \Delta_0]$ und damit $\Delta^+ = \ulcorner\neg\Delta'_0\urcorner = \ulcorner\neg[\beta, \xi, \Delta_0]\urcorner = [\beta, \xi, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner] = [\beta, \xi, \Delta]$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Dann ist auch $[\theta^*, \xi, \Delta] = \ulcorner([\theta^*, \xi, \Delta_0]\ \psi\ [\theta^*, \xi, \Delta_1])\urcorner \in$ JFORM und es gibt $\Delta'_0, \Delta'_1 \in$ FORM mit $\ulcorner(\Delta'_0\ \psi\ \Delta'_1)\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner([\theta^*, \xi, \Delta_0]\ \psi\ [\theta^*, \xi, \Delta_1])\urcorner = [\theta^*, \beta, \Delta^+] = [\theta^*, \beta, \ulcorner(\Delta'_0\ \psi\ \Delta'_1)\urcorner] = \ulcorner([\theta^*, \beta, \Delta'_0]\ \psi\ [\theta^*, \beta, \Delta'_1])\urcorner \in$ JFORM. Mit Theorem 1-11-(vi) gilt dann $[\theta^*, \xi, \Delta_0] = [\theta^*, \beta, \Delta'_0]$ und $[\theta^*, \xi, \Delta_1] = [\theta^*, \beta, \Delta'_1]$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\Delta'_0 = [\beta, \xi, \Delta_0]$ und $\Delta'_1 = [\beta, \xi, \Delta_1]$ und damit $\Delta^+ = \ulcorner(\Delta'_0\ \psi\ \Delta'_1)\urcorner = \ulcorner([\beta, \xi, \Delta_0]\ \psi\ [\beta, \xi, \Delta_1])\urcorner = [\beta, \xi, \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner] = [\beta, \xi, \Delta]$.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Angenommen $\xi' = \xi$. Dann ist $\Delta = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner = [\theta^*, \xi, \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner] = [\theta^*, \xi, \Delta] = [\theta^*, \beta, \Delta^+]$. Mit Theorem 1-14-(ii) ist $\theta^* \in$ TT($[\theta^*, \beta, \Delta^+]$) = TT($\Delta$) oder $[\theta^*, \beta, \Delta^+] = \Delta^+$. Der erste Fall kann nach Voraussetzung nicht eintreten. Im zweiten Fall ist $\Delta^+ = \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner = [\beta, \xi, \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner] = [\beta, \xi, \Delta]$. Angenommen $\xi' \neq \xi$. Dann ist auch $[\theta^*, \xi, \Delta] = \ulcorner\Pi\xi'[\theta^*, \xi, \Delta_0]\urcorner \in$ QFORM und es gibt $\Delta'_0 \in$ FORM mit $\ulcorner\Pi\xi'\Delta'_0\urcorner = \Delta^+$. Also auch $\ulcorner\Pi\xi'[\theta^*, \xi, \Delta_0]\urcorner = [\theta^*, \beta, \Delta^+] = [\theta^*, \beta, \ulcorner\Pi\xi'\Delta'_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi'[\theta^*, \beta, \Delta'_0]\urcorner \in$ QFORM. Mit Theorem 1-11-(vii) gilt dann $[\theta^*, \xi, \Delta_0] = [\theta^*, \beta, \Delta'_0]$. Mit I.V. ergibt sich, dass $\Delta'_0 = [\beta, \xi, \Delta_0]$ und damit $\Delta^+ = \ulcorner\Pi\xi'\Delta'_0\urcorner = \ulcorner\Pi\xi'[\beta, \xi, \Delta_0]\urcorner = [\beta, \xi, \ulcorner\Pi\xi'\Delta_0\urcorner] = [\beta, \xi, \Delta]$. ■

Theorem 1-24. *Kürzung von Parametern bei der Substitution*
Wenn $\theta \in$ TERM, $\Delta \in$ FORM, $\Sigma \in$ SATZ, $\theta^* \in$ GTERM, $\beta \in$ PAR\(TT(θ) $\cup$ TT(Δ) $\cup$ TT(Σ)) und $\theta^+ \in$ ATERM, dann:

(i) $[\theta^*, \theta^+, \theta] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta]]$,
(ii) $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Delta]]$ und
(iii) $[\theta^*, \theta^+, \Sigma] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Sigma]]$.

Beweis: Seien $\theta \in$ TERM, $\Delta \in$ FORM, $\Sigma \in$ SATZ, $\theta^* \in$ GTERM, $\beta \in$ PAR\(TT(θ) $\cup$ TT(Δ) $\cup$ TT(Σ)) und $\theta^+ \in$ ATERM. *Zu (i)*: Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von θ geführt. Sei $\theta \in$ ATERM. Dann ist $\theta = \theta^+$ oder $\theta \neq \theta^+$. Sei zunächst $\theta = \theta^+$. Dann ist $[\beta, \theta^+, \theta] = \beta$ und $[\theta^*, \theta^+, \theta] = \theta^*$. Dann ist $[\theta^*, \theta^+, \theta] = \theta^* = [\theta^*, \beta, \beta] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta]]$. Sei nun $\theta \neq \theta^+$. Dann ist $[\beta, \theta^+, \theta] = \theta$ und $[\theta^*, \theta^+, \theta] = \theta$. Wegen $\beta \notin$ TT(θ) ist $\beta \neq \theta$ und mithin $\theta = [\theta^*, \beta, \theta]$. Also $[\theta^*, \theta^+, \theta] = \theta = [\theta^*, \beta, \theta] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta]]$.

Gelte die Behauptung nun für $\{\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\} \subseteq$ TERM und sei $\theta = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Wegen $\beta \notin$ TT(θ) gilt auch $\beta \notin$ TT(θ_i) für alle $i < r$. Dann gilt mit I.V. $[\theta^*, \theta^+, \theta_i] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta_i]]$ für alle $i < r$. Dann ist $[\theta^*, \theta^+, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner] = \ulcorner\varphi([\theta^*, \theta^+, \theta_0], \ldots, [\theta^*, \theta^+, \theta_{r-1}])\urcorner = \ulcorner\varphi([\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta_0]], \ldots, [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta_{r-1}]])\urcorner = [\theta^*, \beta, \ulcorner\varphi([\beta, \theta^+, \theta_0], \ldots, [\beta, \theta^+, \theta_{r-1}])\urcorner] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner]]$.

Zu (ii): Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Dann gilt $\beta \notin$ TT(θ_i) für alle $i < r$ und $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = [\theta^*, \theta^+, \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner] = \ulcorner\Phi([\theta^*, \theta^+, \theta_0], \ldots [\theta^*, \theta^+, \theta_{r-1}])\urcorner$. Mit (i) gilt $[\theta^*, \theta^+, \theta_i] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta_i]]$ für alle $i < r$. Also $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = \ulcorner\Phi([\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta_0]], \ldots, [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \theta_{r-1}]])\urcorner = [\theta^*, \beta, \ulcorner\Phi([\beta, \theta^+, \theta_0], \ldots, [\beta, \theta^+, \theta_{r-1}])\urcorner = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner]] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Delta]]$.

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM. Sei zunächst $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann gilt $\beta \notin$ TT(Δ_0) und $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = [\theta^*, \theta^+, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\neg[\theta^*, \theta^+, \Delta_0]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*, \theta^+, \Delta_0] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Delta_0]]$. Also $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = \ulcorner\neg[\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Delta_0]]\urcorner = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Delta]]$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Angenommen $\xi = \theta^+$. Dann ist $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = [\theta^*, \theta^+, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner = [\beta, \theta^+, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = [\beta, \theta^+, \Delta]$. Dann ist $\beta \notin TT([\beta, \theta^+, \Delta]) = TT(\Delta)$. Also $[\theta^*, \theta^+, \Delta] = [\beta, \theta^+, \Delta] = [\theta^*, \beta, [\beta, \theta^+, \Delta]]$. Angenommen $\xi \neq \theta^+$. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Zu (iii): Der Fall verläuft analog zum Negatorfall. ■

Theorem 1-25. *Eine hinreichende Bedingung für die Kommutativität einer Substitution in Termen und Formeln*

Wenn $\theta^*_0, \theta^*_1 \in$ GTERM, $\theta_0, \theta_1 \in$ ATERM, $\theta_0 \neq \theta_1$, $\theta_1 \notin TT(\theta^*_0)$ und $\theta_0 \notin TT(\theta^*_1)$, dann:

(i) Wenn $\theta^+ \in$ TERM, dann $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]]$, und

(ii) Wenn $\Delta \in$ FORM, dann $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta]]$.

Beweis: Seien $\theta^*_0, \theta^*_1 \in$ GTERM, $\theta_0, \theta_1 \in$ ATERM, $\theta_0 \neq \theta_1$, $\theta_1 \notin TT(\theta^*_0)$ und $\theta_0 \notin TT(\theta^*_1)$. *Zu (i)*: Sei $\theta^+ \in$ TERM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von θ^+ geführt. Sei $\theta^+ \in$ ATERM. Angenommen $\theta^+ = \theta_0$. Dann ist $\theta^+ \neq \theta_1$ und $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_1, \theta_1, \theta^*_0]$. Weil $\theta_1 \notin TT(\theta^*_0)$ gilt $[\theta^*_1, \theta_1, \theta^*_0] = \theta^*_0$. Andererseits ist $[\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+] = \theta^*_0$. Also $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]]$. Sei nun $\theta^+ \neq \theta_0$. Angenommen $\theta^+ = \theta_1$. Dann ist $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+] = \theta^*_1$. Weil $\theta_0 \notin TT(\theta^*_1)$ gilt $[\theta^*_0, \theta_0, \theta^*_1] = \theta^*_1$. Damit ist $[\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, \theta^*_1] = \theta^*_1$. Also $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]]$. Angenommen $\theta^+ \neq \theta_1$. Dann ist $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+] = \theta^+$ und $[\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+] = \theta^+$. Also auch $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]]$.

Gelte die Behauptung für $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}\} \subseteq$ TERM und sei $\theta^+ = \ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Dann ist $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner]] = \ulcorner\varphi([\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta'_0]], \ldots, [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta'_{r-1}]])\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta'_i]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta'_i]]$ für alle $i < r$. Also $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta^+]] = \ulcorner\varphi([\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta'_0]], \ldots, [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta'_{r-1}]])\urcorner = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r-1})\urcorner]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta^+]]$.

Zu (ii): Sei $\Delta \in$ FORM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Dann ist $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner]] = \ulcorner\Phi([\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta'_0]], \ldots, [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta'_{r-1}]])\urcorner$. Mit (i) gilt $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \theta'_i]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta'_i]]$ für alle $i < r$. Also $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = \ulcorner\Phi([\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta'_0]], \ldots, [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \theta'_{r-1}]])\urcorner = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots \theta'_{r-1})\urcorner]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta]]$.

Gelte die Behauptung für Δ_0, $\Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = \ulcorner\neg[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta_0]]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta_0]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta_0]]$. Also $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = \ulcorner\neg[\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta_0]]\urcorner = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta]]$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Angenommen $\xi = \theta_0$. Dann ist $\xi \neq \theta_1$ und $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi[\theta^*_1, \theta_1, \Delta_0]\urcorner = [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\Pi\xi[\theta^*_1, \theta_1, \Delta_0]\urcorner] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta]]$. Angenommen $\xi = \theta_1$. Dann ist $\xi \neq \theta_0$ und $[\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \Delta]] = [\theta^*_1, \theta_1, [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\Pi\xi[\theta^*_0, \theta_0, \Delta_0]\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi[\theta^*_0, \theta_0, \Delta_0]\urcorner = [\theta^*_0, \theta_0, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_0, \theta_0, [\theta^*_1, \theta_1, \Delta]]$. Sei $\theta_0 \neq \xi \neq \theta_1$. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall. ■

Theorem 1-26. *Substitution in Substitutionsergebnissen*
Wenn $\zeta \in$ VAR, $\theta', \theta^* \in$ GTERM und $\theta^+ \in$ KONST $\cup$ PAR, dann:

(i) Wenn $\theta \in$ TERM, dann $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta]]$, und
(ii) Wenn $\Delta \in$ FORM, dann $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \Delta]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \Delta]]$.

Beweis: Seien $\zeta \in$ VAR, $\theta', \theta^* \in$ GTERM und $\theta^+ \in$ KONST $\cup$ PAR. *Zu (i)*: Sei $\theta \in$ TERM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von θ geführt. Sei $\theta \in$ ATERM. Sei weiter $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR. Angenommen $\theta = \theta^+$. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = [\theta', \theta^+, \theta] = \theta'$. Nun ist $\zeta \notin TT(\theta') \in$ GTERM und daher $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = \theta' = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, \theta'] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta]]$. Angenommen $\theta \neq \theta^+$. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = [\theta', \theta^+, \theta] = \theta = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, \theta] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta]]$. Sei schließlich $\theta \in$ VAR. Angenommen $\theta = \zeta$. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = [\theta', \theta^+, \theta^*] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, \theta] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta]]$. Angenommen $\theta \neq \zeta$. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = [\theta', \theta^+, \theta] = \theta = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, \theta] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta]]$.

Gelte die Behauptung nun für $\{\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\} \subseteq$ TERM und sei $\theta = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = [\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]] = \ulcorner\varphi([\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta_0]], \ldots, [\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta_{r-1}]])\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta_i]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta_i]]$ für alle $i < r$. Also $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \theta]] = \ulcorner\varphi([[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta_0]], \ldots, [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta_{r-1}]])\urcorner = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \theta]]$.

Zu (ii): Sei $\Delta \in$ FORM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Der Fall verläuft analog zum FTERM-Fall unter Verwendung von (i).

Gelte die Behauptung für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \Delta]] = [\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = \ulcorner\neg[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \Delta_0]]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \Delta_0]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \Delta_0]]$. Also $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \Delta]] = \ulcorner\neg[[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \Delta_0]]\urcorner = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \Delta]]$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0 \psi \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Angenommen $\xi = \zeta$. Dann ist $[\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \Delta]] = [\theta', \theta^+, [\theta^*, \zeta, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]] = [\theta', \theta^+, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner] = \ulcorner\Pi\xi[\theta', \theta^+, \Delta_0]\urcorner = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, \ulcorner\Pi\xi[\theta', \theta^+, \Delta_0]\urcorner] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner]] = [[\theta', \theta^+, \theta^*], \zeta, [\theta', \theta^+, \Delta]]$. Angenommen $\xi \neq \zeta$. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall. ■

Theorem 1-27. *Mehrfache Substitution von neuen und paarweise verschiedenen Parametern für paarweise verschiedene Parameter in Termen, Formeln, Sätzen und Sequenzen*

Wenn $\theta \in$ TERM, $\Delta \in$ FORM, $\Sigma \in$ SATZ, $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\} \subseteq$ PAR\(TT(θ) $\cup$ TT(Δ) $\cup$ TT(Σ) $\cup$ TTSEQ($\mathfrak{H}$)) und $\{\beta_0, \ldots, \beta_k\} \subseteq$ PAR\$\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\}$, wobei $\beta^*_i \neq \beta^*_j$ und $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$, dann:

(i) $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta]$,

(ii) $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \Delta]$,

(iii) $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \Sigma]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \Sigma]$ und

(iv) $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \mathfrak{H}]$.

Beweis: Seien $\theta \in$ TERM, $\Delta \in$ FORM, $\Sigma \in$ SATZ, $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\} \subseteq$ PAR\(TT(θ) $\cup$ TT(Δ)) und $\{\beta_0, \ldots, \beta_k\} \subseteq$ PAR\$\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\}$, wobei $\beta^*_i \neq \beta^*_j$ und $\beta_i \neq \beta_j$ für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$. *Zu (i)*: Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von θ geführt. Sei $\theta \in$ ATERM. Dann ist $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR $\cup$ VAR. Sei nun $\theta \in$ KONST $\cup$ VAR $\cup$ (PAR\$\{\beta_0, \ldots, \beta_k\}$). Dann ist $\theta = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]$ und es ist $\theta = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta]$ und damit $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]] = [\beta^*_k, \beta_k, \theta] = \theta = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta]$.

Sei nun $\theta \in \{\beta_0, \ldots, \beta_k\}$. Dann ist $\theta = \beta_i$ für ein $i < k+1$. Dann ist nach Voraussetzung für alle $j < k+1$ mit $j \neq i$ gilt auch $\theta \neq \beta_j$. Damit ist zunächst $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta] = \beta^*_i$. Sei nun $i < k$. Dann ist $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta] = \beta^*_i$ und damit $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]] = [\beta^*_k, \beta_k, \beta^*_i]$. Aus der Voraussetzung ergibt sich nun, dass $\beta_k \neq \beta^*_i$ und damit, dass $[\beta^*_k, \beta_k, \beta^*_i] = \beta^*_i$. Sei nun $i = k$. Dann ist $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta] = \theta = \beta_k$ und somit $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]] = [\beta^*_k, \beta_k, \beta_k] = \beta^*_k = \beta^*_i$.

Gelte die Behauptung nun für $\{\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\} \subseteq$ TERM und sei $\theta = \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Dann ist $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]] = [\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]] = \ulcorner\varphi([\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta_0]], \ldots, [\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta_{r-1}]])\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta_i]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta_i]$ für alle $i < r$. Also $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \theta]] = \ulcorner\varphi([\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta_0], \ldots, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta_{r-1}])\urcorner = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \theta]$.

Zu (ii): Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Der Fall verläuft analog zum FTERM-Fall unter Verwendung von (i).

Gelte die Behauptung nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM und sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = \ulcorner\neg[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \Delta_0]]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \Delta_0]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \Delta_0]$. Also $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \Delta]] = \ulcorner\neg[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \Delta_0]\urcorner = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \Delta]$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall. Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\xi\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Zu (iii) und (iv): (iii) ergibt sich analog zum Negatorfall unter Verwendung von (ii). (iv) ergibt sich analog zum FTERM-Fall unter Verwendung von (iii). ■

Hinweis: Ein zu Theorem 1-27 analoges Theorem lässt sich für Formelmengen zeigen.

Theorem 1-28. *Mehrfache Substitution von geschlossenen Termen für paarweise verschiedene Variablen in Termen und Formeln (a)*
Wenn $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \subseteq$ VAR, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$, dann:

(i) Wenn $\theta \in$ TERM, dann
$$[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \theta], \text{ und}$$
(ii) Wenn $\Delta \in$ FORM, dann
$$[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta].$$

Beweis: Seien $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \subseteq$ VAR, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$. *Zu (i)*: Sei $\theta \in$ TERM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von θ geführt. Sei $\theta \in$ ATERM. Angenommen $\xi_i \neq \theta$ für alle $i <$

k+1. Dann ist $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = [\theta^*_k, \xi_k, \theta] = \theta = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta]$. Angenommen $\xi_i = \theta$ für ein $i < k$. Dann ist $\xi_j \neq \theta$ für alle $i < j < k+1$. Dann ist $[\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_i\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_i\rangle, \theta] = \theta^*_i \in$ GTERM. Also $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = [\theta^*_k, \xi_k, \theta^*_i] = \theta^*_i = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta]$. Angenommen $\xi_k = \theta$. Dann ist $\xi_i \neq \theta$ für alle $i < k$ und $[\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta] = \theta$. Also $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = [\theta^*_k, \xi_k, \theta] = \theta^*_k = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta]$.

Gelte die Behauptung nun für $\{\theta_0, \dots, \theta_{r-1}\} \subseteq$ TERM und sei $\theta = \ulcorner\varphi(\theta_0, \dots, \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM. Dann ist $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \ulcorner\varphi(\theta_0, \dots, \theta_{r-1})\urcorner]] = \ulcorner\varphi([\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta_0]], \dots, [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta_{r-1}]])\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta_i]] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta_i]$ für alle $i < r$. Also $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = \ulcorner\varphi([\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta_0], \dots, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta_{r-1}])\urcorner = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \ulcorner\varphi(\theta_0, \dots, \theta_{r-1})\urcorner] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \theta]$.

Zu (ii): Sei $\Delta \in$ FORM. Der Beweis wird mittels Induktion über den Formelaufbau von Δ geführt. Sei $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta_0, \dots \theta_{r-1})\urcorner \in$ AFORM. Der Fall verläuft analog zum FTERM-Fall unter Verwendung von (i).

Gelte das Theorem nun für $\Delta_0, \Delta_1 \in$ FORM. Sei $\Delta = \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner \in$ JFORM. Dann ist $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner]] = \ulcorner\neg[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \Delta_0]$. Also $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = \ulcorner\neg[\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \Delta_0]\urcorner = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \ulcorner\neg\Delta_0\urcorner] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \Delta]$. Sei $\Delta = \ulcorner(\Delta_0\ \psi\ \Delta_1)\urcorner \in$ JFORM. Der Fall verläuft analog zum Negatorfall.

Sei $\Delta = \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner \in$ QFORM. Angenommen $\xi_i = \zeta$ für ein $i < k$. Dann ist $\xi_j \neq \zeta$ für alle $j < k+1$ mit $i \neq j$. Dann ist $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_k, \xi_k, \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{i-1}, \theta^*_{i+1}, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]\urcorner] = \ulcorner\Pi\zeta[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{i-1}, \theta^*_{i+1}, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{i-1}, \theta^*_{i+1}, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{i-1}, \theta^*_{i+1}, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k\rangle, \Delta_0]$. Also $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{i-1}, \theta^*_{i+1}, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \dots, \xi_k\rangle, \Delta_0]\urcorner = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner] = [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_k\rangle, \Delta]$. Angenommen $\xi_k = \zeta$. Dann ist $\xi_i \neq \zeta$ für alle $i < k$ und $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \dots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \dots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0,$

$\ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_k, \xi_k, \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]\urcorner] = \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]\urcorner = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta]$.

Angenommen $\xi_i \neq \zeta$ für alle $i < k+1$. Dann ist $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner]] = [\theta^*_k, \xi_k, \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]\urcorner] = \ulcorner\Pi\zeta[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]]\urcorner$. Mit I.V. gilt $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta_0]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta_0]$. Also $[\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = \ulcorner\Pi\zeta[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta_0]\urcorner = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \ulcorner\Pi\zeta\Delta_0\urcorner] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta]$. ■

Theorem 1-29. *Mehrfache Substitution von geschlossenen Termen für paarweise verschiedene Variablen in Termen und Formeln (b)*

Wenn $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \subseteq$ VAR, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$, dann:

(i) Wenn $\theta \in$ TERM, dann

$$[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, [\theta^*_k, \xi_k, \theta]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \theta], \text{ und}$$

(ii) Wenn $\Delta \in$ FORM, dann

$$[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, [\theta^*_k, \xi_k, \Delta]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta].$$

Beweis: Seien $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\} \subseteq$ GTERM und $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \subseteq$ VAR, wobei $\xi_i \neq \xi_j$ für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$. *Zu (i)*: Sei $\theta \in$ TERM. Der Beweis wird mittels Induktion über k geführt. Sei $k = 1$. Dann ist mit Theorem 1-25-(i) und Theorem 1-28-(i) $[\theta^*_0, \xi_0, [\theta^*_1, \xi_1, \theta]] = [\theta^*_1, \xi_1, [\theta^*_0, \xi_0, \theta]] = [\langle\theta^*_0, \theta^*_1\rangle, \langle\xi_0, \xi_1\rangle, \theta]$. Sei nun $1 < k$. Durch Anwendung von I.V., Theorem 1-25-(i), I.V., Theorem 1-28-(i), I.V. und Theorem 1-28-(i) in dieser Reihenfolge ergibt sich: $[\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, [\theta^*_k, \xi_k, \theta]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-2}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-2}\rangle, [\theta^*_{k-1}, \xi_{k-1}, [\theta^*_k, \xi_k, \theta]]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-2}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-2}\rangle, [\theta^*_k, \xi_k, [\theta^*_{k-1}, \xi_{k-1}, \theta]]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-2}, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-2}, \xi_k\rangle, [\theta^*_{k-1}, \xi_{k-1}, \theta]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-2}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-2}\rangle, [\theta^*_{k-1}, \xi_{k-1}, \theta]]] = [\theta^*_k, \xi_k, [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \theta]] = [\langle\theta^*_0, \ldots, \theta^*_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \theta]$.

(ii) folgt auf analogem Wege aus Theorem 1-25-(ii) und Theorem 1-28-(ii). ■

2 Verfügbarkeit von Aussagen

In diesem Kapitel werden die für den Kalkül benötigten Verfügbarkeitsbegrifflichkeiten entwickelt. Das Vorgehen lässt sich wie folgt skizzieren: Vorbereitend sind zunächst Redemittel zu Abschnitten und Abschnittsfolgen zu etablieren, wobei ein Abschnitt in einer Sequenz eine nicht-leere, zusammenhängende Teilmenge derselben ist (2.1). Sodann werden bestimmte SE-, NE- und EA-artige Abschnitte, wie sie insbesondere beim Schließen mit Subjunktoreinführung (SE), Negatoreinführung (NE) und Partikularquantorbeseitigung (PB) entstehen, als geschlossene Abschnitte ausgezeichnet (2.2). Ausgehend von den geschlossenen Abschnitten werden dann die Verfügbarkeitsbegrifflichkeiten selbst etabliert, wobei in einer Sequenz genau solche Aussagen an einer Stelle verfügbar sein sollen, die in dieser Sequenz an dieser Stelle nicht in einem echten Anfangsabschnitt eines geschlossenen Abschnitts liegen (2.3). Mit den in diesem Kapitel etablierten Theoremen lässt sich dann später zeigen, dass SE, NE und PB und nur diese Annahmen eliminieren können.

2.1 Abschnitte und Abschnittsfolgen

In diesem Kapitel werden nun Abschnitte in einer Sequenz als nicht-leere und zusammenhängende Teilmengen derselben charakterisiert. Sodann werden einige Theoreme zu Abschnitten bewiesen. Anschließend werden Begrifflichkeiten und Theoreme zu Abschnittsfolgen für Sequenzen etabliert, wobei Abschnittsfolgen für eine Sequenz $\mathfrak{H}$ solche endlichen Folgen sind, die nur disjunkte Abschnitte in $\mathfrak{H}$ aufzählen. Ausgehend von den Abschnittsfolgen werden dann so genannte ANS-umfassende Abschnittsfolgen für Abschnitte in Sequenzen definiert. Dabei ist eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für einen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ eine Abschnittsfolge für $\mathfrak{H}$, deren Werte allesamt Teilabschnitte von $\mathfrak{A}$ sind, wobei diese Teilabschnitte einerseits disjunkt sind und andererseits alle Annahmesätze in $\mathfrak{A}$ in einem dieser Teilabschnitte liegen. Diese ANS-umfassenden Abschnittsfolgen werden später bei der induktiven Erzeugung von geschlossenen Abschnitten eine Schlüsselrolle spielen. Den Abschluss des Kapitels bildet dann der Beweis von Theoremen zu ANS-umfassenden Abschnittsfolgen, die bei der Etablierung der geschlossenen Abschnitte bzw. von Theoremen über diese benötigt werden. Nun zur Abschnittsdefinition:

Definition 2-1. *Abschnitt in einer Sequenz (Metavariablen:* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$, *…)*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A} = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$.

Definition 2-2. *Zuordnung der Menge der Abschnitte von* $\mathfrak{H}$ *(ABS)*
ABS = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}\}\}$.

Definition 2-3, Definition 2-4 und Definition 2-5 dienen vor allem der Verflüssigung des Ausdrucks.

Definition 2-3. *Abschnitt*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein Abschnitt</u> gdw es gibt ein $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist.

Definition 2-4. *Teilabschnitt*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein Teilabschnitt von</u> $\mathfrak{A}'$ gdw $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ sind Abschnitte und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$.

Definition 2-5. *Echter Teilabschnitt*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein echter Teilabschnitt von</u> $\mathfrak{A}'$ gdw $\mathfrak{A}$ ist Teilabschnitt von $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$.

Theorem 2-1. *Eine Sequenz* $\mathfrak{H}$ *ist genau dann nicht-leer, wenn* ABS($\mathfrak{H}$) *nicht-leer ist*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann: $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ gdw ABS($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sei zunächst $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und somit $\mathfrak{H} \in$ ABS($\mathfrak{H}$). Sei nun ABS($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$. Dann gibt es ein $\mathfrak{A}$, so dass $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Dann ist $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und damit $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. ■

Theorem 2-2. *Das Abschnittsprädikat ist bezüglich Teilmengenschaft zwischen Sequenzen monoton*
Wenn $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in$ SEQ, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}'$.

Beweis: Seien $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in$ SEQ, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$. Ferner ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}' \restriction \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$. Damit ist

$$\mathfrak{A} = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$$

=
$\{(i, \mathfrak{H}'_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$

und somit $\mathfrak{A}$ insgesamt ein Abschnitt in $\mathfrak{H}'$. ■

Bemerkung 2-1. *Alle der im Folgenden definierten Abschnittsprädikate sind bezüglich Teilmengenschaft zwischen Sequenzen monoton. Dies wird in der weiteren Darstellung benutzt, aber nicht extra gezeigt*
Wenn F eines der im Folgenden definierten Abschnittsprädikate ist, dann gilt: Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}' \in$ SEQ, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}'$.

Erläuterung: Alle folgenden Definitionen von Abschnittsprädikaten haben eine der beiden folgenden Formen:

$\mathfrak{A}$ ist ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und $H(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$.

oder

$\mathfrak{A}$ ist ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $H(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$.

Dabei ist H der variable Teil im Definiens, der die einzelnen Definitionen voneinander unterscheidet. Für H gilt jeweils: Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}' \in$ SEQ, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) (bzw., äquivalent dazu: $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$) und $H(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$, dann $H(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}')$. Damit ergibt sich mit Theorem 2-2 und der entsprechenden Definition dann jeweils: Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ Sequenzen sind, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}'$.

Daraus ergibt sich auch: Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ Sequenzen sind, und $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ auch ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$.[10] Zu beachten ist allerdings, dass für viele der im Folgenden definierten Abschnittsprädikate *nicht* gilt: Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ Sequenzen sind, und $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ auch ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}'^\frown\mathfrak{H}$. ■

---

[10] '..⁀..' ist der Operator der Folgenverkettung. Die Klammern sind weggelassen und es ist Linksklammerung unterstellt. Also: $\ulcorner a_0{}^\frown a_1{}^\frown a_2{}^\frown \ldots{}^\frown a_{n-1}\urcorner = \ulcorner(\ldots((a_0{}^\frown a_1)^\frown a_2)^\frown \ldots)^\frown a_{n-1})\urcorner$.

Theorem 2-3. *Abschnitte in Beschränkungen*[11]
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann: $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. (*L-R*): Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ergibt sich: $\mathfrak{A} \neq \emptyset$, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und damit: $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \in$ SEQ. Sodann ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \subseteq \mathfrak{H}$ und somit

$$\mathfrak{A} = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$$
$$=$$
$$\{(i, (\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1)_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$$

und $\mathfrak{A}$ somit insgesamt ein Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$. (*R-L*): Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$, dann ist $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \in$ SEQ und nach der Eingangsvoraussetzung $\mathfrak{H}$ eine Sequenz und mit $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \subseteq \mathfrak{H}$ und Theorem 2-2 $\mathfrak{A}$ auch ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. ■

Bemerkung 2-2. *F-Abschnitte in Beschränkungen*
Wenn F eines der im Folgenden definierten Abschnittsprädikate ist, dann gilt: Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann: $\mathfrak{A}$ ist ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$.

Erläuterung: Alle folgenden Definitionen von Abschnittsprädikaten haben die Form wie in Bemerkung 2-1 angegeben, wobei für H jeweils gilt: Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) (bzw., äquivalent dazu: $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$) und $H(\mathfrak{A}, \mathfrak{H})$, dann $H(\mathfrak{A}, \mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1)$. Der Grund ist jeweils, dass in den Definientia nur Bezug auf Verhältnisse in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$ genommen wird. Damit ergibt sich dann mit Theorem 2-3 und der entsprechenden Definition jeweils: Wenn $\mathfrak{H}$ eine Sequenz ist und $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein F-Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$. Für die Gegenrichtung siehe Bemerkung 2-1. ■

---

[11] '..↾..' ist der Beschränkungsoperator. Dabei gelte: $R\restriction X = \{(a, b) \mid (a, b) \in R \text{ und } a \in X\}$.

Theorem 2-4. *Abschnitte mit gleichem Anfang und Ende sind identisch*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$), min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{A}'$)), dann $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$), min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{A}'$)). Dann gilt für alle $(i, \mathfrak{H}_i)$: $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{A}$ gdw min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)) gdw min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$)) gdw $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{A}'$. ■

Theorem 2-5. *Inklusionsverhältnisse zwischen Abschnitten*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$), dann:
(i) min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)) gdw $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$, und
(ii) Wenn min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{A}'$)), dann $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$). Dann ist

$\mathfrak{A} = \{(l, \mathfrak{H}_l) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq l \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$
und
$\mathfrak{A}' = \{(l, \mathfrak{H}_l) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \leq l \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))\}$.

Zu (i): Sei min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Sei $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathfrak{A}'$. Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq l \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$)) und damit nach Voraussetzung min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq l \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Also ist $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathfrak{A}$.
Sei nun $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$. Dann sind min(Dom($\mathfrak{A}'$)), max(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$) und somit min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)).
Zu (ii): Sei min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{A}'$)). Dann ist max(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$)) oder max(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Im ersten Fall ergibt sich dann mit (i): $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ im zweiten Fall ergibt sich mit (i): $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$. ■

Theorem 2-6. *Nicht-leere Beschränkungen von Abschnitten sind Abschnitte*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), dann gilt für alle $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$): $\mathfrak{A}\restriction k+1 \in$ ABS($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und sei $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$). Dann gilt, dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) $< k+1 \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))+1. Damit gilt, dass $\mathfrak{A}\restriction k+1 = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}\restriction k+1 = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq k\} = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction k+1)) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction k+1))\}$ und dass $\mathfrak{A}\restriction k+1 \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$. Außerdem gilt $k \in$ Dom($\mathfrak{A}\restriction k+1$) und somit, dass $\mathfrak{A}\restriction k+1 \neq \emptyset$. Also gilt $\mathfrak{A}\restriction k+1 \in$ ABS($\mathfrak{H}$). ■

Theorem 2-7. *Beschränkungen eines Abschnitts, die Abschnitte sind, haben denselben Anfang wie der beschränkte Abschnitt*

Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann gilt für alle $k \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$: Wenn $\mathfrak{A}\restriction k$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction k)) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sei nun $k \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ und sei $\mathfrak{A}\restriction k$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und damit insbesondere $\mathfrak{A}\restriction k \neq \emptyset$. Dann gilt: $\mathfrak{A}\restriction k = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}\restriction k = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i \leq k\text{-}1\}$ und wegen $\mathfrak{A}\restriction k \neq \emptyset$ mithin $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction k)) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. ■

Theorem 2-8. *Zwei Abschnitte sind genau dann elementfremd, wenn einer von beiden vor dem anderen liegt*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$, dann:

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$

gdw

(i) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$

oder

(ii) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$ und sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$. Dann ist

$\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$
oder
$\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$
oder
$\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Der zweite Fall $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ kann nicht eintreten, denn sonst wäre $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) \in \mathfrak{A}$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) \in \mathfrak{A}'$ und damit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$.

Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Wäre nun $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, dann wäre $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))}) \in \mathfrak{A}$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))}) \in \mathfrak{A}'$. Also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Daher gilt im ersten Fall $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$.

Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Wäre nun $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$, dann wäre $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) \in \mathfrak{A}'$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) \in \mathfrak{A}$. Also $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Daher gilt im dritten Fall $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Sei nun min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{A}'$)) oder min(Dom($\mathfrak{A}'$)) < min(Dom($\mathfrak{A}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}'$)) < min(Dom($\mathfrak{A}$)). Wäre es nun der Fall, dass $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Dann gäbe es ein i, so dass $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$. Dann gilt min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)) und min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$)). Damit würde gelten: min(Dom($\mathfrak{A}'$)) < min(Dom($\mathfrak{A}'$)) oder min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{A}$)). Widerspruch! Also ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$. ■

Theorem 2-9. *Zwei Abschnitte sind genau dann nicht elementfremd, wenn der Anfang von einem von beiden in dem anderen liegt*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$), dann:

$\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$

gdw

(i) min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}'$)

oder

(ii) min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$). (*L-R*): Sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), so dass $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$. Dann gilt:

min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)) und min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$))
und
min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)) oder min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)).

Damit ist dann

min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}'$))
oder
min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)).

Damit gilt wiederum:

min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}'$) oder min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$).

(R-L): Gilt min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}'$) oder min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$), dann ist (min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) $\in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ oder (min(Dom($\mathfrak{A}'$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))}$) $\in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$ und in beiden Fällen ist $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. ■

Definition 2-6. *Passende Folgen natürlicher Zahlen für Teilmengen von Sequenzen*
g ist eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$
gdw
Es gibt ein $\mathfrak{H} \in$ SEQ, so dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und g eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $\mathrm{Ran}(g) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ ist.

Zweck der Definition ist es zunächst, die Elemente (des Definitionsbereichs) einer Teilmenge einer Sequenz unter Wahrung der natürlichen Ordnung aufzählen zu können. Sodann können passende Folgen dazu verwendet werden, um aus Abschnitten von Sequenzen Sequenzen zu machen, indem man den Abschnitt mit einer zu ihm passenden Folge natürlicher Zahlen verknüpft. In gewisser Weise handelt es sich also um eine Umkehroperation zur Folgenverkettung.

Theorem 2-10. *Existenz passender Folgen natürlicher Zahlen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$, dann gibt es ein g, so dass g eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$ ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$. Der Beweis wird induktiv über die Mächtigkeit von $\mathfrak{A}$ geführt. Sei $|\mathfrak{A}| = 0$. Sei $g = \emptyset$. Dann ist g trivialerweise eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen mit $\mathrm{Ran}(g) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$. Sei nun $|\mathfrak{A}| = k+1$. Dann ist $k = 0$ oder $k > 0$. Im ersten Fall ist $\{(0, \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))\}$ eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$. Sei nun $k > 0$. Da $\mathfrak{A}$ eine endliche Funktion ist, ist $|\mathfrak{A}\setminus\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}| = k$. Außerdem ist $\mathfrak{A}\setminus\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\} \subseteq \mathfrak{H}$. Also gibt es nach I.V. ein g, so dass g eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}\setminus\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ ist. Sei nun $g' = g \cup \{(\mathrm{Dom}(g), \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))\}$. Offenbar ist $\mathrm{Ran}(g') = \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$. Wegen

$$\begin{aligned} &g(\max(\mathrm{Dom}(g))) = \max(\mathrm{Ran}(g)) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\setminus\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\})) \\ &< \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \max(\mathrm{Ran}(g')) = g'(\mathrm{Dom}(g)) = g'(\max(\mathrm{Dom}(g'))) \end{aligned}$$

überträgt sich die strenge Monotonie von g auf g'. Also ist g' eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$. ■

Theorem 2-11. *Bijektivität passender Folgen natürlicher Zahlen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und g eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$ ist, dann ist g eine Bijektion zwischen Dom(g) und Dom($\mathfrak{A}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und sei g eine passende Folgen natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$. Dann ist Ran(g) = Dom($\mathfrak{A}$) und g somit eine Surjektion von Dom(g) auf Dom($\mathfrak{A}$). Ferner gilt, da g eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen ist, dass g eine Injektion von Dom(g) in Dom($\mathfrak{A}$) ist und somit ist g insgesamt eine Bijektion zwischen Dom(g) und Dom($\mathfrak{A}$). ■

Theorem 2-12. *Eindeutigkeit passender Folgen natürlicher Zahlen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und g, g' passende Folgen natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$ sind, dann: $g = g'$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}$ und seien g, g' passende Folgen natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$. Dann ist Ran(g) = Dom($\mathfrak{A}$) = Ran(g'). Ferner gilt mit Theorem 2-11 dass Dom(g) = |Ran(g)| = |Ran(g')| = Dom(g'). Nun sind aber streng monoton wachsende Folgen natürlicher Zahlen mit gleichem Definitions- und Wertebereich identisch. Also ist $g = g'$. ■

Theorem 2-13. *Nicht-rekursive Charakterisierung der passenden Folge für einen Abschnitt*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+l) \mid l < |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\}$ eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. Der Beweis wird induktiv über die Mächtigkeit von Dom($\mathfrak{A}$) geführt. Sei |Dom($\mathfrak{A}$)| = 1. Dann ist Dom($\mathfrak{A}$) = $\{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$ und $\{(0, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))\}$ ist eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$ und $\{(0, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))\} = \{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+l) \mid l < 1\} = \{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+l) \mid l < |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\}$.

Gelte die Behauptung nun für $k \geq 1$ und sei |Dom($\mathfrak{A}$)| = k+1. Da $\mathfrak{A}$ eine endliche Funktion ist, ist $|\mathfrak{A} \setminus \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}| = k$. Außerdem ist $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} \setminus \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{A}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Also ist nach I.V. $g = \{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*))+l) \mid l < |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*)|\} = \{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+l) \mid l < |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|-1\}$ eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}^*$. Sei $g' = g \cup \{(|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|-1, \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))\}$. Dann ist Ran($g'$) = Dom($\mathfrak{A}^*$) $\cup$ $\{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$ = Dom($\mathfrak{A}$) und es ist Dom(g') = Dom(g) $\cup$ $\{\mathrm{Dom}(g)\}$ = Dom(g)+1 = |Dom($\mathfrak{A}^*$)|+1 = |Dom($\mathfrak{A}$)|. Da $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, gilt sodann, dass max(Dom($\mathfrak{A}^*$))+1 = max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit ist g'(|Dom($\mathfrak{A}$)|-1) = max(Dom($\mathfrak{A}^*$))+1 =

$g(|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}2)+1$ = $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}^*))+|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}2)+1$ = $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}2)+1$ = $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}1$. Somit ist $g' = \{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+l) \mid l < |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}1\} \cup \{(|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}1, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+|\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\text{-}1)\} = \{(l, \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+l) \mid l < |\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})|\}$. Damit ist g' auch eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen und somit insgesamt eine passende Folge natürlicher Zahlen für $\mathfrak{A}$. ■

Definition 2-7. *Abschnittsfolgen für Sequenzen*
G ist eine Abschnittsfolge für $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{H} \in$ SEQ und G ist eine Folge mit $\mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$ und für alle $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$ gilt: Wenn $i < j$, dann $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$ und $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$.

Definition 2-8. *Zuordnung der Menge der Abschnittsfolgen für $\mathfrak{H}$ (ABSF)*
ABSF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $X = \{G \mid G$ ist eine Abschnittsfolge für $\mathfrak{H}\}\}$.

Theorem 2-14. *Eine Sequenz $\mathfrak{H}$ ist genau dann nicht-leer, wenn es eine nicht-leere Abschnittsfolge für $\mathfrak{H}$ gibt*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann: $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ gdw es gibt ein $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$ mit $G \neq \emptyset$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sei nun $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Dann ist $\emptyset \neq \{(i, \{(i, \mathfrak{H}_i)\}) \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$. Gebe es nun umgekehrt ein $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$ mit $G \neq \emptyset$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(G)$. Sodann ist $\mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$ und damit $G(i) \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$. Damit gilt mit Theorem 2-1, dass $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. ■

Theorem 2-15. *$\emptyset$ ist eine Abschnittsfolge für alle Sequenzen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann ist $\emptyset \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Dann ist $\emptyset$ eine Folge mit $\mathrm{Ran}(\emptyset) = \emptyset \subseteq \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$ und für alle $i, j \in \mathrm{Dom}(\emptyset) = \emptyset$ gilt trivialerweise: Wenn $i < j$, dann $\min(\mathrm{Dom}(\emptyset(i))) < \min(\mathrm{Dom}(\emptyset(j)))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\emptyset(i))) < \min(\mathrm{Dom}(\emptyset(j)))$. ■

Theorem 2-16. *Eigenschaften von Abschnittsfolgen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$), dann:
(i) G ist eine Injektion von Dom(G) in Ran(G),
(ii) G ist eine Bijektion zwischen Dom(G) und Ran(G),
(iii) Dom(G) = |Ran(G)| und
(iv) G ist eine endliche Folge.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$). Dann ist G eine Folge mit Ran(G) $\subseteq$ ABS($\mathfrak{H}$) und für alle $i, j \in$ Dom(G) gilt: Wenn $i < j$, dann min(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$)) und max(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$)).

Zu (i): Seien nun $i, j \in$ Dom(G) und sei $G(i) = G(j)$. Dann ist min(Dom($G(i)$)) = min(Dom($G(j)$)). Wäre $i \neq j$. Dann ist $i < j$ oder $j < i$ und damit wäre min(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$)) oder min(Dom($G(j)$)) < min(Dom($G(i)$)). Beides steht jedoch im Widerspruch zu min(Dom($G(i)$)) = min(Dom($G(j)$)). Also ist für $i, j \in$ Dom(G) mit $G(i) = G(j)$ auch $i = j$ und somit G eine Injektion von Dom(G) in Ran(G).

Zu (ii): G ist eine Surjektion von Dom(G) auf Ran(G) und mit (i) ist G dann eine Bijektion zwischen Dom(G) und Ran(G).

Zu (iii): Da G eine Folge ist, gilt mit (ii): Dom(G) = |Ran(G)|

Zu (iv): G ist eine Folge und mit (iii) ist G dann eine endliche Folge, denn Ran(G) $\subseteq$ ABS($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ POT($\mathfrak{H}$) und somit (da mit $\mathfrak{H} \in$ SEQ gilt, dass $|\mathfrak{H}| \in \mathbb{N}$): Dom($G$) = |Ran($G$)| $\leq$ |ABS($\mathfrak{H}$)| $\leq$ |POT($\mathfrak{H}$)| = $2^{|\mathfrak{H}|} \in \mathbb{N}$. ■

Theorem 2-17. *Existenz von Abschnittsfolgen, die alle Elemente einer Menge von disjunkten Abschnitten aufzählen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $X \subseteq$ ABS($\mathfrak{H}$) und für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in X$ gilt: Wenn $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$, dann $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$, dann: Es gibt es $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$), so dass Ran(G) = X.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $X \subseteq$ ABS($\mathfrak{H}$) und gelte für alle $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}' \in X$: Wenn $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}'$, dann $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$. Nun ist $\mathfrak{B} = \{(l, \mathfrak{H}_l) \mid$ Es gibt ein $\mathfrak{A} \in X$ und l = min(Dom($\mathfrak{A}$))$\} \subseteq \mathfrak{H}$ und damit gibt es nach Theorem 2-10 eine passende Folge natürlicher Zahlen g für $\mathfrak{B}$. Dann ist g mit Theorem 2-11 eine Bijektion zwischen Dom(g) und Dom($\mathfrak{B}$) und damit gilt nach Definition von $\mathfrak{B}$ für alle $\mathfrak{A} \in X$: min(Dom($\mathfrak{A}$)) = $g(i)$ für ein $i \in$ Dom(g). Sodann gilt wegen des streng monotonen Wachstums von g: Wenn $i, j \in \mathrm{Dom}(g)$ und $i < j$, dann $g(i) < g(j)$.

Dann gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(g)$: Es gibt genau ein $\mathfrak{A} \in X$, so dass $g(i) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Sei nämlich $i \in \mathrm{Dom}(g)$. Dann ist $g(i) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ für ein $\mathfrak{A} \in X$. Sei nun $\mathfrak{A}' \in X$ und $g(i) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Nun gilt nach Voraussetzung $X \subseteq \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$ und somit ergibt sich mit Theorem 2-9: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Damit ergibt sich aus der Eingangsannahme, dass $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

Sei nun $G = \{(i, \mathfrak{A}) \mid i \in \mathrm{Dom}(g) \text{ und } \mathfrak{A} \in X \text{ und } g(i) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$. Dann ist zunächst G eine Folge mit $\mathrm{Ran}(G) \subseteq X \subseteq \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt für alle $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$: Wenn $i < j$, dann $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$ und $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$. Seien nämlich $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$ und sei $i < j$. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) = g(i) < g(j) = \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$. Dann ist $G(i) \neq G(j)$ und somit nach Voraussetzung $G(i) \cap G(j) = \emptyset$. Ferner sind dann $G(i), G(j) \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$ und somit – da eben $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$ – mit Theorem 2-8: $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$.

Ferner ist dann $\mathrm{Ran}(G) = X$. Es gilt bereits $\mathrm{Ran}(G) \subseteq X$. Sei nun $\mathfrak{A} \in X$. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = g(i)$ für ein $i \in \mathrm{Dom}(g)$. Dann ist $(i, \mathfrak{A}) \in G$ und somit $\mathfrak{A} \in \mathrm{Ran}(G)$. ■

Theorem 2-18. *Hinreichende Bedingungen für die Identität der Argumente einer Abschnittsfolge*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$, dann gilt für alle $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$:

(i) Wenn $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) = \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$, dann $i = j$, und

(ii) Wenn $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) = \max(\mathrm{Dom}(G(j)))$, dann $i = j$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$ und seien $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$. Sei nun $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) = \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$. Aus Definition 2-7 ergibt sich: Wenn $i < j$, dann $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$ und wenn $j < i$, dann $\min(\mathrm{Dom}(G(j))) < \min(\mathrm{Dom}(G(i)))$. Beide Fälle stehen im Widerspruch zur Annahme. Also ist $i = j$.

Sei nun $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) = \max(\mathrm{Dom}(G(j)))$. Wäre nun $i < j$ oder $j < i$, dann wäre $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(G(j))) < \min(\mathrm{Dom}(G(i)))$. Also wäre $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) < \min(\mathrm{Dom}(G(j))) \leq \max(\mathrm{Dom}(G(j)))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(G(j))) <$

min(Dom($G(i)$)) ≤ max(Dom($G(i)$)) und beide Fälle widersprechen der Annahme. Also ist $i = j$. ■

Theorem 2-19. *Verschiedene Glieder einer Abschnittsfolge sind elementfremd*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$), dann gilt für alle $i, j \in$ Dom(G): Wenn $G(i) \neq G(j)$, dann $G(i) \cap G(j) = \emptyset$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$). Dann ist G eine Folge mit Ran(G) ⊆ ABS($\mathfrak{H}$) und für alle $i, j \in$ Dom(G) gilt: Wenn $i < j$, dann min(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$)) und max(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$)). Seien $i, j \in$ Dom(G). Dann gilt: $G(i)$, $G(j) \in$ ABS($\mathfrak{H}$). Sei nun $G(i) \neq G(j)$. Dann gilt mit Theorem 2-16-(i), dass $i \neq j$. Dann ist $i < j$ oder $j < i$. Dann ist

min(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$)) und max(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G(j)$))
oder
min(Dom($G(j)$)) < min(Dom($G(i)$)) und max(Dom($G(j)$)) < min(Dom($G(i)$)).

Also ist mit Theorem 2-8 $G(i) \cap G(j) = \emptyset$. ■

Definition 2-9. *ANS-umfassende Abschnittsfolge für einen Abschnitt in* $\mathfrak{H}$
G ist eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$
gdw
(i) $\mathfrak{H} \in$ SEQ,
(ii) $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$),
(iii) $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$)\{∅} und
  a) min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom($G(0)$)),
  b) max(Dom(G(max(Dom(G))))) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)) und
  c) Für alle $l \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) ∩ Dom($\mathfrak{A}$) gilt: Es gibt ein $i \in$ Dom(G), so dass $l \in$ Dom($G(i)$).

Definition 2-10. *Zuordnung der Menge der ANS-umfassenden Abschnittsfolgen in* $\mathfrak{H}$ *(ANSUMF)*
ANSUMF = {($\mathfrak{H}$, X) | $\mathfrak{H} \in$ SEQ und X = {G | Es gibt ein $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und G ist eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$}}.

Theorem 2-20. *Existenz von ANS-umfassenden Abschnittsfolgen für alle Abschnitte*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), dann gibt es eine ANS-umfassende Abschnittsfolge G für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$). Dann ist $\{(0, \mathfrak{A})\}$ eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$. ■

Theorem 2-21. *Eine Sequenz $\mathfrak{H}$ ist genau dann nicht-leer, wenn* ANSUMF($\mathfrak{H}$) *nicht-leer ist*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann: $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ gdw ANSUMF($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sei nun $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Dann gibt es mit Theorem 2-1 ein $\mathfrak{A}$, so dass $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$). Daraus folgt mit Theorem 2-20, dass ANSUMF($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$. Sei nun umgekehrt ANSUMF($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$. Dann gibt es nach Definition 2-10 ein $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und damit gilt wiederum mit Theorem 2-1, dass $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. ■

Theorem 2-22. *Eigenschaften von ANS-umfassenden Abschnittsfolgen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) G ist eine Injektion von Dom(G) in Ran(G),
(ii) G ist eine Bijektion zwischen Dom(G) und Ran(G),
(iii) Dom(G) = |Ran(G)| und
(iv) G ist eine endliche Folge.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$). Dann folgt mit Definition 2-9, dass $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$)\{$\emptyset$} und damit und mit Theorem 2-16 die Behauptung. ■

Theorem 2-23. *Alle Glieder einer ANS-umfassenden Abschnittsfolge liegen innerhalb des betreffenden Abschnitts*
Wenn G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist, dann gilt für alle $i \in$ Dom(G): min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($G(i)$)) und max(Dom($G(i)$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)).

Beweis: Sei G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ und sei $i \in$ Dom(G). Dann ist $0 \leq i \leq$ max(Dom(G)). Ferner gilt dann – da nach Definition 2-9 $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$)\{$\emptyset$} – mit Definition 2-7 für alle k, $j \in$ Dom(G): Wenn $k < j$, dann min(Dom($G(k)$)) < min(Dom($G(j)$)) und max(Dom($G(k)$)) < min(Dom($G(j)$)). Also gilt: min(Dom($G(0)$)) $\leq$ min(Dom($G(i)$)) und max(Dom($G(i)$)) $\leq$

max(Dom(G(max(Dom(G))))). Ferner ergibt sich aus der Annahme und Definition 2-9, dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom(G(0)) und max(Dom(G(max(Dom(G))))) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit gilt dann: min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom(G(i))) und max(Dom(G(i))) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)). ■

Theorem 2-24. *Alle Glieder einer ANS-umfassenden Abschnittsfolge sind Teilmengen des betreffenden Abschnitts*
Wenn G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist, dann gilt für alle $i \in$ Dom(G): $G(i) \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Sei G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ und sei $i \in$ Dom(G). Dann gilt mit Definition 2-9 und Definition 2-7: Ran(G) ⊆ ABS($\mathfrak{H}$) und damit, dass $G(i)$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Sodann gilt mit Theorem 2-23: min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom(G(i))) und max(Dom(G(i))) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit gilt dann mit Theorem 2-5: $G(i) \subseteq \mathfrak{A}$. ■

Theorem 2-25. *Nicht-leere Beschränkungen von ANS-umfassenden Abschnittsfolgen sind ANS-umfassende Abschnittsfolgen*
Wenn G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist, dann gilt für alle $j \in$ Dom(G): $G\restriction(j+1)$ ist eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}\restriction$(max(Dom(G(j)))+1).

Beweis: Sei G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ und sei $j \in$ Dom(G). Dann gilt nach Definition 2-9, dass $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und $G \in$ ABSF($\mathfrak{H}$)\{∅} und min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom(G(0)) und max(Dom(G(max(Dom(G))))) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)) und für alle $l \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) ∩ Dom($\mathfrak{A}$) gilt: Es gibt ein $i \in$ Dom(G), so dass $l \in$ Dom(G(i)). Mit Definition 2-7 ergibt sich leicht, dass $G\restriction(j+1) \in$ ABSF($\mathfrak{H}$)\{∅}. Mit Theorem 2-23 ergibt sich, dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom(G(j))) ≤ max(Dom(G(j))) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)) und somit, dass max(Dom(G(j))) ∈ Dom($\mathfrak{A}$). Mit Theorem 2-6 ergibt sich damit, dass $\mathfrak{A}\restriction$(max(Dom(G(j)))+1) ∈ ABS($\mathfrak{H}$).

Nun sind die drei Unter-Klauseln von (iii) aus Definition 2-9 zu zeigen. *Zu a)*: Zunächst ist $0 < j+1$. Damit ist $0 \in$ Dom($G\restriction(j+1)$) und somit ($G\restriction(j+1)$)(0) = G(0) und damit min(Dom($\mathfrak{A}\restriction$(max(Dom(G(j)))+1))) = min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ min(Dom(G(0))) ≤ min(Dom(($G\restriction(j+1)$)(0))). *Zu b)*: max(Dom(($G\restriction(j+1)$)(max(Dom($G\restriction(j+1)$))))) =

$\max(\mathrm{Dom}(G(j))) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction(\max(\mathrm{Dom}(G(j)))+1)))$. *Zu c)*: Sei nun $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction(\max(\mathrm{Dom}(G(j)))+1))$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(G)$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(G(i))$. Wäre nun $j+1 \leq i$. Dann wäre mit $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$ und mit Definition 2-7 $\max(\mathrm{Dom}(G(j))) < \min(\mathrm{Dom}(G(i))) \leq l \leq \max(\mathrm{Dom}(G(i)))$ und andererseits $l \leq \max(\mathrm{Dom}(G(j)))$. Widerspruch! Also ist $i < j+1$ und damit $G(i) = (G\restriction(j+1))(i)$. Also gilt für alle $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction(\max(\mathrm{Dom}(G(j)))+1))$, dass es ein $i \in \mathrm{Dom}(G\restriction(j+1))$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}((G\restriction(j+1))(i))$. Damit ist dann nach Definition 2-9 $G\restriction(j+1)$ insgesamt eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}\restriction(\max(\mathrm{Dom}(G(j)))+1)$. ■

Theorem 2-26. *Hinreichende Bedingungen für die Identität der Argumente einer ANS-umfassenden Abschnittsfolge*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, dann gilt für alle $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$:

(i) Wenn $\min(\mathrm{Dom}(G(i))) = \min(\mathrm{Dom}(G(j)))$, dann $i = j$,

(ii) Wenn $\max(\mathrm{Dom}(G(i))) = \max(\mathrm{Dom}(G(j)))$, dann $i = j$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$. Dann folgt mit Definition 2-9 und Definition 2-10, dass $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})\setminus\{\emptyset\}$ und damit mit Theorem 2-18 die Behauptung. ■

Theorem 2-27. *Verschiedene Glieder einer ANS-umfassenden Abschnittsfolge sind element-fremd*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, dann gilt für alle $i, j \in \mathrm{Dom}(G)$: Wenn $G(i) \neq G(j)$, dann $G(i) \cap G(j) = \emptyset$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$. Dann folgt mit Definition 2-9 und Definition 2-10, dass $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})\setminus\{\emptyset\}$ und damit mit Theorem 2-19 die Behauptung. ■

2.2 Geschlossene Abschnitte

Im Folgenden werden mit den SE-, NE- und EA-artigen Abschnitten einzelne Arten von Abschnitten ausgesondert, nämlich die, die grundsätzlich eine Form zeigen, wie sie mit dem Schließen mit Subjunktoreinführung (SE-artige), Negatoreinführung (NE-artige) und Partikularquantorbeseitigung (EA-artige) verbunden ist. Unter diesen werden sodann so genannte minimale SE-, NE- und PB-geschlossene Abschnitte ausgezeichnet, welche zusammen die minimalen geschlossenen Abschnitte bilden. Sodann wird die Erzeugungsrelation ERZ definiert, mit der sich im Ausgang von minimalen geschlossenen Abschnitten weitere non-redundante SE-, NE- und EA-artige Abschnitte erzeugen lassen. Sodann wird die Menge der ERZ-induktiven Relationen definiert und ihr großer Schnitt als die Relation ausgezeichnet, die einer Sequenz genau die Abschnitte zuordnet, die in dieser Sequenz geschlossenen sind. Damit sind die geschlossenen Abschnitte in einer Sequenz dann gerade die SE-, NE- und EA-artigen Abschnitte in dieser Sequenz, die entweder minimale geschlossene Abschnitte sind oder sich mit der Erzeugungsrelation aus minimalen geschlossenen Abschnitten bilden lassen.

Sodann werden allgemeine Theoreme zu geschlossenen Abschnitten bewiesen. Im Anschluss werden dann unter den geschlossenen Abschnitten die SE-, NE- bzw. PB-geschlossenen Abschnitte unterschieden, wobei SE- resp. NE- resp. PB-geschlossene Abschnitte gerade die SE- resp. NE- resp. EA-artigen geschlossenen Abschnitte sein werden. Mit den zum Abschluss dieses Kapitels etablierten Theoremen (Theorem 2-66, Theorem 2-67, Theorem 2-68, Theorem 2-69) lässt sich dann später zeigen, dass SE resp. NE resp. PB und nur diese SE- resp. NE- resp. PB-geschlossene Abschnitte und damit überhaupt geschlossene Abschnitte erzeugen. Im nächsten Kapitel (2.3) wird dann unter direktem Rückgriff auf dieses Kapitel die Verfügbarkeitsrede etabliert: Eine Aussage Γ soll in einer Sequenz $\mathfrak{H}$ genau dann an der Stelle i verfügbar sein, wenn Γ die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ ist und $(i, \mathfrak{H}_i)$ in allen geschlossenen Abschnitten in $\mathfrak{H}$ höchstens als letztes Glied vorkommt. Unter diesen Festlegungen ergibt sich dann, dass SE, NE und PB und nur SE, NE und PB Annahmen eliminieren können.

Mit den ersten drei Definitionen werden nun zunächst die SE-, NE- und EA-artigen Abschnitte ausgesondert. Sodann werden im Anschluss an einige Theoreme unter diesen Abschnitten die minimalen (SE-, NE- und PB-)geschlossenen Abschnitte ausgezeichnet.

Definition 2-11. *SE-artiger Abschnitt*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein SE-artiger Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und es gibt Δ, $\Gamma \in$ GFORM, so dass

(i) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$,

(ii) $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\text{-}1}) = \Gamma$ und

(iii) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Also $\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$.

Definition 2-12. *NE-artiger Abschnitt*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein NE-artiger Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und es gibt Δ, $\Gamma \in$ GFORM und $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), so dass

(i) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,

(ii) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$,

(iii) $A(\mathfrak{H}_i) = \Gamma$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\text{-}1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$
oder
$A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\text{-}1}) = \Gamma$ und

(iv) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Also $\neg\Delta\urcorner$.

In Klausel (iii) von Definition 2-12 werden Widerspruchsglieder, wie sie für die Negatoreinführung notwendig sind, in der Sequenz verortet. Dabei ist entweder das negative ($\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$) oder das positive ($\Gamma$) Widerspruchsglied die Aussage des vorletzten Folgenglieds des betrachteten Abschnitts $\mathfrak{A}$. Die Stelle des jeweils anderen Widerspruchsgliedes wird nicht genau festgelegt. Es wird nur gefordert, dass es irgendeine Stelle (i) zwischen dem ersten und dem vorletzten Glied des Abschnitts gibt, an der das Widerspruchsglied auftritt. Bei minimalen NE-geschlossenen Abschnitten (Definition 2-15) ist dieser Umstand unproblematisch. Erst bei der Erzeugung nicht-minimaler geschlossener Abschnitte aus geschlossenen Abschnitten muss gesondert sichergestellt werden, dass das Widerspruchsglied, dessen Stelle nicht näher bekannt ist, nicht in einen echten Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$ fällt, der bereits geschlossen ist. Dies ist insbesondere bei der Konstruktion der Erzeugungsrelation zu berücksichtigen (vgl. insbesondere Definition 2-18).

Definition 2-13. *EA-artiger Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ ist ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$

gdw

$\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und es gibt $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, $\beta \in$ PAR, $\Gamma \in$ GFORM und $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass

(i) A($\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) = $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$,

(ii) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}$ = $\ulcorner$Sei [β, ξ, Δ]$\urcorner$,

(iii) A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1}$) = Γ,

(iv) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$ = $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$,

(v) $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta, \Gamma\}$),

(vi) Es kein $j \leq$ min(Dom($\mathfrak{B}$)) gibt, so dass $\beta \in$ TT($\mathfrak{H}_j$), und

(vii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\backslash\{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$.

Hinweis: 'EA' steht für **E**rsatz**a**nnahme, also für die für eine Partikularquantorbeseitigung zu machende ›repräsentative Annahme‹.

Theorem 2-28. *Kein Abschnitt ist zugleich SE- und NE- oder SE- und EA-artiger Abschnitt*

(i) Es gibt keine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{A}$ SE- und NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist,

(ii) Es gibt keine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{A}$ SE- und EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist.

Beweis: Ergibt sich aus den Definitionen und Theoremen über eindeutige Lesbarkeit (Theorem 1-10 bis Theorem 1-12). ■

Man beachte, dass es durchaus sein kann, dass ein $\mathfrak{A}$ ein NE- und EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Unter Verwendung weiter unten einzuführender Terminologie ist das zum Beispiel dann der Fall, wenn die Annahme für einen indirekten Beweis parameterfrei ist, selbst das positive Widerspruchsglied stellt, und zudem die (leer laufende) Partikularquantifikation der indirekten Annahme unmittelbar vor dieser Annahme gewonnen wurde.

Theorem 2-29. *Das letzte Glied eines SE- oder NE- oder EA-artigen Abschnitts ist kein Annahmesatz*

Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist max(Dom($\mathfrak{A}$)) $\notin$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)).

Beweis: Ergibt sich aus Definition 2-11-(iii), Definition 2-12-(iv), Definition 2-13-(iv) und dem Theorem über die eindeutige Lesbarkeit von Sätzen (Theorem 1-12). ■

Theorem 2-30. *Alle Annahmesätze in einem SE- oder NE- oder EA-artigen Abschnitt liegen innerhalb eines echten Teilabschnitts, der das letzte Glied nicht umfasst*

Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$, dann $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Ergibt sich aus Theorem 2-29. ■

Theorem 2-31. *Mächtigkeit von SE-, NE-, und EA-artigen Abschnitten*

(i) Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann $2 \leq |\mathfrak{A}|$, und

(ii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann $3 \leq |\mathfrak{A}|$.

Beweis: Ergibt sich mit den Theoremen über eindeutige Lesbarkeit (Theorem 1-10 bis Theorem 1-12) direkt aus Definition 2-11, Definition 2-12 und Definition 2-13. ■

Definition 2-14. *Minimaler SE-geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ <u>ist ein minimaler SE-geschlossener Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und

(i) $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ und

(ii) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ gilt: $\mathfrak{A}\restriction i$ ist kein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Definition 2-15. *Minimaler NE-geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ <u>ist ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und

(i) $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ und

(ii) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ gilt: $\mathfrak{A}\restriction i$ ist kein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Definition 2-16. *Minimaler PB-geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ <u>ist ein minimaler PB-geschlossener Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und

(i) $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ und

(ii) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ gilt: $\mathfrak{A}\restriction i$ ist kein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Definition 2-17. *Minimaler geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ <u>ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein minimaler SE- oder ein minimaler NE- oder ein minimaler PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Theorem 2-32. *SE-, NE- und EA-artige Abschnitte mit nur einem Annahmesatz haben einen minimalen geschlossenen Abschnitt zum Anfangsabschnitt*

Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $|\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| = 1$, dann ist $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ oder es gibt ein $i \in \text{Dom}(\mathfrak{A})$, so dass $\mathfrak{A}\restriction i$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $|\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| = 1$. Dann ist mit Definition 2-11, Definition 2-12 und Definition 2-13 $\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$. Angenommen $\mathfrak{A}$ ist kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt nach Voraussetzung mit Definition 2-17 und Definition 2-14, Definition 2-15 und Definition 2-16, dass es ein $j \in \text{Dom}(\mathfrak{A})$ gibt, so dass $\mathfrak{A}\restriction j$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Sei nun $i = \min(\{j \mid j \in \text{Dom}(\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{A}\restriction j$ ist ein SE-, NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}\})$. Dann ist $\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}\restriction i \subseteq \text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}$ und mit Theorem 2-7 $\min(\text{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i)) = \min(\text{Dom}(\mathfrak{A}))$ und damit $\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}\restriction i = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i)), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i))})\}$. Sodann gilt wegen der Minimalität von i, dass für alle $l \in \text{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i)$ gilt, dass $(\mathfrak{A}\restriction i)\restriction l = \mathfrak{A}\restriction l$ kein SE-, NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Damit ist dann $\mathfrak{A}\restriction i$ ein minimaler SE- oder NE- oder PB-geschlossener und damit ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. ■

Theorem 2-33. *Verhältnis von Folgerungs- und Annahmesätzen in minimalen geschlossenen Abschnitten*

Wenn $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann $|\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| \leq |\text{FS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}|$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener und also ein minimaler SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt mit den Definitionen und Theorem 2-29: $|\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| = 1 \leq |\text{FS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}|$. ■

Nun wird eine Erzeugungsrelation für Abschnitte definiert, mit der sich im Ausgang von minimalen geschlossenen Abschnitten weitere non-redundante SE-, NE- und EA-artige Abschnitte erzeugen lassen, bei denen alle Annahmesätze Anfangsglieder eines solchen non-redundanten SE-, NE- oder EA-artigen Teilabschnitts sind. Dazu wird zunächst folgende Proto-Erzeugungsrelation definiert:

Definition 2-18. *Proto-Erzeugungsrelation für non-redundante SE-, NE- und EA-artige Abschnitte in Sequenzen (PERZ)*

PERZ = $\{(\langle\mathfrak{H}, G\rangle, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $X = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und es gibt ein $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass

(i) G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist,

(ii) ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{B} \neq \emptyset$,

(iii) min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1,

(iv) $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und wenn $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann gibt es Δ, $\Gamma \in$ GFORM und $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), so dass

a) min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)),

b) $\mathfrak{H}_{\text{min(Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$,

c) A($\mathfrak{H}_i$) = Γ und A($\mathfrak{H}_{\text{max(Dom}(\mathfrak{A}))\text{-1}}$) = $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$
oder
A($\mathfrak{H}_i$) = $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und A($\mathfrak{H}_{\text{max(Dom}(\mathfrak{A}))\text{-1}}$) = Γ,

d) Für alle $r \in$ Dom(G) gilt: $i <$ min(Dom($G(r)$)) oder max(Dom($G(r)$)) $\leq i$,

e) $\mathfrak{H}_{\text{max(Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Also $\neg\Delta\urcorner$, und

(v) Für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) ist $\mathfrak{A}\restriction i$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\}\}$.

In Klausel (iv) von Definition 2-18 wird für NE-artige Abschnitte eine Sonderbedingung gestellt. Bei der Erzeugung geschlossener Abschnitte aus bereits geschlossenen Abschnitten sollen die Werte der ANS-umfassenden Abschnittsfolge G nämlich gerade die bereits geschlossenen Ausgangsabschnitte sein. Im NE-Fall muss jedoch sichergestellt werden, dass nur solche Abschnitte $\mathfrak{A}$ als NE-geschlossen erzeugt werden, bei denen tatsächlich beide Widerspruchsglieder in $\mathfrak{A}\restriction$max(Dom($\mathfrak{A}$)) liegen und dort in keinen bereits geschlossenen Abschnitt fallen. Genau dies wird für das erste Widerspruchsglied mit (iv-d) gewährleistet (vgl. den Beweis zu Theorem 2-68).

Theorem 2-34. *Einige wichtige Eigenschaften von PERZ*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{A} \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$), dann:

(i) Es gibt $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist und ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{B} \neq \emptyset$, min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1,

(ii) $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$,

(iii) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ ist $\mathfrak{A}{\restriction}i$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$,
(iv) Es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i$ und $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$,
(v) $\mathfrak{A}$ ist kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und
(vi) Für alle $\mathfrak{C} \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$ gilt: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{A} \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann ergeben sich (i)-(iii) direkt aus Definition 2-18. Sei nun $\mathfrak{B}$ wie in (i) gefordert. Dann ist $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$ und somit gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{B}) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ wobei wegen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ gilt, dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i$. Damit gilt dann (iv) und mit Definition 2-14, Definition 2-15, Definition 2-16 und Definition 2-17 auch (v).

Sodann gilt nach Definition 2-9, dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(G(0))) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und damit, dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(G(0)))$. Sei nun $\mathfrak{C} \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{B}' \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$, so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{H}$ ist und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))+1 = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))+1$ und $\mathfrak{C}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$. Sodann ergibt sich nach Definition 2-9 $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')) \leq \min(\mathrm{Dom}(G(0))) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))$ und damit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \min(\mathrm{Dom}(G(0)))$. Damit gilt dann: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \min(\mathrm{Dom}(G(0))) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$, $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))$.

Wäre nun $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')$ und da G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{H}$ ist, wäre dann nach Definition 2-9 $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(G(l))$ für ein $l \in \mathrm{Dom}(G)$. Da G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist, wäre damit nach Theorem 2-24 wiederum $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Widerspruch! Wäre nun $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Damit wäre dann wiederum $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})$ und damit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \in \mathrm{Dom}(G(l'))$ für ein $l' \in \mathrm{Dom}(G)$ und damit wiederum $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))+1 = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Widerspruch! Also ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit gilt (vi). ■

Die gewünschte Erzeugungsrelation soll nun für gegebene $\mathfrak{H}$, G lediglich die non-redundanten Abschnitte aus PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) berücksichtigen:

Definition 2-19. *Erzeugungsrelation für non-redundante SE-, NE- und EA-artige Abschnitte in Sequenzen (ERZ)*

ERZ = $\{(\langle\mathfrak{H}, G\rangle, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ, $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $X = \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A} \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) und es gibt kein $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und $j \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{A}\restriction i \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\restriction(j+1)\rangle$)$\}\}$.

ERZ ist eine zweistellige Funktion, die einer Sequenz $\mathfrak{H}$ und einer ANS-umfassenden Abschnittsfolge G für einen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ eine Teilmenge X der Menge der SE-, NE- oder EA-artigen Abschnitte in $\mathfrak{H}$ zuordnet, die die Glieder von G zum echten Teilabschnitt haben. Diese Teilmenge ist dann entweder leer oder sie ist die Einermenge aus dem kürzesten Abschnitt, der sich mit PERZ für $\mathfrak{H}$ und Beschränkungen von G auf j+1 mit $j \in$ Dom(G) erzeugen lässt. Dies sichert später, dass nicht nur minimale, sondern auch ERZ-erzeugte und damit alle geschlossenen Abschnitte durch ihren Anfang eindeutig bestimmt sind (vgl. Theorem 2-50). Das folgende Theorem fasst einige Eigenschaften von ERZ für den Fall ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\neq \emptyset$ zusammen.

Theorem 2-35. *Einige häufiger benutzte Konsequenzen aus Definition 2-19*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$), dann:

(i) Es gibt $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist und ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{B} \neq \emptyset$, min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1,

(ii) $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$,

(iii) Für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) ist $\mathfrak{A}\restriction i$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$,

(iv) Es gibt ein $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$), so dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) < i und $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)),

(v) $\mathfrak{A}$ ist kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$,

(vi) Es gibt kein $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und $j \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{A}\restriction i \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\restriction(j+1)\rangle$), und

(vii) ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) = $\{\mathfrak{A}\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$). Dann ergeben sich (i)-(v) direkt aus Definition 2-19 und Theorem 2-34 und (vi) aus Definition 2-19. Sei nun $\mathfrak{C} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$). Dann ist mit Definition 2-19 und $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) auch $\mathfrak{A}, \mathfrak{C} \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) und damit mit Theorem 2-34-(vi) min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{C}$)). Wäre nun max(Dom($\mathfrak{A}$)) < max(Dom($\mathfrak{C}$)). Dann wäre min(Dom($\mathfrak{C}$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))+1 $\leq$

max(Dom($\mathfrak{C}$)) und daher max(Dom($\mathfrak{A}$))+1 $\in$ Dom($\mathfrak{C}$). Gleichzeitig gilt $\mathfrak{C}\restriction$max(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = $\mathfrak{A}$ $\in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$) = PERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\restriction$(max(Dom(G))+1)$\rangle$) und somit nach Definition 2-19 $\mathfrak{C}$ $\notin$ ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$). Widerspruch! Analog ergibt sich für max(Dom($\mathfrak{C}$)) < max(Dom($\mathfrak{A}$)) ein Widerspruch. Also ist auch max(Dom($\mathfrak{C}$)) = max(Dom($\mathfrak{A}$)) und damit mit Theorem 2-4 insgesamt $\mathfrak{C}$ = $\mathfrak{A}$ $\in$ {$\mathfrak{A}$}. Also ist ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$) $\subseteq$ {$\mathfrak{A}$}. Sodann gilt nach Voraussetzung {$\mathfrak{A}$} $\subseteq$ ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$) und somit insgesamt: ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$) = {$\mathfrak{A}$} und damit (vii). ■

Theorem 2-36. *ERZ-erzeugte Abschnitte sind mächtiger als die Glieder der entsprechenden ANS-umfassenden Abschnittsfolge*
Wenn $\mathfrak{H}$ $\in$ SEQ und G $\in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$), dann gilt für alle $\mathfrak{C}$ $\in$ Ran(G) und $\mathfrak{A}$ $\in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$): |$\mathfrak{C}$| < |$\mathfrak{A}$|.

Beweis: Sei $\mathfrak{H}$ $\in$ SEQ und G $\in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$). Seien nun $\mathfrak{C}$ $\in$ Ran(G) und $\mathfrak{A}$ $\in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$). Dann gibt es ein $\mathfrak{B}$ $\in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1 und $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist |$\mathfrak{B}$| < |$\mathfrak{A}$|. Ferner gilt mit Theorem 2-24 wegen $\mathfrak{C}$ $\in$ Ran(G), dass |$\mathfrak{C}$| ≤ |$\mathfrak{B}$| und somit dass |$\mathfrak{C}$| < |$\mathfrak{A}$|. ■

Theorem 2-37. *Hilfssatz für Theorem 2-39 (a)*
{($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) | $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$} $\subseteq$ SEQ × {$\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt}.

Beweis: Sei ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) $\in$ {($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) | $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$}. Dann ergibt sich aus Definition 2-14, Definition 2-15, Definition 2-16 und Definition 2-17, dass $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und damit, dass $\mathfrak{H}$ $\in$ SEQ. Damit: ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) $\in$ SEQ × {$\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt}. ■

Theorem 2-38. *Hilfssatz für Theorem 2-39 (b)*
Für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) gilt, dass $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$). Sei nun $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$). Dann ergibt sich aus den Voraussetzungen und Theorem 2-35-(ii), dass $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und damit folgt insgesamt die Behauptung. ■

Nun wird die Menge der ERZ-induktiven Relationen definiert:

Definition 2-20. *Menge der ERZ-induktiven Relationen (GSR)*
GSR = $\{R \mid R \subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$ und

(i) $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq R$ und

(ii) Für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ R gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq R\}$.

Definition 2-20 ist im Wesentlichen eine Hilfsdefinition, um in Definition 2-21 zu der Relation, die einer Sequenz alle und nur die geschlossenen Abschnitte in dieser Sequenz zuordnet, zu gelangen. Informell gesprochen enthält GSR alle Relationen R, die für eine gegebene Sequenz $\mathfrak{H}$ alle geordneten Paare aus $\mathfrak{H}$ und – so vorhanden – einem der minimalen geschlossenen Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und alle geordneten Paare $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A})$ für Abschnitte $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$, die sich mit ERZ aus Abschnitten $\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_{n\text{-}1}$ mit $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_0), \ldots, (\mathfrak{H}, \mathfrak{B}_{n\text{-}1})\} \subseteq R$ erzeugen lassen, enthalten.

Theorem 2-39. *Hilfssatz für Theorem 2-40*
SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\} \in$ GSR.

Beweis: Zunächst gilt: SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\} \subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$. Sodann gilt mit Theorem 2-37, dass $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$. Ferner gilt mit Theorem 2-38 für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$, dass $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$. ■

Nun wird die Relation, die einer Sequenz $\mathfrak{H}$ alle und nur die Abschnitte zuordnet, die minimale geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind oder sich durch wiederholte Anwendung von ERZ aus minimalen geschlossenen Abschnitten in $\mathfrak{H}$ erzeugen lassen, definiert:

Definition 2-21. *Die kleinste ERZ-induktive Relation (GS)*
GS = $\bigcap$GSR.

Das folgende Theorem bringt zum Ausdruck, dass GS tatsächlich eine Relation ist, die einer Sequenz alle minimalen geschlossenen Abschnitte in dieser Sequenz sowie alle SE-, NE- und EA-artigen Abschnitte, die sich durch widerholte Anwendung von ERZ aus minimalen geschlossenen Abschnitten erzeugen lassen, zuordnet und zum anderen auch Teilmenge von allen anderen solchen Relationen und somit die kleinste solche Relation ist und daher einer Sequenz nur solche Abschnitte wie angegeben zuordnet.

Theorem 2-40. *GS ist die kleinste ERZ-induktive Relation*
(i) GS $\in$ GSR und
(ii) Wenn $R \in$ GSR, dann GS $\subseteq R$.

Beweis: (ii) ergibt sich aus Definition 2-21. *Zu (i)*: Zu zeigen ist: a) GS $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$, b) $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq$ GS und c) für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq$ GS.

Dabei ergibt sich a) GS $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$ mit Theorem 2-39 und (ii). Da für alle $R \in$ GSR gilt, dass $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq R$, gilt mit Definition 2-21 auch b) $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq$ GS.

Nun ist zu zeigen, dass c) für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq$ GS. Sei dazu zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS. Um zu zeigen, dass $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq$ GS, ist nach Definition 2-21 zu zeigen, dass für alle $R \in$ GSR gilt, dass $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq R$. Sei nun $R \in$ GSR. Dann ergibt sich aus der Annahme, dass $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS, und (ii), dass $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq R$. Da nun nach Voraussetzung $R \in$ GSR ist, gilt mit Definition 2-20 $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq R$. Also gilt für alle $R \in$ GSR, dass

$\{\mathfrak{H}\} \times \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq R$ und damit ist $\{\mathfrak{H}\} \times \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq \text{GS}$. Also gilt für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq \text{GS}$: $\{\mathfrak{H}\} \times \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq \text{GS}$. ■

Mit dem vorhergehenden Theorem kann die folgende Definition im Anschluss an die obigen Erläuterungen informell so erläutert werden, dass mit ihr genau diejenigen Abschnitte in einer Sequenz als geschlossene Abschnitt in dieser Sequenz ausgezeichnet werden, die minimale geschlossene Abschnitte in dieser Sequenz sind oder die sich durch wiederholte Anwendung von ERZ aus diesen minimalen Abschnitten gewinnen lassen.

Definition 2-22. *Geschlossener Abschnitt*
$\mathfrak{A}$ <u>ist ein geschlossener Abschnitt in</u> $\mathfrak{H}$ gdw $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$.

Theorem 2-41. *Geschlossene Abschnitte sind minimal oder ERZ-erzeugt*
$(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$
gdw

(i) $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$

oder

(ii) $\mathfrak{H} \in$ SEQ und es gibt ein $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq \text{GS}$ und $\mathfrak{A} \in \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$.

Beweis: Die R-L-Richtung ergibt sich mit Theorem 2-40-(i) und Definition 2-20. Sei nun für die L-R-Richtung $X = \{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ oder $\mathfrak{H} \in$ SEQ und es gibt ein $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq \text{GS}$ und $\mathfrak{A} \in \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)\} \cap \text{GS}$. Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $X \in \text{GSR}$, dann folgt die Behauptung mit Theorem 2-40-(ii).

Mit Theorem 2-40-(i) gilt, dass $\text{GS} \in \text{GSR}$. Nach Definition 2-20 und der Definition von X gilt daher: $X \subseteq \text{GS} \subseteq \text{SEQ} \times \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$ und $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq X$.

Nun ist zu zeigen, dass für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq X$ gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq X$. Sei dazu zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ und $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq X$. Dann ist zunächst $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq \text{GS}$ und damit mit Theorem 2-40-(i) und Definition 2-20 auch $\{\mathfrak{H}\} \times \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq \text{GS}$. Sei nun $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \{\mathfrak{H}\} \times \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann ist $\mathfrak{A} \in \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann gibt es also ein $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$

mit $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq \text{GS}$ und $\mathfrak{A} \in \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$ und außerdem ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$. Also ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in X$. Also insgesamt $X \in \text{GSR}$. ■

Theorem 2-42. *Geschlossene Abschnitte sind SE- oder NE- oder EA-artige Abschnitte*
Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$, dann ist $\mathfrak{A}$ ein SE-, NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: Sei $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$. Dann gilt mit Theorem 2-41 und Theorem 2-37: $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}$ und $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ oder es gibt ein $G \in \text{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \times \text{Ran}(G) \subseteq \text{GS}$ und $\mathfrak{A} \in \text{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann ergibt sich die Behauptung unmittelbar mit Definition 2-14, Definition 2-15, Definition 2-16, Definition 2-17 und Theorem 2-35-(ii). ■

Theorem 2-43. $\emptyset$ *ist weder in* Dom(GS) *noch in* Ran(GS)
Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$, dann ist $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Beweis: Sei $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \text{GS}$. Dann gilt mit Theorem 2-42, dass $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Dann gilt mit Definition 2-11, Definition 2-12 und Definition 2-13, dass $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}$ und $\mathfrak{A} \in \text{ABS}(\mathfrak{H})$. Dann ist mit Theorem 2-1 und Definition 2-1 $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{A} \neq \emptyset$. ■

Theorem 2-42 zeigt, dass GS nur Paare von Sequenzen und SE- oder NE- oder EA-artigen Abschnitten in diesen Sequenzen enthält. Die ersten und letzten Glieder der Abschnitte verleihen ihnen also die Gestalt, wie sie aus den entsprechenden beweisnahen Schlussfiguren (bei NE mit den Widerspruchsgliedern in einem echten Anfangsabschnitt des betreffenden Abschnitts und bei PB mit der Partikularquantifikation vor dem jeweiligen EA-artigen Abschnitt) bekannt ist. Umgekehrt ist aber nicht jedes Paar aus einer Sequenz und einem Abschnitt in dieser Sequenz, der eine solche Gestalt hat, in GS enthalten. Das lässt sich unter Rückgriff auf Theorem 2-41 und Theorem 2-42 zeigen. Hier ein Beispiel für eine Sequenz und einen SE-artigen Abschnitt in dieser Sequenz, für die das geordnete Paar aus beiden nicht Element von GS ist:

Beispiel [2.1] Sei $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ die folgende Sequenz:

0	Sei	$P_{1.1}(c_1)$
1	Sei	$P_{1.1}(c_1)$
2	Also	$P_{1.1}(c_1) \rightarrow P_{1.1}(c_1)$

Erläuterung: Angenommen $(\mathfrak{H}^{[2.1]}, \mathfrak{H}^{[2.1]}) \in$ GS. Dann wäre nach Theorem 2-41 $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ oder es gäbe ein $G \in$ ANSUMF$(\mathfrak{H}^{[2.1]})$ mit $\{\mathfrak{H}^{[2.1]}\} \times$ Ran$(G) \subseteq$ GS und $\mathfrak{H}^{[2.1]} \in$ ERZ$(\langle\mathfrak{H}^{[2.1]}, G\rangle)$. Da $|$ANS$(\mathfrak{H}^{[2.1]})| = 2$, ist $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$. Also gibt es ein $G \in$ ANSUMF$(\mathfrak{H}^{[2.1]})$ mit $\{\mathfrak{H}^{[2.1]}\} \times$ Ran$(G) \subseteq$ GS und $\mathfrak{H}^{[2.1]} \in$ ERZ$(\langle\mathfrak{H}^{[2.1]}, G\rangle)$.

Dann ist $\mathfrak{H}^{[2.1]} \in$ ERZ$(\langle\mathfrak{H}^{[2.1]}, G\rangle)$. Dann gibt es ein $\mathfrak{B} \in$ ABS$(\mathfrak{H}^{[2.1]})$, so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ ist und min(Dom$(\mathfrak{H}^{[2.1]})$)+1 = min(Dom$(\mathfrak{B})$) und max(Dom$(\mathfrak{H}^{[2.1]})$) = max(Dom$(\mathfrak{B})$)+1. Dann ist $\mathfrak{B} = \{(1, \ulcorner$Sei $P_{1.1}(c_1)\urcorner)\}$. Da G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ sein muss, ist dann Ran$(G) = \{\{(1, \ulcorner$Sei $P_{1.1}(c_1)\urcorner)\}\}$.

Nun ist jedoch $\{(1, \ulcorner$Sei $P_{1.1}(c_1)\urcorner)\}$ kein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$. Nun gilt aber nach Annahme $\{\mathfrak{H}^{[2.1]}\} \times$ Ran$(G) \subseteq$ GS und damit $(\mathfrak{H}^{[2.1]}, \{(1, \ulcorner$Sei $P_{1.1}(c_1)\urcorner)\}) \in$ GS. Dann aber müsste nach Theorem 2-42 $\{(1, \ulcorner$Sei $P_{1.1}(c_1)\urcorner)\}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}^{[2.1]}$ sein. Aus der Annahme, dass $(\mathfrak{H}^{[2.1]}, \mathfrak{H}^{[2.1]}) \in$ GS ergibt sich also ein Widerspruch. Also $(\mathfrak{H}^{[2.1]}, \mathfrak{H}^{[2.1]}) \notin$ GS. ■

Theorem 2-44. *Geschlossene Abschnitte sind wenigstens zwei-elementig*
Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS, dann $2 \leq |\mathfrak{A}|$.

Beweis: Mit Theorem 2-31 gilt für alle SE- oder NE- oder EA-artigen Abschnitte $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$: $2 \leq |\mathfrak{A}|$. Mit Theorem 2-42 folgt das Theorem. ■

Theorem 2-45. *Jeder geschlossene Abschnitt hat einen minimalen geschlossenen Abschnitt zum Teilabschnitt*
Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS, dann gibt es einen minimalen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Sei $X = \{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid$ Es gibt einen minimalen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}\} \cap$ GS. Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $X \in$ GSR, dann folgt die Behauptung mit Theorem 2-40-(ii).

Zunächst ist $X \subseteq$ GS $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$ und $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq X$.

Nun ist zu zeigen, dass für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq X$ gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq X$. Sei dazu zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq X$. Dann ist zunächst $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq$ GS. Sei nun $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann ist zunächst $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS. Wegen $\mathfrak{A} \in \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$ gibt es sodann mit Theorem 2-35 ein $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist, ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\, \mathfrak{B} \neq \emptyset$ und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1 und $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Dann gibt es ein $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{B}$). Nun ist G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$. Also gilt mit Definition 2-9 für alle $r \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{B}$): es gibt ein $s \in$ Dom(G), so dass $r \in$ Dom($G(s)$). Also gibt es ein entsprechendes s für i. Dann ist nach Annahme $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq X$ und somit $(\mathfrak{H}, G(s)) \in X$ und damit gibt es einen minimalen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{C} \subseteq G(s)$. Nun gilt mit Theorem 2-24 $G(s) \subseteq \mathfrak{B}$ und somit $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$ und damit wegen $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ insgesamt $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Somit ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in X$. ■

Theorem 2-46. *Verhältnis von Folgerungs- und Annahmesätzen in geschlossenen Abschnitten*
Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS, dann $|\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| \leq |\mathrm{FS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}|$.

Beweis: Sei $X = \{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid$ Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann $|\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| \leq |\mathrm{FS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}|\} \cap$ GS. Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $X \in$ GSR, dann folgt die Behauptung mit Theorem 2-40-(ii) und Theorem 2-42.

Zunächst ist $X \subseteq$ GS $\subseteq$ SEQ $\times$ {$\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt}. Sodann gilt mit Theorem 2-33: {($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) | $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$} $\subseteq X$.

Nun ist zu zeigen, dass für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq X$ gilt: {$\mathfrak{H}$} $\times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq X$. Sei dazu zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq X$. Dann ist zunächst {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq$ GS. Sei nun ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) $\in$ {$\mathfrak{H}$} $\times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$). Dann ist zunächst ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) $\in$ GS. Wegen $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) gibt es sodann mit Theorem 2-35 ein $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1 und $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Dann ist mit Theorem 2-29 |ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A}$| $\leq$ 1+|ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{B}$| und 1+|FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{B}$| $\leq$ |FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A}$|. Nun gilt mit Definition 2-9-(iii-c) für alle $l \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{B}$): Es gibt ein $i \in$ Dom(G), so dass $l \in$ Dom($G(i)$) und andererseits gilt mit Theorem 2-24 für alle $i \in$ Dom(G): $G(i) \subseteq \mathfrak{B}$. Damit ist $\bigcup${ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(i)$ | $i \in$ Dom(G)} = ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{B}$. Sodann ist $\bigcup${FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(i)$ | $i \in$ Dom(G)} $\subseteq$ FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{B}$.

Sodann gilt wegen {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq X$ für alle $i \in$ Dom(G): ($\mathfrak{H}$, $G(i)$) $\in X$ und mithin |ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(i)$| $\leq$ |FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(i)$|. Nun gilt mit Theorem 2-22-(i) und Theorem 2-27 für alle $i, j \in$ Dom(G): Wenn $i \neq j$, dann $G(i) \cap G(j) = \emptyset$. Damit gilt für alle $i, j \in$ Dom(G): Wenn $i \neq j$, dann (ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(i)$) $\cap$ (ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(j)$) = $\emptyset$ und (FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(i)$) $\cap$ (FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(j)$) = $\emptyset$.

Somit gilt

$$|\bigcup\{\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap G(j) \mid j \in \text{Dom}(G)\}| = \sum_{j=0}^{\text{Dom}(G)-1} |\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap G(j)|$$

und

$$|\bigcup\{\text{FS}(\mathfrak{H}) \cap G(j) \mid j \in \text{Dom}(G)\}| = \sum_{j=0}^{\text{Dom}(G)-1} |\text{FS}(\mathfrak{H}) \cap G(j)|.$$

Sodann gilt wegen |ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(j)$| $\leq$ |FS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $G(j)$| für alle $j \in$ Dom(G) auch:

$$\sum_{j=0}^{\text{Dom}(G)-1} |\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap G(j)| \leq \sum_{j=0}^{\text{Dom}(G)-1} |\text{FS}(\mathfrak{H}) \cap G(j)|.$$

Damit gilt insgesamt:

$$|\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}| \leq 1+|\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B}| = 1+\sum_{j=0}^{\text{Dom}(G)-1} |\text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap G(j)| \leq$$

$$1+\sum_{j=0}^{\mathrm{Dom}(G)-1} |\mathrm{FS}(\mathfrak{H}) \cap G(j)| \leq 1+|\mathrm{FS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B}| \leq |\mathrm{FS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A}|.$$

Also ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in X$. ■

Theorem 2-47. *Jeder Annahmesatz in einem geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ liegt an dessen Anfang oder am Anfang eines echten geschlossenen Teilabschnitts von $\mathfrak{A}$*

Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \mathrm{GS}$, dann gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$:

(i) $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$

oder

(ii) Es gibt ein $\mathfrak{B}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{GS}$, so dass

a) $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und

b) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Sei $X = \{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid$ Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$: $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ oder es gibt ein $\mathfrak{B}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{GS}$, so dass $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\} \cap \mathrm{GS}$. Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $X \in \mathrm{GSR}$, dann folgt die Behauptung mit Theorem 2-40-(ii).

Zunächst ist $X \subseteq \mathrm{GS} \subseteq \mathrm{SEQ} \times \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$ und mit Definition 2-17, Definition 2-14-(i), Definition 2-15-(i), Definition 2-16-(i) und Theorem 2-41 gilt: $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq X$.

Nun ist zu zeigen, dass für alle $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ mit $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq X$ gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle) \subseteq X$. Sei dazu zunächst $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ und $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq X$. Dann ist zunächst $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{GS}$. Sei nun $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Dann ist zunächst $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \mathrm{GS}$. Mit $\mathfrak{A} \in \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$ gibt es sodann ein $\mathfrak{B} \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$, so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist, $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1$ und $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Sei nun $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ und $i \neq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann ergibt sich mit Theorem 2-30: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Dann ist $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})$. Nun ist G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$. Also gilt mit Definition 2-9 für alle $r \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})$: Es gibt ein $s \in \mathrm{Dom}(G)$, so dass $r \in \mathrm{Dom}(G(s))$. Also gibt es ein entsprechendes s für i. Dann ist $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(G(s))$ und nach Theorem 2-24 ist $G(s) \subseteq$

$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Sodann ist nach Annahme $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq X$ und somit $(\mathfrak{H}, G(s)) \in X$. Also gilt für alle $r \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(G(s))$: $r = \min(\mathrm{Dom}(G(s)))$ oder es gibt ein $\mathfrak{C}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}) \in \mathrm{GS}$, so dass $r = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ und $\min(\mathrm{Dom}(G(s))) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \max(\mathrm{Dom}(G(s)))$. Also ist $i = \min(\mathrm{Dom}(G(s)))$ oder es gibt ein entsprechendes $\mathfrak{C}$. Im ersten Fall ist $G(s)$) selber der gesuchte Abschnitt, denn mit $(\mathfrak{H}, G(s)) \in X$ gilt auch $(\mathfrak{H}, G(s)) \in \mathrm{GS}$. Sodann gilt dann nach Annahme $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i = \min(\mathrm{Dom}(G(s)))$ und $\max(\mathrm{Dom}(G(s))) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1 = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. Mit Theorem 2-44 gilt zudem $\min(\mathrm{Dom}(G(s))) < \max(\mathrm{Dom}(G(s)))$. Sei für den zweiten Fall $\mathfrak{C}$ wie gefordert. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \max(\mathrm{Dom}(G(s))) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit $\mathfrak{C}$ der gesuchte Abschnitt.

Also gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$: $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ oder es gibt ein $\mathfrak{B}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{GS}$, so dass $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Somit ist $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in X$. ■

Theorem 2-48. *Jeder geschlossene Abschnitt ist ein minimaler geschlossener Abschnitt oder ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt, dessen Annahmesätze am Anfang oder in echten geschlossenen Teilabschnitten liegen*

Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \mathrm{GS}$, dann:

(i) $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$

oder

(ii) $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt $\mathfrak{H}$, wobei für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i$ gilt: Es gibt ein $\mathfrak{B}$, so dass

a) $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$,

b) $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{GS}$,

c) $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und

d) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Sei $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \mathrm{GS}$. Sei nun $\mathfrak{A}$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt mit Theorem 2-42, dass $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und mit Theorem 2-47, dass es für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i$ ein entsprechendes $\mathfrak{B}$ gibt. ■

Theorem 2-49. *Geschlossene Abschnitte sind non-redundant, d.h. echte Anfangsabschnitte von geschlossenen Abschnitten sind keine geschlossenen Abschnitte*
Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS, dann gilt für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$): $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}\restriction i) \notin$ GS.

Beweis: Sei $X = \{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid (\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS und für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt: $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}\restriction i) \notin$ GS $\}$. Um das Theorem zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass $X \in$ GSR, dann folgt die Behauptung mit Theorem 2-40-(ii).

Zunächst ist $X \subseteq$ GS $\subseteq$ SEQ $\times$ $\{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt$\}$ und mit Definition 2-17, Definition 2-14-(ii), Definition 2-15-(ii), Definition 2-16-(ii), Theorem 2-41 und Theorem 2-42 gilt: $\{(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \mid \mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq X$.

Nun ist zu zeigen, dass für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq X$ gilt: $\{\mathfrak{H}\} \times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) $\subseteq X$. Sei dazu zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq X$. Dann ist zunächst $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS. Sei nun $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \{\mathfrak{H}\}$ $\times$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$). Dann ist $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) und damit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS. Sodann gibt es ein $\mathfrak{B}$ $\in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist und ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{B} \neq \emptyset$ und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$))+1 und $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Wäre es nun der Fall, dass $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}\restriction i) \in$ GS für ein $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$). Dann ist $\mathfrak{A}\restriction i$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt zunächst mit Theorem 2-7 min(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$)) = min(Dom($\mathfrak{A}$)) und damit mit Theorem 2-23 insbesondere dass für alle $j \in$ Dom(G) gilt: min(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$)) < min(Dom($\mathfrak{B}$)) $\leq$ min(Dom($G(j)$)).

Sodann ist mit Theorem 2-35-(iii) $\mathfrak{A}\restriction i$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt mit Theorem 2-41, dass es ein $G^* \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G^*) $\subseteq$ GS und $\mathfrak{A}\restriction i \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G^*\rangle$) gibt. Dann gilt mit Theorem 2-35, dass es ein $\mathfrak{B}' \in$ ABS($\mathfrak{H}$) gibt, so dass min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$))+1 = min(Dom($\mathfrak{B}'$)) und max(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$)) = i-1 = max(Dom($\mathfrak{B}'$))+1. Nun wird gezeigt, dass es ein $s \in$ Dom(G) gibt, so dass $\mathfrak{A}\restriction i \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G(\restriction s$+1)$\rangle$), was mit Theorem 2-35-(vii) im Widerspruch zu $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) steht.

Mit Theorem 2-35-(iv) gilt, dass es ein $l \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}\restriction i$) gibt, so dass min(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$)) = min(Dom($\mathfrak{A}$)) < l. Sei nun l_0 = max($\{l \mid l \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}\restriction i$) und min(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$)) < $l\}$. Dann ergibt sich mit $i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)) und Dom($\mathfrak{A}\restriction i$) $\subseteq$ Dom($\mathfrak{A}$), dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{A}\restriction i$)) < l_0 < max(Dom($\mathfrak{A}$)). Dann ist min(Dom($\mathfrak{B}$)) $\leq l_0 \leq$ max(Dom($\mathfrak{B}$)). Dann ist $l_0 \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{B}$). Nun ist G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$. Also gilt mit Definition 2-9, dass es ein $s \in$ Dom(G) gibt, so dass $l_0 \in$ Dom(G(s)). Dann ist $l_0 \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom(G(s)) und somit wegen $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq X \subseteq$ GS mit Theorem 2-47 min(Dom(G(s))) $\leq l_0 <$ max(Dom(G(s))). Sodann ist ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}{\restriction}i$) $\in$ GS und damit mit Theorem 2-47 $l_0 < i$-1. Damit gilt dann insgesamt, dass min(Dom($\mathfrak{A}{\restriction}i$)) < min(Dom($G$($s$))) < i-1.

Sei nun $k \leq s$. Weil G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ ist, gilt dann mit Definition 2-9 und Definition 2-7, dass min(Dom($\mathfrak{A}{\restriction}i$)) < min(Dom($G$($k$))) $\leq$ min(Dom(G(s))) < i-1 und damit min(Dom(G(k))) $\in$ Dom($\mathfrak{B}$'). Da $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq X$ $\subseteq$ GS, gilt mit Theorem 2-42 dann min(Dom(G(k))) $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{B}$'). Da G* eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$' in $\mathfrak{H}$ ist, gibt es dann ein $r \in$ Dom(G*), so dass min(Dom(G(k))) $\in$ Dom(G*(r)). Dann ist min(Dom(G(k))) $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom(G*(r)). Angenommen min(Dom(G*(r))) = min(Dom(G(k))). Dann gilt mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq X$ und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G*) $\subseteq$ GS, dass max(Dom(G(k))) $\leq$ max(Dom(G*(r))). Angenommen min(Dom(G*(r))) $\neq$ min(Dom(G(k))). Dann gilt mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G*) $\subseteq$ GS und Theorem 2-47, dass es ein $\mathfrak{C}$ gibt, so dass ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{C}$) $\in$ GS und min(Dom(G(k))) = min(Dom($\mathfrak{C}$)) und min(Dom(G*(r))) < min(Dom($\mathfrak{C}$)) < max(Dom($\mathfrak{C}$)) < max(Dom(G*(r))). Dann gilt mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq X$, dass max(Dom(G(k))) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{C}$)). Damit gilt mit Theorem 2-5-(i) in beiden Fällen G(k) $\subseteq G$*(r). Also gilt für alle $k \leq s$, dass es ein $r \in$ Dom(G*) gibt, so dass G(k) $\subseteq G$*(r).

Da G* eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}$' ist und max(Dom($\mathfrak{B}$')) = i-2 gilt damit insbesondere auch, dass max(Dom(G(s))) $\leq i$-2. Nun gilt, falls $\mathfrak{A}{\restriction}i$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass es $j \in$ Dom($\mathfrak{A}{\restriction}i$) gibt, so dass A($\mathfrak{H}_j$) = Γ und A($\mathfrak{H}_{i\text{-}2}$) = ⌜¬Γ⌝ oder A($\mathfrak{H}_j$) = ⌜¬Γ⌝ und A($\mathfrak{H}_{i\text{-}2}$) = Γ und für alle $r \in$ Dom(G*) gilt: j < min(Dom(G*(r))) oder max(Dom(G*(r))) $\leq j$. Gäbe es nun ein $k \leq s$, so dass min(Dom(G(k))) $\leq j$ < max(Dom(G(k))), dann gäbe es aber wie gezeigt auch ein $r \in$ Dom(G*), so dass G(k) $\subseteq$ G*(r) und damit min(Dom(G*(r))) $\leq j$ < max(Dom(G*(r))). Also gibt es, falls $\mathfrak{A}{\restriction}i$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, $j \in$ Dom($\mathfrak{A}{\restriction}i$), so dass A($\mathfrak{H}_j$) = Γ und A($\mathfrak{H}_{i\text{-}2}$) = ⌜¬Γ⌝ oder A($\mathfrak{H}_j$) = ⌜¬Γ⌝ und A($\mathfrak{H}_{i\text{-}2}$) = Γ und für alle $k \leq s$ gilt: j < min(Dom(G(k))) oder

$\max(\mathrm{Dom}(G(k))) \leq j$. Sodann gilt für alle $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')$, dass es ein $k \leq s$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(G(k))$. Zunächst ist $\mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}$ und damit gibt es für solche l ein $k \in \mathrm{Dom}(G)$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(G(k))$ und sodann würde bei $s < k$ mit Definition 2-9 und Definition 2-7 gelten, dass $l_0 < \max(\mathrm{Dom}(G(s))) < \min(\mathrm{Dom}(G(k))) \leq l$, während andererseits gelten müsste $l \leq l_0$.

Mit Definition 2-9 und Definition 2-7 ergibt sich, dass $G{\restriction}(s+1) \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$ und damit gilt insgesamt, dass $G{\restriction}(s+1)$ eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{B}'$ ist und damit auch $G{\restriction}(s+1) \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ und somit gilt zuletzt, dass $\mathfrak{A}{\restriction}i \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G{\restriction}(s+1)\rangle)$. Dies widerspricht jedoch Theorem 2-35-(vii). Also gibt es kein $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$, so dass $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}{\restriction}i) \in \mathrm{GS}$ und da $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in \mathrm{GS}$ ist damit insgesamt $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in X$. ■

Theorem 2-50. *Geschlossene Abschnitte sind durch ihren Anfang eindeutig bestimmt*
Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$, dann $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Angenommen $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Da $\mathfrak{A}'$ ein Abschnitt ist, ist somit $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')$ und damit $\mathfrak{A}'{\restriction}(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1) = \mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$, was mit Theorem 2-49 der Annahme widerspricht, dass $\mathfrak{A}'$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Ebenso ergibt sich bei $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, dass $\mathfrak{A}$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ wäre. Also ist $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ und damit $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. ■

Theorem 2-51. *ANS-umfassende Abschnittsfolgen für ein und denselben Abschnitt, deren Werte ausschließlich geschlossene Abschnitte sind, sind identisch*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und G, G^* ANS-umfassende Abschnittsfolgen für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ sind und $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{GS}$ und $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G^*) \subseteq \mathrm{GS}$, dann ist $G = G^*$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und seien G, G^* ANS-umfassende Abschnittsfolgen für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ und $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{GS}$ und $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G^*) \subseteq \mathrm{GS}$. Dann gilt zunächst mit Definition 2-9, dass $G, G^* \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})\setminus\{\emptyset\}$ und mit Theorem 2-24 gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(G)$, dass $G(i) \subseteq \mathfrak{A}$, und für alle $j \in \mathrm{Dom}(G^*)$ gilt, dass $G^*(j) \subseteq \mathfrak{A}$. Sodann gilt $\mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{Ran}(G^*)$. Sei nämlich $i \in \mathrm{Dom}(G)$. Dann ist $(\mathfrak{H}, G(i)) \in \mathrm{GS}$ und damit ist min(Dom($G(i)$)) $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$). Damit gibt es dann ein $j \in$ Dom(G^*), so dass min(Dom($G(i)$)) $\in$ Dom($G^*(j)$), und mit ($\mathfrak{H}$, $G^*(j)$) $\in$ GS und Theorem 2-47 und Theorem 2-49 gilt $G(i) \subseteq G^*(j)$. Analog ergibt sich, dass es ein $i^* \in$ Dom(G) gibt, so dass $G^*(j) \subseteq G(i^*)$. Dann ist $G(i) \subseteq G(i^*)$ und da mit Theorem 2-43 $G(i) \neq \emptyset$ und daher $G(i) \cap G(i^*) \neq \emptyset$, gilt dann mit Theorem 2-27, dass $G(i) = G(i^*)$ und damit, dass $G^*(j) \subseteq G(i)$, und somit insgesamt, dass $G^*(j) = G(i)$. Also ist $G(i) \in$ Ran(G^*). Also ist Ran(G) $\subseteq$ Ran(G^*). Analog ergibt sich, dass Ran(G^*) $\subseteq$ Ran(G) und damit insgesamt Ran(G) = Ran(G^*). Damit gilt mit Theorem 2-22-(iii) aber auch, dass Dom(G) = Dom(G^*).

Nun wird durch Induktion über i gezeigt, dass für alle $i \in$ Dom(G) = Dom(G^*) gilt, dass $G(i) = G^*(i)$ und damit auch $G = G^*$. Gelte dazu für alle $l < i$: Wenn $l \in$ Dom(G), dann $G(l) = G^*(l)$. Sei nun $i \in$ Dom(G). Wäre nun $G(i) \neq G^*(i)$. Dann wäre mit ($\mathfrak{H}$, $G(i)$) $\in$ GS und ($\mathfrak{H}$, $G^*(i)$) $\in$ GS und mit Theorem 2-50 min(Dom($G(i)$)) $\neq$ min(Dom($G^*(i)$)). Angenommen min(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G^*(i)$)). Dann gilt mit ($\mathfrak{H}$, $G(i)$) $\in$ GS, dass min(Dom($G(i)$)) $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$). Damit gibt es dann wiederum ein $j \in$ Dom(G^*), so dass min(Dom($G(i)$)) $\in$ Dom($G^*(j)$). Dann ergibt sich wie oben, dass $G^*(j) = G(i)$. Mit $G(i) \neq G^*(i)$ ist dann $G^*(j) \neq G^*(i)$ und damit $j \neq i$. Da G, $G^* \in$ ABSF($\mathfrak{H}$), gilt dann mit Definition 2-7 und min(Dom($G^*(j)$)) = min(Dom($G(i)$)) < min(Dom($G^*(i)$)), dass $j < i$. Nach I.V. gilt dann aber, dass $G(j) = G^*(j) = G(i)$ und andererseits gilt mit Theorem 2-22-(i) mit $j < i$, dass $G(j) \neq G(i)$. Widerspruch! Analog ergibt sich mit I.V. ein Widerspruch für min(Dom($G^*(i)$)) < min(Dom($G(i)$)). Also gilt min(Dom($G(i)$)) = min(Dom($G^*(i)$)) und damit $G(i) = G^*(i)$. ■

Theorem 2-52. *Liegt der Anfang eines geschlossenen Abschnitts $\mathfrak{A}'$ in einem geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$, dann ist $\mathfrak{A}'$ ein Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$*
Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind und min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$), dann $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und sei min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$). Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$). Dann gibt es mit Theorem 2-47 ein

$\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, so dass $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und min(Dom($\mathfrak{A}'$)) = min(Dom($\mathfrak{B}$)). Dann ergibt sich mit Theorem 2-50, dass $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$ und also, dass $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$. ■

Theorem 2-53. *Geschlossene Abschnitte sind durch ihre Ende eindeutig bestimmt*
Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{A}'$)), dann $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{A}'$)). Angenommen min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{A}'$)). Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{A}'$)) < max(Dom($\mathfrak{A}'$)) = max(Dom($\mathfrak{A}$)). Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$)) und min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{A}'$)). Damit gibt es mit Theorem 2-48 einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass min(Dom($\mathfrak{A}'$)) = min(Dom($\mathfrak{B}$)) und min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{B}$)) < max(Dom($\mathfrak{B}$)) < max(Dom($\mathfrak{A}$)). Dann gilt mit Theorem 2-50: $\mathfrak{A}' = \mathfrak{B}$. Dann gilt aber im Widerspruch zur Annahme: max(Dom($\mathfrak{A}'$)) = max(Dom($\mathfrak{B}$)) < max(Dom($\mathfrak{A}$)). Also ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)). Umgekehrt ergibt sich für min(Dom($\mathfrak{A}'$)) < min(Dom($\mathfrak{A}$)), dass max(Dom($\mathfrak{A}$)) < max(Dom($\mathfrak{A}'$)) – wiederum im Widerspruch zur Annahme. Somit ist insgesamt min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)) und min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}'$)) und damit min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{A}'$)). Daraus folgt mit Theorem 2-50 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$. ■

Theorem 2-54. *Echte Teilabschnittschaft zwischen geschlossenen Abschnitten*
Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind, dann:
min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$)\{min(Dom($\mathfrak{A}$))}
gdw
$\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$. (*L-R*): Sei min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$)\{min(Dom($\mathfrak{A}$))}. Also ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\neq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)) und damit auch $\mathfrak{A}' \neq \mathfrak{A}$. Außerdem ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$) und mit Theorem 2-52 $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$. Also $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$.

(*R-L*): Sei nun $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$). Sodann ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\neq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)), denn sonst würde mit Theorem 2-50 $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$ gelten. Also ist min(Dom($\mathfrak{A}'$)) $\in$ Dom($\mathfrak{A}$)\{min(Dom($\mathfrak{A}$))}. ■

Theorem 2-55. *Echte und unechte Teilabschnittschaft zwischen geschlossenen Abschnitten*
Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$, dann $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und sei $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$. Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})\setminus\{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$. Dann ist mit Theorem 2-54 $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann ist mit Theorem 2-50: $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$. ■

Theorem 2-56. *Inklusionsverhältnisse zwischen nicht-disjunkten geschlossenen Abschnitten*
Wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$, dann:
(i) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ gdw $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$,
(ii) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ gdw $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}$,
(iii) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ gdw $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,
(iv) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$ gdw $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$.

Zu (i): (*L-R*): Sei $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ Abschnitte sind und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$, gilt mit Theorem 2-9: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')$ oder $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$. Dann gilt mit der Voraussetzung $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})\setminus\{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$. Damit gilt mit Theorem 2-54: $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. (*R-L*): Sei umgekehrt $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. Dann gilt mit Theorem 2-54: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\setminus\{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\}$ und also: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$.

Zu (ii): Ergibt sich mit Theorem 2-50

Zu (iii): (*L-R*): Sei $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Dann gilt mit (i): $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$. Dann gilt mit Theorem 2-5-(i): $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Sodann ergibt sich mit $\mathfrak{A}' \subset \mathfrak{A}$ und Theorem 2-53: $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \neq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit insgesamt $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. (*R-L*): Sei $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann gilt mit Theorem 2-5-(i): $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{A}'$. Damit gilt mit (i) und (ii): weder $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ noch $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Also ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$.

Zu (iv): Ergibt sich mit (ii) und Theorem 2-53. ■

Theorem 2-57. *Geschlossene Abschnitte sind entweder disjunkt oder einer ist Teilabschnitt des anderen.*
Wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$ sind, dann: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$ oder $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ geschlossene Abschnitte in $\mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ oder $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Damit ergibt sich mit Theorem 2-56-(i) und -(ii): $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$. ■

Theorem 2-58. *Ein minimaler geschlossener Abschnitt $\mathfrak{A}'$ ist mit einem geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ elementfremd oder er ist ein Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $\mathfrak{A}'$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann: $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$ oder $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und sei $\mathfrak{A}'$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{A}'$ auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$. Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Wäre nämlich $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ ergäbe sich mit Theorem 2-56-(i): $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$. Dann wäre mit Theorem 2-54 $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}')\setminus\{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))\}$. Damit wäre einerseits $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \neq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Da $\mathfrak{A}$ nach Annahme ein geschlossener Abschnitt ist, wäre andererseits aber auch $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}') \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$ und damit müsste nach Definition 2-17, Definition 2-14, Definition 2-15 und Definition 2-16 $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Widerspruch! Also $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}'))$. Mit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}' \neq \emptyset$ und Theorem 2-56-(i) und -(ii) ergibt sich dann, dass $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$. ■

Das nächste Theorem bringt zum Ausdruck, dass es für jeden Abschnitt $\mathfrak{A}$, der wenigstens einen Annahmesatz enthält und in dem es für jeden Annahmesatz einen geschlossenen Teilabschnitt gibt, in dem der betreffende Annahmesatz liegt, immer eine ANS-umfassende Abschnittsfolge G für $\mathfrak{A}$ gibt, die die größten geschlossenen und voneinander disjunkten Teilabschnitte von $\mathfrak{A}$ so aufzählt, dass alle geschlossenen Teilabschnitte von $\mathfrak{A}$ erfasst werden.

Theorem 2-59 spielt später eine zentrale Rolle in den Beweisen von Theorem 2-67, Theorem 2-68, Theorem 2-69, welche mittelbar ein Kernstück im Vollständigkeits- und Korrektheitsnachweis darstellen: Mit diesen Theoremen wird später gezeigt, dass SE, NE und PB und nur SE, NE und PB Annahmen eliminieren können; Theorem 2-59 selbst ist dabei entscheidend für den Nachweis, dass SE, NE und PB Annahmen eliminieren können und mithin entscheidend für den Vollständigkeitsnachweis.

Theorem 2-59. *ERZ-Material-Bereitstellungs-Theorem*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$ und es für jedes $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$ einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ gibt, so dass $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, dann:
Es gibt ein $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, so dass

(i) G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist,
(ii) $\bigcup\mathrm{Ran}(G) = \bigcup\{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\}$ und
(iii) $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \{\mathfrak{H}\} \times \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\} \subseteq \mathrm{GS}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$, $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$ und gebe es für jedes $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$ einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Dann ergibt sich mit Definition 2-1 zunächst, dass $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$.

Sei $X = \{\mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in \mathrm{GS}$ und für alle $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$: Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}) \in \mathrm{GS}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, dann $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\}$. Zunächst gilt $X \subseteq \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$. Um Theorem 2-17 anwenden zu können wird gezeigt, dass für alle $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}' \in X$ mit $\mathfrak{A}^* \neq \mathfrak{A}'$ gilt, dass $\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$. Seien dazu $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}' \in X$ und $\mathfrak{A}^* \neq \mathfrak{A}'$. Mit $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}' \in X$ gilt $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}^*), (\mathfrak{H}, \mathfrak{A}') \in \mathrm{GS}$ und mit Theorem 2-57 dann $\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$ oder $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}'$ oder $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}^*$. Der zweite und dritte Fall werden zum Widerspruch geführt: Angenommen $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{A}'$. Wegen $\mathfrak{A}^* \in X$ gilt für alle $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$: Wenn $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}) \in \mathrm{GS}$ und $\mathfrak{A}^* \subseteq \mathfrak{C}$, dann $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{C}$. Wegen $\mathfrak{A}' \in X$ gilt $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}') \in \mathrm{GS}$. Mit der Fallannahme gilt dann $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}'$, was der früheren Annahme widerspricht. Analog folgt ein Widerspruch unter der Annahme von $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}^*$ für den dritten Fall. Also liegt der erste Fall vor: $\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$. Es gilt also für alle $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}' \in X$ mit $\mathfrak{A}^* \neq \mathfrak{A}'$, dass $\mathfrak{A}^* \cap \mathfrak{A}' = \emptyset$. Mit Theorem 2-17 gibt es $G \in \mathrm{ABSF}(\mathfrak{H})$, so dass $\mathrm{Ran}(G) = X$.

Nun wird gezeigt, dass G (i) bis (iii) erfüllt. Aus (i) folgt dann auch $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$.
Zu (i): Es muss noch gezeigt werden, dass

a) $G \neq \emptyset$,
b) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \min(\mathrm{Dom}(G(0)))$,
c) $\max(\mathrm{Dom}(G(\max(\mathrm{Dom}(G))))) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und
d) für alle $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ gilt: Es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(G)$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(G(i))$.

Mit Definition 2-9 folgt dann, dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist. Da ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A} \neq \emptyset$ und damit Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) $\neq \emptyset$, folgt zudem a) aus d). Da es außerdem für jedes $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) $\cap$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ gibt, so dass $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$, folgen d) und a) bereits daraus, dass

e) für alle $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in$ GS gibt es ein $i \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{B} \subseteq G(i)$.

Zu e): Gäbe es ein $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in$ GS, so dass es kein $i \in$ Dom(G) gibt, so dass $\mathfrak{B} \subseteq G(i)$. Sei k = min({j | Es gibt ein $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}) \in$ GS, so dass es kein $i \in$ Dom(G) gibt, so dass $\mathfrak{C} \subseteq G(i)$, und j = min(Dom($\mathfrak{C}$))}). Dann gibt es ein $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}) \in$ GS, so dass es kein $i \in$ Dom(G) gibt, so dass $\mathfrak{C} \subseteq G(i)$, und k = min(Dom($\mathfrak{C}$)). Sei nun $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}') \in$ GS und $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$. Dann gilt min(Dom($\mathfrak{C}'$)) $\leq k$. Sodann gilt für $\mathfrak{C}'$, dass es kein $i \in$ Dom(G) gibt, so dass $\mathfrak{C}' \subseteq G(i)$, denn sonst wäre auch $\mathfrak{C} \subseteq G(i)$ für dieses i. Also gilt wegen der Minimaliät von k, dass min(Dom($\mathfrak{C}'$)) = k. Damit gilt aber mit Theorem 2-50, dass $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$. Also gilt für alle $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{C}') \in$ GS und $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}'$, dass $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}'$. Also ist $\mathfrak{C} \in X$ und damit gibt es ein $i \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{C} = G(i)$. Widerspruch! Also gilt für alle $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ mit $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in$ GS, dass es ein $i \in$ Dom(G) gibt, so dass $\mathfrak{B} \subseteq G(i)$. *Zu b)*: Für alle $\mathfrak{B} \in$ Ran(G) = X gilt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$. Wegen $G \neq \emptyset$ ist auch $G(0) \in$ Ran(G) = X und daher $G(0) \subseteq \mathfrak{A}$. Also min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ min(Dom($G(0)$)). *Zu c)*: Mit $G \neq \emptyset$ ist max(Dom(G)) $\in$ Dom(G) und daher G(max(Dom(G))) $\in$ Ran(G) = X. Daraus folgt max(Dom(G(max(Dom(G))))) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$)).

Zu (ii): Sei $(i, \mathfrak{H}_i) \in \bigcup$Ran($G$). Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \bigcup X$. Also gibt es ein $\mathfrak{B} \in X$ mit $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$. Dann ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ und $(\mathfrak{H}, \mathfrak{B}) \in$ GS. Also $\mathfrak{B} \in$ {$\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$}. Also $(i, \mathfrak{H}_i) \in \bigcup${$\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$}. Aus e) folgt die Rückrichtung, also $\bigcup${$\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$} $\subseteq$ $\bigcup$Ran(G).

Zu (iii): (iii) folgt aus der Definition von X und Ran(G) = X. ■

Theorem 2-60. *Sind alle Folgenglieder einer ANS-umfassenden Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ geschlossene Abschnitte, dann ist jeder geschlossene Teilabschnitt von $\mathfrak{A}$ Teilabschnitt eines Folgengliedes*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS, dann gilt für alle $\mathfrak{C}$: Wenn $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann gibt es ein $i \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{C} \subseteq G(i)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ, $\mathfrak{A} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS. Sei nun $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist mit Definition 2-11 bis Definition 2-13 und Theorem 2-42 min(Dom($\mathfrak{C}$)) $\in$ ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A}$. Damit gibt es nach Definition 2-9-(iii-c) ein $i \in$ Dom(G), so dass min(Dom($\mathfrak{C}$)) $\in$ Dom($G(i)$) und nach Voraussetzung ist ($\mathfrak{H}$, $G(i)$) $\in$ GS. Dann folgt mit Theorem 2-52: $\mathfrak{C} \subseteq G(i)$. ■

Nachdem bisher vor allem Theoreme gezeigt wurden, die für alle geschlossenen Abschnitte gelten, liegt das Interesse später auch gerade bei den besonderen Eigenschaften von geschlossenen Abschnitten, insofern diese durch die Anwendung von Subjunktoreinführung (SE-geschlossene), Negatoreinführung (NE-geschlossene) und Partikularquantorbeseitigung (PB-geschlossene) entstehen. Daher werden nun für diese Arten von geschlossenen Abschnitten eigene Prädikate bereitgestellt, wobei jeder geschlossene Abschnitt einer dieser Arten angehört (Theorem 2-61).

Definition 2-23. *SE-geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt und ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Definition 2-24. *NE-geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt und ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Definition 2-25. *PB-geschlossener Abschnitt*

$\mathfrak{A}$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt und ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Theorem 2-61. *SE-, NE- und PB-geschlossene Abschnitte und nur diese sind geschlossene Abschnitte*

$\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$
gdw
$\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: Ergibt sich aus Definition 2-22, Definition 2-23, Definition 2-24, Definition 2-25 und Theorem 2-42. ■

Theorem 2-62. *Monotonie der '(F-)geschlossener Abschnitt'-Prädikate*

Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}' \in$ SEQ und $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}'$, dann:

(i) Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(ii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(iii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$

(iv) Wenn $\mathfrak{A}$ ein minimaler SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein minimaler SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$

(v) Wenn $\mathfrak{A}$ ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(vi) Wenn $\mathfrak{A}$ ein minimaler PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein minimaler PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(vii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$, und

(viii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$.

Beweis: Siehe Bemerkung 2-1. ■

Theorem 2-63. *Geschlossene Abschnitte bleiben in Verkettungen in der Anfangssequenz geschlossen*

Wenn $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann:

(i) Wenn $\mathfrak{A}$ ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$,

(ii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$,

(iii) Wenn $\mathfrak{A}$ ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$,

(iv) Wenn $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann ist $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$.

Beweis: Ergibt sich mit $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$ und Theorem 2-62-(i), -(ii), -(iii) und -(viii). ■

Theorem 2-64. *(F-)geschlossene Abschnitte in Beschränkungen*

Wenn $\mathfrak{H}$ eine Sequenz ist, dann:

(i) $\mathfrak{A}$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$,

(ii) $\mathfrak{A}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$,

(iii) $\mathfrak{A}$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$,

(iv) $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$,

(v) $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$,

(vi) $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$,

(vii) $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$, und

(viii) $\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ gdw $\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1$.

Beweis: Siehe Bemerkung 2-2. ■

Theorem 2-65. *Vorbereitungstheorem für Theorem 2-67, Theorem 2-68 und Theorem 2-69*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt, dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, dann gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$:

(i) $\mathfrak{A}\restriction i$ ist kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und

(ii) Es gibt kein $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, so dass $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{GS}$ und $\mathfrak{A}\restriction i \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und gelte für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Sei weiter $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$. Zunächst ist $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$. *Zu (i)*: Wäre nun $\mathfrak{A}\restriction i$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$, dann würde mit Theorem 2-64-(viii) gelten: $\mathfrak{A}\restriction i$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction i$. Ferner ist $i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit $\mathfrak{H}\restriction i \subseteq \mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und damit gilt mit Theorem 2-62-(viii): $\mathfrak{A}\restriction i$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Offenbar gilt mit Theorem 2-7 $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i)) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit mit Theorem 2-31 weder $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i))$ noch $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction i)) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, was der Voraussetzung widerspricht.

Zu (ii): Gäbe es nun ein $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, so dass $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{GS}$ und $\mathfrak{A}\restriction i \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)$. Sei nun $j = \min(\{i \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ und es gibt $G \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, so dass $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G) \subseteq \mathrm{GS}$ und $\mathfrak{A}\restriction i \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G\rangle)\})$. Dann gibt es $G^* \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$, so dass $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G^*) \subseteq \mathrm{GS}$ und $\mathfrak{A}\restriction j \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G^*\rangle)$. Wäre es nun der Fall, dass es ein $k \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction j)$ und ein $l \in \mathrm{Dom}(G^*)$ gäbe, so dass $\mathfrak{A}\restriction k \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G^*\restriction(l+1)\rangle)$. Dann ist nach Theorem 2-25 $G^*\restriction(l+1)$ eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}\restriction\max(\mathrm{Dom}(G^*(l))+1$. Damit ist dann nach Definition 2-10 $G^*\restriction(l+1) \in \mathrm{ANSUMF}(\mathfrak{H})$ und nach Annahme $\mathfrak{A}\restriction k \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G^*\restriction(l+1)\rangle)$ und andererseits $k < j$, was im Widerspruch zur Minimaliät von j steht. Also gibt es kein $k \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}\restriction j)$ und kein $l \in \mathrm{Dom}(G^*)$, so dass $\mathfrak{A}\restriction k \in \mathrm{PERZ}(\langle\mathfrak{H}, G^*\restriction(l+1)\rangle)$. Damit ist nach Definition 2-19 $\mathfrak{A}\restriction j \in \mathrm{ERZ}(\langle\mathfrak{H}, G^*\rangle)$ und damit mit $\{\mathfrak{H}\} \times \mathrm{Ran}(G^*) \subseteq \mathrm{GS}$ und Theorem 2-41 $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}\restriction j) \in \mathrm{GS}$ und also $\mathfrak{A}\restriction j$ im Widerspruch zu (i) ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. ■

Die folgenden vier Theoreme schließen Kap. 2.2 ab und stellen die Basis für den Nachweis der Korrektheit und der Vollständigkeit des Redehandlungskalküls bereit. Mit diesen Theoremen lässt sich später zeigen, dass SE resp. NE resp. PB und nur diese SE- resp.

NE- resp. PB-geschlossene Abschnitte und damit überhaupt geschlossene Abschnitte erzeugen.

Theorem 2-66. *Jeder geschlossene Abschnitt ist ein minimaler geschlossener Abschnitt oder ein SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt, dessen Annahmesätze am Anfang oder in echten geschlossenen Teilabschnitten liegen*

Wenn $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dann:

(i) $\mathfrak{A}$ ist minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$

oder

(ii) $\mathfrak{A}$ ist ein SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$, wobei für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i$ gilt: Es gibt ein $\mathfrak{B}$, so dass

a) $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$,

b) $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist,

c) $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ und

d) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Beweis: Ergibt sich aus Definition 2-22, Definition 2-23, Definition 2-24, Definition 2-25 und Theorem 2-48. ■

Theorem 2-67. *Vorbereitungstheorem für Theorem 2-91*

$\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und es gibt $\Delta, \Gamma \in \mathrm{GFORM}$, so dass

(i) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner \text{Sei } \Delta \urcorner$,

(ii) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,

(iii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \Gamma$,

(iv) Für jedes $r \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\text{-}1$ gibt es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathfrak{B}$, und

(v) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner \text{Also } \Delta \rightarrow \Gamma \urcorner$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: (*L-R*): Seien die Voraussetzungen für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ erfüllt und seien Δ und Γ wie gefordert. Dann ist zunächst $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$. Sodann ist mit Definition 2-11 $\mathfrak{A}$ ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sodann ergibt sich mit Klausel (ii) der Annahme und Theorem 2-65-(i), dass für alle $k \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ gilt, dass $\mathfrak{A}\restriction k$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist.

Sodann ist $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ oder es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\text{-}1$.

Gelte nun ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A}$ = {(min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}_{\text{min(Dom}(\mathfrak{A}))}$)}. Dann ergibt sich damit, dass für alle $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}{\upharpoonright}k$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, und Theorem 2-32, dass $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener und damit ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Da $\mathfrak{A}$ ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\mathfrak{A}$ damit ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Gebe es nun ein $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit min(Dom($\mathfrak{A}$)) $< i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1. Sei nun $\mathfrak{C}$ = {(l, $\mathfrak{H}_l$) | min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 $\leq l \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1}. Dann ist $\mathfrak{C}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}$). Sodann gibt es für jedes $r \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}$) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass (r, $\mathfrak{H}_r$) $\in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. Sei nämlich $r \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}$). Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}$)) $< r \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1 und somit gibt es nach Klausel (iv) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}{\upharpoonright}$max(Dom($\mathfrak{A}$)), so dass ($r$, $\mathfrak{H}_r$) $\in \mathfrak{B}$. Dann ist min(Dom($\mathfrak{C}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{B}$)), denn andernfalls wäre min(Dom($\mathfrak{B}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)) $< r \leq$ max(Dom($\mathfrak{B}$)), was Klausel (ii) widerspricht. Zum anderen ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{B}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}{\upharpoonright}$max(Dom($\mathfrak{A}$)) ist, dass max(Dom($\mathfrak{B}$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1 = max(Dom($\mathfrak{C}$)). Also ist mit Theorem 2-5 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$.

Damit erfüllt $\mathfrak{C}$ die Voraussetzungen von Theorem 2-59. Also gibt es ein $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$ ist und {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq$ GS. Nun gilt nach Definition von $\mathfrak{C}$, dass $\mathfrak{C} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{C}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{C}$))+1 und ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{C} \neq \emptyset$. Sodann ist $\mathfrak{A}$ ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Damit gilt mit Theorem 2-28 auch, dass $\mathfrak{A}$ kein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Ferner gilt damit, dass für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}{\upharpoonright}i$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass auch für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt: $\mathfrak{A}{\upharpoonright}i$ ist kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Damit ist gemäß Definition 2-18 $\mathfrak{A} \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$). Wäre es nun der Fall, dass es ein $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und ein $l \in$ Dom(G) gäbe, so dass $\mathfrak{A}{\upharpoonright}k \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G{\upharpoonright}(l+1)\rangle$). Dann ist nach Theorem 2-25 $G{\upharpoonright}(l+1)$ eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}{\upharpoonright}$max(Dom($G(l)$))+1. Damit ist dann nach Definition 2-10 $G{\upharpoonright}(l+1) \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und nach Annahme $\mathfrak{A}{\upharpoonright}k \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G{\upharpoonright}(l+1)\rangle$) und andererseits $\mathfrak{H} \in$ SEQ und {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran($G{\upharpoonright}(l+1)$) $\subseteq$ {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq$ GS, was insgesamt im Widerspruch zu Theorem 2-65-(ii) steht. Also gibt es kein $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und kein $l \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{A}{\upharpoonright}k \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G{\upharpoonright}(l+1)\rangle$). Damit ist nach Definition 2-19 $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}$, $G\rangle$) und weil {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq$ GS mit Theorem 2-41 auch $(\mathfrak{H}, \mathfrak{A}) \in$ GS und $\mathfrak{A}$ damit ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und somit ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

(*R-L*): Sei nun $\mathfrak{A}$ ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt und ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ergibt sich damit, dass $\mathfrak{A}$ ein SE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass es $\Delta, \Gamma \in$ GFORM gibt, so dass (i), (iii) und (v) erfüllt sind. Sodann gilt mit Theorem 2-48, dass (iv) gilt. (Falls $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt ist, gilt (iv) trivialerweise.)

Sei nun $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{B})$ und somit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Damit würde mit Theorem 2-56-(i) und -(ii) gelten, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Damit wäre aber $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \notin \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$. Widerspruch! Also ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Also gilt auch (iii).
■

Theorem 2-68. *Vorbereitungstheorem für Theorem 2-92*

$\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass

(i) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,

(ii) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner\text{Sei }\Delta\urcorner$,

(iii) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,

(iv) $A(\mathfrak{H}_i) = \Gamma$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$
oder
$A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \Gamma$,

(v) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $i < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i$,

(vi) Für jedes $r \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1$ gibt es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathfrak{B}$, und

(vii) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner\text{Also }\neg\Delta\urcorner$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: (*L-R*): Seien die Voraussetzungen für $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ erfüllt und seien Δ, Γ und i wie gefordert. Dann ist zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sodann ist mit Definition 2-12 $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sodann ergibt sich mit Klausel (iii) der Annahme und Theorem 2-65-(i), dass für alle $k \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$ gilt, dass $\mathfrak{A}\restriction k$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist.

Sodann ist ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A}$ = {(min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$)} oder es gibt ein i $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit min(Dom($\mathfrak{A}$)) < $i \leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1.

Gelte nun ANS($\mathfrak{H}$) $\cap$ $\mathfrak{A}$ = {(min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$)}. Dann ergibt sich damit, dass für alle k $\in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}{\restriction}k$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, und Theorem 2-32, dass $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener und damit ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Da $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\mathfrak{A}$ damit ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Gebe es nun ein s $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit min(Dom($\mathfrak{A}$)) < s $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1. Sei nun $\mathfrak{C}$ = {(l, $\mathfrak{H}_l$) | min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 $\leq$ l $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1}. Dann ist $\mathfrak{C}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und s $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}$). Sodann gibt es für jedes r $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}$) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass (r, $\mathfrak{H}_r$) $\in$ $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}$ $\subseteq$ $\mathfrak{C}$. Sei nämlich r $\in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}$). Dann ist min(Dom($\mathfrak{A}$)) < r $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1 und somit gibt es nach Klausel (vi) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}{\restriction}$max(Dom($\mathfrak{A}$)), so dass ($r$, $\mathfrak{H}_r$) $\in$ $\mathfrak{B}$. Dann ist min(Dom($\mathfrak{C}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{B}$)), denn andernfalls wäre min(Dom($\mathfrak{B}$)) $\leq$ min(Dom($\mathfrak{A}$)) < r $\leq$ max(Dom($\mathfrak{B}$)), was Klausel (iii) widerspricht. Zum anderen ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{B}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}{\restriction}$max(Dom($\mathfrak{A}$)) ist, dass max(Dom($\mathfrak{B}$)) $\leq$ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1 = max(Dom($\mathfrak{C}$)). Also ist mit Theorem 2-5 $\mathfrak{B}$ $\subseteq$ $\mathfrak{C}$.

Damit erfüllt $\mathfrak{C}$ die Voraussetzungen von Theorem 2-59. Also gibt es ein G $\in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$ ist und {$\mathfrak{H}$} $\times$ Ran(G) $\subseteq$ {$\mathfrak{H}$} $\times$ {$\mathfrak{C}$* | $\mathfrak{C}$* $\subseteq$ $\mathfrak{C}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$} $\subseteq$ {$\mathfrak{H}$} $\times$ {$\mathfrak{C}$* | $\mathfrak{C}$* $\subseteq$ $\mathfrak{A}$ ist ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$} $\subseteq$ GS. Nun gilt nach Definition von $\mathfrak{C}$, dass $\mathfrak{C}$ $\in$ ABS($\mathfrak{H}$) und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{C}$)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{C}$))+1 und $\mathfrak{A}$ ist ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sodann gilt für alle r $\in$ Dom(G): i < min(Dom(G(r))) oder max(Dom(G(r))) $\leq$ i. Sei nämlich r $\in$ Dom(G). Dann ist G(r) $\subseteq$ $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}{\restriction}$max(Dom($\mathfrak{A}$)). Somit gilt nach Klausel (v): i < min(Dom(G(r))) oder max(Dom(G(r))) $\leq$ i. Ferner gilt damit, dass für alle i $\in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}{\restriction}i$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass auch für alle i $\in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt: $\mathfrak{A}{\restriction}i$ ist kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Damit ist gemäß Definition 2-18 $\mathfrak{A}$ $\in$ PERZ(⟨$\mathfrak{H}$, G⟩). Wäre es nun der Fall, dass es ein k $\in$ Dom($\mathfrak{A}$) und ein l $\in$ Dom(G) gäbe, so dass $\mathfrak{A}{\restriction}k$ $\in$ PERZ(⟨$\mathfrak{H}$, $G{\restriction}$(l+1)⟩). Dann ist nach Theorem 2-25 $G{\restriction}$(l+1) eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}{\restriction}$max(Dom($G$($l$)))+1.

Damit ist dann nach Definition 2-10 $G\upharpoonright(l+1) \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und nach Annahme $\mathfrak{A}\upharpoonright k \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\upharpoonright(l+1)\rangle$) und andererseits $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran($G\upharpoonright(l+1)$) $\subseteq \{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS, was insgesamt im Widerspruch zu Theorem 2-65-(ii) steht. Also gibt es kein $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und kein $l \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{A}\upharpoonright k \in$ PERZ($\langle\mathfrak{H}, G\upharpoonright(l+1)\rangle$). Damit ist nach Definition 2-19 $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$) und damit mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS und Theorem 2-41 ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) $\in$ GS und $\mathfrak{A}$ damit ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und somit ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

(*R-L*): Sei nun $\mathfrak{A}$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt und ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sodann ist ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ oder es gibt ein $j \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < j \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$-1.

Erster Fall: Gelte nun ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$. Dann gilt mit Theorem 2-35-(iv) und Theorem 2-41, dass $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und damit, da $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass $\mathfrak{A}$ ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Dann ergibt sich, dass es Δ, $\Gamma \in$ GFORM und $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$) gibt, so dass (i), (ii), (iv) und (vii) erfüllt sind. Sodann gilt trivialerweise, dass (vi) gilt. Seien nun Δ, Γ und i wie in (i), (ii), (iv) und (vii) gefordert.

Dann gelten auch (iii) und (v). Sei nämlich $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann gilt, wenn $l = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ oder $l = i$, dann $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq l$. Da $\mathfrak{A}$ nämlich ein minimaler NE-geschlossener Abschnitt und damit ein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, gilt mit Theorem 2-58: $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} = \emptyset$ oder $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Da nun aber nach Annahme $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt, folgt $\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\} \in \mathfrak{A}\backslash\mathfrak{B}$ und somit $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{B}$ und daher $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} = \emptyset$. Für $l = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ oder $l = i$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq l < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ wäre andererseits aber $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$.

Zweiter Fall: Gebe es nun ein $j \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < j \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$-1. Dann ist $\mathfrak{A}$ kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gibt es mit Theorem 2-41 ein $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) $\subseteq$ GS und $\mathfrak{A} \in$ ERZ($\langle\mathfrak{H}, G\rangle$). Dann ist G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{C} = \{(l, \mathfrak{H}_l) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \leq l \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))\text{-}1\}$ in $\mathfrak{H}$. Sodann ist $\mathfrak{A}$ ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und damit gilt gemäß Definition 2-18 und Definition 2-19:

Es gibt Δ, $\Gamma \in$ GFORM und $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass

a) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,

b) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$,

c) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \Gamma$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$
oder
$\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \Gamma$,

d) Für alle $r \in \mathrm{Dom}(G)$ gilt: $i < \min(\mathrm{Dom}(G(r)))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(G(r))) \leq i$,

e) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Also $\neg\Delta\urcorner$.

Dann sind (i), (ii), (iv) und (vii) erfüllt. Sodann gilt mit Theorem 2-48 auch (vi).

Sodann gelten auch (iii) und (v). Sei nämlich $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Damit gilt: $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit $\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\} \in \mathfrak{A}\setminus\mathfrak{B}$ und somit $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{B}$. Ferner ergibt sich aus der Annahme, dass $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Damit gilt, dass $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} = \emptyset$ oder $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$. Sei nämlich $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{A} \neq \emptyset$. Dann gilt wegen $\mathfrak{A} \not\subseteq \mathfrak{B}$ mit Theorem 2-57 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ und somit mit Theorem 2-56: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Damit gilt insgesamt: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1 = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ und somit mit Theorem 2-5 $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$.

Damit ergibt sich mit Theorem 2-52 sofort, dass (iii) gilt, also dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Ferner gilt auch (v), also: $i < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i$. Wäre nämlich $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Dann wäre $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$. Nun ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und damit gilt mit Theorem 2-60: Es gibt ein $r \in \mathrm{Dom}(G)$, so dass $\mathfrak{B} \subseteq G(r)$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(G(r))) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \max(\mathrm{Dom}(G(r)))$. Andererseits müsste aber wegen d) gelten: $i < \min(\mathrm{Dom}(G(r)))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(G(r))) \leq i$. Widerspruch! Also muss gelten: $i < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i$. ■

Theorem 2-69. *Vorbereitungstheorem für Theorem 2-93*

$\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und es gibt $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, $\Gamma \in$ GFORM und $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$), so dass

(i) A($\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) = $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$,

(ii) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$,

(iii) $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}$ = $\ulcorner$Sei [β, ξ, Δ]$\urcorner$,

(iv) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1 < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1$,

(v) A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1}$) = Γ,

(vi) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$ = $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$,

(vii) $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta, \Gamma\}$),

(viii) Es gibt kein $j \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$, so dass $\beta \in$ TT($\mathfrak{H}_j$),

(ix) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\setminus\{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$ und

(x) Für jedes $r \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1$ gibt es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathfrak{C}$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: (*L-R*): Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und seien ξ, β, Δ, Γ und $\mathfrak{B}$ so wie gefordert. Dann ist zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sodann ist mit Definition 2-13 $\mathfrak{A}$ ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$, wobei $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1$. Sodann ergibt sich mit Klausel (iv) der Annahme und Theorem 2-65-(i), dass für alle $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}\restriction k$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist.

Sodann ist ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$ oder es gibt ein $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1$.

Gelte nun ANS($\mathfrak{H}$) $\cap\ \mathfrak{A} = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\}$. Dann ergibt sich damit, dass für alle $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}\restriction k$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, und Theorem 2-32, dass $\mathfrak{A}$ ein minimaler SE-, NE- oder PB-geschlossener und damit ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist. Da $\mathfrak{A}$ ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, ist $\mathfrak{A}$ damit ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Gebe es nun ein $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{A}$) mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1$. Sei nun $\mathfrak{C}^* = \{(l, \mathfrak{H}_l) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))+1 \leq l \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1\}$. Dann ist $\mathfrak{C}^*$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $i \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}^*$). Sodann gibt es für jedes $r \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}^*$) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}^*$. Sei nämlich $r \in$ Dom(ANS($\mathfrak{H}$)) $\cap$ Dom($\mathfrak{C}^*$). Dann ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq$

max(Dom($\mathfrak{A}$))-1 und somit gibt es nach Klausel (x) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright$max(Dom($\mathfrak{A}$)), so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathfrak{C}$. Dann ist min(Dom($\mathfrak{C}$*)) ≤ min(Dom($\mathfrak{C}$)), denn andernfalls wäre min(Dom($\mathfrak{C}$)) ≤ min(Dom($\mathfrak{A}$)) < r ≤ max(Dom($\mathfrak{C}$)), was Klausel (iv) widerspricht. Zum anderen ergibt sich daraus, dass $\mathfrak{C}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$max(Dom($\mathfrak{A}$)) ist, dass max(Dom($\mathfrak{C}$)) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$))-1 = max(Dom($\mathfrak{C}$*)). Also ist mit Theorem 2-5 $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}$*.

Damit erfüllt $\mathfrak{C}$* die Voraussetzungen von Theorem 2-59. Also gibt es ein $G \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$), so dass G eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{C}$* in $\mathfrak{H}$ ist und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) ⊆ GS. Nun gilt nach Definition von $\mathfrak{C}$*, dass $\mathfrak{C}$* ∈ ABS($\mathfrak{H}$) und min(Dom($\mathfrak{A}$))+1 = min(Dom($\mathfrak{C}$*)) und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = max(Dom($\mathfrak{C}$*))+1 und $\mathfrak{A}$ ist ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Angenommen, $\mathfrak{A}$ ist ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist Γ = ⌜¬[β, ξ Δ]⌝ und A($\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) = [β, ξ, Δ] und A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}$) = ⌜¬[β, ξ, Δ]⌝. Sodann gilt für alle $r \in$ Dom(G): min(Dom($\mathfrak{A}$)) < min(Dom($\mathfrak{C}$*)) ≤ min(Dom($G(r)$)). Ferner gilt damit, dass für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt, dass $\mathfrak{A}\upharpoonright i$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass auch für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{A}$) gilt: $\mathfrak{A}\upharpoonright i$ ist kein minimaler geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Damit ist gemäß Definition 2-18 $\mathfrak{A} \in$ PERZ(⟨$\mathfrak{H}$, G⟩). Wäre es nun der Fall, dass es ein $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und ein $l \in$ Dom(G) gäbe, so dass $\mathfrak{A}\upharpoonright k \in$ PERZ(⟨$\mathfrak{H}$, $G\upharpoonright(l+1)$⟩). Dann ist nach Theorem 2-25 $G\upharpoonright(l+1)$ eine ANS-umfassende Abschnittsfolge für $\mathfrak{A}\upharpoonright$max(Dom($G(l)$))+1. Damit ist dann nach Definition 2-10 $G\upharpoonright(l+1) \in$ ANSUMF($\mathfrak{H}$) und nach Annahme $\mathfrak{A}\upharpoonright k \in$ PERZ(⟨$\mathfrak{H}$, $G\upharpoonright(l+1)$⟩) und andererseits $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran($G\upharpoonright(l+1)$) ⊆ $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) ⊆ GS, was insgesamt im Widerspruch zu Theorem 2-65-(ii) steht. Also gibt es kein $k \in$ Dom($\mathfrak{A}$) und kein $l \in$ Dom(G), so dass $\mathfrak{A}\upharpoonright k \in$ PERZ(⟨$\mathfrak{H}$, $G\upharpoonright(l+1)$⟩). Damit ist nach Definition 2-19 $\mathfrak{A} \in$ ERZ(⟨$\mathfrak{H}$, G⟩) und damit mit $\{\mathfrak{H}\} \times$ Ran(G) ⊆ GS und Theorem 2-41 ($\mathfrak{H}$, $\mathfrak{A}$) ∈ GS und $\mathfrak{A}$ damit ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und somit ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

(*R-L*): Sei nun $\mathfrak{A}$ ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt und ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ergibt sich damit, dass $\mathfrak{A}$ ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, dass es ξ ∈ VAR, β ∈ PAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ}, Γ ∈ GFORM und ein $\mathfrak{B} \in$ ABS($\mathfrak{H}$) gibt, für die die Klauseln (i), (iii), und (v)-(ix) erfüllt sind. Sodann gilt mit Theorem 2-48, dass (x) gilt (falls $\mathfrak{A}$ ein minimaler geschlossener Abschnitt ist, gilt (x) trivialerweise). Außerdem ist min(Dom($\mathfrak{A}$)) = min(Dom($\mathfrak{B}$))+1.

Zu zeigen ist nun noch, dass auch (ii) und (iv) gelten. Dazu wird zuerst (iv) gezeigt. Sei dazu $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{C})$ und somit $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{C} \neq \emptyset$. Sodann würde mit Theorem 2-56 gelten, dass $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C}$. Damit wäre aber $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und somit $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \notin \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \neq \emptyset$. Widerspruch! Also ist $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Nun ist noch (ii) zu zeigen. Sei dazu $\mathfrak{C}$ wieder ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Angenommen $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Dann wäre $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Nun gilt mit (iv) – wie eben gezeigt – $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Da der erste Fall ausgeschlossen ist, gilt dann $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ und damit insgesamt $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Dann ist $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$. Andererseits ist $\mathfrak{C}$ mit Theorem 2-42 ein SE- oder ein NE- oder ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und damit müsste mit Theorem 2-29 gelten: $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \notin \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$. Widerspruch! Damit gilt $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Also gilt auch (ii). ■

2.3 VERS, VANS, VER und VAN

Unter Rückgriff auf Kap. 2.2 wird nun die Verfügbarkeitsrede etabliert. Dabei soll eine Aussage in einer Sequenz $\mathfrak{H}$ genau dann bei einem $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ verfügbar sein, wenn $(i, \mathfrak{H}_i)$ in keinem echten Anfangsabschnitt eines geschlossenen Abschnitts in $\mathfrak{H}$ liegt (Definition 2-26). Von allen Aussagen der Glieder eines geschlossenen Abschnitts $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$ ist also höchstens die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{A}$ bei irgendeinem $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A})$, nämlich gerade bei $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, in $\mathfrak{H}$ verfügbar. Die Funktion VERS ordnet sodann einer Sequenz $\mathfrak{H}$ die Teilmenge von $\mathfrak{H}$ zu, für deren Elemente $(i, \mathfrak{H}_i)$ gilt, dass die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist (Definition 2-28). Die Aussagen der Sätze aus VERS($\mathfrak{H}$) lassen sich sodann mit der Funktion VER zu VER($\mathfrak{H}$), der Menge der in $\mathfrak{H}$ an irgendeiner Stelle verfügbaren Aussagen, zusammenfassen (Definition 2-30). Sodann ordnet die Funktion VANS einer Sequenz $\mathfrak{H}$ die Teilmenge von $\mathfrak{H}$ zu, für deren Elemente $(i, \mathfrak{H}_i)$ gilt, dass $\mathfrak{H}_i$ ein Annahmesatz ist und dass die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist (Definition 2-29). Die Aussagen der Annahmesätze aus VANS($\mathfrak{H}$) lassen sich sodann wiederum mit der Funktion VAN zu VAN($\mathfrak{H}$), der Menge der in $\mathfrak{H}$ an irgendeiner Stelle angenommenen und an dieser Stelle noch verfügbaren Aussagen – kurz: zur Menge der in $\mathfrak{H}$ verfügbaren Annahmen – zusammenfassen (Definition 2-31).

Sodann werden Theoreme bewiesen, die zum einen Zusammenhänge zwischen VERS, VANS, VER und VAN und zum anderen Zusammenhänge zwischen der Fortsetzung einer Sequenz und Veränderungen in den Verfügbarkeitsverhältnissen etablieren. Für das Verständnis des Kalküls und die weitere Entwicklung sind dabei insbesondere Theorem 2-82, Theorem 2-83, Theorem 2-91, Theorem 2-92 und Theorem 2-93 entscheidend. Mit diesem Kapitel sind dann die Vorbereitungen abgeschlossen und im nächsten Kapitel kann der Redehandlungskalkül entwickelt und sodann in den weiteren Kapiteln untersucht werden.

Definition 2-26. *Verfügbarkeit einer Aussage in einer Sequenz an einer Stelle*

Γ ist in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar

gdw

$\Gamma \in$ GFORM und $\mathfrak{H} \in$ SEQ und

(i) $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$,

(ii) $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$ und

(iii) Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Definition 2-27. *Verfügbarkeit einer Aussage in einer Sequenz*

Γ ist in $\mathfrak{H}$ verfügbar

gdw

Es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass Γ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist.

Hinweis: Wenn der Bezug auf die Sequenz klar ist, werden auch kurz die Wendungen 'Γ ist bei i verfügbar' oder 'Γ ist verfügbar' gebraucht.

Definition 2-28. *Zuordnung der Menge der verfügbaren Sätze (VERS)*

VERS = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{(i, \mathfrak{H}_i) \mid i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$ ist in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar$\}\}$.

Definition 2-29. *Zuordnung der Menge der verfügbaren Annahmesätze (VANS)*

VANS = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})\}$.

Hinweis: Tatsächlich sind die Titel 'Zuordnung der Menge der … Sätze' insofern irreführend, als dass VERS und VANS Sequenzen keine Mengen von Sätzen zuordnen sondern Teilmengen dieser Sequenzen, also Mengen von geordneten Paaren, deren zweite Projektionen dann die entsprechenden Sätze sind.

Theorem 2-70. *Verhältnis von VANS, VERS und jeweiliger Sequenz*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann:

(i) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ und

(ii) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{H}$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus den Definitionen. ■

Definition 2-30. *Zuordnung der Menge der verfügbaren Aussagen (VER)*
VER = {($\mathfrak{H}$, X) | $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ und X = {Γ | Es gibt ein i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$)) und Γ = A($\mathfrak{H}_i$)}}.

Definition 2-31. *Zuordnung der Menge der verfügbaren Annahmen (VAN)*
VAN = {($\mathfrak{H}$, X) | $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ und X = {Γ| Es gibt ein i ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)) und Γ = A($\mathfrak{H}_i$)}}.

Theorem 2-71. *Verhältnis von VAN und VER*
Wenn $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ, dann VAN($\mathfrak{H}$) ⊆ VER($\mathfrak{H}$).

Beweis: Ergibt sich mit Theorem 2-70 direkt aus den Definitionen. ■

Theorem 2-72. *VERS-Inklusion impliziert VANS-Inklusion*
Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$' ∈ SEQ und VERS($\mathfrak{H}$) ⊆ VERS($\mathfrak{H}$'), dann VANS($\mathfrak{H}$) ⊆ VANS($\mathfrak{H}$').

Beweis: Seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$' ∈ SEQ und sei VERS($\mathfrak{H}$) ⊆ VERS($\mathfrak{H}$'). Sei nun (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$). Dann ist (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$) ∩ ANS($\mathfrak{H}$). Dann ist (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}_i$ ∈ ASATZ. Dann ist nach Voraussetzung (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$') und somit auch (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ $\mathfrak{H}$'. Da $\mathfrak{H}_i$ ∈ ASATZ, ist damit (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ ANS($\mathfrak{H}$') und damit insgesamt (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$') ∩ ANS($\mathfrak{H}$') = VANS($\mathfrak{H}$'). ■

Theorem 2-73. *VANS-Verringerung impliziert VERS-Verringerung*
Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$' ∈ SEQ und VANS($\mathfrak{H}$)\VANS($\mathfrak{H}$') ≠ ∅, dann VERS($\mathfrak{H}$)\VERS($\mathfrak{H}$') ≠ ∅.

Beweis: Seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$' ∈ SEQ und sei VANS($\mathfrak{H}$)\VANS($\mathfrak{H}$') ≠ ∅. Dann ist VANS($\mathfrak{H}$) ⊄ VANS($\mathfrak{H}$') und mit Theorem 2-72 folgt VERS($\mathfrak{H}$) ⊄ VERS($\mathfrak{H}$') und daher VERS($\mathfrak{H}$)\VERS($\mathfrak{H}$') ≠ ∅. ■

Theorem 2-74. *VERS-Inklusion impliziert VER-Inklusion*
Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$' ∈ SEQ und VERS($\mathfrak{H}$) ⊆ VERS($\mathfrak{H}$'), dann VER($\mathfrak{H}$) ⊆ VER($\mathfrak{H}$').

Beweis: Seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}$' ∈ SEQ und sei VERS($\mathfrak{H}$) ⊆ VERS($\mathfrak{H}$'). Sei nun Γ ∈ VER($\mathfrak{H}$). Dann gibt es ein i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$)), so dass Γ = A($\mathfrak{H}_i$). Dann ist (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$). Nach Voraussetzung ist dann (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$'). Nun ist VERS($\mathfrak{H}$') ⊆ $\mathfrak{H}$' und somit (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ $\mathfrak{H}$' und also $\mathfrak{H}_i$ = $\mathfrak{H}'_i$. Somit ist Γ = A($\mathfrak{H}_i$) = A($\mathfrak{H}'_i$). Also ist insgesamt i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$')) und Γ = A($\mathfrak{H}'_i$). Also ist Γ ∈ VER($\mathfrak{H}$'). ■

Theorem 2-75. *VANS-Inklusion impliziert VAN-Inklusion*
Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}' \in$ SEQ und VANS($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}'$), dann VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}'$).

Beweis: Seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}' \in$ SEQ und sei VANS($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}'$). Sei nun $\Gamma \in$ VAN($\mathfrak{H}$). Dann gibt es ein $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)) und Γ = A($\mathfrak{H}_i$). Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}$). Nach Voraussetzung ist dann $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}'$). Nun ist VANS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq \mathfrak{H}'$ und somit $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{H}'$ und also $\mathfrak{H}_i = \mathfrak{H}'_i$. Somit ist Γ = A($\mathfrak{H}_i$) = A($\mathfrak{H}'_i$). Also ist insgesamt $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}'$)) und Γ = A($\mathfrak{H}'_i$). Also ist $\Gamma \in$ VAN($\mathfrak{H}'$). ■

Theorem 2-76. *VAN ist höchstens so groß wie VANS*
Für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ: |VAN($\mathfrak{H}$)| $\leq$ |VANS($\mathfrak{H}$)|.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Nach Definition 2-31 ist dann f : VAN($\mathfrak{H}$) $\rightarrow$ VANS($\mathfrak{H}$), $f(\Gamma)$ = (min($\{i \mid i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)) und A($\mathfrak{H}_i$) = $\Gamma\}$), $\mathfrak{H}_{\min(\{i \mid i \in \mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})) \text{ und } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \Gamma\})}$) eine Injektion von VAN($\mathfrak{H}$) in VANS($\mathfrak{H}$). ■

Theorem 2-77. *VAN ist dann und nur dann leer, wenn auch VANS leer ist*
Für alle $\mathfrak{H} \in$ SEQ: |VAN($\mathfrak{H}$)| = 0 gdw |VANS($\mathfrak{H}$)| = 0.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sei |VAN($\mathfrak{H}$)| $\neq$ 0. Dann ist mit Theorem 2-76 auch |VANS($\mathfrak{H}$)| $\neq$ 0. Sei nun |VANS($\mathfrak{H}$)| $\neq$ 0. Dann gibt es $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}$) und mit Definition 2-31 ist dann A($\mathfrak{H}_i$) $\in$ VAN($\mathfrak{H}$) und damit |VAN($\mathfrak{H}$)| $\neq$ 0. Damit ist insgesamt |VAN($\mathfrak{H}$)| $\neq$ 0 gdw |VANS($\mathfrak{H}$)| $\neq$ 0, woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. ■

Theorem 2-78. *Bei non-redundantem VANS ist jede Annahme an genau einer Stelle als Annahme verfügbar*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und |VAN($\mathfrak{H}$)| = |VANS($\mathfrak{H}$)|, dann gilt für alle $\Gamma \in$ VAN($\mathfrak{H}$): Es gibt genau ein $j \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)), so dass Γ = A($\mathfrak{H}_j$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und |VAN($\mathfrak{H}$)| = |VANS($\mathfrak{H}$)|. Dann gilt nach Theorem 2-70-(ii), dass VANS($\mathfrak{H}$) $\subseteq \mathfrak{H}$ und damit mit $\mathfrak{H} \in$ SEQ und Definition 1-24 und Definition 1-23, dass |VAN($\mathfrak{H}$)| = |VANS($\mathfrak{H}$)| = k für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei nun $\Gamma \in$ VAN($\mathfrak{H}$). Dann ist $k > 0$. Sodann gibt es nach Definition 2-31 ein $j \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)), so dass Γ = A($\mathfrak{H}_j$). Sei nun $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)) und Γ = A($\mathfrak{H}_i$). Wäre nun $i \neq j$. Dann ist |VANS($\mathfrak{H}$)\{$(j, \mathfrak{H}_j)$}| = k-1 und andererseits ist f : VAN($\mathfrak{H}$) $\rightarrow$ VANS($\mathfrak{H}$)\{$(j, \mathfrak{H}_j)$}, f(B) = (min($\{l \mid l \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$)\{$(j, \mathfrak{H}_j)$}) und A($\mathfrak{H}_l$) = B$\}$), $\mathfrak{H}_{\min(\{l \mid l \in \mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})\setminus\{(j, \mathfrak{H}_j)\}) \text{ und } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_l) = \mathrm{B}\})}$) eine

Injektion von VAN($\mathfrak{H}$) in VANS($\mathfrak{H}$)\{(j, $\mathfrak{H}_j$)}) und somit k = |VAN($\mathfrak{H}$)| ≤ k-1. Widerspruch! ■

Theorem 2-79. *VERS, VANS, VER und VAN in Verkettungen mit ein-gliedrigen Sequenzen*
Wenn $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ ∈ SEQ und Dom($\mathfrak{H}'$) = 1, dann:

(i) VERS($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$) ⊆ VERS($\mathfrak{H}$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)},
(ii) VANS($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$) ⊆ VANS($\mathfrak{H}$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)},
(iii) VER($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$) ⊆ VER($\mathfrak{H}$) ∪ {K($\mathfrak{H}'$)},
(iv) VAN($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$) ∪ {K($\mathfrak{H}'$)}.

Beweis: Seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ ∈ SEQ und sei Dom($\mathfrak{H}'$) = 1.

Zu (i): Sei (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$). Dann ist i ∈ Dom($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$) und A(($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ist in $\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$ bei i verfügbar. Sodann ist i ∈ Dom($\mathfrak{H}$) oder i = Dom($\mathfrak{H}$).

Sei nun i ∈ Dom($\mathfrak{H}$). Dann ist ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$ = $\mathfrak{H}_i$. Wäre nun A($\mathfrak{H}_i$) = A(($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) in $\mathfrak{H}$ bei i nicht verfügbar. Dann gäbe es nach Definition 2-26 ein $\mathfrak{A}$, so dass $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ i < max(Dom($\mathfrak{A}$)). Mit Theorem 2-62-(viii) wäre dann wegen $\mathfrak{H}$ ⊆ $\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$ allerdings $\mathfrak{A}$ auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$ und min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ i < max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit wäre A(($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) aber in $\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$ bei i nicht verfügbar. Also ist i ∈ Dom($\mathfrak{H}$) und A(($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ist in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar und somit (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$).

Sei nun i = Dom($\mathfrak{H}$). Dann ist ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$ = ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$ = $\mathfrak{H}'_0$ und damit (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) = (Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$) ∈ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)}.

Zu (ii): Sei (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$). Dann ist mit Theorem 2-70 (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$) und ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$ ∈ ASATZ. Dann ist mit (i) (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)}. Angenommen (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∉ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)}. Dann ist (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$). Dann ist (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$) und ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$ ∈ ASATZ und damit ist (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$).

Zu (iii): Sei Γ ∈ VER($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$). Dann gibt es ein i ∈ Dom($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$), so dass Γ in $\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$ bei i verfügbar ist. Dann ist Γ = A(($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) und (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$). Damit ist mit (i) (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)}. Sei nun (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$). Dann ist i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$)) und $\mathfrak{H}_i$ = ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$ und somit Γ = A($\mathfrak{H}_i$) ∈ VER($\mathfrak{H}$). Sei nun (i, ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$) ∈ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_0$)}. Dann ist i = Dom($\mathfrak{H}$) und ($\mathfrak{H}$⁀$\mathfrak{H}'$)$_i$ = $\mathfrak{H}'_0$ und somit Γ = A($\mathfrak{H}'_0$) = K($\mathfrak{H}'$) ∈ {K($\mathfrak{H}'$)}.

Zu (iv): Sei $\Gamma \in \text{VAN}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')$. Dann gibt es ein $i \in \text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'))$ und $\Gamma = \text{A}((\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i)$. Dann ist $(i, (\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i) \in \text{VANS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')$ und mit (ii) ist $(i, (\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i) \in \text{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_0)\}$. Sei nun $(i, (\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i) \in \text{VANS}(\mathfrak{H})$. Dann ist $i \in \text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))$ und $\mathfrak{H}_i = (\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i$ und somit $\Gamma = \text{A}(\mathfrak{H}_i) \in \text{VAN}(\mathfrak{H})$. Sei nun $(i, (\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i) \in \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_0)\}$. Dann ist $i = \text{Dom}(\mathfrak{H})$ und $(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}')_i = \mathfrak{H}'_0$ und somit $\Gamma = \text{A}(\mathfrak{H}'_0) = \text{K}(\mathfrak{H}') \in \{\text{K}(\mathfrak{H}')\}$. ■

Theorem 2-80. *VERS, VANS, VER und VAN in Verkettungen mit beliebigen Sequenzen*
Wenn $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in \text{SEQ}$, dann:

(i) $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}') \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, \mathfrak{H}'_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}')\}$,

(ii) $\text{VANS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}') \subseteq \text{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, \mathfrak{H}'_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}')\}$.

Beweis: Beweis per Induktion über $\text{Dom}(\mathfrak{H}')$. Für $\text{Dom}(\mathfrak{H}') = 0$ folgt die Induktionsbasis mit $\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$. Angenommen, für alle $\mathfrak{H}^* \in \text{SEQ}$ mit $\text{Dom}(\mathfrak{H}^*) = j$ gilt das Theorem. Zu (i) gilt also $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}^*) \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, \mathfrak{H}^*_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}^*)\}$ für alle $\mathfrak{H}^* \in \text{SEQ}$ mit $\text{Dom}(\mathfrak{H}^*) = j$. Sei nun $\text{Dom}(\mathfrak{H}') = j+1$. Dann ist $\text{Dom}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) = j$. Also ist nach I.V. $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)) \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, (\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\} = \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, \mathfrak{H}'_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}$. Nun ist $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}') = \text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)^\frown\{(0, \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\})$. Nach Theorem 2-79 ist aber $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)^\frown\{(0, \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\}) \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^\frown(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\} = \text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+(\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\}$. Also insgesamt $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}') \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, \mathfrak{H}'_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+(\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\}$ und damit $\text{VERS}(\mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}') \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})+i, \mathfrak{H}'_i) \mid i \in \text{Dom}(\mathfrak{H}')\}$. Der Beweis zu (ii) verläuft analog. ■

Theorem 2-81. *VERS, VANS, VER und VAN in Beschränkungen auf* $\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$
Wenn $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}$, dann:

(i) $\text{VERS}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$,

(ii) $\text{VANS}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$,

(iii) $\text{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{\text{A}(\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$,

(iv) $\text{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{\text{A}(\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}$. Sei $\mathfrak{H} = \emptyset$. Dann ist $\text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \text{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \text{VER}(\mathfrak{H}) \cup \text{VAN}(\mathfrak{H}) = \emptyset$ und damit gilt die Behauptung. Sei nun $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Dann ist $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)^\frown\{(0, \mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$ und die Behauptung ergibt sich mit Theorem 2-79. ■

Theorem 2-82. *Die Konklusion ist immer verfügbar*
Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}\backslash\{\emptyset\}$, dann ist $\mathrm{K}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{H}$ bei $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 verfügbar.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}\backslash\{\emptyset\}$. Dann gilt für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$: $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ und also gibt es keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Also ist $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$ in $\mathfrak{H}$ bei $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 verfügbar. ■

Theorem 2-83. *Zusammenhang von Nichtverfügbarkeit und der Entstehung eines geschlossenen Abschnitts beim Übergang von* $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ *auf* $\mathfrak{H}$
Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$, dann:
Es gibt ein $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und

(i) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$,

(ii) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ gilt: $\mathfrak{B}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cap \mathfrak{C} = \emptyset$ oder $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$,

(iii) Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}^*$ in $\mathfrak{H}$ gilt: Wenn $\mathfrak{C}^*$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ ist, dann ist $\mathfrak{C}^* = \mathfrak{B}$,

(iv) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \subseteq \{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$,

(v) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) = (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$,

(vi) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$,

(vii) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$,

(viii) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$,

(ix) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\} \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$,

(x) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$ und

(xi) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und sei $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Dann gibt es nach Definition 2-28 ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$, so dass $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$. Dann ist $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \neq \emptyset$ und damit $\mathfrak{H} \neq \emptyset$.

Dann gilt nach Definition 2-28 und Definition 2-26, dass es kein $\mathfrak{B}'$ gibt, so dass $\mathfrak{B}'$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ ist und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))$ und dass es ein $\mathfrak{B}$ gibt, so dass $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$.

Zu (i): Es ist zunächst $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$. Wäre nun $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2 < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Dann wäre mit Theorem 2-44 $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) <$

max(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-1. Widerspruch! Also ist min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-2. Wäre nun max(Dom($\mathfrak{B}$)) < Dom($\mathfrak{H}$)-1. Dann wäre min(Dom($\mathfrak{B}$)) < max(Dom($\mathfrak{B}$)) < Dom($\mathfrak{H}$)-1 und mit Theorem 2-64-(viii) und Theorem 2-62-(viii) $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 und es wäre min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ i < max(Dom($\mathfrak{B}$)). Damit wäre aber $(i, \mathfrak{H}_i) \notin$ VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1). Also gilt, dass max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1 und damit insgesamt, dass min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-2 und max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1.

Zu (ii): Sei $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1. Sei nun $\mathfrak{B}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 ∩ $\mathfrak{C}$ ≠ ∅. Dann ist $\mathfrak{B}$ ∩ $\mathfrak{C}$ ≠ ∅. Dann gilt mit Theorem 2-57: $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$. Da aber $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 und (Dom($\mathfrak{H}$)-1, $\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$) ∈ $\mathfrak{B}$, gilt $\mathfrak{B} \not\subseteq \mathfrak{C}$. Damit gilt $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{B}$. Damit gilt mit Theorem 2-56-(i) und -(iii): min(Dom($\mathfrak{B}$)) < min(Dom($\mathfrak{C}$)) und max(Dom($\mathfrak{C}$)) < max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1.

Zu (iii): Sei $\mathfrak{C}$* ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$, aber kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1. Dann ist max(Dom($\mathfrak{C}$*)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1. Es gilt nämlich: max(Dom($\mathfrak{C}$*)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-1. Wäre nun max(Dom($\mathfrak{C}$*)) < Dom($\mathfrak{H}$)-1, dann wäre mit Theorem 2-64-(viii) und Theorem 2-62-(viii) $\mathfrak{C}$* entgegen der Voraussetzung ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1. Also gilt Dom($\mathfrak{H}$)-1 ≤ max(Dom($\mathfrak{C}$*)) und somit insgesamt max(Dom($\mathfrak{C}$*)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1 = max(Dom($\mathfrak{B}$)). Damit ergibt sich mit Theorem 2-53, dass $\mathfrak{C}$* = $\mathfrak{B}$.

Zu (iv): Sei $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VERS($\mathfrak{H}$). Dann gibt es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$, so dass min(Dom($\mathfrak{C}$)) ≤ i < max(Dom($\mathfrak{C}$)) und $\mathfrak{C}$ kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 ist. Dann gilt mit (iii): $\mathfrak{C}$ = $\mathfrak{B}$ und somit min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ i < max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1. Damit gilt dann $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ {$(j, \mathfrak{H}_j)$ | min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)-1}.

Zu (v): Sei zunächst $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ VERS($\mathfrak{H}$). Dann gilt zunächst mit Theorem 2-81-(i): $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, $\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$)}. Sodann gilt, dass es keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$ gibt, so dass min(Dom($\mathfrak{C}$)) ≤ i < max(Dom($\mathfrak{C}$)). Da $\mathfrak{B}$ nun ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, gilt dann mit (i): $(i, \mathfrak{H}_i) \notin$ {$(j, \mathfrak{H}_j)$ | min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)-1}. Damit ergibt sich dann: $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ (VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)\{$(j, \mathfrak{H}_j)$ | min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)-1}) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, $\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$)}.

Sei nun umgekehrt $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ (VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)\{$(j, \mathfrak{H}_j)$ | min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)-1}) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, $\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$)}. Sei zunächst $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)\{$(j, \mathfrak{H}_j)$ | min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)-1}. Wäre nun $(i, \mathfrak{H}_i) \notin$ VERS($\mathfrak{H}$). Dann wäre $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VERS($\mathfrak{H}$) und $(i, \mathfrak{H}_i) \notin$ {$(j, \mathfrak{H}_j)$ | min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)-1}, was im Widerspruch zu (iv) steht. Also ist im ersten Fall $(i, \mathfrak{H}_i)$ ∈ VERS($\mathfrak{H}$). Sei nun

$(i, \mathfrak{H}_i) \in \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$. Dann ist $i = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$ und damit gilt mit Theorem 2-82 auch im zweiten Fall: $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$.

Zu (vi): Sei zunächst $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\backslash(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$. Da $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \subseteq \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ und somit $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$ und insgesamt $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$. Somit gilt mit (iv) und (i): $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathfrak{B}$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B}$ und somit gibt es mit Theorem 2-47 ein $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Wegen $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ ist $\mathfrak{C}$ dann kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ und daher mit (iii) $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}$ und daher $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) = (\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})$.

Nun zum Nachweis von $\{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\} \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Zunächst ist $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$. Angenommen, es gäbe einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Dann ist $\mathfrak{C} \cap \mathfrak{B}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \neq \emptyset$. Damit würde aber mit (ii) gelten: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Widerspruch! Also gibt es keinen entsprechenden geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ und somit ist $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Sodann gibt es mit $\mathfrak{B}$ selbst einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}'$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}')) \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}'))$ und somit ist $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ und daher insgesamt $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$.

Zu (vii): Sei zunächst $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ oder $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Sei nun $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ und damit mit (vi): $(i, \mathfrak{H}_i) \in \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Also gilt in beiden Fällen: $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$.

Sei nun umgekehrt $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Sei nun zunächst $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt mit Theorem 2-81-(ii): $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$. Nun gilt aber mit (i) $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ und da $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und damit ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, ist damit mit Theorem 2-29 $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) \notin \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ und somit ist $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$. Damit ist dann

$(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Sei nun $(i, \mathfrak{H}_i) \in \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Dann gilt mit (vi) ebenfalls $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Zu (viii): Sei $\Gamma \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VER}(\mathfrak{H})$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$, denn sonst wäre $\Gamma \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$. Dann gilt mit (iv): $(i, \mathfrak{H}_i) \in \{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$. Dann ist $\Gamma \in \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$.

Zu (ix): Sei $\Gamma \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, so dass $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und damit auch $i < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$. Sodann ist $\Gamma \in \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$ oder $\Gamma \notin \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$. Sei nun $\Gamma \notin \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$. Damit ist dann auch $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$ und somit insgesamt $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$. Mit (v) ist dann $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$ und mit $i < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ gilt $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$. Also ist $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und damit $\Gamma \in \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\}$. Also gilt in beiden Fällen: $\Gamma \in \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\} \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\}$.

Zu (x): Sei $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$. Dann ist $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$, denn sonst wäre $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Dann ergibt sich mit (vi): $(i, \mathfrak{H}_i) = (\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})$. Dann ist $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$.

Und zuletzt zu (xi): Mit (vii) gilt: $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Damit gilt: $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ gdw es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$ gdw es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})) \cup \{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))\}$ und $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$ gdw $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Also gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. ■

Theorem 2-84. *VERS-Verringerung beim Übergang von* $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ *zu* $\mathfrak{H}$ *dann und nur dann, wenn dabei ein neuer geschlossener Abschnitt erzeugt wird*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$, dann:
$\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$
gdw
Es gibt ein $\mathfrak{B}$, so dass
(i) $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und
(ii) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Die Links-Rechts-Richtung ergibt sich unmittelbar mit Theorem 2-83. Gebe es nun für die Rechts-Links-Richtung ein $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-2 und max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1. Dann gilt: (min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VERS($\mathfrak{H}$). Zunächst ist nämlich (min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) ∉ VERS($\mathfrak{H}$), da es mit $\mathfrak{B}$ selbst einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$' in $\mathfrak{H}$ gibt, so dass min(Dom($\mathfrak{B}$')) ≤ min(Dom($\mathfrak{B}$)) < max(Dom($\mathfrak{B}$')).

Sei nun $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1. Dann gilt wegen $\mathfrak{C}$ ⊆ $\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1 und (Dom($\mathfrak{H}$)-1, $\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) ∈ $\mathfrak{B}$, dass $\mathfrak{B}$ ⊄ $\mathfrak{C}$. Damit gilt aber mit Theorem 2-52: min(Dom($\mathfrak{B}$)) ∉ Dom($\mathfrak{C}$). Somit gibt es keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}$, so dass min(Dom($\mathfrak{C}$)) ≤ min(Dom($\mathfrak{B}$)) < max(Dom($\mathfrak{C}$)) und daher gilt: (min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) und insgesamt: (min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VERS($\mathfrak{H}$). ■

Theorem 2-85. *VANS-Verringerung beim Übergang von* $\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1 *zu* $\mathfrak{H}$ *dann und nur dann, wenn dabei ein neuer geschlossener Abschnitt erzeugt wird, dessen erstes Glied gerade der nun unverfügbare Annahmesatz und das maximale Glied in* VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) *ist*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann:
VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VANS($\mathfrak{H}$) ≠ ∅
gdw
Es gibt ein $\mathfrak{B}$, so dass
(i) $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist,
(ii) min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-2 und max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1 und
(iii) VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VANS($\mathfrak{H}$) = {(min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$)} = {(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1))), $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))}$)}.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. (*L-R*): Sei VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VANS($\mathfrak{H}$) ≠ ∅. Mit Theorem 2-73 gilt dann, dass auch VERS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VERS($\mathfrak{H}$) ≠ ∅. Damit gibt es mit Theorem 2-83 ein $\mathfrak{B}$, so dass $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-2 und max(Dom($\mathfrak{B}$)) = Dom($\mathfrak{H}$)-1 und VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)\VANS($\mathfrak{H}$) = {(min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$)}.

Sodann ist auch min(Dom($\mathfrak{B}$)) = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1))). Zunächst ist (min(Dom($\mathfrak{B}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) und damit min(Dom($\mathfrak{B}$)) ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)). Sei nun k ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und sei min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ k. Dann ist (k, $\mathfrak{H}_k$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) und damit (k, $\mathfrak{H}_k$) ∈ ANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) und damit auch (k, $\mathfrak{H}_k$) ∈ ANS($\mathfrak{H}$). Sodann ist min(Dom($\mathfrak{B}$)) ≤ k <

$\text{Dom}(\mathfrak{H})$-1 = $\max(\text{Dom}(\mathfrak{B}))$. Damit ist dann $k \in \text{ANS}(\mathfrak{H}) \cap \text{Dom}(\mathfrak{B})$. Mit Theorem 2-66 ist dann $k = \min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))$ oder es gibt ein $\mathfrak{C}$, so dass $k = \min(\text{Dom}(\mathfrak{C}))$ und $\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})) < \min(\text{Dom}(\mathfrak{C})) < \max(\text{Dom}(\mathfrak{C})) < \max(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$. Der zweite Fall ist allerdings ausgeschlossen, da es sonst mit Theorem 2-64-(viii) und Theorem 2-62-(viii) einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{C}$ mit $\min(\text{Dom}(\mathfrak{C})) \leq k < \max(\text{Dom}(\mathfrak{C}))$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$ gäbe und damit $(k, \mathfrak{H}_k) \notin \text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})$ gelten würde. Also ist $k = \min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))$. Damit ist gezeigt, dass $\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})))$ und damit gilt $\{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}))), \mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})))})\}$.

(*R-L*): Gibt es umgekehrt einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, für den $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}))\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$, dann ist $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}))\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. ■

Theorem 2-86. *Ist das letzte Glied eines geschlossenen Abschnitts $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ mit dem letzten Glied von $\mathfrak{H}$ identisch, dann ist das erste Glied von $\mathfrak{B}$ das maximale Glied von* $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})$ *und in $\mathfrak{H}$ nicht mehr verfügbar*

Wenn $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $\max(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$, dann gilt: $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}))), \mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})))})\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $\max(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$. Dann ist $\mathfrak{B}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}$. Dann gilt mit Theorem 2-31: $\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})) < \max(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$ und somit $\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-2}$. Damit ergibt sich mit Theorem 2-84, dass $\text{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}))\backslash\text{VERS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$ ist. Daraus ergibt sich wiederum mit Theorem 2-83-(vi), dass es ein $\mathfrak{C}$ gibt, so dass $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{C})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{C}))})\}$. Nun ist $\mathfrak{B}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und mit $\max(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$ ist $\mathfrak{B}$ kein Abschnitt und damit auch kein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}$. Damit gilt mit Theorem 2-83-(iii): $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ und damit $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Damit ergibt sich mit Theorem 2-85, dass $\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1}))), \mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-1})))})\}$. ■

Theorem 2-87. *Beim Übergang von* $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 *zu* $\mathfrak{H}$ *verringert sich die Anzahl der verfügbaren Annahmesätze maximal um eins*
Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$, dann $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})| \leq 1$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$. Dann ist $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) = \emptyset$ oder $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Im ersten Fall ist $|(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})| = 0$. Sei nun $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Dann gibt es mit Theorem 2-85 einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$. Dann ist $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})| = 1$. ■

Theorem 2-88. *Beim Übergang von* $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 *zu* $\mathfrak{H}$ *impliziert echte VAN-Inklusion echte VANS-Inklusion*
Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, dann $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und sei $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es ein $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$, so dass $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$. Dann ist $i \notin \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))$, denn sonst wäre $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Damit ist $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$ und mit Theorem 2-85 gibt es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$, so dass $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$. Dann ist $\mathfrak{B}$ ein SE- oder NE- oder EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann ergibt sich mit Theorem 2-29, dass $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) \notin \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ und damit $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Mit Theorem 2-81 gilt nun: $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\}$, so dass sich zunächst einmal $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ ergibt und mit $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ ergibt sich: $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. ■

Theorem 2-89. *Vorbereitungstheorem (a) für Theorem 2-91, Theorem 2-92 und Theorem 2-93*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$, dann:

$(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$
gdw
Für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. (*L-R*): Sei nun zunächst $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. Sei nun $\mathfrak{C}$ ein geschlossener Abschnitt in

$\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Wäre dann $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$, dann wäre damit $(l, \mathfrak{H}_l) \notin \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$, was der Annahme widerspricht. Also ist $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l$. (*R-L*): Gelte nun für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$: $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l$. Dann gilt für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$, dass es nicht der Fall ist, dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$. Sodann ist nach Voraussetzung $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$ und damit ist $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_l)$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ bei l verfügbar. Also gilt: $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. ■

Theorem 2-90. *Vorbereitungstheorem (b) für Theorem 2-91, Theorem 2-92 und Theorem 2-93*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist und $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$, dann:

$(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$
gdw
$(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ und für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. (*L-R*): Sei nun zunächst $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. Dann ist $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$ und da $\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))) \subseteq \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ ist damit $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$. Sodann ergibt sich mit $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$ und Theorem 2-89, dass für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$ gilt: $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l$. (*R-L*): Sei nun $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})$ und gelte für alle geschlossenen Abschnitte $\mathfrak{C}$ in $\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$: $l < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C}))$ oder $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{C})) \leq l$. Nach Voraussetzung gilt, dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$ und damit, dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. Sodann ergibt sich mit Theorem 2-89, dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$ und damit insgesamt, dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$. ■

Theorem 2-91. *SE-Schließt!-Theorem*
$\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und es gibt $\Delta, \Gamma \in \mathrm{GFORM}$, so dass

(i) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) = \Delta$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$,

(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \Gamma$,

(iii) Es kein r mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1$ gibt, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$, und

(iv) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner\text{Also } \Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$

gdw
$\mathfrak{A}$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Theorem 2-67, Theorem 2-89 und Theorem 2-90. ■

Theorem 2-92. *NE-Schließt!-Theorem*

$\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass

(i) $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq i < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$,

(ii) $A(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) = \Delta$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$,

(iii) $A(\mathfrak{H}_i) = \Gamma$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$
oder
$A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))-1}) = \Gamma$,

(iv) $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$,

(v) Es kein r mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$-1 gibt, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$, und

(vi) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))} = \ulcorner$Also $\neg\Delta\urcorner$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Theorem 2-68, Theorem 2-89 und Theorem 2-90. ■

Theorem 2-93. *PB-Schließt!-Theorem*

$\mathfrak{A}$ ist ein Abschnitt in $\mathfrak{H}$ und es gibt $\xi \in$ VAR, $\beta \in$ PAR, $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, $\Gamma \in$ GFORM und $\mathfrak{B} \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H})$, so dass

(i) $A(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$,

(ii) $A(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}) = [\beta, \xi, \Delta]$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1, \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$,

(iii) $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1}) = \Gamma$,

(iv) $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))} = \ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$,

(v) $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \Gamma\})$,

(vi) Es kein $j \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$,

(vii) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\setminus\{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$ und

(viii) Es kein r mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$-1 gibt, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})))$

gdw

$\mathfrak{A}$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Theorem 2-69, Theorem 2-89 und Theorem 2-90. ■

3 Der Redehandlungskalkül

Die Metatheorie des Kalküls ist nun hinreichend entwickelt, damit dieser etabliert werden kann (3.1). Sodann wird für diesen Kalkül ein Ableitungs- und ein Konsequenzbegriff bereitgestellt (3.2). Den Abschluss des Kapitels bildet der Beweis von Theoremen, die die Arbeitsweise des Kalküls beschreiben und im weiteren Fortgang nützlich sind (3.3).

3.1 Der Kalkül

Mit dem Redehandlungskalkül werden nun Regeln für das Annehmen und das Folgern etabliert, die letztendlich das Ableiten von Aussagen aus Aussagenmengen anleiten. Dazu ist vorbereitend zu bemerken: Ein Autor nimmt eine Aussage Γ an, indem er den Satz $\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ äußert, und ein Autor folgert eine Aussage Γ, indem er den Satz $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ äußert. Ein Autor äußert die leere Sequenz, indem er nichts äußert. Ein Autor äußert eine nicht-leere Sequenz $\mathfrak{H}$, indem er nacheinander für jedes $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ $\mathfrak{H}_i$ äußert. Ein Autor setzt eine Sequenz $\mathfrak{H}$ zu einer Sequenz $\mathfrak{H}^*$ fort, wenn er $\mathfrak{H}$ geäußert hat und nun eine Sequenz $\mathfrak{H}'$ äußert, so dass $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^\frown\mathfrak{H}'$. Ein Autor setzt also eine von ihm geäußerte Sequenz $\mathfrak{H}$ zu der Sequenz $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner)\}$ fort, indem er Γ annimmt, d.h., indem er $\ulcorner$Sei $\Gamma\urcorner$ äußert, und ein Autor setzt eine von ihm geäußerte Sequenz $\mathfrak{H}$ zu der Sequenz $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ fort, indem er Γ folgert, d.h., indem er $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$ äußert.[12]

Die Regeln des Kalküls – und nur diese – sollen es erlauben, eine bereits geäußerte Sequenz $\mathfrak{H}$ zu einer Sequenz $\mathfrak{H}'$ mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ fortzusetzen. Im Anschluss an das Reglement kann dann ein Ableitungs- und ein Konsequenzbegriff etabliert werden, wobei Ableitungen genau die nicht-leeren Sequenzen sein sollen, die sich nach den Regeln des Kalküls äußern lassen (↑ 3.2).

Wie für pragmatisierte Kalküle des natürlichen Schließens üblich gibt es eine Annahmeregel (Handlungsanleitung 3-1) und 16 Folgerungsregeln (Handlungsanleitung 3-2 bis Handlungsanleitung 3-17). Zusätzlich enthält der Kalkül eine Interdiktionsklausel (IDK, Handlungsanleitung 3-18), die alle Fortsetzungen verbietet, die nicht durch

[12] Zum Zusammenhang des Vollzugs von Redehandlungen bzw. Redehandlungssequenzen und der Äußerung von Sätzen bzw. Satzsequenzen siehe HINST, P.: *Logischer Grundkurs*, S. 58–71, SIEGWART, G.: *Vorfragen*, S. 25–32, *Denkwerkzeuge*, S. 39–52, und *Alethic Acts*. Offenbar setzt die hier gepflegte Äußerungsrede voraus, dass die mit Postulat 1-1 bis Postulat 1-3 geforderten Ausdrücke und Ausdrucksverkettungen äußerbare Gebilde sind.

Handlungsanleitung 3-1 bis Handlungsanleitung 3-17 erlaubt sind. Unter den Folgerungsregeln regulieren jeweils zwei einen der Junktoren, Quant(ifikat)oren oder den Identitätsprädikator. Mit einer der beiden Regeln wird der Operator eingeführt, mit der anderen beseitigt.

Zum besseren Verständnis sei hier noch einmal die Verfügbarkeitsrede in Stenoform wiederholt: Ist $\mathfrak{H}$ eine Sequenz, dann ist $(i, \mathfrak{H}_i)$ genau dann in VERS($\mathfrak{H}$), wenn die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist. Ferner ist $(i, \mathfrak{H}_i)$ genau dann in VANS($\mathfrak{H}$), wenn die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar und $\mathfrak{H}_i$ ein Annahmesatz ist. Sodann ist Γ genau dann Element von VER($\mathfrak{H}$), wenn es $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VERS($\mathfrak{H}$) gibt, so dass Γ die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ ist, und Γ ist genau dann Element von VAN($\mathfrak{H}$), wenn es $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}$) gibt, so dass Γ die Aussage von $\mathfrak{H}_i$ ist.

Um vorbereitend eine intuitiv eingängige Kurzfassung des Reglements zu geben, sei vereinbart: Wenn man eine Sequenz $\mathfrak{H}$ geäußert hat und Γ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist, dann hat man Γ in $\mathfrak{H}$ bei i gewonnen. Wenn Δ die letzte bei der Äußerung von $\mathfrak{H}$ gemachte Annahme ist, die noch verfügbar ist, und man Γ in $\mathfrak{H}$ nach bzw. mit der Annahme von Δ gewonnen hat, dann hat man Γ in $\mathfrak{H}$ im Ausgang von der Annahme von Δ gewonnen. Setzt man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \Sigma)\}$ fort und ist $\Delta = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$ eine in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbare Annahme, die in $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \Sigma)\}$ bei i nicht mehr verfügbar ist, dann hat man sich von der Annahme von Δ bei i befreit.

Nun die *Kurzform des Reglements* unter Vernachlässigung von Sequenz- und Stellenbezug und grammatischer Spezifikation: Man darf jede Aussage Γ annehmen (AR); hat man als letztes Γ im Ausgang von der Annahme von Δ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ folgern und sich so von der Annahme von Δ befreien (SE); hat man Δ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ gewonnen, dann darf man Γ folgern (SB); hat man Δ und Γ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner$ folgern (KE); hat man $\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner$ oder $\ulcorner\Gamma \wedge \Delta\urcorner$ gewonnen, dann darf man Γ folgern (KB); hat man $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ und $\ulcorner\Gamma \rightarrow \Delta\urcorner$ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner$ folgern (BE); hat man Δ und $\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner$ oder Δ und $\ulcorner\Gamma \leftrightarrow \Delta\urcorner$ gewonnen, dann darf man Γ folgern (BB); hat man Γ oder Δ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\Delta \vee \Gamma\urcorner$ folgern (AE); hat man $\ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner$, $\ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \Gamma\urcorner$ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ gewonnen, dann darf man Γ folgern (AB); hat man im Ausgang von der Annahme von Δ entweder Γ und als letztes $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ oder $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und als letztes Γ gewonnen, dann darf man $\ulcorner\neg\Delta\urcorner$ folgern und sich so von der Annahme von Δ befreien (NE); hat man ⌜¬¬Γ⌝ gewonnen, dann darf man Γ folgern (NB); hat man [β, ξ, Δ] gewonnen, wobei β kein Teilterm von Δ oder von einer verfügbaren Annahme ist, dann darf man ⌜⋀ξΔ⌝ folgern (UE), hat man ⌜⋀ξΔ⌝ gewonnen, dann darf man [θ, ξ, Δ] folgern (UB); hat man [θ, ξ, Δ] gewonnen, dann darf man ⌜⋁ξΔ⌝ folgern (PE); hat man ⌜⋁ξΔ⌝ gewonnen, als nächstes [β, ξ, Δ] angenommen, wobei β ein neuer Parameter und kein Teilterm von Δ ist, und dann im Ausgang von der Annahme von [β, ξ, Δ] als letztes Γ gewonnen, wobei β kein Teilterm von Γ ist, dann darf man Γ folgern und sich so von der Annahme von [β, ξ, Δ] befreien (PB); man darf ⌜θ = θ⌝ folgern (IE); hat man ⌜θ_0 = θ_1⌝ und [θ_0, ξ, Δ] gewonnen, dann darf man [θ_1, ξ, Δ] folgern (IB); das ist alles, was man darf (IDK).

Es folgen nun die Regeln des Redehandlungskalküls in ihrer *verbindlichen Formulierung*:

Handlungsanleitung 3-1. *Annahmeregel (AR)*
Wenn man $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ geäußert hat und Γ ∈ GFORM, dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}$ ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Sei Γ⌝)} fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-2. *Subjunktoreinführungsregel (SE)*
Wenn man $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ geäußert hat, Δ, Γ ∈ GFORM und i ∈ Dom($\mathfrak{H}$) und

(i) A($\mathfrak{H}_i$) = Δ und (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$),

(ii) A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = Γ und

(iii) Es kein l mit $i < l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 gibt, so dass (l, $\mathfrak{H}_l$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$),

dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}$ ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also Δ → Γ⌝)} fortsetzen.

Man beachte, dass die Anwendung der Subjunktoreinführungsregel SE-geschlossene Abschnitte gemäß Definition 2-23 erzeugt (vgl. Theorem 2-91). Setzt man $\mathfrak{H}$ mittels SE zu $\mathfrak{H}$ ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also Δ → Γ⌝)} fort, so ist daher in $\mathfrak{H}$ ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also Δ → Γ⌝)} keine der bei der Äußerung von $\mathfrak{H}$ ab (*einschließlich*) dem i-ten Glied gefolgerten oder angenommenen Aussagen verfügbar, es sei denn, die Aussage war in $\mathfrak{H}$ schon vor dem i-ten Glied verfügbar (vgl. Definition 2-26). Davon ist natürlich die neuerdings verfügbare Subjunktion ⌜Δ → Γ⌝ ausgenommen, da sie die Aussage des neuen letzten Gliedes bildet und damit in jedem Fall in der nun insgesamt geäußerten Sequenz verfügbar ist (vgl. Theorem 2-82). Da die Aussage des letzten Gliedes einer Sequenz $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ immer bei Dom($\mathfrak{H}$)-1 verfügbar ist, reicht es auch, in Klausel (ii) der Regel zu fordern, dass das Sukzedens der zu folgernden Subjunktion die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{H}$ ist, ohne zusätzlich zu fordern, dass diese Aussage dort auch verfügbar ist. Analoges betrifft Handlungsanleitung 3-10 (NE) und Handlungsanleitung 3-15 (PB).

Handlungsanleitung 3-3. *Subjunktorbeseitigungsregel (SB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $\{\Delta, \ulcorner \Delta \to \Gamma \urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{$(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$)$\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-4. *Konjunktoreinführungsregel (KE)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat und $\Delta, \Gamma \in$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{$(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Delta \wedge \Gamma\urcorner$)$\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-5. *Konjunktorbeseitigungsregel (KB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $\{\ulcorner \Delta \wedge \Gamma \urcorner, \ulcorner \Gamma \wedge \Delta \urcorner\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$, dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{$(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$)$\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-6. *Bisubjunktoreinführungsregel (BE)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $\{\ulcorner \Delta \to \Gamma \urcorner, \ulcorner \Gamma \to \Delta \urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{$(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner$)$\}$ fortsetzen.

Hier wird die metalogische *Separiertheitsmaxime*, nach der jede Regel genau einen Operator regulieren soll, verletzt. Im Regelantezedens wird gefordert, dass bestimmte Subjunktionen bereits verfügbar sind. Die Bisubjunktoreinführungsregel ist damit zugleich eine Regel für die Beseitigung von Subjunktionen in bestimmten Kontexten.

Handlungsanleitung 3-7. *Bisubjunktorbeseitigungsregel (BB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\Delta \in$ VER($\mathfrak{H}$), $\Gamma \in$ GFORM, und $\{\ulcorner \Delta \leftrightarrow \Gamma \urcorner, \ulcorner \Gamma \leftrightarrow \Delta \urcorner\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$, dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{$(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner$)$\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-8. *Adjunktoreinführungsregel (AE)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $\{\Delta, \Gamma\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$, dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{$(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Delta \vee \Gamma\urcorner$)$\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-9. *Adjunktorbeseitigungsregel (AB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, B, Δ, Γ ∈ GFORM und $\{\ulcorner B \vee \Delta \urcorner, \ulcorner B \rightarrow \Gamma \urcorner, \ulcorner \Delta \rightarrow \Gamma \urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner \text{Also } \Gamma \urcorner)\}$ fortsetzen.

Hier wird die metalogische Separiertheitsmaxime ein zweites Mal verletzt. Im Regelantezedens wird gefordert, dass bestimmte Subjunktionen bereits verfügbar sind. Die Adjunktorbeseitigungsregel ist damit zugleich eine Regel für die Beseitigung von Subjunktionen in bestimmten Kontexten.

Handlungsanleitung 3-10. *Negatoreinführungsregel (NE)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, Δ, Γ ∈ GFORM und $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und

(i) $i \leq j$,

(ii) $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}$),

(iii) $A(\mathfrak{H}_j) = \Gamma$ und $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \ulcorner \neg\Gamma \urcorner$
oder
$A(\mathfrak{H}_j) = \ulcorner \neg\Gamma \urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$,

(iv) $(j, \mathfrak{H}_j) \in$ VERS($\mathfrak{H}$) und

(v) Es kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 gibt, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in$ VANS($\mathfrak{H}$),

dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner \text{Also } \neg\Delta \urcorner)\}$ fortsetzen.

Die Anwendung der Negatoreinführungsregel erzeugt NE-geschlossene Abschnitte gemäß Definition 2-24 (vgl. Theorem 2-92). Setzt man $\mathfrak{H}$ mittels NE zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner \text{Also } \neg\Delta \urcorner)\}$ fort, so ist dementsprechend in $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner \text{Also } \neg\Delta \urcorner)\}$ keine der bei der Äußerung von $\mathfrak{H}$ ab (*einschließlich*) dem i-ten Glied gefolgerten oder angenommenen Aussagen verfügbar, es sei denn, die Aussage war in $\mathfrak{H}$ schon vor dem i-ten Glied verfügbar (vgl. Definition 2-26). Davon ist natürlich die neuerdings verfügbare Negation $\ulcorner \neg\Delta \urcorner$ ausgenommen. Da die Aussage des letzten Gliedes einer Sequenz $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ immer bei $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 verfügbar ist (vgl. Theorem 2-82), reicht es ferner, in Klausel (iii) der Regel nur zu fordern, dass eines der Widerspruchsglieder bei j verfügbar ist und das andere Widerspruchsglied die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{H}$ ist.

Handlungsanleitung 3-11. *Negatorbeseitigungsregel (NB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, Γ ∈ GFORM und $\ulcorner \neg\neg\Gamma \urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner \text{Also } \Gamma \urcorner)\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-12. *Universalquantoreinführungsregel (UE)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, $[\beta, \xi, \Delta] \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta\} \cup$ VAN($\mathfrak{H}$)), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{($Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\bigwedge\xi\Delta\urcorner)\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-13. *Universalquantorbeseitigungsregel (UB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, und $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{($Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $[\theta, \xi, \Delta]\urcorner)\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-14. *Partikularquantoreinführungsregel (PE)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, und $[\theta, \xi, \Delta] \in$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{($Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\bigvee\xi\Delta\urcorner)\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-15. *Partikularquantorbeseitigungsregel (PB)*
Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, $\Gamma \in$ GFORM und $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$) und

(i) A($\mathfrak{H}_i$) = $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VERS($\mathfrak{H}$),
(ii) A($\mathfrak{H}_{i+1}$) = $[\beta, \xi, \Delta]$ und $(i+1, \mathfrak{H}_{i+1}) \in$ VANS($\mathfrak{H}$),
(iii) A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = Γ,
(iv) $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta, \Gamma\}$),
(v) Es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta \in$ TT($\mathfrak{H}_j$),
(vi) Es kein m mit $i+1 < m \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 gibt, so dass $(m, \mathfrak{H}_m) \in$ VANS($\mathfrak{H}$),

dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{($Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner)\}$ fortsetzen.

Die Anwendung der Partikularquantorbeseitigungsregel erzeugt PB-geschlossene Abschnitte gemäß Definition 2-25 (vgl. Theorem 2-93). Setzt man also $\mathfrak{H}$ mittels PB zu $\mathfrak{H} \cup \{($Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner)\}$ fort, so ist in $\mathfrak{H} \cup \{($Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner)\}$ keine der bei der Äußerung von $\mathfrak{H}$ *nach* dem i-ten Glied gefolgerten oder angenommenen Aussagen verfügbar, es sei denn, die Aussage war in $\mathfrak{H}$ schon vor dem i+1-ten Glied verfügbar (vgl. Definition 2-26). Davon ist natürlich die zuletzt gefolgerte Aussage Γ ausgenommen, die in der nun insgesamt geäußerten Sequenz in jedem Fall verfügbar ist. Da die Aussage des letzten Gliedes einer Sequenz $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}$ immer bei Dom($\mathfrak{H}$)-1 verfügbar ist (vgl. Theorem 2-82), reicht es auch, in Klausel (iii) der Regel nur zu fordern, dass Γ die Aussage des letzten Gliedes von $\mathfrak{H}$ ist.

Handlungsanleitung 3-16. *Identitätseinführungsregel (IE)*

Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat und $\theta \in$ GTERM, dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \theta = \theta\urcorner)\}$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-17. *Identitätsbeseitigungsregel (IB)*

Wenn man $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, θ_0, $\theta_1 \in$ GTERM und $\{\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner, [\theta_0, \xi, \Delta]\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$), dann darf man $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\theta_1, \xi, \Delta]\urcorner)\}$ fortsetzen.

Zuletzt wird ein Verbot gesetzt, das den interdiktionalen Status des Reglements explizit macht. Dazu werden für die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}'$ alle 17 Regelantezedentia als unerfüllt vorausgesetzt. Dieser Zustand ist dann hinreichend dafür, dass man $\mathfrak{H}$ nicht zu $\mathfrak{H}'$ fortsetzen darf.

Handlungsanleitung 3-18. *Interdiktionsklausel (IDK)*

Wenn $\mathfrak{H} \notin$ SEQ oder wenn man $\mathfrak{H}$ nicht geäußert hat oder wenn es keine B, Γ, $\Delta \in$ GFORM und θ_0, $\theta_1 \in$ GTERM und $\beta \in$ PAR und $\xi \in$ VAR und $\Delta' \in$ FORM, wobei FV(Δ') $\subseteq \{\xi\}$, und i, $j \in$ Dom($\mathfrak{H}$) gibt, so dass

(i) $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(ii) $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta$, $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}$), $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \Gamma$, es kein l mit $i < l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 gibt, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in$ VANS($\mathfrak{H}$), und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \rightarrow \Gamma\urcorner)\}$ oder

(iii) $\{\Delta, \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(iv) $\{\Delta, \Gamma\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \wedge \Gamma\urcorner)\}$ oder

(v) $\{\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner, \ulcorner\Gamma \wedge \Delta\urcorner\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(vi) $\{\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner, \ulcorner\Gamma \rightarrow \Delta\urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner)\}$ oder

(vii) $\Delta \in$ VER($\mathfrak{H}$), $\{\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner, \ulcorner\Gamma \leftrightarrow \Delta\urcorner\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(viii) $\{\Delta, \Gamma\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \vee \Gamma\urcorner)\}$ oder

(ix) $\{\ulcorner B \vee \Delta\urcorner, \ulcorner B \rightarrow \Gamma\urcorner, \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(x) $i \leq j$, $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta$, $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}$), $A(\mathfrak{H}_j) = \Gamma$ und $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ oder $A(\mathfrak{H}_j) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \Gamma$, $(j, \mathfrak{H}_j) \in$ VERS($\mathfrak{H}$), es kein l mit $i < l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 gibt, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in$ VANS($\mathfrak{H}$), und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \neg\Delta\urcorner)\}$ oder

(xi) $\ulcorner\neg\neg\Gamma\urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(xii) $[\beta, \xi, \Delta'] \in$ VER($\mathfrak{H}$), $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta'\} \cup$ VAN($\mathfrak{H}$)) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi\Delta'\urcorner)\}$ oder

(xiii) $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta'\urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\theta_0, \xi, \Delta']\urcorner)\}$ oder

(xiv) $[\theta_0, \xi, \Delta'] \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigvee\xi\Delta'\urcorner)\}$ oder

(xv) $A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta'\urcorner$, $(i, \mathfrak{H}_i) \in VERS(\mathfrak{H})$, $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta, \xi, \Delta']$, $(i+1, \mathfrak{H}_{i+1}) \in VANS(\mathfrak{H})$, $A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$, $\beta \notin TTFM(\{\Delta', \Gamma\})$, es kein $l \leq i$ gibt, so dass $\beta \in TT(\mathfrak{H}_l)$, es kein m mit $i+1 < m \leq Dom(\mathfrak{H})-1$ gibt, so dass $(m, \mathfrak{H}_m) \in VANS(\mathfrak{H})$, und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ oder

(xvi) $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \theta_0 = \theta_0\urcorner)\}$ oder

(xvii) $\{\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner, [\theta_0, \xi, \Delta]\} \subseteq VER(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\theta_1, \xi, \Delta]\urcorner)\}$,

dann darf man $\mathfrak{H}$ nicht zu $\mathfrak{H}'$ fortsetzen.

Handlungsanleitung 3-18 besagt informell: Wenn keine der Regeln Handlungsanleitung 3-1 bis Handlungsanleitung 3-17 die Fortsetzung von $\mathfrak{H}$ zu $\mathfrak{H}'$ erlaubt, dann darf man $\mathfrak{H}$ nicht zu $\mathfrak{H}'$ fortsetzen.

Mit der Setzung der 18 Regeln wurde der Kalkül etabliert. Er kann nun im vollen Umfang eingesetzt werden. Will man dem Kalkül später weitere Regeln hinzufügen – zum Beispiel für das Anziehen, das Konstatieren oder das axiomatische und definitorische Setzen – so ist Handlungsanleitung 3-18 zu revidieren. Im nächsten Abschnitt wird nun ein Ableitungs- und Konsequenzbegriff für den Kalkül etabliert (3.2) und sodann ein Beweis von Theoremen erbracht, die die Funktionsweise des Kalküls deutlich machen (3.3).

3.2 Ableitungsbegriff und deduktive Konsequenzschaft

Mit der Etablierung des Kalküls bleibt nun noch die Aufgabe, einen entsprechenden Ableitungs- und Konsequenzbegriff zu etablieren und dessen Adäquatheit zu zeigen. Da Ableitungs- und Konsequenzschaft nicht an die tatsächliche Äußerung von Sequenzen, sondern nur an deren Äußerbarkeit gemäß den Regeln gebunden sein sollen, ist der Ableitungsbegriff dabei nicht unter Rückgriff auf die vollen Regeln des Kalküls – die ja jeweils die Äußerung einer Sequenz verlangen –, sondern unter alleinigem Rückgriff auf deren jeweiligen sequenzenspezifischen und äußerungsunabhängigen Anteil zu etablieren.

Dazu wird zunächst für jede Regel des Kalküls eine Funktion definiert, die einer Sequenz $\mathfrak{H}$ jeweils die Menge der Sequenzen zuordnet, zu denen ein Autor, der $\mathfrak{H}$ geäußert hat, $\mathfrak{H}$ nach der entsprechenden Regel fortsetzen darf (Definition 3-1 bis Definition 3-17). Im Ausgang von diesen Funktionen wird dann die Funktion RGF etabliert, die einer Sequenz $\mathfrak{H}$ die Menge regelgemäßen Fortsetzungen von $\mathfrak{H}$ zuordnet, also die Menge der Sequenzen, zu denen ein Autor, der $\mathfrak{H}$ geäußert hat, $\mathfrak{H}$ nach einer der Regeln des Kalküls fortsetzen dürfte (Definition 3-18). Darauf aufbauend wird dann die Menge der regelgemäßen Sequenzen, RGS, als die Menge der Sequenzen definiert, von denen jede ihrer nicht-leeren Beschränkungen eine regelgemäße Fortsetzung der nächst kleineren Beschränkung ist (Definition 3-19). Eine Ableitung einer Aussage Γ aus einer Aussagenmenge X wird dann ein nicht-leeres RGS-Element sein, für das gilt: $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \Gamma$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) = X$ (Definition 3-20). Sodann erfolgt die Einführung des deduktiven Konsequenzbegriffs und umgebender Begrifflichkeiten für den Kalkül, wobei eine Aussage Γ genau dann deduktive Konsequenz einer Aussagenmenge X sein wird, wenn es eine Ableitung von Γ aus einem $Y \subseteq X$ gibt (Definition 3-21).

Wie angekündigt, werden nun zunächst zu den Regeln in 3.1 analoge Funktionen definiert:

Definition 3-1. *Annahmefunktion (AF)*

$$\mathrm{AF} = \{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ} \text{ und } X = \{\mathfrak{H}' \mid \text{Es gibt } \Gamma \in \mathrm{GFORM}, \text{ so dass } \mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner)\}\}\}.$$

Vgl. Handlungsanleitung 3-1. Da die Menge der geschlossenen Formeln nicht leer ist, ergibt sich als Korollar, dass auch $\mathrm{AF}(\mathfrak{H})$ für keine Sequenz $\mathfrak{H}$ leer ist.

Definition 3-2. *Subjunktoreinführungsfunktion (SEF)*

SEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass

(i) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$,

(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \Gamma$,

(iii) Es kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 gibt, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$, und

(iv) $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \rightarrow \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-2.

Definition 3-3. *Subjunktorbeseitigungsfunktion (SBF)*

SBF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM, so dass $\{\Delta, \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-3.

Definition 3-4. *Konjunktoreinführungsfunktion (KEF)*

KEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ VER($\mathfrak{H}$), so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \wedge \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-4.

Definition 3-5. *Konjunktorbeseitigungsfunktion (KBF)*

KBF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM, so dass $\{\ulcorner\Delta \wedge \Gamma\urcorner, \ulcorner\Gamma \wedge \Delta\urcorner\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-5.

Definition 3-6. *Bisubjunktoreinführungsfunktion (BEF)*

BEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM, so dass $\{\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner, \ulcorner\Gamma \rightarrow \Delta\urcorner\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-6.

Definition 3-7. *Bisubjunktorbeseitigungsfunktion (BBF)*

BBF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\{\ulcorner\Delta \leftrightarrow \Gamma\urcorner, \ulcorner\Gamma \leftrightarrow \Delta\urcorner\} \cap$ VER($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-7.

Definition 3-8. *Adjunktoreinführungsfunktion (AEF)*

AEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM, so dass $\{\Delta, \Gamma\} \cap \mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \vee \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-8.

Definition 3-9. *Adjunktorbeseitigungsfunktion (ABF)*

ABF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\mathrm{B}, \Delta, \Gamma \in$ GFORM, so dass $\{\ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner, \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \Gamma\urcorner, \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner\} \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-9.

Definition 3-10. *Negatoreinführungsfunktion (NEF)*

NEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass

(i) $i \leq j$,

(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$,

(iii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) = \Gamma$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$
oder
$\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \Gamma$,

(iv) $(j, \mathfrak{H}_j) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$,

(v) Es kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ gibt, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$, und

(vi) $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \neg\Delta\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-10.

Definition 3-11. *Negatorbeseitigungsfunktion (NBF)*

NBF= $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\ulcorner\neg\neg\Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-11.

Definition 3-12. *Universalquantoreinführungsfunktion (UEF)*

UEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, so dass

(i) $[\beta, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$,

(ii) $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$ und

(iii) $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi\Delta\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-12.

Definition 3-13. *Universalquantorbeseitigungsfunktion (UBF)*

UBF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, so dass $\ulcorner \bigwedge\xi\Delta \urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})$, $\ulcorner$Also $[\theta, \xi, \Delta]\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-13.

Definition 3-14. *Partikularquantoreinführungsfunktion (PEF)*

PEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, und $\theta \in$ GTERM, so dass $[\theta, \xi, \Delta] \in$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})$, $\ulcorner$Also $\bigvee\xi\Delta\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-14.

Definition 3-15. *Partikularquantorbeseitigungsfunktion (PBF)*

PBF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, $\Gamma \in$ GFORM und $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), so dass

(i) A($\mathfrak{H}_i$) = $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in$ VERS($\mathfrak{H}$),

(ii) A($\mathfrak{H}_{i+1}$) = $[\beta, \xi, \Delta]$ und $(i+1, \mathfrak{H}_{i+1}) \in$ VANS($\mathfrak{H}$),

(iii) A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = Γ,

(iv) $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta, \Gamma\}$),

(v) Es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta \in$ TT($\mathfrak{H}_j$),

(vi) Es kein m mit $i+1 < m \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 gibt, so dass $(m, \mathfrak{H}_m) \in$ VANS($\mathfrak{H}$), und

(vii) $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})$, $\ulcorner$Also $\Gamma\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-15.

Definition 3-16. *Identitätseinführungsfunktion (IEF)*

IEF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\theta \in$ GTERM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})$, $\ulcorner$Also $\theta = \theta\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-16. Da die Menge der geschlossenen Terme nicht leer ist, ergibt sich als Korollar, dass wie AF($\mathfrak{H}$) auch IEF($\mathfrak{H}$) für keine Sequenz $\mathfrak{H}$ leer ist. Dieser Sachverhalt schlägt sich weiter unten in Theorem 3-2 nieder.

Definition 3-17. *Identitätsbeseitigungsfunktion (IBF)*
IBF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \{\mathfrak{H}' \mid$ Es gibt $\theta_0, \theta_1 \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, so dass $\{\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner, [\theta_0, \xi, \Delta]\} \subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner$Also $[\theta_1, \xi, \Delta]\urcorner)\}\}\}$.

Vgl. Handlungsanleitung 3-17.

Im Folgenden wird nun die Menge der regelgemäßen Sequenzen, RGS (Definition 3-19), und dann das Ableitungsprädikat: '.. ist eine Ableitung von .. aus ..' (Definition 3-20) definiert. Dabei soll RGS neben der leeren Sequenz alle und nur die Sequenzen enthalten, zu denen sich die leere Sequenz nach den Regeln des Kalküls fortsetzen lässt. Unter Rückgriff auf die soeben definierte Annahmefunktion und die soeben definierten Einführungs- und Beseitigungsfunktionen wird dementsprechend RGS so definiert, dass RGS die Menge der Sequenzen ist, von denen jede ihrer nicht-leeren Beschränkungen eine regelgemäße Fortsetzung der nächst kleineren Beschränkung ist. Dazu wird zunächst die Funktion RGF definiert:

Definition 3-18. *Zuordnung der Menge der regelgemäßen Annahme- und Folgerungsfortsetzungen einer Sequenz (RGF)*
RGF = $\{(\mathfrak{H}, X) \mid \mathfrak{H} \in$ SEQ und $X = \bigcup\{$AF($\mathfrak{H}$), SEF($\mathfrak{H}$), SBF($\mathfrak{H}$), KEF($\mathfrak{H}$), KBF($\mathfrak{H}$), BEF($\mathfrak{H}$), BBF($\mathfrak{H}$), AEF($\mathfrak{H}$), ABF($\mathfrak{H}$), NEF($\mathfrak{H}$), NBF($\mathfrak{H}$), UEF($\mathfrak{H}$), UBF($\mathfrak{H}$), PEF($\mathfrak{H}$), PBF($\mathfrak{H}$), IEF($\mathfrak{H}$), IBF($\mathfrak{H}$)$\}\}$.

RGF ist also so definiert, dass ein Autor, der $\mathfrak{H} \in$ SEQ geäußert hat, $\mathfrak{H}$ genau dann zu $\mathfrak{H}'$ fortsetzen darf, wenn $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Vor der Definition der Menge der regelgemäßen Sequenzen, RGS, werden nun zunächst einige Theoreme zu RGF bewiesen.

Theorem 3-1. *RGF-Fortsetzungen von Sequenzen sind nicht-leere Sequenzen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann ist RGF($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ SEQ\{Ø}.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Sei $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Dann gilt $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ SBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ KEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ KBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ BEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ BBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ AEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ ABF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ NEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ NBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ UEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ UBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ PEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ PBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ IEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ IBF($\mathfrak{H}$). Dann ergibt sich aus Definition 3-1 bis Definition 3-17, dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \Sigma)\}$ für ein $\Sigma \in$ SATZ. In allen Fällen gilt mit Definition 1-23 und Definition 1-24 $\mathfrak{H}' \in$ SEQ\{Ø}. ■

Als nächstes soll gezeigt werden, dass RGF($\mathfrak{H}$) für keine Sequenz $\mathfrak{H}$ leer ist, dass also jede Sequenz irgendwie fortgesetzt werden kann.

Theorem 3-2. *RGF ist für keine Sequenz leer*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann ist RGF($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Nun gilt, dass $\ulcorner x_0 \urcorner \in$ GTERM. Also ist nach Definition 3-16 $\mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } x_0 = x_0\urcorner)\} \in$ IEF($\mathfrak{H}$). Also ist $\mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } x_0 = x_0\urcorner)\} \in$ RGF($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$. ■

Theorem 3-3. *Die Elemente von RGF($\mathfrak{H}$) sind Fortsetzungen von $\mathfrak{H}$ um genau einen Satz*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann gibt es $\Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner)\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Dann ist $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ SBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ KEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ KBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ BEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ BBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ AEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ ABF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ NEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ NBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ UEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ UBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ PEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ PBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ IEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ IBF($\mathfrak{H}$).

Sei $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$). Dann gibt es gemäß Definition 3-1 $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner)\}$. Dann ist $\mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner$ und damit gibt es $\Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner)\}$.

Sei $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ SBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ KEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ KBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ BEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ BBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ AEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ ABF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ NEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ NBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ UEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ UBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ PEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ PBF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ IEF($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}' \in$ IBF($\mathfrak{H}$). Dann gibt es gemäß Definition 3-2 bis Definition 3-17 jeweils $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$. Dann ist $\mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner$ und damit gibt es abermals $\Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner)\}$. ■

Theorem 3-4. *RGF-Fortsetzungen von Sequenzen sind genau um eins mächtiger als die Ausgangssequenz*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann Dom($\mathfrak{H}'$) = Dom($\mathfrak{H}$)+1.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Dann gibt es mit Theorem 3-3 $\Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner)\}$ und damit Dom($\mathfrak{H}'$) = Dom($\mathfrak{H}$)+1. ■

Theorem 3-5. *Eindeutige RGF-Vorgänger*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann $\mathfrak{H}'\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}'$)-1 = $\mathfrak{H}$.

Beweis: Ergibt sich unmittelbar aus Theorem 3-3 und Theorem 3-4. ■

Definition 3-19. *Die Menge der regelgemäßen Sequenzen (RGS)*
RGS = {$\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{H} \in$ SEQ und für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$) gilt: $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$)}.

Theorem 3-6. *Eine Sequenz $\mathfrak{H}$ ist genau dann in RGS, wenn sie leer oder eine regelgemäße Fortsetzung von* $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 *und* $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 *ein RGS-Element ist*
$\mathfrak{H} \in$ RGS
gdw
$\mathfrak{H} = \emptyset$ oder $\mathfrak{H} \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) und $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ RGS.

Beweis: (*L-R*): Sei $\mathfrak{H} \in$ RGS und $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Dann ist zunächst $\mathfrak{H} \in$ SEQ\{$\emptyset$}. Sodann ist $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ SEQ. Außerdem ist $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\subseteq \mathfrak{H}$ und für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$) gilt ($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j = \mathfrak{H}\upharpoonright j$. Wegen $\mathfrak{H} \in$ RGS gilt sodann für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$) nach Definition 3-19 $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$). Damit gilt zweierlei: Zum einen ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1+1 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1). Zum anderen gilt dann für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 = Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) ebenfalls ($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$+1 = $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$) = RGF(($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$). Also ist nach Definition 3-19 $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ RGS.

(*R-L*): Sei $\mathfrak{H} = \emptyset$ oder $\mathfrak{H} \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) und $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ RGS. Wenn $\mathfrak{H} = \emptyset$, dann ist $\mathfrak{H} \in$ SEQ und es gilt trivial, dass $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$) für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$) und somit gilt $\mathfrak{H} \in$ RGS. Sei nun $\mathfrak{H} \neq \emptyset$ und $\mathfrak{H} \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) und $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ RGS. Also gilt nach Definition 3-19 $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ SEQ und ($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF(($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$) für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) und darüber hinaus $\mathfrak{H} \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1). Nach Theorem 3-1 ist dann $\mathfrak{H} \in$ SEQ und somit, wegen $\mathfrak{H} \neq \emptyset$, Dom($\mathfrak{H}$) = Dom($\mathfrak{H}$)-1+1 = Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)+1. Dann gilt für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$), dass $\mathfrak{H}\upharpoonright j$ = ($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$. Damit gilt $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 = ($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF(($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1)$\upharpoonright j$) = RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$) für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$)-1. Wenn aber j = Dom($\mathfrak{H}$)-1, dann ist $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 = $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1+1 = $\mathfrak{H} \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1) = RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$). Also gilt insgesamt für alle $j <$ Dom($\mathfrak{H}$), dass $\mathfrak{H}\upharpoonright j$+1 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright j$) und damit $\mathfrak{H} \in$ RGS. ■

Das folgende Theorem wird in den weiteren Kapiteln häufig genutzt, ohne jedes Mal explizit angezogen zu werden:

Theorem 3-7. *Die regelgemäße Fortsetzung eines RGS-Elements führt zu einem nicht-leeren RGS-Element*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ RGS und $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$) $\cup$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ SBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ KEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ KBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ BEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ BBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ AEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ ABF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ UEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ UBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ IEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ IBF($\mathfrak{H}$), dann ist $\mathfrak{H}' \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ RGS und $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$) $\cup$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ SBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ KEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ KBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ BEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ BBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ AEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ ABF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ UEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ UBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$) $\cup$ IEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ IBF($\mathfrak{H}$). Dann ist nach Definition 3-18 $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Mit Theorem 3-5 gilt dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}'$)-1. Damit gilt wegen $\mathfrak{H} \in$ RGS mit Theorem 3-6, dass $\mathfrak{H}' \in$ RGS. Mit Theorem 3-1 ist sodann $\mathfrak{H}' \neq \emptyset$ und damit $\mathfrak{H}' \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. ■

Theorem 3-8. *$\mathfrak{H}$ ist genau dann ein nicht-leeres RGS-Element, wenn $\mathfrak{H}$ eine nicht-leere Sequenz ist und alle nicht-leeren Anfangsabschnitte von $\mathfrak{H}$ nicht-leere RGS-Elemente sind*

$\mathfrak{H} \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$ gdw $\mathfrak{H} \in$ SEQ$\setminus\{\emptyset\}$ und für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$): $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 $\in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$.

Beweis: *(L-R)*: Sei $\mathfrak{H} \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. Dann gilt nach Definition 3-19, dass $\mathfrak{H} \in$ SEQ und für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), dass $\mathfrak{H}\upharpoonright(i+1) \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright i$). Dann ist mit der Voraussetzung $\mathfrak{H} \in$ SEQ$\setminus\{\emptyset\}$. Sei nun $0 \in$ Dom($\mathfrak{H}$). Dann ist also $\mathfrak{H}\upharpoonright 1 \in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright 0$) = RGF($\emptyset$). Nun gilt mit Theorem 3-6 $\emptyset \in$ RGS und damit ergibt sich mit $\mathfrak{H}\upharpoonright 1 \in$ RGF($\emptyset$) wiederum mit Theorem 3-6, dass $\mathfrak{H}\upharpoonright 1 \in$ RGS und mit $0 \in$ Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright 1$) dann auch $\mathfrak{H}\upharpoonright 1 \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. Gelte nun für i: wenn $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), dann $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 $\in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. Sei nun i+1 $\in$ Dom($\mathfrak{H}$). Dann ist $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$) und damit nach I.V. auch $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 $\in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. Nun ist aber $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+2 $\in$ RGF($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1). Wegen $\mathfrak{H} \in$ SEQ und i+1 $\in$ Dom($\mathfrak{H}$) ist $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 = ($\mathfrak{H}\upharpoonright(i$+2))$\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright(i$+2))-1. Mit Theorem 3-6 und Theorem 3-1 ist dann $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+2 $\in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$.

(R-L): Gelte nun umgekehrt $\mathfrak{H} \in$ SEQ$\setminus\{\emptyset\}$ und für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$): $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 $\in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. Dann ist mit $\mathfrak{H} \in$ SEQ$\setminus\{\emptyset\}$ Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\in$ Dom($\mathfrak{H}$) und somit $\mathfrak{H}\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}$)-1+1 = $\mathfrak{H} \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. ■

Unter Rückgriff auf Definition 3-19 wird nun ein Ableitungsbegriff eingeführt. Darauf aufbauend wird dann, nach einigen Theoremen und einer Beispielbetrachtung zum Ableitungskonzept, ein entsprechender Konsequenzbegriff etabliert.

Definition 3-20. *Ableitung*

$\mathfrak{H}$ <u>ist eine Ableitung von</u> Γ <u>aus</u> X
gdw

(i) $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$,
(ii) $\Gamma = \text{K}(\mathfrak{H})$ und
(iii) $X = \text{VAN}(\mathfrak{H})$.

Mit Blick auf Definition 3-19 sind jetzt genau diejenigen nicht-leeren Sequenzen Ableitungen einer Aussage aus einer Aussagenmenge, die sich sukzessiv jeweils unter Anwendung der Regeln des Redehandlungskalküls äußern lassen.

Theorem 3-9. *Eigenschaften von Ableitungen*

Wenn $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist, dann:

(i) $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}\backslash\{\emptyset\}$,
(ii) $\Gamma \in \text{GFORM}$ und
(iii) $X \subseteq \text{GFORM}$ und $|X| \in \mathbb{N}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X. Dann ist $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und $\text{K}(\mathfrak{H}) = \Gamma$ und $X = \text{VAN}(\mathfrak{H})$. Mit Definition 3-19 ist $\mathfrak{H} \in \text{SEQ}\backslash\{\emptyset\}$. Nach Definition 1-25, Definition 1-24, Definition 1-23, Definition 1-18 und Definition 1-16 ist $\text{K}(\mathfrak{H}) = \Gamma \in \text{GFORM}$. Darüber hinaus ist nach Definition 1-23 und Definition 1-24 $\text{Dom}(\mathfrak{H}) \in \mathbb{N}$. Mit Definition 2-31, Definition 2-29, Definition 2-28 und Definition 2-26 ist damit auch $X = \text{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{GFORM}$ und $|X| = |\text{VAN}(\mathfrak{H})| \in \mathbb{N}$. ■

Theorem 3-10. *In nicht-leeren RGS-Elementen, sind alle nicht-leeren Anfangsabschnitte - Ableitungen ihrer Konklusion*

Wenn $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, dann gilt für alle $i \in \text{Dom}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}\restriction i+1$ ist eine Ableitung von $\text{A}(\mathfrak{H}_i)$ aus $\text{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Dann gilt mit Theorem 3-8 für alle $i \in \text{Dom}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Ferner ist für alle $i \in \text{Dom}(\mathfrak{H})$: $\text{A}(\mathfrak{H}_i) = \text{K}(\mathfrak{H}\restriction i+1)$ und $\text{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1) = \text{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1)$. ■

Theorem 3-11. *Eindeutigkeitssatz für den Redehandlungskalkül*[13]
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann:
(i) Es gibt kein Γ und kein X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist,
oder
(ii) Es gibt genau ein Γ und genau ein X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ. Dann gibt es kein Γ und kein X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist oder es gibt ein Γ und ein X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist. Im ersten Fall gilt die Behauptung. Gebe es nun für den zweiten Fall ein Γ und ein X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist. Dann ist nach Definition 3-20 $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, $\Gamma = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) = X$. Nun ist noch die Eindeutigkeit zu zeigen, damit die Einzigkeit folgt. Seien dazu Γ' und X' so, dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ' aus X' ist. Dann ist $\Gamma' = \mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \Gamma$ und $X' = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) = X$. ■

Dieses Ergebnis sei zunächst illustriert. Sei dazu $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und sei $\beta \in \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TT}(\Delta)$. Sei nun $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ die folgende Sequenz:

Beispiel [3.1]

0	Sei	$\bigwedge\xi\neg\Delta$
1	Sei	$\bigvee\xi\Delta$
2	Sei	$[\beta, \xi, \Delta]$
3	Sei	$\bigvee\xi\Delta$
4	Also	$\bigvee\xi\Delta \wedge [\beta, \xi, \Delta]$
5	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$
6	Also	$\neg[\beta, \xi, \Delta]$
7	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$
8	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$
9	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$

Kommentar: Nach Theorem 3-11 sollte sich nun eindeutig ein Γ und ein X finden lassen, so dass $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ eine Ableitung von Γ aus X ist. Dies ist tatsächlich der Fall, denn $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ ist

13 Zur Formulierung eines entsprechenden Theorems für eine Regulierung des Prädikats '.. ist eine Ableitung von .. aus ..', bei der die an dritter Stelle genannte Aussagenmenge nicht mit der Menge der in der an erster Stelle genannten Sequenz verfügbaren Annahmen identisch, sondern nur eine Obermenge derselben sein muss, siehe Fußnote 4.

eine Ableitung von $\ulcorner\neg\bigvee\xi\Delta\urcorner$ aus $\{\ulcorner\bigwedge\xi\neg\Delta\urcorner\}$. Dies lässt sich durch eine informelle Betrachtung nachvollziehen. Dazu sei die Sequenz zunächst mit einem Kommentar versehen, der anschließend erläutert wird.

Beispiel	**[3.2]**			verfg.
0	Sei	$\bigwedge\xi\neg\Delta$	(AR)	0
1	Sei	$\bigvee\xi\Delta$	(AR)	0, 1
2	Sei	$[\beta, \xi, \Delta]$	(AR)	0, 1, 2
3	Sei	$\bigvee\xi\Delta$	(AR)	0, 1, 2, 3
4	Also	$\bigvee\xi\Delta \wedge [\beta, \xi, \Delta]$	(KE); 2, 3	0, 1, 2, 3, 4
5	Also	$[\beta, \xi, \Delta]$	(KB); 4	0, 1, 2, 3, 4, 5
6	Also	$\neg[\beta, \xi, \Delta]$	(UB); 1	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
7	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(NE); 5, 6	0, 1, 2, 7
8	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(PB); 1, 7	0, 1, 8
9	Also	$\neg\bigvee\xi\Delta$	(NE); 1, 8	0, 9

Kommentar: In der zweiten Spalte von rechts sind wie üblich die Regeln (vgl. Abschnitt 3.1), nach denen der bereits geäußerte Anfangsabschnitt der Sequenz fortgesetzt werden darf, sowie die jeweiligen Prämissenzeilen vermerkt. Ganz rechts außen stehen jeweils die Zeilennummern der Zeilen, deren Aussagen in der Beschränkung von $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ auf den Nachfolger der aktuellen Zeilennummer verfügbar sind. Man beachte, dass dabei die in $\mathfrak{H}^{[3.1]}\upharpoonright i$ $(1 \leq i \leq 10)$ jeweils verfügbaren Aussagen und Annahmen eindeutig bestimmt sind.

Sodann gilt, dass etwa die Folgerung in Zeile 8 nur nach PB und die Folgerung in Zeile 9 nur nach NE korrekt ist, wobei die Prämissenzeilen eindeutig bestimmt sind. In Zeile 8 ist NE deswegen ausgeschlossen, weil einerseits die in Zeile 2 angenommene Aussage in $\mathfrak{H}^{[3.1]}\upharpoonright 8$ noch verfügbar ist, so dass 1 als Eröffnungsannahme für NE ausfällt, während andererseits 3 als Eröffnungsannahme für NE ausfällt, weil die dort angenommene Aussage in $\mathfrak{H}^{[3.1]}\upharpoonright 8$ an dieser Stelle nicht verfügbar ist. Umgekehrt ist in 9 PB ausgeschlossen (und NE möglich), weil die Ersatzannahme in Zeile 2 in $\mathfrak{H}^{[3.1]}\upharpoonright 9$ an dieser Stelle (und überhaupt) nicht mehr verfügbar ist.

Überprüft man auch alle anderen Zeilen, so überzeugt man sich leicht davon, dass $\mathfrak{H}^{[3.1]} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. Die Menge der insgesamt in $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ verfügbaren Annahmen ist eindeutig bestimmt und bestimmbar, da man nach Definition 2-26, Definition 2-28, Definition 2-29 und Definition 2-31 für jede angenommene Aussage A in $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ feststellen kann, ob A $\in$ VAN($\mathfrak{H}^{[3.1]}$). Wie gewünscht zeigt sich, dass VAN($\mathfrak{H}^{[3.1]}$) = {⌜⋀ξ¬Δ⌝}. Unproblematisch lässt sich $\mathfrak{H}^{[3.1]}{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^{[3.1]})-1}$ = ⌜Also ¬⋁ξΔ⌝ ablesen, so dass sich Theorem 3-11 bestätigt.

Der Kommentar dient dabei *nicht* zur Disambiguierung, aus welcher Aussagenmenge die Aussage in der letzten Zeile abgeleitet wurde, sondern zur leichteren Nachvollziehbarkeit. Dabei ist zu bemerken, dass der Regelkommentar für $\mathfrak{H}^{[3.1]}$ zufälligerweise eindeutig bestimmt ist, dass sich für andere Sequenzen jedoch unter Umständen verschiedene Regelkommentare angeben lassen: Unter Umständen kann nämlich ein Übergang durchaus nach verschiedenen Regeln, etwa UB und PB, korrekt sein. Es ist jedoch ausgeschlossen, dass die Möglichkeit alternativer Regelkommentare Auswirkungen auf die Eindeutigkeit des Verfügbarkeitskommentars hat. Die Feststellung der verfügbaren Aussagen bzw. Zeilen erfolgt nämlich nicht über den Regelkommentar, sondern nach der Definition der Verfügbarkeit und damit letztendlich nach der Definition der geschlossenen Abschnitte. Die gesonderte Definition der Verfügbarkeit schließt es nun aus, dass sich bei einem Übergang, der nach mehreren Regeln korrekt ist, je nach unterstellter Regelanwendung unterschiedliche Verfügbarkeiten ergeben. Damit bleibt immer eindeutig bestimmt und bestimmbar, ob es sich bei einer gegebenen Sequenz um die Ableitung einer bestimmten Aussage aus einer bestimmten Aussagenmenge handelt.

Geschlossene Abschnitte entstehen dann und nur dann, wenn sich SE, NE oder PB anwenden lassen (vgl. Theorem 3-23 und Theorem 3-24). Ist ein Übergang also etwa nach UB und PB korrekt, dann verändern sich die Verfügbarkeiten wie beim Übergang nach PB. Damit ist man als Benutzer des Redehandlungskalküls beim Vollzug von bestimmten Folgerungen eingeschränkt: Es steht einem etwa nicht offen, eine annahmeeliminierende Folgerung nach PB als nicht annahmeeliminierende Folgerung nach UB zu vollziehen.

Man mag dies als Nachteil für die Handlichkeit im Gebrauch empfinden, allerdings geht dieser Nachteil, so es denn einer ist, mit dem Vorteil einher, dass sich für jede Äußerung einer Sequenz durch einen Autor eindeutig feststellen lässt, ob damit eine Ableitung einer bestimmten Aussage aus einer bestimmten Aussagenmenge geäußert wurde: Die Möglichkeit, die teilweise in anderen Kalkülen besteht, die Äußerung ein und derselben Sequenz unterschiedlich zu beschreiben und damit etwa die Äußerung einer Sequenz $\mathfrak{H}$ einmal als Äußerung einer Ableitung von Γ aus X und einmal als Äußerung einer Sequenz, die keine Ableitung von Γ aus X ist, zu beschreiben, ist im Rahmen des Redehandlungskalküls nicht vorgesehen. Beim Ableiten im Redehandlungskalkül ist man weder auf graphische Mittel zur Markierung von Unterableitungen noch auf metasprachliche Kommentare in der Form von Regel- oder Abhängigkeitsanzeigern angewiesen: Im Rahmen des Redehandlungskalküls sind Äußerungen von Satzsequenzen nicht deutungsbedürftig.

Nun folgt die Einführung eines deduktiven Konsequenzbegriffs und einiger handelsüblicher metalogischer Begrifflichkeiten. In Kap. 4 werden dann einige Eigenschaften der deduktiven Konsequenzschaft, wie etwa Reflexivität, Transitivität und Abgeschlossenheit unter Einführung und Beseitigung gezeigt. Daraufhin wird dann in Kap. 6 ein Adäquatheitsbeweis des Kalküls bezüglich der modelltheoretischen Konsequenzschaft vorgelegt. Diese selbst wird in Kap. 5 zur Verfügung gestellt. Nun zur Definition der Konsequenzschaft:

Definition 3-21. *Deduktive Konsequenzschaft*
$X \vdash \Gamma$
gdw
$X \subseteq$ GFORM und es gibt ein $\mathfrak{H}$, so dass
(i) $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus VAN($\mathfrak{H}$) ist und
(ii) VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$.

Mit Theorem 3-9-(iii) gilt dann also wie üblich, dass für $X \subseteq$ GFORM: $X \vdash \Gamma$ genau dann, wenn es endliches $Y \subseteq X$ gibt, so dass $Y \vdash \Gamma$. Daraus ergibt sich dann mit Definition 3-23, dass X genau dann konsistent ist, wenn alle endlichen $Y \subseteq X$ konsistent sind, und mit Definition 3-24, dass $X \subseteq$ GFORM genau dann inkonsistent ist, wenn es endliches $Y \subseteq X$ gibt, so dass Y inkonsistent ist. Das folgende Theorem ist unter Definition 3-20 äquivalent zu Definition 3-21:

Theorem 3-12. Γ *ist genau dann deduktive Konsequenz aus einer Aussagenmenge* X, *wenn es ein nicht-leeres* $\mathfrak{H}$ *aus RGS gibt, so dass* Γ *die Konklusion von* $\mathfrak{H}$ *und* VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$ *ist*
$X \vdash \Gamma$ gdw $X \subseteq$ GFORM und es gibt $\mathfrak{H} \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$, so dass Γ = K($\mathfrak{H}$) und VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Definition 3-20 und Definition 3-21. ■

Definition 3-22. *Logische Beweisbarkeit*
$\vdash \Gamma$ gdw $\emptyset \vdash \Gamma$.

Definition 3-23. *Konsistenz*
X ist konsistent
gdw
$X \subseteq$ GFORM und es gibt kein $\Gamma \in$ GFORM, so dass $X \vdash \Gamma$ und $X \vdash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$.

Definition 3-24. *Inkonsistenz*
X ist inkonsistent
gdw
$X \subseteq$ GFORM und es gibt ein $\Gamma \in$ GFORM, so dass $X \vdash \Gamma$ und $X \vdash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$.

Theorem 3-13. *Aussagenmengen sind genau dann inkonsistent, wenn sie nicht konsistent sind*
Wenn $X \subseteq$ GFORM, dann: X ist inkonsistent gdw X ist nicht konsistent.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Definition 3-23 und Definition 3-24. ■

Definition 3-25. *Deduktive Konsequenz für Mengen*
$X \,{}_{\mathrm{M}}{\vdash}\, Y$ gdw $X \cup Y \subseteq$ GFORM und für alle $\Delta \in Y$ gilt: $X \vdash \Delta$.

Definition 3-26. *Logische Beweisbarkeit für Mengen*
${}_{\mathrm{M}}{\vdash}\, X$ gdw $\emptyset \,{}_{\mathrm{M}}{\vdash}\, X$.

Definition 3-27. *Der Abschluss einer Aussagenmenge unter deduktiver Konsequenz*
$X^{\vdash} = \{\Delta \mid \Delta \in$ GFORM und $X \vdash \Delta\}$.

Bevor in Kap. 4 und 6 die üblichen Eigenschaften für den hier etablierten deduktiven Konsequenzbegriff bewiesen werden, folgt nun mit Kap. 3.3 zunächst noch ein Abschnitt zur Funktionsweise des Kalküls.

3.3 VERS, VANS, VER und VAN in Ableitungen und bei einzelnen Übergängen

Nun werden Theoreme zu den einzelnen Regeln (vgl. Kap. 3.1) beziehungsweise Operationen (vgl. Kap. 3.2) etabliert, die gewissermaßen die Arbeitsweise des Redehandlungskalküls beschreiben. Genauer werden Theoreme bewiesen, die die Zusammenhänge zwischen der Änderung der Verfügbarkeiten (VERS, VANS, VER, VAN) beim regelgemäßen Fortsetzen eine Sequenz $\mathfrak{H}$ zu einer Sequenz $\mathfrak{H}'$ einerseits und der dabei verwendeten Regel oder Operation andererseits darstellen. Gleichzeitig bilden diese Theoreme die Basis für die in den folgenden Kapiteln bewiesenen Theoreme zur deduktiven Konsequenzschaft (Kap. 4) und zum Nachweis der Korrektheit und der Vollständigkeit des Redehandlungskalküls (Kap. 6). Am Abschluss des Kapitels bietet Theorem 3-30 einen Überblick über die Gestalt von und die Verfügbarkeitsverhältnisse in Ableitungen im Redehandlungskalkül.

Theorem 3-14. *VERS, VANS, VER und VAN in RGF*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) $\text{VERS}(\mathfrak{H}') \subseteq \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(ii) $\text{VANS}(\mathfrak{H}') \subseteq \text{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(iii) $\text{VER}(\mathfrak{H}') \subseteq \text{VER}(\mathfrak{H}) \cup \{\text{K}(\mathfrak{H}')\}$ und

(iv) $\text{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\text{K}(\mathfrak{H}')\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Dann gibt es mit Theorem 3-3 $\Xi \in$ PERF und $\Gamma \in$ GFORM, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner)\} = \mathfrak{H}^\frown\{(0, \ulcorner\Xi\ \Gamma\urcorner)\}$ und die Behauptung folgt mit Theorem 2-79. ■

Theorem 3-15. *VERS, VANS, VER und VAN bei AR*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) $\text{VERS}(\mathfrak{H}')\setminus\text{VERS}(\mathfrak{H}) = \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(ii) $\text{VERS}(\mathfrak{H}') = \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(iii) $\text{VANS}(\mathfrak{H}')\setminus\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(iv) $\text{VANS}(\mathfrak{H}') = \text{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(v) $\text{VER}(\mathfrak{H}')\setminus\text{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \{\text{K}(\mathfrak{H}')\}$,

(vi) $\text{VER}(\mathfrak{H}') = \text{VER}(\mathfrak{H}) \cup \{\text{K}(\mathfrak{H}')\}$,

(vii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')\backslash\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq \{\mathrm{K}(\mathfrak{H}')\}$ und

(viii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\mathrm{K}(\mathfrak{H}')\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H})$. Dann gilt mit Definition 3-18 $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt mit Definition 3-1, dass es $\Gamma \in$ GFORM gibt, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\mathrm{Sei}\ \Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt dann auch $\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 = \mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.

Zu (i): Sei $(i, \mathfrak{H}'_i) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$. Dann folgt mit Theorem 3-14-(i): $(i, \mathfrak{H}'_i) \in \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$. Sodann gilt mit Theorem 2-82: $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')$ und es gilt $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \notin \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{H}$. Also $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$.

Zu (ii): Mit Theorem 3-14-(i) gilt: $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$. Sodann gilt, dass $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) = (\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\mathrm{Sei}\ \Gamma\urcorner) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}')$. Damit gilt mit Theorem 2-30, dass es keinen SE- oder NE- oder EA-artigen und damit auch keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}'$ gibt, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}2$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1$. Dann gilt mit Theorem 2-84 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') = \emptyset$ und damit $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')$. Mit (i) gilt $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')$ und mithin $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\} \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')$.

Zu (iii): Sei $(i, \mathfrak{H}'_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Dann folgt mit Theorem 3-14-(ii): $(i, \mathfrak{H}'_i) \in \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$. Sodann gilt mit (i): $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')$ und es gilt sodann $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) = (\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\mathrm{Sei}\ \Gamma\urcorner) \in \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}')$ und damit $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{H}$.

Zu (iv): Mit (iii) gilt, dass $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}')$. Damit gilt mit (ii): $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\} = (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H})) \cup (\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\} \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}')) = (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}) \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}') = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') \cap \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}') = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')$.

Zu (v), (vi), (vii), (viii): (v) ergibt sich mit Theorem 3-14-(iii) und (vii) ergibt sich mit Theorem 3-14-(iv). (vi) ergibt sich mit Definition 2-30 und (ii). (viii) ergibt sich mit Definition 2-31 und (iv). ■

Theorem 3-16. *VANS-Vermehrung nur bei AR*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) Wenn VANS($\mathfrak{H}$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}'$), dann $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$), und
(ii) Wenn VAN($\mathfrak{H}$) $\subset$ VAN($\mathfrak{H}'$), dann $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). *Zu (i)*: Sei VANS($\mathfrak{H}$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}'$). Dann gibt es $(i, \mathfrak{H}'_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}'$)\VANS($\mathfrak{H}$). Dann ist $(i, \mathfrak{H}'_i) \in$ ANS($\mathfrak{H}'$). Sodann gilt mit Theorem 3-14-(ii): $(i, \mathfrak{H}'_i)$ = (Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$) und somit (Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$) $\in$ ANS($\mathfrak{H}'$). Dann ist mit Definition 3-1 $\mathfrak{H}' \in$ AF($\mathfrak{H}$). *Zu (ii)*: Sei VAN($\mathfrak{H}$) $\subset$ VAN($\mathfrak{H}'$). Dann ist mit Theorem 2-75 VANS($\mathfrak{H}'$) $\not\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}$) und somit gibt es $(i, \mathfrak{H}'_i) \in$ VANS($\mathfrak{H}'$)\VANS($\mathfrak{H}$). Damit ergibt sich die Behauptung wie zu (i). ■

Theorem 3-17. *VERS, VANS, VER und VAN bei Übergängen ohne AR*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$)\AF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) VERS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$)},
(ii) VANS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}$),
(iii) VER($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) $\cup$ {K($\mathfrak{H}'$)} und
(iv) VAN($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$)\AF($\mathfrak{H}$). (i) und (iii) folgen mit Theorem 3-14-(i) und -(iii). *Zu (ii)*: Mit $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$)\AF($\mathfrak{H}$) und Definition 3-1 bis Definition 3-18 gilt, dass (Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$) = (Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also A($\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$)⌝) $\notin$ ANS($\mathfrak{H}'$) und somit (Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$) $\notin$ VANS($\mathfrak{H}'$). Damit ist mit Theorem 3-14-(ii) VANS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}$). *Zu (iv)*: (iv) ergibt sich mit Theorem 2-75 aus (ii). ■

Theorem 3-18. *Nicht-leeres VANS ist hinreichend für SE*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und VANS($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$, dann ist $\mathfrak{H} \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$) $\rightarrow$ K($\mathfrak{H}$)⌝)} $\in$ SEF($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und VANS($\mathfrak{H}$) $\neq \emptyset$. Dann ist (max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))), $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$) $\in$ VANS($\mathfrak{H}$) und es ist A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = K($\mathfrak{H}$) und es gibt kein l mit max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) $< l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in$ VANS($\mathfrak{H}$). Damit ist mit Definition 3-2 $\mathfrak{H} \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$) $\rightarrow$ K($\mathfrak{H}$)⌝)} $\in$ SEF($\mathfrak{H}$). ■

Theorem 3-19. *VERS, VANS, VER und VAN bei SE*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) $\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(ii) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') \subseteq \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$,

(iii) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') = (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\setminus\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(iv) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') = \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$,

(v) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') \cup \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$,

(vi) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VER}(\mathfrak{H}') \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$,

(vii) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}')\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}))\} \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$,

(viii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$,

(ix) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$ und

(x) $\mathrm{K}(\mathfrak{H}') = \ulcorner\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$). Dann gilt mit Definition 3-18 $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Sodann gilt mit Definition 3-2: Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$ und es kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$ gibt, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \Delta \rightarrow \Gamma\urcorner)\}$ und somit $\mathfrak{H}' \in$ SEQ und $\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1 = \mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.

Sodann ist $\mathfrak{B} = \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid i \leq j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}'_i) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$ und es gibt kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$, so dass $(l, \mathfrak{H}'_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) = \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$. Damit gilt mit Theorem 2-91, dass $\mathfrak{B}$ ein SE-geschlossener und damit auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ ist.

Da sodann $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$, ergibt sich mit Theorem 2-86, dass $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1))), \mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)))})\}$. Da $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$ folgt daraus: $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') = \{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$. Damit ist $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))$ und es gilt: $\mathfrak{B} = \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$. Damit gilt dann (i). Außerdem gilt dann $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \Delta$ und da $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \Gamma$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}') = \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner$ gilt dann (x). Sodann ergibt sich mit $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') \neq \emptyset$ und Theorem 2-73 auch $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})\setminus\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') \neq \emptyset$. Damit und mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$ und $\mathfrak{B} = \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ergeben sich dann mit Theorem

2-83-(iv) bis -(xi) und mit der eindeutigen Bestimmtheit geschlossener Abschnitte mit demselben Endglied (Theorem 2-53) die restlichen Klauseln ((ii) bis (ix)). ■

Theorem 3-20. *VERS, VANS, VER und VAN bei NE*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ NEF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) $\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j \leq \text{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(ii) $\text{VERS}(\mathfrak{H})\backslash\text{VERS}(\mathfrak{H}') \subseteq \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \text{Dom}(\mathfrak{H})\}$,

(iii) $\text{VERS}(\mathfrak{H}') = (\text{VERS}(\mathfrak{H})\backslash\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \text{Dom}(\mathfrak{H})\}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(iv) $\text{VANS}(\mathfrak{H})\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}') = \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$,

(v) $\text{VANS}(\mathfrak{H}) = \text{VANS}(\mathfrak{H}') \cup \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$,

(vi) $\text{VER}(\mathfrak{H})\backslash\text{VER}(\mathfrak{H}') \subseteq \{\text{A}(\mathfrak{H}'_j) \mid \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \text{Dom}(\mathfrak{H})\}$,

(vii) $\text{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \{\text{A}(\mathfrak{H}'_j) \mid j \in \text{Dom}(\text{VERS}(\mathfrak{H}')\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}))\} \cup \{\text{A}(\mathfrak{H}'_j) \mid \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j < \text{Dom}(\mathfrak{H})\}$,

(viii) $\text{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\text{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \{\text{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$,

(ix) $\text{VAN}(\mathfrak{H}) = \text{VAN}(\mathfrak{H}') \cup \{\text{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$ und

(x) $\text{K}(\mathfrak{H}') = \ulcorner\neg\text{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))})\urcorner$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ NEF($\mathfrak{H}$). Dann gilt mit Definition 3-18 $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Sodann gilt mit Definition 3-10: Es gibt $\Delta, \Gamma \in$ GFORM und $i, j \in$ Dom($\mathfrak{H}$), so dass $i \leq j$, $\text{A}(\mathfrak{H}_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}_i) \in \text{VANS}(\mathfrak{H})$, $\text{A}(\mathfrak{H}_j) = \Gamma$ und $\text{A}(\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ oder $\text{A}(\mathfrak{H}_j) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $\text{A}(\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$ und $(j, \mathfrak{H}_j) \in \text{VERS}(\mathfrak{H})$ und es gibt kein l mit $i < l \leq \text{Dom}(\mathfrak{H})-1$, so dass $(l, \mathfrak{H}_l) \in \text{VANS}(\mathfrak{H})$, und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \neg\Delta\urcorner)\}$ und somit $\mathfrak{H}' \in$ SEQ und $\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')-1 = \mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$.

Sodann ist $\mathfrak{B} = \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid i \leq j \leq \text{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ein Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ und $\text{A}(\mathfrak{H}'_i) = \Delta$ und $(i, \mathfrak{H}'_i) \in \text{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}))$ und $\text{A}(\mathfrak{H}'_j) = \Gamma$ und $\text{A}(\mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ oder $\text{A}(\mathfrak{H}'_j) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $\text{A}(\mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$ und $(j, \mathfrak{H}'_j) \in \text{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}))$ und es gibt kein l mit $i < l \leq \text{Dom}(\mathfrak{H})-1$, so dass $(l, \mathfrak{H}'_l) \in \text{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}))$ und $\text{A}(\mathfrak{H}'_{\text{Dom}(\mathfrak{H})}) = \ulcorner\neg\Delta\urcorner$. Damit gilt mit Theorem 2-92, dass $\mathfrak{B}$ ein NE-geschlossener und damit auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ ist.

Da sodann $\max(\text{Dom}(\mathfrak{B})) = \text{Dom}(\mathfrak{H}) = \text{Dom}(\mathfrak{H}')-1$, ergibt sich mit Theorem 2-86, dass $\text{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')-1)\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}') = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')-1))), \mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')-1)))})\}$. Da $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}')-1$ folgt daraus: $\text{VANS}(\mathfrak{H})\backslash\text{VANS}(\mathfrak{H}') = \{(\min(\text{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{\min(\text{Dom}(\mathfrak{B}))})\} = \{(\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))})\}$. Damit ist $i = \min(\text{Dom}(\mathfrak{B})) =$

max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) und es gilt: $\mathfrak{B}$ = {(j, $\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j ≤ Dom($\mathfrak{H}$)}. Damit gilt dann (i). Außerdem gilt dann A($\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})))}$) = A($\mathfrak{H}_i$) = Δ und da K($\mathfrak{H}'$) = ⌜¬Δ⌝ gilt dann (x). Sodann ergibt sich mit VANS($\mathfrak{H}$)\VANS($\mathfrak{H}'$) ≠ ∅ und Theorem 2-73 auch VERS($\mathfrak{H}$)\VERS($\mathfrak{H}'$) ≠ ∅. Damit und mit $\mathfrak{H}$ = $\mathfrak{H}'$↾Dom($\mathfrak{H}'$)-1 und $\mathfrak{B}$ = {(j, $\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j ≤ Dom($\mathfrak{H}$)} ergeben sich dann mit Theorem 2-83-(iv) bis -(xi) und mit der eindeutigen Bestimmtheit geschlossener Abschnitte mit demselben Endglied (Theorem 2-53) die restlichen Klauseln ((ii) bis (ix)). ■

Theorem 3-21. *VERS, VANS, VER und VAN bei PB*
Wenn $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ und $\mathfrak{H}'$ ∈ PBF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) {(j, $\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j ≤ Dom($\mathfrak{H}$)} ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$,

(ii) VERS($\mathfrak{H}$)\VERS($\mathfrak{H}'$) ⊆ {(j, $\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)},

(iii) VERS($\mathfrak{H}'$) = (VERS($\mathfrak{H}$)\{(j, $\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)}) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$)},

(iv) VANS($\mathfrak{H}$)\VANS($\mathfrak{H}'$) = {(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))), $\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})))}$)},

(v) VANS($\mathfrak{H}$) = VANS($\mathfrak{H}'$) ∪ {(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))), $\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})))}$)},

(vi) VER($\mathfrak{H}$)\VER($\mathfrak{H}'$) ⊆ {A($\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)},

(vii) VER($\mathfrak{H}$) ⊆ {A($\mathfrak{H}'_j$) | j ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}'$)↾Dom($\mathfrak{H}$))} ∪ {A($\mathfrak{H}'_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))) ≤ j < Dom($\mathfrak{H}$)},

(viii) VAN($\mathfrak{H}$)\VAN($\mathfrak{H}'$) ⊆ {A($\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})))}$)},

(ix) VAN($\mathfrak{H}$) = VAN($\mathfrak{H}'$) ∪ {A($\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom(VANS}(\mathfrak{H})))}$)} und

(x) K($\mathfrak{H}'$) = K($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H}$ ∈ SEQ und $\mathfrak{H}'$ ∈ PBF($\mathfrak{H}$). Dann gilt mit Definition 3-18 $\mathfrak{H}'$ ∈ RGF($\mathfrak{H}$). Sodann gilt mit Definition 3-15: Es gibt β ∈ PAR, ξ ∈ VAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ}, Γ ∈ GFORM und i ∈ Dom($\mathfrak{H}$), so dass A($\mathfrak{H}_i$) = ⌜⋁ξΔ⌝ und (i, $\mathfrak{H}_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}$), A($\mathfrak{H}_{i+1}$) = [β, ξ, Δ] und (i+1, $\mathfrak{H}_{i+1}$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$), und A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = Γ, wobei β ∉ TTFM({Δ, Γ}), und es kein j ≤ i gibt, so dass β ∈ TT($\mathfrak{H}_j$), und es kein m mit i+1 < m ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-1 gibt, so dass (m, $\mathfrak{H}_m$) ∈ VANS($\mathfrak{H}$), und $\mathfrak{H}'$ = $\mathfrak{H}$ ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$), ⌜Also Γ⌝)} und somit $\mathfrak{H}'$ ∈ SEQ und $\mathfrak{H}'$↾Dom($\mathfrak{H}'$)-1 = $\mathfrak{H}'$↾Dom($\mathfrak{H}$) = $\mathfrak{H}$.

Sodann ist $\mathfrak{B}$ = {(j, $\mathfrak{H}'_j$) | i+1 ≤ j ≤ Dom($\mathfrak{H}$)} ein Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ und β ∈ PAR, ξ ∈ VAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ}, Γ ∈ GFORM und A($\mathfrak{H}'_i$) = ⌜⋁ξΔ⌝ und (i, $\mathfrak{H}'_i$) ∈ VERS($\mathfrak{H}'$↾Dom($\mathfrak{H}$)), A($\mathfrak{H}'_{i+1}$) = [β, ξ, Δ] und (i+1, $\mathfrak{H}'_{i+1}$) ∈ VANS($\mathfrak{H}'$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1), und A($\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = Γ, wobei β ∉ TTFM({Δ, Γ}), und es gibt kein j ≤ i, so dass β ∈ TT($\mathfrak{H}'_j$), und es gibt kein m mit i+1 < m ≤ Dom($\mathfrak{H}$)-1, so dass (m, $\mathfrak{H}'_m$) ∈ VANS($\mathfrak{H}'$↾Dom($\mathfrak{H}$)), und

$A(\mathfrak{H}'_{Dom(\mathfrak{H})}) = \Gamma$. Damit gilt mit Theorem 2-93, dass $\mathfrak{B}$ ein PB-geschlossener und damit auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ ist.

Da sodann $max(Dom(\mathfrak{B})) = Dom(\mathfrak{H}) = Dom(\mathfrak{H}')\text{-}1$, ergibt sich mit Theorem 2-86, dass $VANS(\mathfrak{H}'\upharpoonright Dom(\mathfrak{H}')\text{-}1) \setminus VANS(\mathfrak{H}') = \{(min(Dom(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{min(Dom(\mathfrak{B}))})\} = \{(max(Dom(VANS(\mathfrak{H}'\upharpoonright Dom(\mathfrak{H}')\text{-}1))), \mathfrak{H}'_{max(Dom(VANS(\mathfrak{H}'\upharpoonright Dom(\mathfrak{H}')\text{-}1)))})\}$. Da $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\upharpoonright Dom(\mathfrak{H}')\text{-}1$ folgt daraus: $VANS(\mathfrak{H}) \setminus VANS(\mathfrak{H}') = \{(min(Dom(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{min(Dom(\mathfrak{B}))})\} = \{(max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))})\}$. Damit ist $i = min(Dom(\mathfrak{B})) = max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))$ und es gilt: $\mathfrak{B} = \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))) \leq j \leq Dom(\mathfrak{H})\}$. Damit gilt dann (i). Außerdem gilt dann $K(\mathfrak{H}) = A(\mathfrak{H}'_{Dom(\mathfrak{H})\text{-}1}) = \Gamma = K(\mathfrak{H}')$ und somit gilt (x). Sodann ergibt sich mit $VANS(\mathfrak{H}) \setminus VANS(\mathfrak{H}') \neq \emptyset$ und Theorem 2-73 auch $VERS(\mathfrak{H}) \setminus VERS(\mathfrak{H}') \neq \emptyset$. Damit und mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}'\upharpoonright Dom(\mathfrak{H}')\text{-}1$ und $\mathfrak{B} = \{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))) \leq j \leq Dom(\mathfrak{H})\}$ ergeben sich dann mit Theorem 2-83-(iv) bis -(xi) und mit der eindeutigen Bestimmtheit geschlossener Abschnitte mit demselben Endglied (Theorem 2-53) die restlichen Klauseln ((ii) bis (ix)). ■

Theorem 3-22. *Ist die zuletzt angenommene Aussage nur einmal als Annahme verfügbar, dann wird sie bei SE, NE und PB eliminiert*

Wenn $\mathfrak{H} \in SEQ$, $\Delta \in GFORM$ und für alle $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}))$ gilt: Wenn $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta$, dann $i = max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))$, dann gilt für alle $\mathfrak{H}' \in SEF(\mathfrak{H}) \cup NEF(\mathfrak{H}) \cup PBF(\mathfrak{H})$: $VAN(\mathfrak{H}') \subseteq VAN(\mathfrak{H}) \setminus \{\Delta\}$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in SEQ$, $\Delta \in GFORM$ und gelte für alle $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}))$: Wenn $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta$, dann $i = max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))$. Sei nun $\mathfrak{H}' \in SEF(\mathfrak{H}) \cup NEF(\mathfrak{H}) \cup PBF(\mathfrak{H})$. Dann gilt mit Theorem 3-19-(iv), -(v), Theorem 3-20-(iv), -(v) und Theorem 3-21-(iv), -(v), dass $VANS(\mathfrak{H}) \setminus VANS(\mathfrak{H}') = \{(max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))})\}$ und $VANS(\mathfrak{H}') \subseteq VANS(\mathfrak{H})$. Mit Theorem 2-75 gilt $VAN(\mathfrak{H}') \subseteq VAN(\mathfrak{H})$.

Damit gilt: $\Delta \notin VAN(\mathfrak{H}')$. Wäre nämlich $\Delta \in VAN(\mathfrak{H}')$. Dann gäbe es nach Definition 2-31 $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}'))$, so dass $\Delta = A(\mathfrak{H}'_i)$. Dann gilt mit $VANS(\mathfrak{H}') \subseteq VANS(\mathfrak{H})$, dass $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}))$ und es ist $\Delta = A(\mathfrak{H}_i)$. Da nun nach Annahme für alle $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}))$ gilt: Wenn $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta$, dann $i = max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))$ wäre damit $max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))) = i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}'))$. Mit $VANS(\mathfrak{H}) \setminus VANS(\mathfrak{H}') = \{(max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))), \mathfrak{H}'_{max(Dom(VANS(\mathfrak{H})))})\}$ gilt nun jedoch $max(Dom(VANS(\mathfrak{H}))) \notin Dom(VANS(\mathfrak{H}'))$. Widerspruch! Also ist $\Delta \notin VAN(\mathfrak{H}')$ und damit $VAN(\mathfrak{H}') \subseteq VAN(\mathfrak{H}) \setminus \{\Delta\}$. ■

Theorem 3-23. *VANS-Verringerung bei und nur bei SE, NE und PB*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann:
VANS($\mathfrak{H}'$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}$)
gdw
VANS($\mathfrak{H}$)\VANS($\mathfrak{H}'$) = {(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))), $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)} und $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Die Rechts-Links-Richtung ergibt sich mit den Klauseln (iv) und (v) von Theorem 3-19, Theorem 3-20 und Theorem 3-21.

Sei nun für die Links-Rechts-Richtung VANS($\mathfrak{H}'$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}$). Zunächst ist mit $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$) und mit Theorem 3-1 $\mathfrak{H}' \in$ SEQ. Mit Theorem 3-5 ist dann $\mathfrak{H}'\restriction$Dom($\mathfrak{H}'$)-1 = $\mathfrak{H}$ und damit Dom($\mathfrak{H}$) = Dom($\mathfrak{H}'$)-1. Damit gilt wegen VANS($\mathfrak{H}'$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}$) mit Theorem 2-85, dass es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}'$ gibt, so dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq$ Dom($\mathfrak{H}'$)-2 = Dom($\mathfrak{H}$)-1 und max(Dom($\mathfrak{A}$)) = Dom($\mathfrak{H}'$)-1 = Dom($\mathfrak{H}$) und VANS($\mathfrak{H}$)\VANS($\mathfrak{H}'$) = {(min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$)} = {(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$))), $\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)}. Zu zeigen ist nun noch, dass $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$). Nun gilt:

VANS($\mathfrak{H}'\restriction$max(Dom($\mathfrak{A}$))) = VANS($\mathfrak{H}'\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)) = VANS($\mathfrak{H}$).

Ferner gilt mit Theorem 2-61, dass $\mathfrak{A}$ ein SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ ist. Sei nun $\mathfrak{A}$ ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$. Dann gilt mit Theorem 2-91:

a) (min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) = (min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) $\in$ VANS($\mathfrak{H}$),
b) A($\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = K($\mathfrak{H}$),
c) Es gibt kein r mit min(Dom($\mathfrak{A}$)) < $r \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-1, so dass (r, $\mathfrak{H}'_r$) = (r, $\mathfrak{H}_r$) $\in$ VANS($\mathfrak{H}$), und
d) $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$ = ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) → K($\mathfrak{H}$)⌝.

Damit ist nach Definition 3-2 $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$). Sei nun $\mathfrak{A}$ ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$. Dann gilt mit Theorem 2-92, dass es ein $i \in$ Dom($\mathfrak{H}'$) und $\Gamma \in$ GFORM gibt, so dass:

a) min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i <$ Dom($\mathfrak{H}$),
b) (min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) = (min(Dom($\mathfrak{A}$)), $\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))}$) $\in$ VANS($\mathfrak{H}$),
c) A($\mathfrak{H}'_i$) = A($\mathfrak{H}_i$) = Γ und A($\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = ⌜¬Γ⌝
oder
A($\mathfrak{H}'_i$) = A($\mathfrak{H}_i$) = ⌜¬Γ⌝ und A($\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$) = Γ,
d) (i, $\mathfrak{H}_i$) $\in$ VERS($\mathfrak{H}$),

e) Es kein r mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 gibt, so dass $(r, \mathfrak{H}'_r) = (r, \mathfrak{H}_r) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$, und

f) $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\mathrm{Also}\ \neg\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\urcorner = \ulcorner\mathrm{Also}\ \neg\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))})\urcorner$.

Dann ist nach Definition 3-10 $\mathfrak{H}' \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H})$. Sei nun $\mathfrak{A}$ ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$. Dann gilt mit Theorem 2-93, dass es $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\beta \in \mathrm{PAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$ und $\mathfrak{B} \in \mathrm{ABS}(\mathfrak{H}')$ gibt, so dass:

a) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$,

b) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}) = [\beta, \xi, \Delta]$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1, \mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$,

c) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1}) = \Gamma$,

d) $\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))} = \ulcorner\mathrm{Also}\ \Gamma\urcorner$,

e) $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \Gamma\})$,

f) Es kein $j \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'_j)$,

g) $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\setminus\{(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}'_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})\}$ und

h) Es kein r mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) < r \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 gibt, so dass $(r, \mathfrak{H}'_r) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$.

Dann gilt mit g): $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1$ und $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Damit gilt dann $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) < \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 und also insgesamt $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$, $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1 \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1 = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1. Damit gilt dann:

a') $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})), \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$,

b') $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}) = [\beta, \xi, \Delta]$ und $(\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1, \mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$,

c') $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}) = \Gamma$,

d') $\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\mathrm{Also}\ \Gamma\urcorner$,

e') $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \Gamma\})$,

f') Es gibt kein $j \leq \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$,

h') Es gibt kein r mit $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))+1 < r \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1, so dass $(r, \mathfrak{H}_r) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$.

Dann ist nach Definition 3-15 $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$. Also ist in allen drei Fällen $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$. ■

Theorem 3-24. *VERS-Verringerung bei und nur bei SE, NE und PB*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$), dann:
VERS($\mathfrak{H}$) $\not\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}'$)
gdw
$\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ist ein SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$). Die Rechts-Links-Richtung ergibt sich mit den Klausel (iv) von Theorem 3-19, Theorem 3-20 und Theorem 3-21 sowie Theorem 2-72. Sei nun für die Links-Rechts-Richtung VERS($\mathfrak{H}$) $\not\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}'$). Dann ist VERS($\mathfrak{H}$)\VERS($\mathfrak{H}'$) $\neq \emptyset$. Sodann ist mit $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$) und Theorem 3-1 $\mathfrak{H}' \in$ SEQ. und mit Theorem 3-5 ist $\mathfrak{H}' \upharpoonright \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 = \mathfrak{H}$. Mit Theorem 2-83-(vi) und -(vii) gilt dann VANS($\mathfrak{H}'$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}$). Mit Theorem 3-23 gilt: $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$). Damit ergibt sich mit Theorem 3-19-(i), Theorem 3-20-(i) und Theorem 3-21-(i), dass $\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))) \leq j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ ein SE- oder NE- oder PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}'$ ist. ■

Theorem 3-25. *VERS unter Ausschluss von SE, NE und PB*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$)\(SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$)), dann:
VERS($\mathfrak{H}'$) = VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ $\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ RGF($\mathfrak{H}$)\(SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$)). Wegen Theorem 3-14-(i) ist VERS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ $\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$. Mit Theorem 2-82 ist K($\mathfrak{H}'$) = A($\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1}$) in $\mathfrak{H}'$ bei Dom($\mathfrak{H}'$)-1 verfügbar. Mit Theorem 3-4 ist Dom($\mathfrak{H}'$)-1 = Dom($\mathfrak{H}$). Also $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in$ VERS($\mathfrak{H}'$). Wäre VERS($\mathfrak{H}$) $\not\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}'$), so wäre mit Theorem 3-24 entgegen der Voraussetzung $\mathfrak{H}' \in$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$). Also VERS($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}'$). Also gilt auch VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ $\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$ $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}'$). ■

Theorem 3-26. *VERS, VANS, VER und VAN bei KE, BE, AE, UE, PE, IE*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ und $\mathfrak{H}' \in$ KEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ BEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ AEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ UEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ IEF($\mathfrak{H}$), dann:

(i) VERS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ $\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,
(ii) VANS($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}$),
(iii) Wenn VANS($\mathfrak{H}'$) $\subset$ VANS($\mathfrak{H}$), dann ist $\mathfrak{H}' \in$ PBF($\mathfrak{H}$),
(iv) VER($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) $\cup$ {K($\mathfrak{H}'$)},

(v) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und

(vi) Wenn $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$, dann ist $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathfrak{H}' \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{IEF}(\mathfrak{H})$. Dann gilt mit Definition 3-18 $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt mit Definition 3-4, Definition 3-6, Definition 3-8, Definition 3-12, Definition 3-14 und Definition 3-16: Es gibt A, B $\in$ GFORM und $\theta \in$ GTERM und $\beta \in$ PAR und $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, so dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } A \wedge B\urcorner)\}$ oder $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } A \leftrightarrow B\urcorner)\}$ oder $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } A \vee B\urcorner)\}$ oder $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi\Delta\urcorner)\}$ oder $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigvee\xi\Delta\urcorner)\}$ oder $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \theta = \theta\urcorner)\}$. Dann ist mit eindeutiger Lesbarkeit (Theorem 1-10, Theorem 1-11 und Theorem 1-12) $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \notin \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}')$ und damit nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}' \notin \mathrm{AF}(\mathfrak{H})$. Dann ergeben sich (i), (ii), (iv) und (v) mit Theorem 3-17-(i), -(ii), -(iii) and -(iv). Sodann ergibt sich mit Theorem 3-19-(x), Theorem 3-20-(x) und eindeutiger Lesbarkeit, dass $\mathfrak{H}' \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H})$. Damit gilt mit Theorem 3-23: Wenn $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$, dann $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$ und somit (iii). Sei nun für (vi): $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \not\subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$ und damit mit Theorem 2-75 $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \not\subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')$. Damit gilt mit (ii): $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$ und damit mit (iii), dass $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$. ■

Theorem 3-27. *VERS, VANS, VER und VAN bei SB, KB, BB, AB, NB, UB, IB*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H})$, dann:

(i) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\}$,

(ii) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$,

(iii) Wenn $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$, dann ist $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$,

(iv) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \cup \{K(\mathfrak{H}')\}$,

(v) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und

(vi) Wenn $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$, dann ist $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H})$. Dann gilt mit Definition 3-18 $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt mit Definition 3-3, Definition 3-5, Definition 3-7, Definition 3-9, Definition 3-11, Definition 3-13 und Definition 3-17: $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})})\urcorner)\}$. Dann ist $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \notin \mathrm{ANS}(\mathfrak{H}')$ und damit $\mathfrak{H}' \notin \mathrm{AF}(\mathfrak{H})$. Dann ergeben sich (i), (ii), (iv) und (v) mit Theorem 3-17-(i), -(ii), -(iii) and -(iv). Sodann ergibt sich (iii) mit Theorem 3-23. Sei nun für (vi) VAN($\mathfrak{H}$') $\subset$ VAN($\mathfrak{H}$). Dann gilt VAN($\mathfrak{H}$) $\not\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$') und damit mit Theorem 2-75 VANS($\mathfrak{H}$) $\not\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}$'). Damit gilt mit (ii): VANS($\mathfrak{H}$') $\subset$ VANS($\mathfrak{H}$) und damit mit (iii), dass $\mathfrak{H}$' $\in$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$). ■

Theorem 3-28. *Ohne AR, SE, NE oder PB gibt es keine VAN-Veränderung*
Wenn $\mathfrak{H}$ $\in$ RGS und $\mathfrak{H}$ $\notin$ AF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ SEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1), dann VAN($\mathfrak{H}$) = VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1).

Beweis: Sei $\mathfrak{H}$ $\in$ RGS und $\mathfrak{H}$ $\notin$ AF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ SEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1). Dann ist $\mathfrak{H} = \emptyset$ oder $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\subseteq \mathfrak{H} = \emptyset$ und das Theorem gilt. Sei nun $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Nach Theorem 3-6 und Definition 3-18 gilt dann *erstens* $\mathfrak{H}$ $\in$ KEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ BEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ AEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ UEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ PEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ IEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder *zweitens* $\mathfrak{H}$ $\in$ SBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ KBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ BBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ ABF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ NBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ UBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ $\in$ IBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1). In den *ersten* sechs Fällen folgt VAN($\mathfrak{H}$) = VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) aus Theorem 3-26-(v) und -(vi). In den *restlichen* Fällen folgt VAN($\mathfrak{H}$) = VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) aus Theorem 3-27-(v) und -(vi). ■

Theorem 3-29. *VERS, VANS, VER und VAN bleiben aus Beschränkungen, deren Konklusion verfügbar bleibt, in der unbeschränkten Sequenz erhalten.*
Wenn $\mathfrak{H}$ $\in$ RGS und Γ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar ist, dann:

(i) VERS($\mathfrak{H}$↾i+1) $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}$),
(ii) VANS($\mathfrak{H}$↾i+1) $\subseteq$ VANS($\mathfrak{H}$),
(iii) VER($\mathfrak{H}$↾i+1) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}$) und
(iv) VAN($\mathfrak{H}$↾i+1) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$).

Beweis: Sei $\mathfrak{H}$ $\in$ RGS und Γ in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar. Dann gilt nach Definition 2-26: $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$) und Γ = A($\mathfrak{H}_i$) und es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$, so dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)).

Zu (i): Sei zum Nachweis von VERS($\mathfrak{H}$↾i+1) $\subseteq$ VERS($\mathfrak{H}$) (j, Σ) $\in$ VERS($\mathfrak{H}$↾i+1). Also mit Definition 2-28: $j \in$ Dom($\mathfrak{H}$↾i+1) und ($\mathfrak{H}$↾i+1)$_j$ = Σ und A(Σ) ist in $\mathfrak{H}$↾i+1 bei j verfügbar. Damit gibt es nach Definition 2-26 keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$↾i+1, so dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq j <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Wäre nun (j, Σ) $\notin$ VERS($\mathfrak{H}$), dann wäre $j \notin$

Dom($\mathfrak{H}$) oder $\mathfrak{H}_j \neq \Sigma$ oder A(Σ) ist in $\mathfrak{H}$ bei j nicht verfügbar. Da $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 eine Beschränkung von $\mathfrak{H}$ ist und $j \in$ Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1), kann nur letzteres zutreffen. Es gilt also $j \in$ Dom($\mathfrak{H}$) und $\mathfrak{H}_j = \Sigma$ und A(Σ) ist in $\mathfrak{H}$ bei j nicht verfügbar. Damit gibt es nach Definition 2-26 einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}$, so dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq j <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Nach Theorem 2-64-(viii) ist $\mathfrak{A}$ auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright$max(Dom($\mathfrak{A}$))+1. Wäre nun $i <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)), so wäre wegen $j \in$ Dom($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) und damit $j \leq i$ auch min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit wäre entgegen der Annahme A($\mathfrak{H}_i$) = Γ nicht in $\mathfrak{H}$ bei i verfügbar. Also max(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq i$ und damit max(Dom($\mathfrak{A}$))+1 $\leq i$+1. Also $\mathfrak{H}\upharpoonright$max(Dom($\mathfrak{A}$))+1 $\subseteq \mathfrak{H}\upharpoonright i$+1. Mit Theorem 2-62-(viii) ist $\mathfrak{A}$ dann auch ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1. Also gibt es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1, so dass min(Dom($\mathfrak{A}$)) $\leq j <$ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Widerspruch! Also (j, Σ) $\in$ VERS($\mathfrak{H}$).

Zu (ii), (iii) und (iv): Mit Theorem 2-72 ergibt sich (ii) aus (i). Mit Theorem 2-74 ergibt sich (iii) aus (i). Mit Theorem 2-75 ergibt sich (iv) aus (ii). ■

Theorem 3-30. *VERS, VANS, VER und VAN in Ableitungen*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann:
$\mathfrak{H} \in$ RGS
gdw
Für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$):

(i) $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 $\in$ AF($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) und
- a) VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1)\VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) = {($i$, $\mathfrak{H}_i$)},
- b) VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) = VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) $\cup$ {(i, $\mathfrak{H}_i$)},
- c) VANS($\mathfrak{H}i$+1)\VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) = {($i$, $\mathfrak{H}_i$)},
- d) VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) = VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) $\cup$ {(i, $\mathfrak{H}_i$)},
- e) VER($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1)\VER($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) $\subseteq$ {A($\mathfrak{H}_i$)},
- f) VER($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) = VER($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) $\cup$ {A($\mathfrak{H}_i$)},
- g) VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1)\VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) $\subseteq$ {A($\mathfrak{H}_i$)} und
- h) VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) = VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) $\cup$ {A($\mathfrak{H}_i$)}

oder

(ii) $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1 $\in$ SEF($\mathfrak{H}\upharpoonright i$) und
- a) {(j, $\mathfrak{H}_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$))) $\leq j \leq i$} ist ein SE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1,
- b) VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$)\VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) $\subseteq$ {(j, $\mathfrak{H}_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$))) $\leq j < i$},
- c) VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) =
(VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$)\{($j$, $\mathfrak{H}_j$) | max(Dom(VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$))) $\leq j < i$}) $\cup$ {(i, $\mathfrak{H}_i$)},
- d) VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$)\VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$+1) = {(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright i$))), $\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright i)))}$)},

e) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i) =$
$\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \cup \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

f) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

g) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1)\restriction i)\} \cup$
$\{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

h) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

i) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$ und

j) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))}) \rightarrow \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i-1})\urcorner$

oder

(iii) $\mathfrak{H}\restriction i{+}1 \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ und

a) $\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j \leq i\}$ ist ein NE-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction i{+}1$,

b) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

c) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) =$
$(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}) \cup \{(i, \mathfrak{H}_i)\}$,

d) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) = \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

e) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i) =$
$\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \cup \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

f) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

g) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1)\restriction i)\} \cup$
$\{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

h) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

i) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$ und

j) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\neg\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\urcorner$

oder

(iv) $\mathfrak{H}\restriction i{+}1 \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ und

a) $\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j \leq i\}$ ist ein PB-geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}\restriction i{+}1$,

b) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

c) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) =$
$(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}) \cup \{(i, \mathfrak{H}_i)\}$,

d) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) = \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

e) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i) =$
$\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \cup \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

f) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

g) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1)\restriction i)\} \cup$
$\{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) \mid \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i))) \leq j < i\}$,

h) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)\backslash\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i{+}1) \subseteq \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$,

i) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)))})\}$ un

j) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i-1})\urcorner$

oder

(v) $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ und

a) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \{(i, \mathfrak{H}_i)\}$,

b) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)$,

c) Wenn $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)$, dann ist $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$,

d) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)\}$,

e) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)$ und

f) Wenn $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)$, dann ist $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$

oder

(vi) $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ und

a) $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \{(i, \mathfrak{H}_i)\}$,

b) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)$,

c) Wenn $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subset \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\restriction i)$, dann ist $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$,

d) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)\}$,

e) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)$ und

f) Wenn $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i+1) \subset \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\restriction i)$, dann ist $\mathfrak{H}\restriction(i+1) \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$. (*L-R*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}$. Dann gilt mit Definition 3-19 für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}\restriction i)$. Dann gilt mit Definition 3-18 für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$. Dann ergibt sich für $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ mit Theorem 3-15, dass (i) gilt, für $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ mit Theorem 3-19, dass (ii) gilt, für $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ mit Theorem 3-20, dass (iii) gilt, für $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ mit Theorem 3-21, dass (iv) gilt, für $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ mit Theorem 3-26, dass (v) gilt und zuletzt für $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}\restriction i) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\restriction i)$ mit Theorem 3-27, dass (v) gilt.

(*R-L*): Gelte nun für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ einer der Fälle (i) bis (vi). Dann gilt mit Definition 3-18 für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}\restriction i+1 \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}\restriction i)$. Mit Definition 3-19 ist $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}$. ■

4 Theoreme zur deduktiven Konsequenzschaft

Im Folgenden werden Theoreme zur deduktiven Konsequenzschaft bewiesen, die zum einen aufzeigen, dass übliche Eigenschaften wie etwa Reflexivität, Monotonie, die Abgeschlossenheit unter Einführung und Beseitigung der logischen Operatoren und Transitivität für diese gelten und die zum anderen als Vorbereitung auf den Nachweis der Vollständigkeit in Kap. 6.2 dienen. Dazu sind zunächst einige Vorbereitungen zu erbringen (4.1). Sodann werden die gewünschten Eigenschaften der deduktiven Konsequenzrelation gezeigt (4.2).

4.1 Vorbereitungen

Zunächst werden Vorbereitungen getroffen, um zeigen zu können, dass die deduktive Konsequenzschaft unter SE abgeschlossen ist. Dazu wird zunächst gezeigt, dass es zu jeder Ableitung $\mathfrak{H}$ eine Ableitung $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$ gibt, in der keine der angenommenen Aussagen an zwei Stellen verfügbar ist (Theorem 4-1). Theorem 4-2 zeigt dann, dass es zu jeder Ableitung $\mathfrak{H}$ und jedem $\Gamma \in$ GFORM eine Ableitung $\mathfrak{H}^*$ mit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$ gibt, so dass Γ wenn überhaupt nur als letzte Annahme verfügbar ist. Dieses Theorem bildet die Basis für die Abgeschlossenheit unter SE.

Die restlichen Theoreme zielen auf die Abgeschlossenheit unter Einführungen und Beseitigungen ab, bei denen die Antezedentia der Abgeschlossenheitsklauseln (vgl. Theorem 4-18) die Form $X_0 \vdash \mathrm{A}_0, \ldots, X_{n\text{-}1} \vdash \mathrm{A}_{n\text{-}1}$ haben. Hier ist es nicht einfach möglich, beliebige Ableitungen einfach zu verketten, da es unter Umständen durch die Entstehung geschlossener Abschnitte oder durch Verletzung von Parameterbedingungen zu Problemen kommen kann. Daher muss gezeigt werden, dass sich Ableitungen durch die Hinzufügung von blockierenden Gliedern, die Substitution von Parametern und die mehrfache Anwendung von UE und UB so umformen lassen, dass die gewünschten Verkettungen möglich sind.

Hierzu wird zunächst gezeigt, dass sich parameterfremde Ableitungen unter Einschub einer die Entstehung von geschlossenen Abschnitten blockierenden Annahme (Theorem 4-3) miteinander verbinden lassen (Theorem 4-4), wobei die blockierende Annahme wieder entfernt werden kann (Theorem 4-7). Sodann wird gezeigt, dass die einfache Substitution eines neuen Parameter für einen möglicherweise bereits verwendeten Parameter

RGS-treu ist (Theorem 4-8). Der dazu gehörige Beweis dient als Vorlage für den Beweis des Folgetheorems (Theorem 4-9), das seinerseits das Generalisierungstheorem (Theorem 4-24) vorbereitet. Zudem wird gezeigt, dass die simultane Substitution mehrerer neuer und paarweise verschiedener Parameter für paarweise verschiedene Parameter RGS-treu ist (Theorem 4-10). Sodann werden Eigenschaften von UE- und UB-Fortsetzungen von Ableitungen etabliert, bis dann schlussendlich mit Theorem 4-14 gezeigt werden kann, dass sich je zwei beliebige Ableitungen so verbinden lassen, dass einerseits die verfügbaren Annahmen insgesamt nicht mehr werden und andererseits die Konklusionen beider Ableitungen noch verfügbar sind.

Theorem 4-1. *Non-redundantes VANS*
Wenn $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass
(i) $\text{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H})$
(ii) $\text{K}(\mathfrak{H}^*) = \text{K}(\mathfrak{H})$ und
(iii) $|\text{VANS}(\mathfrak{H}^*)| = |\text{VAN}(\mathfrak{H}^*)|$.

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Der Beweis wird mittels Induktion über $|\text{VANS}(\mathfrak{H})|$ geführt. Sei $|\text{VANS}(\mathfrak{H})| = 0$. Offenbar gilt $\text{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\text{K}(\mathfrak{H}) = \text{K}(\mathfrak{H})$ und mit Theorem 2-77 folgt auch $|\text{VAN}(\mathfrak{H})| = 0$.

Sei nun $|\text{VANS}(\mathfrak{H})| = k \neq 0$. Gelte die Behauptung für alle $\mathfrak{H}' \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ mit $|\text{VANS}(\mathfrak{H}')| < k$. Dann ist mit Theorem 2-76 $|\text{VAN}(\mathfrak{H})| \leq |\text{VANS}(\mathfrak{H})|$. Sei nun $|\text{VAN}(\mathfrak{H})| \neq |\text{VANS}(\mathfrak{H})|$. Dann ist $|\text{VAN}(\mathfrak{H})| < |\text{VANS}(\mathfrak{H})|$. Sodann ist $\text{VANS}(\mathfrak{H}) \neq \emptyset$. Damit ist mit Theorem 3-18 $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H} \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also A}(\mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))}) \rightarrow \text{K}(\mathfrak{H})\urcorner)\} \in \text{SEF}(\mathfrak{H})$. Dann ist mit Theorem 3-19-(ix) $\text{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H})$ und mit Theorem 3-19-(iv) und -(v) ergibt sich $|\text{VANS}(\mathfrak{H}^1)| < k$. Dann gibt es nach I.V. $\mathfrak{H}^2 \in \text{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass $\text{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H}^1)$, $\text{K}(\mathfrak{H}^2) = \text{K}(\mathfrak{H}^1)$ und $|\text{VANS}(\mathfrak{H}^2)| = |\text{VAN}(\mathfrak{H}^2)|$. Dann ist $\text{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\text{K}(\mathfrak{H}^2) = \text{K}(\mathfrak{H}^1) = \ulcorner\text{A}(\mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))}) \rightarrow \text{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Nun ist $\text{A}(\mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))}) \in \text{VAN}(\mathfrak{H}^2)$ oder $\text{A}(\mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))}) \notin \text{VAN}(\mathfrak{H}^2)$.
Sei $\text{A}(\mathfrak{H}_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H})))}) \in \text{VAN}(\mathfrak{H}^2)$. Dann ist $\mathfrak{H}^3 = \mathfrak{H}^{2\frown}\{(0, \ulcorner\text{Also K}(\mathfrak{H})\urcorner)\} \in \text{SBF}(\mathfrak{H}^2)$ und mit Theorem 3-27-(v) $\text{VAN}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \text{VAN}(\mathfrak{H})$ und es ist $\text{K}(\mathfrak{H}^3) = \text{K}(\mathfrak{H})$ und $|\text{VANS}(\mathfrak{H}^3)| = |\text{VAN}(\mathfrak{H}^3)|$. Letzteres ergibt sich wie folgt:

Wäre $|\text{VANS}(\mathfrak{H}^3)| > |\text{VAN}(\mathfrak{H}^3)|$. Dann gäbe es $i, j \in \text{Dom}(\mathfrak{H}^3)$ mit $i \neq j$ und $\text{A} \in \text{GFORM}$, so dass $(i, \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \text{VANS}(\mathfrak{H}^3)$ und $(j, \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \text{VANS}(\mathfrak{H}^3)$. Da mit Theorem 3-27-(ii) $\text{VANS}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \text{VANS}(\mathfrak{H}^2)$ gäbe es damit $i, j \in \text{Dom}(\mathfrak{H}^2)$ mit $i \neq j$ und

A $\in$ GFORM, so dass (i, ⌜Sei A⌝) $\in$ VANS($\mathfrak{H}^2$) und (j, ⌜Sei A⌝) $\in$ VANS($\mathfrak{H}^2$). Dann wäre jedoch auch |VANS($\mathfrak{H}^2$)| > |VAN($\mathfrak{H}^2$)|. Also ist |VANS($\mathfrak{H}^3$)| $\leq$ |VAN($\mathfrak{H}^3$)| und damit mit Theorem 2-76 insgesamt |VANS($\mathfrak{H}^3$)| = |VAN($\mathfrak{H}^3$)|.

Sei A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$) $\notin$ VAN($\mathfrak{H}^2$). Sei nun $\mathfrak{H}^4 = \mathfrak{H}^{2\frown}${(0, ⌜Sei A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)⌝)}. Dann ist $\mathfrak{H}^4$ $\in$ AF($\mathfrak{H}^2$). Dann ist mit Theorem 3-15-(viii) VAN($\mathfrak{H}^4$) = VAN($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ {A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)} $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$) und es ist K($\mathfrak{H}^4$) = A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$) und |VANS($\mathfrak{H}^4$)| = |VAN($\mathfrak{H}^4$)|. Letzteres ergibt sich wie folgt:

Zunächst ist |VAN($\mathfrak{H}^2$)| = |VANS($\mathfrak{H}^2$)| und |{A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)}| = |{(Dom($\mathfrak{H}^2$), ⌜Sei A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)⌝)}|. Ferner ist VANS($\mathfrak{H}^2$) $\cap$ {(Dom($\mathfrak{H}^2$), ⌜Sei A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)⌝)} = $\emptyset$ und VAN($\mathfrak{H}^2$) $\cap$ {A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)} = $\emptyset$. Damit ist dann mit Theorem 3-15-(iv) und -(viii):

|VANS($\mathfrak{H}^4$)| = |VANS($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^2$), ⌜Sei A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)⌝)}|
= |VANS($\mathfrak{H}^2$)|+|{(Dom($\mathfrak{H}^2$), ⌜Sei A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)⌝)}|
= |VAN($\mathfrak{H}^2$)|+|{A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)}|
= |VAN($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ {A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$)}|
= |VAN($\mathfrak{H}^4$)|.

Sodann gilt mit Theorem 3-15-(vi), dass {A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$), ⌜A($\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})))}$) $\rightarrow$ K($\mathfrak{H}$)⌝} $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^4$). Damit ist $\mathfrak{H}^5 = \mathfrak{H}^{4\frown}${(0, ⌜Also K($\mathfrak{H}$)⌝)} $\in$ SBF($\mathfrak{H}^4$) und mit Theorem 3-27-(v) VAN($\mathfrak{H}^5$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}^4$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$) und K($\mathfrak{H}^5$) = K($\mathfrak{H}$) und |VANS($\mathfrak{H}^5$)| = |VAN($\mathfrak{H}^5$)|. Letzteres ergibt sich wie oben für |VANS($\mathfrak{H}^3$)| = |VAN($\mathfrak{H}^3$)| unter Rückgriff auf |VANS($\mathfrak{H}^4$)| = |VAN($\mathfrak{H}^4$)|. ■

Das folgende Theorem dient insbesondere der Vorbereitung der Abgeschlossenheit unter SE (Theorem 4-18-(i)).

Theorem 4-2. *SE-Vorbereitungstheorem*
Wenn $\mathfrak{H}$ $\in$ RGS\{$\emptyset$} und Γ $\in$ GFORM, dann gibt es ein $\mathfrak{H}$* $\in$ RGS\{$\emptyset$}, so dass
(i) VAN($\mathfrak{H}$*) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$),
(ii) K($\mathfrak{H}$*) = K($\mathfrak{H}$) und
(iii) Für alle i $\in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}$*)): Wenn A($\mathfrak{H}^*_i$) = Γ, dann i = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}$*))).

Beweis: Sei $\mathfrak{H}$ $\in$ RGS\{$\emptyset$} und Γ $\in$ GFORM. Dann ist Γ $\notin$ VAN($\mathfrak{H}$) oder Γ $\in$ VAN($\mathfrak{H}$). Sei Γ $\notin$ VAN($\mathfrak{H}$). Dann ist $\mathfrak{H}$ selbst ein solches $\mathfrak{H}$* $\in$ RGS\{$\emptyset$}, so dass (i), (ii) und trivialerweise (iii) gelten. Sei nun Γ $\in$ VAN($\mathfrak{H}$). Der Beweis wird mittels Induktion über

$|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})|$ geführt. Sei $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})| = 0$. Mit Theorem 2-77 folgt entgegen der Annahme $|\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})| = 0$, womit die Behauptung trivial gilt.

Sei nun $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})| = k \neq 0$. Gelte die Behauptung für alle $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ mit $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')| < k$. Dann gibt es mit Theorem 4-1 ein $\mathfrak{H}^1 \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$, $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$ und $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)| = |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1)| \leq |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})| \leq |\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})|$. Sodann gilt mit $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)| = |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1)|$ für alle $\mathrm{B} \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1)$: Es gibt genau ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1))$, so dass $\mathrm{B} = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$. Angenommen, für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1))$: Wenn $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))$. Dann ist $\mathfrak{H}^1$ das gesuchte Element von $\mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$.

Gelte nun nicht für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1))$: Wenn $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_i) = \Gamma$ und $i \neq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))$. Dann ist $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1) \neq \emptyset$ und $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1)$ und es gilt für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1))$: Wenn $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) = \Gamma$, dann $j = i$ und damit auch $j \neq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))$. Damit ist $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \neq \Gamma$. Sodann gilt mit $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1) \neq \emptyset$, Theorem 3-18 und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{K}(\mathfrak{H})$: $\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}^{1\frown}\{(0, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner)\} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^1)$. Dann gilt mit Theorem 3-22, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1)\setminus\{\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\} \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Mit Theorem 3-19-(iv) und (v) gilt sodann $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)| < |\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)| \leq |\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})|$ und es gilt: $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)| = |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2)|$. Letzteres ergibt sich wie folgt:

> Wäre $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)| > |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2)|$. Dann gäbe es $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2)$ mit $i \neq j$ und $\mathrm{A} \in \mathrm{GFORM}$, so dass $(i, \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)$ und $(j, \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)$. Da mit Theorem 3-19-(v) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)$ gäbe es damit $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^1)$ mit $i \neq j$ und $\mathrm{A} \in \mathrm{GFORM}$, so dass $(i, \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)$ und $(j, \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)$. Dann wäre jedoch auch $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)| > |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1)|$. Also ist $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)| \leq |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2)|$ und damit mit Theorem 2-76 insgesamt $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)| = |\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2)|$.

Nun ist $|\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)| < |\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)| \leq |\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})| = k$. Damit gibt es nach I.V. ein $\mathfrak{H}^3 \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2)$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{K}(\mathfrak{H}^2)$ und für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3))$: Wenn $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^3_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)))$. Dann ist $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$, $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^3) = \ulcorner\mathrm{A}(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Dann lassen sich mit $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)$ oder $\Gamma \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)$ *zwei* Fälle unterscheiden:

Erster Fall: $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)$. Dann ist $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^3_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)))})$ und für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3))$: Wenn $\Gamma = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)))$. Dann ist mit

Theorem 3-18 $\mathfrak{H}^4 = \mathfrak{H}^{3\frown}\{(0, \ulcorner\text{Also } \Gamma \rightarrow (A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H}))\urcorner\} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^3)$. Dann ergibt sich mit Theorem 3-22, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)\backslash\{\Gamma\} \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Also gilt $\Gamma \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4)$ und damit, dass für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4))$: $A(\mathfrak{H}^4{}_i) \neq \Gamma$.

Sei nun $\mathfrak{H}^5 = \mathfrak{H}^{4\frown}\{(0, \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner), (1, \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner)\}$. Dann ist zunächst $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^{4\frown}\{(0, \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner)\})$ und $\mathfrak{H}^{4\frown}\{(0, \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner)\} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^4)$. Sodann gilt wegen $A(\mathfrak{H}^4{}_i) \neq \Gamma$ für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4))$ und $\Gamma \neq A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})$ mit Theorem 3-15-(iv) für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5))$: $A(\mathfrak{H}^5{}_i) = \Gamma$ gdw $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5)))$. Sodann ist mit Theorem 3-15-(viii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^5) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4) \cup \{\Gamma, A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\} \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Ferner ist mit Theorem 3-15-(vi) $\{\Gamma, A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}), \ulcorner\Gamma \rightarrow (A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H}))\urcorner\} \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^5)$ und mit Theorem 3-15-(iv) ist $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5)$.

Dann ist $\mathfrak{H}^6 = \mathfrak{H}^{5\frown}\{(0, \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner)\} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^5)$ und mit Theorem 3-27-(v) gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^6) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^5) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6))$: Wenn $A(\mathfrak{H}^6{}_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6)))$. Letzteres ergibt sich wie folgt:

> Gäbe es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6))$, so dass $A(\mathfrak{H}^6{}_i) = \Gamma$ und $i \neq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6)))$. Mit Theorem 3-27-(ii) gilt dann $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5))$. Dann ist $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5))) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)+1$. Nach Konstruktion von $\mathfrak{H}^6$ ist jedoch $\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6))) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)+1 = i$ und also mit $i \neq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6)))$ insgesamt $\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6))) < i$. Andererseits ist mit $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6))$ jedoch $i \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6)))$. Widerspruch!

Sodann ist $\ulcorner A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner = K(\mathfrak{H}^6) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^6)$. Wäre nun $A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \notin \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^6)$. Dann wäre $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner) \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6)$ und damit $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6)$. Mit Theorem 2-85 wäre dann allerdings $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5)\backslash\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6) = \{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5))), \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5)))})\} = \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)+1, \ulcorner\text{Sei } \Gamma\urcorner)\}$ und also $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)+1$. Widerspruch!

Daher ist $\mathfrak{H}^7 = \mathfrak{H}^{6\frown}\{(0, \ulcorner\text{Also } K(\mathfrak{H})\urcorner)\} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^6)$ und mit Theorem 3-27-(v) gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^7) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^6) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Ferner gilt mit Theorem 3-27-(ii) für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^7))$: Wenn $A(\mathfrak{H}^7{}_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^7)))$. Damit ist $\mathfrak{H}^7$ das gesuchte Element von $\mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$.

Zweiter Fall: $\Gamma \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)$. Sei nun $\mathfrak{H}^8 = \mathfrak{H}^{3\frown}\{(0, \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}^1_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\urcorner)\}$. Dann ist zunächst $\mathfrak{H}^8 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^3)$. Sodann ist mit Theorem 3-15-(viii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^8) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3) \cup$

$\{A(\mathfrak{H}^1{}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))})\} \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Ferner ist mit Theorem 3-15-(vi) $\{A(\mathfrak{H}^1{}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}), \ulcorner A(\mathfrak{H}^1{}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner\} \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^8)$. Sodann gilt mit $\Gamma \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3)$ und $A(\mathfrak{H}^1{}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)))}) \neq \Gamma$ auch $\Gamma \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^8)$ und damit für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^8)$: $A(\mathfrak{H}^8{}_i) \neq \Gamma$. Dann gilt trivialerweise für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^8))$: Wenn $A(\mathfrak{H}^8{}_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^8)))$. Dann ist $\mathfrak{H}^9 = \mathfrak{H}^{8\frown}\{(0, \ulcorner\text{Also } K(\mathfrak{H})\urcorner)\} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^8)$ und mit Theorem 3-27-(v) gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^9) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^8) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Ferner gilt für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^9))$ wiederum trivialerweise: Wenn $A(\mathfrak{H}^9{}_i) = \Gamma$, dann $i = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^9)))$. Damit ist $\mathfrak{H}^9$ das gesuchte Element von $\mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. ■

Theorem 4-3. *Blockierende Annahmen*
Wenn $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$ ist, $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$, $\Delta = A(\mathfrak{H}_i)$ und $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TT}(\Delta) = \emptyset$, dann gibt es ein $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass $i \neq j$ und $\Delta \in \mathrm{TA}(\mathfrak{H}_j)$.

Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}$, $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{A}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))$, $\Delta = A(\mathfrak{H}_i)$ und $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TT}(\Delta) = \emptyset$. Mit Theorem 2-47 gilt dann, dass es einen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}$ gibt, so dass $i = \min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))$. Mit Theorem 2-42 ist $\mathfrak{B}$ dann ein SE- oder ein NE- oder ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Sei $\mathfrak{B}$ ein SE- oder ein NE-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt mit Definition 2-11 und Definition 2-12, dass $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, $\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B})) \neq i$ und $\Delta \in \mathrm{TA}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))})$. Sei nun $\mathfrak{B}$ ein EA-artiger Abschnitt in $\mathfrak{H}$. Dann gilt mit Definition 2-13: $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))\text{-}1 \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))\text{-}1 \neq i$. Sodann gibt es $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\Delta^+ \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta^+) \subseteq \{\xi\}$ und $\beta \in \mathrm{PAR}$, so dass $A(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta^{+}\urcorner$ und $\Delta = A(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))}) = [\beta, \xi, \Delta^+]$. Da nun nach Annahme $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TT}(\Delta) = \emptyset$, ist dann $\beta \notin \mathrm{TT}([\beta, \xi, \Delta^+])$ und mit Theorem 1-14-(ii) $\Delta = [\beta, \xi, \Delta^+] = \Delta^+$. Damit ist dann $A(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und somit $\Delta \in \mathrm{TA}(\mathfrak{H}_{\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{B}))-1})$ und die Behauptung gilt. ■

Theorem 4-4. *Verkettung parameterfremder RGS-Elemente mit eingeschobener blockierender Annahme*
Wenn $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in \mathrm{RGS}$, $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = \emptyset$ und $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus(\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}'))$, dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass

(i) $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')$,

(ii) $\mathfrak{H}^*\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$,

(iii) $\mathfrak{H}^*{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\text{Sei } \alpha = \alpha\urcorner$,

(iv) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')$ ist $\mathfrak{H}'_i = \mathfrak{H}^*{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i}$,

(v) $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) =$
$\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}$,

(vi) $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner \alpha = \alpha \urcorner\} \cup \mathrm{VER}(\mathfrak{H}')$ und

(vii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner \alpha = \alpha \urcorner\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$.

Beweis: Durch Induktion über $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')$ wird gezeigt, dass es unter den entsprechenden Voraussetzungen immer ein $\mathfrak{H}^*$ gibt, dass (i) bis (v) erfüllt. (vi) und (vii) ergeben sich aus den vorhergehenden Klauseln. Mit (i) bis (v) gilt nämlich mit Definition 2-30:

$B \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*)$
gdw
es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
$B \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner \alpha = \alpha \urcorner\} \cup \mathrm{VER}(\mathfrak{H}')$.

Sodann ergibt sich (vii) aus (i) bis (v) mit Definition 2-31 wie folgt:

$B \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*)$
gdw
es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}^*))$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
es gibt ein $i \in (\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}^*))$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
es gibt ein $i \in (\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}^*))) \cup (\{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}^*))) \cup (\{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\} \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}^*)))$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
es gibt ein $i \in (\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}))) \cup (\{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cap \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}^*))) \cup (\{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\} \cap \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{ANS}(\mathfrak{H}'))\})$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
es gibt ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup (\{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'))\}$, so dass $B = A(\mathfrak{H}^*_i)$
gdw
$B \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner \alpha = \alpha \urcorner\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$.

Nun zum Induktionsbeweis: Gelte die Behauptung für $k < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')$ und seien $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ wie gefordert und sei $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus(\mathrm{TT}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'))$. Angenommen $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') = 0$. Dann ist $\mathfrak{H}' = \emptyset$ und mit $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^\frown\{(0, \ulcorner\mathrm{Sei}\ \alpha = \alpha\urcorner)\}$ und Theorem 3-15-(ii) gilt die Behauptung. Sei nun $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') > 0$. Dann ist $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. Dann ist mit Theorem 3-6 $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ und $\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \in \mathrm{RGS}$. Sodann ist mit $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = \emptyset$ auch $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) = \emptyset$ und mit $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus(\mathrm{TT}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'))$ ist auch $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus(\mathrm{TT}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$. Dann gibt es nach I.V. für $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1$ und α ein $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}$, für das (i) bis (v) gelten. Dann gilt:

i') $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')$,
ii') $\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$,
iii') $\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\mathrm{Sei}\ \alpha = \alpha\urcorner$,
iv') Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1$ ist $\mathfrak{H}'_i = (\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)_i = \mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i}$,
v') $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) =$
$\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))\}$.

Sodann ergibt sich aus $\mathfrak{H}' \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ mit Definition 3-18, dass $\mathfrak{H}' \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Nun sei vereinbart:

vi') $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\}$.

Dann gilt für $\mathfrak{H}^+$ bereits $\mathfrak{H}^+ \neq \emptyset$ und (i) bis (iv). Nun wird gezeigt, dass sich für die einzelnen Fälle AF … IBF jeweils ergibt, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und auch (v) gilt, womit $\mathfrak{H}^+$ dann jeweils das gesuchte RGS-Element ist. Zunächst ist zu bemerken, dass wegen $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus(\mathrm{TT}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'))$ gilt, dass es kein $l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^+)$ gibt, so dass $l \neq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ und $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in \mathrm{TA}(\mathfrak{H}^+_l)$. Damit gilt mit $\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \mathfrak{H}^+_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner\mathrm{Sei}\ \alpha = \alpha\urcorner$ und Theorem 4-3:

vii') Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^+$ und es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^*$, so dass $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) < \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$.

Damit gilt dann auch:

> viii') $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^+))$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*)))$.

Um Sonderbetrachtungen bei SBF, KEF, KBF, BEF, BBF, AEF, ABF, NBF, UEF, UBF, PEF, IEF und IBF zu vereinfachen wird nun noch vorbereitend gezeigt:

> ix') Wenn $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$, dann $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$.

Vorbereitungsteil: Sei zunächst $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*)$. Dann gilt mit Definition 3-2, Theorem 3-19-(i) und vii') und viii'), dass es $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ gibt, so dass mit i') und iv') $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i)$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2}) = \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ und es kein l mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\urcorner\}$. Dann gilt mit i'), iv') und v'): $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ und es gibt kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$. Ferner gilt dann mit vi'), dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\urcorner\}$ und damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Für den Fall, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*)$, zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H}' \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$.

Sei nun $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$. Dann gilt mit Definition 3-15, Theorem 3-21-(i), $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) = \ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$ und vii') und viii'), dass es $\beta \in \mathrm{PAR}$, $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ gibt, so dass mit i') und iv') $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i)$ und $[\beta, \xi, \Delta] = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{i+1})$, wobei $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2}) = \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\urcorner\}$ und $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\})$ und es kein $j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}^*_j)$ und es kein l mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$. Dann gilt mit i'), iv') und v'): $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ und $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ und $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'_j)$, und es gibt kein l mit $i+1 < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$. Ferner gilt dann mit vi'), dass $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{K}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\urcorner\}$ und damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$.

Hauptteil: Nun zum Nachweis, dass sich für die einzelnen Fälle AF … IBF jeweils ergibt, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und v) gilt:

(*AF*): Sei $\mathfrak{H}' \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Dann ist nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\urcorner)\}$ und mit vi') $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\urcorner)\} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Sodann ergibt sich mit Theorem 3-15-(ii), dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\urcorner)\}$ und $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\urcorner)\}$. Mit v') ergibt sich dann:

$i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+))$
gdw
$i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}$
gdw
$i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))\} \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}$
gdw
$i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}$

und damit, dass $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}$ und somit (v) gilt.

(*SEF*, *NEF*): Sei nun $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Dann gibt es nach Definition 3-2 $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1$, so dass mit iv') $\mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i})$ und $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}2}) = \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)$ und es kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}2$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\}$. Mit vi') ergibt sich dann: $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\}$. Sodann gilt mit iv') und v'): $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und es gibt kein l mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$. Damit ist dann auch $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Sodann ergibt sich mit Theorem 3-19-(iii), dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') = (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)\backslash\{(j, \mathfrak{H}'_j) \mid i \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\}$ und $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = (\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)\backslash\{(r, \mathfrak{H}^+_r) \mid \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}i \leq r < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1})\}$. Mit v') ergibt sich dann:

$k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+))$
gdw
$k \in (\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))\backslash\{r \mid \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}i \leq r < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{+}1\text{+}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1\}$

gdw
$k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $k < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i$ oder $k = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$
gdw
$k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ oder $k \in \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1))\}$ und $k < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i$ oder $k = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$
gdw
$k < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ oder $k \geq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $k\text{-}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1))$ und $k\text{-}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1 < i$ oder $k\text{-}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1 = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$
gdw
$k < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ oder $k \geq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $k\text{-}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1))\backslash\{j \mid i \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1\}$ oder $k\text{-}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1 = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1$
gdw
$k < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\}$ oder $k \geq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $k\text{-}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))$

und somit, dass $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}$ und damit (v) gilt. Für den Fall, dass $\mathfrak{H}' \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)$, zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und v) gilt.

(*PBF*): Sei nun $\mathfrak{H}' \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)$. Dann gilt nach Definition 3-15, dass es $\beta \in \mathrm{PAR}$, $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1))$ gibt, so dass mit iv') $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_i) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i})$ und $[\beta, \xi, \Delta] = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{i+1}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i})$, wobei $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1))$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2}) = \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{K}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)\}$ und $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{K}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'_j)$, und es gibt kein l mit $i+1 < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)$.

Dann gilt mit iv') und v'): $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und es gibt kein l mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$. Sodann gilt mit vi'), dass $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{K}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1, \ulcorner\mathrm{Also}\ \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner\}$.

Sodann ist $\xi \in \mathrm{FV}(\Delta)$ oder $\xi \notin \mathrm{FV}(\Delta)$. Sei nun $\xi \in \mathrm{FV}(\Delta)$. Dann ist $\beta \in \mathrm{TT}([\beta, \xi, \Delta]) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}')$. Da nun nach Voraussetzung $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = \emptyset$ ist damit $\beta \notin \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$. Damit ergibt sich mit i') bis iv') daraus, dass $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{K}(\mathfrak{H}'\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')-1)\})$ und es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}'_j)$, dass auch $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta,$

$K(\mathfrak{H}^*)\})$ und es kein $j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}^*_j)$. Damit ist dann $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$. Sei nun $\xi \notin \mathrm{FV}(\Delta)$. Dann ist $\beta \notin \mathrm{TT}([\beta, \xi, \Delta])$. Nun gibt es ein $\beta^* \in \mathrm{PAR}\backslash(\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}'))$. Dann ist mit Theorem 1-14-(ii) $[\beta^*, \xi, \Delta] = \Delta = [\beta, \xi, \Delta] = A(\mathfrak{H}'_{i+1}) = A(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+2+i})$. Sodann gilt dann, dass $\beta^* \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, K(\mathfrak{H}^*)\})$ und es kein $j \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i$ gibt, so dass $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}^*_j)$. Damit ist dann wiederum $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$. Es gilt also insgesamt, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Dass auch (v) gilt, ergibt sich dann mit v') und Theorem 3-21-(iii) analog zu SEF und NEF.

(*SBF*, *KEF*, *KBF*, *BEF*, *BBF*, *AEF*, *ABF*, *NBF*, *UBF*, *PEF*, *IEF*, *IBF*): Sei nun $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Dann gibt es nach Definition 3-3 $\Delta, \Gamma \in \mathrm{GFORM}$, so dass Δ, $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$. Dann gilt mit vi'): $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$. Sodann gilt mit Δ, $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$, Definition 2-30 und iv'), dass es $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ gibt, so dass $\Delta = A(\mathfrak{H}'_i) = A(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i})$ und $\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner = A(\mathfrak{H}'_j) = A(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+j})$. Sodann gilt mit v'), dass $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i$, $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$. Damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$.

Sodann ist $\mathfrak{H}' \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H}' \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Im ersten Fall ergibt sich die Gültigkeit von (v) wie unter den jeweiligen Fallbetrachtungen. Sei nun $\mathfrak{H}' \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Dann gilt mit ix'), dass auch $\mathfrak{H}^+ \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$. Dann gilt mit Theorem 3-25, dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}') = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$ und $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$. Mit v') ergibt sich dann wie bei AF, dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H})) \cup \{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+l \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'))\}$ und folglich (v) gilt.

Für den Fall, dass $\mathfrak{H}' \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$, zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und jeweils v) gilt.

(*UEF*): Sei nun $\mathfrak{H}' \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$. Dann gibt es nach Definition 3-12 $\beta \in \mathrm{PAR}$, $\xi \in \mathrm{VAR}$ und $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, so dass $[\beta, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$,

$\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ und $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi\Delta\urcorner)\}$. Dann gilt zunächst mit vi'): $\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H}^{*} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi\Delta\urcorner)\}$. Sodann gilt mit $[\beta, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)$, Definition 2-30 und iv'), dass es $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1))$ gibt, so dass $[\beta, \xi, \Delta] = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{i}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i})$. Sodann gilt mit v'), dass $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{*}))$.

Sodann ist $\xi \in \mathrm{FV}(\Delta)$ oder $\xi \notin \mathrm{FV}(\Delta)$. Sei nun $\xi \in \mathrm{FV}(\Delta)$. Dann ist $\beta \in \mathrm{TT}([\beta, \xi, \Delta]) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}')$. Da nun nach Voraussetzung $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = \emptyset$ ist damit $\beta \notin \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$. Damit ergibt sich mit i') bis v') daraus, dass $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}'{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')\text{-}1)))$, dass auch $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^{*}))$. Damit ist dann $\mathfrak{H}^{+} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}^{*})$. Sei nun $\xi \notin \mathrm{FV}(\Delta)$. Dann ist $\beta \notin \mathrm{TT}([\beta, \xi, \Delta])$. Sei nun $\beta^{*} \in \mathrm{PAR}\setminus(\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}'))$. Dann ist mit Theorem 1-14-(ii) $[\beta^{*}, \xi, \Delta] = \Delta = [\beta, \xi, \Delta] = \mathrm{A}(\mathfrak{H}'_{i}) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i})$. Außerdem gilt dann, dass $\beta^{*} \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^{*}))$. Damit ist dann wiederum $\mathfrak{H}^{+} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}^{*})$. Es gilt also insgesamt, dass $\mathfrak{H}^{+} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}^{*}) \subseteq \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. (v) ergibt sich dann analog zum Vorgehen bei SBF … IBF. ■

Theorem 4-5. *Geglückte KB-Fortsetzung*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und $\ulcorner\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$, dann gibt es ein $\mathfrak{H}^{*} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass

(i) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^{*}) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$,

(ii) $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^{*})$ und

(iii) $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^{*}) = \mathrm{B}$.

Beweis: Seien $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und $\ulcorner\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$. Dann gibt es ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i}) = \ulcorner\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\urcorner$ und $(i, \mathfrak{H}_{i}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$. Folgende Sequenzen seien definiert, wobei $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$:

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{H}^{1} & = \mathfrak{H} & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), & \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^{2} & = \mathfrak{H}^{1} & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^{1}), & \ulcorner\text{Also A}\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^{3} & = \mathfrak{H}^{2} & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^{2}), & \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^{4} & = \mathfrak{H}^{3} & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^{3}), & \ulcorner\text{Also B}\urcorner)\}.
\end{array}$$

Mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11 sind zunächst $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^{1})$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^{3})$ keine Negationen oder Subjunktionen und auch nicht identisch mit $\mathrm{K}(\mathfrak{H})$ resp. $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^{2})$, weil sonst $\alpha \in \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ resp. $\alpha \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_{i}) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$. Also $\mathfrak{H}^{1} \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}^{3} \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^{2}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^{2}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^{2})$. Wäre $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in \mathrm{TF}(\mathrm{A}) \cup \mathrm{TF}(\mathrm{B})$, dann wäre $\alpha \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_{i}) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$. Also ist $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin \mathrm{TF}(\mathrm{A})$ und $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin \mathrm{TF}(\mathrm{B})$ und damit $\mathfrak{H}^{2} \notin$

SEF($\mathfrak{H}^1$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}^1$) und $\mathfrak{H}^4 \notin$ SEF($\mathfrak{H}^3$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}^3$). Wäre $\mathfrak{H}^2 \in$ NEF($\mathfrak{H}^1$) oder $\mathfrak{H}^4 \in$ NEF($\mathfrak{H}^2$). Dann gäbe es ein $j \in$ Dom($\mathfrak{H}^3$), so dass A($\mathfrak{H}_j$) = $\ulcorner\neg\alpha = \alpha\urcorner$. Mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11 ist $j \notin$ {Dom($\mathfrak{H}^3$)-1, Dom($\mathfrak{H}^3$)-3}. Wegen $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin$ TF(A) ist aber auch $j \neq$ Dom($\mathfrak{H}^3$)-2. Also $j \in$ Dom($\mathfrak{H}^3$)\{Dom($\mathfrak{H}^3$)-1, Dom($\mathfrak{H}^3$)-2, Dom($\mathfrak{H}^3$)-3} = Dom($\mathfrak{H}$). Mit $\alpha \in$ TT($\mathfrak{H}^3{}_j$) = TT($\mathfrak{H}_j$) wäre dann aber auch $\alpha \in$ TTSEQ($\mathfrak{H}$). Widerspruch! Also $\mathfrak{H}^2 \notin$ NEF($\mathfrak{H}^1$) und $\mathfrak{H}^4 \notin$ NEF($\mathfrak{H}^3$).

Hingegen ist damit *erstens* nach Definition 3-16 $\mathfrak{H}^1 \in$ IEF($\mathfrak{H}$), damit $\mathfrak{H}^1 \in$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^1$) = VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\alpha = \alpha\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^1$) = VANS($\mathfrak{H}$) und $\ulcorner$A $\wedge$ B$\urcorner$ $\in$ VER($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^1$). Also ist *zweitens* mit Definition 3-5 $\mathfrak{H}^2 \in$ KBF($\mathfrak{H}^1$) $\subseteq$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^2$) = VERS($\mathfrak{H}^1$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^1$), $\ulcorner$Also A$\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^2$) = VANS($\mathfrak{H}^1$), $\ulcorner$A $\wedge$ B$\urcorner$ $\in$ VER($\mathfrak{H}^1$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^2$) und A $\in$ VER($\mathfrak{H}^2$). Sodann ist *drittens* nach Definition 3-16 $\mathfrak{H}^3 \in$ IEF($\mathfrak{H}^2$), $\mathfrak{H}^3 \in$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^3$) = VERS($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^2$), $\ulcorner$Also $\alpha = \alpha\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^3$) = VANS($\mathfrak{H}^2$) und A, $\ulcorner$A $\wedge$ B$\urcorner$ $\in$ VER($\mathfrak{H}^2$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^3$). *Viertens* ist damit nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^4 \in$ KBF($\mathfrak{H}^3$) $\subseteq$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^4$) = VERS($\mathfrak{H}^3$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^3$), $\ulcorner$Also B$\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^4$) = VANS($\mathfrak{H}^3$), A $\in$ VER($\mathfrak{H}^3$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^4$) und B $\in$ VER($\mathfrak{H}^4$). Insgesamt ist damit $\mathfrak{H}^4 \in$ RGS\{∅}, VAN($\mathfrak{H}^4$) = VAN($\mathfrak{H}^3$) = VAN($\mathfrak{H}^2$) = VAN($\mathfrak{H}^1$) = VAN($\mathfrak{H}$), A, B $\in$ VER($\mathfrak{H}^4$) und K($\mathfrak{H}^4$) = B. ■

Theorem 4-6. *Verfügbare Aussagen als Konklusionen*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅} und A $\in$ VER($\mathfrak{H}$), dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in$ RGS\{∅}, so dass
(i) VAN($\mathfrak{H}^*$) = VAN($\mathfrak{H}$),
(ii) VER($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^*$) und
(iii) K($\mathfrak{H}^*$) = A.

Beweis: Seien $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅} und A $\in$ VER($\mathfrak{H}$). Dann gibt es ein $i \in$ Dom($\mathfrak{H}$), so dass A($\mathfrak{H}_i$) = A und (i, $\mathfrak{H}_i$) $\in$ VERS($\mathfrak{H}$). Folgende Sequenzen seien definiert, wobei $\alpha \in$ KONST\TTSEQ($\mathfrak{H}$):

$\mathfrak{H}^1$	=	$\mathfrak{H}$	$\cup$	{(Dom($\mathfrak{H}$),	$\ulcorner$Also $\alpha = \alpha\urcorner$)}
$\mathfrak{H}^2$	=	$\mathfrak{H}^1$	$\cup$	{(Dom($\mathfrak{H}^1$),	$\ulcorner$Also A $\wedge$ A$\urcorner$)}

$$\mathfrak{H}^3 = \mathfrak{H}^2 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\}$$
$$\mathfrak{H}^4 = \mathfrak{H}^3 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also A}\urcorner)\}.$$

Mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11 sind zunächst K($\mathfrak{H}^1$), K($\mathfrak{H}^2$) und K($\mathfrak{H}^3$) keine Negationen oder Subjunktionen. Sodann sind K($\mathfrak{H}^1$) und K($\mathfrak{H}^3$) nicht identisch mit K($\mathfrak{H}$) resp. K($\mathfrak{H}^2$). Insbesondere ist mit Theorem 1-10-(vi) K($\mathfrak{H}$) nicht identisch mit K($\mathfrak{H}^1$). Also $\mathfrak{H}^1 \notin$ SEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}$), $\mathfrak{H}^2 \notin$ SEF($\mathfrak{H}^1$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}^1$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}^1$) und $\mathfrak{H}^3 \notin$ SEF($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}^2$). Wäre $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in$ TF(A), dann wäre $\alpha \in$ TT($\mathfrak{H}_i$) $\subseteq$ TTSEQ($\mathfrak{H}$). Also ist $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin$ TF(A) und damit $\mathfrak{H}^4 \notin$ SEF($\mathfrak{H}^3$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}^3$). Wäre $\mathfrak{H}^4 \in$ NEF($\mathfrak{H}^3$), dann gäbe es ein $j \in$ Dom($\mathfrak{H}^3$), so dass A($\mathfrak{H}_j$) = $\ulcorner\neg\alpha = \alpha\urcorner$. Mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11 ist $j \notin$ {Dom($\mathfrak{H}^3$)-1, Dom($\mathfrak{H}^3$)-2, Dom($\mathfrak{H}^3$)-3}. Also $j \in$ Dom($\mathfrak{H}^3$)\{Dom($\mathfrak{H}^3$)-1, Dom($\mathfrak{H}^3$)-2, Dom($\mathfrak{H}^3$)-3} = Dom($\mathfrak{H}$). Mit $\alpha \in$ TT($\mathfrak{H}^3{}_j$) = TT($\mathfrak{H}_j$) wäre dann aber auch $\alpha \in$ TTSEQ($\mathfrak{H}$). Widerspruch! Also $\mathfrak{H}^4 \notin$ NEF($\mathfrak{H}^3$).

Hingegen ist damit *erstens* nach Definition 3-16 $\mathfrak{H}^1 \in$ IEF($\mathfrak{H}$), damit $\mathfrak{H}^1 \in$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^1$) = VERS($\mathfrak{H}$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$), $\ulcorner$Also $\alpha = \alpha\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^1$) = VANS($\mathfrak{H}$) und A $\in$ VER($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^1$). Also ist *zweitens* nach Definition 3-4 $\mathfrak{H}^2 \in$ KEF($\mathfrak{H}^1$) $\subseteq$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^2$) = VERS($\mathfrak{H}^1$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^1$), $\ulcorner$Also A $\wedge$ A$\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^2$) = VANS($\mathfrak{H}^1$), VER($\mathfrak{H}^1$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^2$) und $\ulcorner$A $\wedge$ A$\urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}^2$). Sodann ist *drittens* nach Definition 3-16 $\mathfrak{H}^3 \in$ IEF($\mathfrak{H}^2$) $\subseteq$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^3$) = VERS($\mathfrak{H}^2$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^2$), $\ulcorner$Also $\alpha = \alpha\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^3$) = VANS($\mathfrak{H}^2$) und $\ulcorner$A $\wedge$ A$\urcorner \in$ VER($\mathfrak{H}^2$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^3$). *Viertens* ist damit nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^4 \in$ KBF($\mathfrak{H}^3$) $\subseteq$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^4$) = VERS($\mathfrak{H}^3$) $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}^3$), $\ulcorner$Also A$\urcorner$)}. Damit gilt VANS($\mathfrak{H}^4$) = VANS($\mathfrak{H}^3$) und VER($\mathfrak{H}^3$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^4$). Insgesamt ist damit $\mathfrak{H}^4 \in$ RGS\{∅}, VAN($\mathfrak{H}^4$) = VAN($\mathfrak{H}^3$) = VAN($\mathfrak{H}^2$) = VAN($\mathfrak{H}^1$) = VAN($\mathfrak{H}$), VER($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VER($\mathfrak{H}^4$) und K($\mathfrak{H}^4$) = A. ■

Theorem 4-7. *Eliminierbarkeit einer Annahme von* $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$
Wenn $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, $\alpha \in$ KONST und A, B $\in$ VER($\mathfrak{H}$), dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in$ RGS\{∅}, so dass

(i) VAN($\mathfrak{H}^*$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$)\{$\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$},
(ii) A, B $\in$ VER($\mathfrak{H}^*$) und
(iii) K($\mathfrak{H}^*$) = B.

Beweis: Seien $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, $\alpha \in$ KONST und A, B $\in$ VER($\mathfrak{H}$). Angenommen $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin$ VAN($\mathfrak{H}$). Dann ist VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$)\{$\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$}. Mit Theorem 4-6 gibt es zudem ein

$\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\}$, $A, B \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*)$ und $K(\mathfrak{H}^*) = B$.

Sei nun $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Dann ist $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } A \wedge B\urcorner)\} \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H})$. Dann gilt $\mathfrak{H}^1 \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und $\ulcorner A \wedge B\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^1)$ nach Theorem 3-26-(v) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Nun gibt es nach Theorem 4-2 ein $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$, $K(\mathfrak{H}^+) = K(\mathfrak{H}^1) = \ulcorner A \wedge B\urcorner$ und für alle $k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^+))$: Wenn $A(\mathfrak{H}^+_k) = \ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$, dann $k = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^+)))$. Dann ist $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+)$ oder $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+)$.

Erster Fall: Angenommen $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+)$. Dann ist $A(\mathfrak{H}^+_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^+)))}) = \ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$ und für alle $k \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^+))$: Wenn $A(\mathfrak{H}^+_k) = \ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$, dann $k = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^+)))$. Seien nun folgende Sequenzen definiert:

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{H}^2 & = \mathfrak{H}^+ & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^+), & \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha \rightarrow (A \wedge B)\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^3 & = \mathfrak{H}^2 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), & \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^4 & = \mathfrak{H}^3 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), & \ulcorner\text{Also } A \wedge B\urcorner)\}.
\end{array}$$

Nach Definition 3-2 ist $\mathfrak{H}^2 \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^+)$, damit $\mathfrak{H}^2 \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-19-(ix) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Sodann gilt mit Theorem 3-22, dass $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2)$ und damit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\}$. Zudem ist $\ulcorner\alpha = \alpha \rightarrow (A \wedge B)\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2)$.

Mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11 sind $K(\mathfrak{H}^3)$ und $K(\mathfrak{H}^4)$ keine Negationen oder Subjunktionen und $K(\mathfrak{H}^3)$ nicht identisch mit $K(\mathfrak{H}^2)$ und $K(\mathfrak{H}^4)$ nicht identisch mit $K(\mathfrak{H}^3)$. Also $\mathfrak{H}^3 \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^2) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^2) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^2)$ und $\mathfrak{H}^4 \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^3) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^3) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^3)$. Hingegen ist nach Definition 3-16 $\mathfrak{H}^3 \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^2) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)$, $\ulcorner\alpha = \alpha \rightarrow (A \wedge B)\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$ und $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$. Also ist nach Definition 3-3 $\mathfrak{H}^4 \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } A \wedge B\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)$. Insgesamt ist damit $\mathfrak{H}^4 \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\}$ und $\ulcorner A \wedge B\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^4)$. Mit Theorem 4-5 gibt es dann das gesuchte $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\}$ und $A, B \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*)$ und $K(\mathfrak{H}^*) = B$.

Zweiter Fall: Angenommen $\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner \notin \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+)$ und mithin $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\}$. Nun ist $\ulcorner A \wedge B\urcorner = K(\mathfrak{H}^+) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^+)$. Mit Theorem 4-5 gibt es dann das gesuchte

$\mathfrak{H}^* \in$ RGS\{∅}, so dass VAN($\mathfrak{H}^*$) = VAN($\mathfrak{H}^+$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$)\{⌜α = α⌝} und A, B ∈ VER($\mathfrak{H}^*$) und K($\mathfrak{H}^*$) = B. ■

Theorem 4-8. *Einfache Substitution eines neuen Parameters für einen Parameter ist RGS-treu*
Wenn $\mathfrak{H}$ ∈ RGS, und β* ∈ PAR\TTSEQ($\mathfrak{H}$) und β ∈ PAR\{β*}, dann ist [β*, β, $\mathfrak{H}$] ∈ RGS und Dom(VERS([β*, β, $\mathfrak{H}$])) = Dom(VERS($\mathfrak{H}$)).

Beweis: Durch Induktion über Dom($\mathfrak{H}$). Sei $\mathfrak{H}$ ∈ RGS, und β* ∈ PAR\TTSEQ($\mathfrak{H}$) und β ∈ PAR\{β*} und gelte die Behauptung für alle k < Dom($\mathfrak{H}$). Sei Dom($\mathfrak{H}$) = 0. Dann ist $\mathfrak{H}$ = ∅ = [β*, β, $\mathfrak{H}$] und damit [β*, β, $\mathfrak{H}$] ∈ RGS und es ist Dom(VERS([β*, β, $\mathfrak{H}$])) = ∅ = Dom(VERS($\mathfrak{H}$)). Sei nun 0 < Dom($\mathfrak{H}$). Dann ist $\mathfrak{H}$ ∈ RGS\{∅}. Dann ist mit Theorem 3-6 $\mathfrak{H}$ ∈ RGF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1). Dann ist nach I.V.:

a) $\mathfrak{H}^*$ = [β*, β, $\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1] ∈ RGS und Dom(VERS($\mathfrak{H}^*$)) = Dom(VERS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)).

Sodann ergibt sich mit $\mathfrak{H}$ ∈ RGF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) mit Definition 3-18, dass $\mathfrak{H}$ ∈ AF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ SEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ SBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ KEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ KBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ BEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ BBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ AEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ ABF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ NEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ NBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ UEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ UBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ PEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ PBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ IEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) oder $\mathfrak{H}$ ∈ IBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1).

Da sich Operatoren durch die Substitution nicht verändern, gilt nun zunächst:

b) Für alle i ∈ Dom($\mathfrak{H}$)-1: A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β*, β, A($\mathfrak{H}_i$)] und $\mathfrak{H}^*_i$ = ⌜Ξ [β*, β, A($\mathfrak{H}_i$)]⌝, wobei $\mathfrak{H}_i$ = ⌜Ξ A($\mathfrak{H}_i$)⌝, für ein Ξ ∈ PERF.

Sodann gilt mit β* ∈ PAR\TTSEQ($\mathfrak{H}$) und β ∈ PAR\{β*}:

c) Für jedes i ∈ Dom($\mathfrak{H}$): β* ∉ TT(A($\mathfrak{H}_i$)) und β ∉ TT([β*, β, A($\mathfrak{H}_i$)]),

da sonst im Gegensatz zur Voraussetzung β* ∈ TTSEQ($\mathfrak{H}$) oder β = β*. Sodann sei vereinbart:

d) $\mathfrak{H}^+$ = $\mathfrak{H}^*$ ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, [β*, β, $\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1}$])}.

Dann ist $\mathfrak{H}^+ = [\beta^*, \beta, \mathfrak{H}]$. Nun wird gezeigt, dass sich für die einzelnen Fälle AF … IBF jeweils ergibt, dass $\mathfrak{H}^+ \in$ RGS und Dom(VERS($\mathfrak{H}^+$)) = Dom(VERS($\mathfrak{H}$)), womit dann jeweils gezeigt ist, dass das Theorem gilt.

Um Sonderbetrachtungen bei SBF, KEF, KBF, BEF, BBF, AEF, ABF, NBF, UEF, UBF, PEF, IEF und IBF zu vereinfachen wird nun noch vorbereitend gezeigt:

e) Wenn $\mathfrak{H}^+ \in$ SEF($\mathfrak{H}^*$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}^*$) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}^*$), dann $\mathfrak{H} \in$ SEF($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$-1) $\cup$ PBF($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$-1).

Vorbereitungsteil: Sei $\mathfrak{H}^+ \in$ SEF($\mathfrak{H}^*$). Dann gibt es nach Definition 3-2 $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}^*$)), so dass mit b) und d) A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β^*, β, A($\mathfrak{H}_i$)] und K($\mathfrak{H}^*$) = [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)] und es kein l mit $i < l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-2 gibt, so dass $l \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}^*$)) und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also A($\mathfrak{H}^*_i$) → A($\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝)} = $\mathfrak{H}^* \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also [β^*, β, A($\mathfrak{H}_i$)] → [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)]⌝)}. Mit d) ist ⌜Also [β^*, β, A($\mathfrak{H}_i$)] → [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)]⌝ = [$\beta^*$, β, ⌜Also A($\mathfrak{H}_i$) → A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝] = [$\beta^*$, β, $\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$]. Theorem 1-21 ergibt ⌜Also A($\mathfrak{H}_i$) → A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝ = $\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$ und mithin $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also A($\mathfrak{H}_i$) → A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝)}. Sodann gilt mit a) und b): $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und es gibt kein l mit $i < l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-2, so dass $l \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1)). Damit ist dann auch $\mathfrak{H} \in$ SEF($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1). Für den Fall, dass $\mathfrak{H}^+ \in$ NEF($\mathfrak{H}^*$), zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H} \in$ NEF($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1).

Sei nun $\mathfrak{H}^+ \in$ PBF($\mathfrak{H}^*$). Dann gibt es nach Definition 3-15 mit b) und d), $\beta^+ \in$ PAR, $\zeta \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq$ {ζ}, und $i \in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}^*$)), so dass A($\mathfrak{H}^*_i$) = ⌜$\bigvee\zeta\Delta$⌝ = [β^*, β, A($\mathfrak{H}_i$)] und A($\mathfrak{H}^*_{i+1}$) = [β^+, ζ, Δ] = [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{i+1}$)], wobei i+1 $\in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}^*$)), [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)] = K($\mathfrak{H}^*$), $\beta^+ \notin$ TTFM({Δ, [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)]}), es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta^+ \in$ TT($\mathfrak{H}^*_j$), es kein l mit i+1 < $l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-2 gibt, so dass $l \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}^*$)) und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also K($\mathfrak{H}^*$)⌝)} = $\mathfrak{H}^* \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also [β^*, β, A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)]⌝)} = $\mathfrak{H}^* \cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, [β^*, β, ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝])}. Mit d) ist [$\beta^*$, β, ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝] = [$\beta^*$, β, $\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$]. Theorem 1-21 ergibt ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝ = $\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$ und mithin $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1 $\cup$ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$)⌝)}.

Mit a) und b) gilt dann: $i \in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1)), i+1 $\in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und es gibt kein l mit i+1 < $l \leq$ Dom($\mathfrak{H}$)-2, so dass $l \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1)). Zu zeigen ist nun noch, dass A($\mathfrak{H}_i$), A($\mathfrak{H}_{i+1}$) und A($\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2}$) die Voraussetzungen für $\mathfrak{H} \in$ PBF($\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1) erfüllen.

Nun ist $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_i)] = A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$ und $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^+, \zeta, \Delta]$. Da Operatoren durch die Substitution nicht verändert werden, gilt damit wegen $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_i)] = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$: $A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta^{+}\urcorner$ für ein $\Delta^+ \in$ FORM, wobei $\beta^* \notin TT(\Delta^+)$ und $FV(\Delta^+) \subseteq \{\zeta\}$. Damit ist $\ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner = [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \beta, \ulcorner\bigvee\zeta\Delta^{+}\urcorner] = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta^*, \beta, \Delta^+]\urcorner$ und somit $\Delta = [\beta^*, \beta, \Delta^+]$. Damit gilt wiederum: $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^+, \zeta, \Delta] = [\beta^+, \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta^+]]$ und $\beta^+ \notin TT([\beta^*, \beta, \Delta^+])$. Sodann gilt $\beta^* = \beta^+$ oder $\beta^* \neq \beta^+$.

Erster Fall: Sei $\beta^* = \beta^+$. Dann ist $\beta^* \notin TT([\beta^*, \beta, \Delta^+])$ und damit $\beta \notin TT(\Delta^+)$. Dann ist $\Delta = [\beta^*, \beta, \Delta^+] = \Delta^+$ und wegen $\beta^* = \beta^+$ ist dann $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^+, \zeta, \Delta] = [\beta^*, \zeta, \Delta^+]$. Sodann ist $\beta^* \notin TT(\Delta^+)$ und $\beta^* \notin TT(A(\mathfrak{H}_{i+1}))$ und damit gilt mit Theorem 1-23 wegen $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^*, \zeta, \Delta^+]$, dass $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta, \zeta, \Delta^+]$. Wäre nun $\beta \in TTFM(\{\Delta^+, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ oder gäbe es ein $j \leq i$, so dass $\beta \in TT(\mathfrak{H}_j)$. Dann ergäbe sich mit b) und $\beta^* = \beta^+$, dass $\beta^+ \in TTFM(\{[\beta^*, \beta, \Delta^+], [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$ oder dass es $j \leq i$ gäbe, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Widerspruch! Also ist $A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta^{+}\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta, \zeta, \Delta^+]$ und $\beta \notin TTFM(\{\Delta^+, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta \in TT(\mathfrak{H}_j)$ und somit insgesamt $\mathfrak{H} \in PBF(\mathfrak{H}{\upharpoonright}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Zweiter Fall: Angenommen, $\beta^* \neq \beta^+$. Dann lassen sich mit $\beta^+ \in TT([\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})])$ und $\beta^+ \notin TT([\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})])$ zwei Unterfälle unterscheiden. *Erster Unterfall*: Angenommen $\beta^+ \in TT([\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})])$. Dann ist $\beta^+ \neq \beta$ und damit $\beta \notin TT(\beta^+)$. Dann ist mit $\Delta = [\beta^*, \beta, \Delta^+]$ und Theorem 1-25-(ii): $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^+, \zeta, \Delta] = [\beta^+, \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta^+]] = [\beta^*, \beta, [\beta^+, \zeta, \Delta^+]]$. Sodann ist $\beta^* \notin TT(A(\mathfrak{H}_{i+1}))$ und wegen $\beta^* \neq \beta^+$ und $\beta^* \notin TT(\Delta^+)$ auch $\beta^* \notin TT([\beta^+, \zeta, \Delta^+])$ und damit mit Theorem 1-20 $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta^+, \zeta, \Delta^+]$. Wäre nun $\beta^+ \in TTFM(\{\Delta^+, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ oder gäbe es ein $j \leq i$, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}_j)$. Dann wäre wegen $\beta^+ \neq \beta$ mit b) auch $\beta^+ \in TTFM(\{[\beta^*, \beta, \Delta^+], [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$ oder es gäbe $j \leq i$, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Widerspruch! Also ist im ersten Unterfall die Parameterbedingung für β^+ auch in $\mathfrak{H}{\upharpoonright}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1$ erfüllt und damit wiederum insgesamt $\mathfrak{H} \in PBF(\mathfrak{H}{\upharpoonright}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Zweiter Unterfall: Sei nun $\beta^+ \notin TT([\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})])$. Dann gilt mit $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^+, \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta^+]]$, dass $\zeta \notin FV([\beta^*, \beta, \Delta^+])$. Dann ist $[\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^+, \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta^+]] = [\beta^*, \beta, \Delta^+]$ und damit mit $\beta^* \notin TT(A(\mathfrak{H}_{i+1})) \cup TT(\Delta^+)$ wiederum mit Theorem 1-20 $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = \Delta^+$, wobei mit $\zeta \notin FV([\beta^*, \beta, \Delta^+])$ auch $\zeta \notin FV(\Delta^+)$. Sei nun $\beta^\S \in PAR\setminus TTSEQ(\mathfrak{H}{\upharpoonright}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gilt mit $\zeta \notin FV(\Delta^+)$, dass $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = \Delta^+ = [\beta^\S, \zeta, \Delta^+]$ und es gilt: $\beta^\S \notin TTFM(\{\Delta^+, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta^\S \in TT(\mathfrak{H}_j)$.

Damit ist dann ebenfalls insgesamt auch $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Also gilt in beiden Unterfällen und damit insgesamt in beiden Fällen, dass $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$.

Hauptteil: Nun zum Nachweis, dass sich für die einzelnen Fälle AF … IBF jeweils ergibt, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$ und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$. Zunächst werden SEF, NEF und PBF behandelt. Nach einer Ausschlussannahme für alle anderen Fälle kann dann für diese mit a), e) und Theorem 3-25 sofort $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+))$ bestimmt werden.

(*SEF*, *NEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Dann gibt es nach Definition 3-2 $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$, so dass es kein $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$ mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2$ gibt und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\urcorner)\}$. Dann gilt mit a), b) und d): $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und es gibt kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$, und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)]$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = [\beta^*, \beta, \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)]$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, [\beta^*, \beta, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\}$. Damit ist dann $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$.

Sodann ergibt sich mit Theorem 3-19-(iii), dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\setminus\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid i \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\urcorner)\}$ und dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)\setminus\{(j, \mathfrak{H}^+_j) \mid i \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, \ulcorner\text{Also } [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] \rightarrow [\beta^*, \beta, \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)]\urcorner)\}$. Mit $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$ ergibt sich dann auch $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$. Für den Fall, dass $\mathfrak{H} \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$, zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$ und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$.

(*PBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Dann gibt es nach Definition 3-15 $\beta^+ \in \mathrm{PAR}$, $\zeta \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, und $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$, $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta^+, \zeta, \Delta]$, wobei $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$, $\beta^+ \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2})\})$, es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta^+ \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$, es kein l mit $i+1 < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2})\urcorner)\}$.

Damit ergibt sich dann mit a), b) und d) zunächst: $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \beta, \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner] = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta^*, \beta, \Delta]\urcorner$, $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta^*, \beta, [\beta^+, \zeta, \Delta]]$, $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2}) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2})]$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, [\beta^*, \beta, \ulcorner\text{Also } \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)]\urcorner)\}$ und es gibt kein l mit $i+1 < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$. Sodann lassen sich mit $\beta^+ = \beta$ und $\beta^+ \neq \beta$ zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Sei $\beta^+ = \beta$. Dann ist $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta^*, \beta, [\beta^+, \zeta, \Delta]] = [\beta^*, \beta, [\beta, \zeta, \Delta]]$ und mit $\beta^+ \notin TT(\Delta)$ auch $\beta \notin TT(\Delta)$ und somit mit Theorem 1-24-(ii) $A(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta^*, \beta, [\beta, \zeta, \Delta]] = [\beta^*, \zeta, \Delta]$. Mit $\beta \notin TT(\Delta)$ ist sodann $[\beta^*, \beta, \Delta] = \Delta$ und damit $A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta^*, \beta, \Delta]\urcorner = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$. Sodann gilt mit $\beta = \beta^+$ und $\beta^* \notin TTSEQ(\mathfrak{H})$: $\beta, \beta^* \notin TTFM(\{\Delta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ und damit auch $\beta^* \notin TTFM(\{\Delta, [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$. Gäbe es nun ein $j \leq i$, so dass $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Dann ist mit b) $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}^*_j) = [\beta^*, \beta, \mathfrak{H}_j]$. Sodann ist mit $\beta^* \notin TTSEQ(\mathfrak{H})$ auch $\beta^* \notin TT(\mathfrak{H}_j)$. Damit gilt mit $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$ dann aber $\beta \in TT(\mathfrak{H}_j)$ und andererseits nach Voraussetzung $\beta = \beta^+ \notin TT(\mathfrak{H}_j)$. Widerspruch! Also gilt, dass es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in PBF(\mathfrak{H}^*)$.

Zweiter Fall: Sei nun $\beta^+ \neq \beta$. Dann lassen sich mit $\beta^+ \neq \beta^*$ und $\beta^+ = \beta^*$ zwei Unterfälle unterscheiden. *Erster Unterfall*: Sei $\beta^+ \neq \beta^*$. Dann ist mit Theorem 1-25-(ii) und $\beta^+ \neq \beta$: $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^*, \beta, [\beta^+, \zeta, \Delta]] = [\beta^+, \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta]]$. Sodann ist $A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta^*, \beta, \Delta]\urcorner$. Wäre nun $\beta^+ \in TTFM(\{[\beta^*, \beta, \Delta], [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$ oder gäbe es ein $j \leq i$, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Dann wäre wegen $\beta^+ \neq \beta^*$ mit b) auch $\beta^+ \in TTFM(\{\Delta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ oder es gäbe $j \leq i$, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}_j)$. Widerspruch! Also ist $\beta^+ \notin TTFM(\{[\beta^*, \beta, \Delta], [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$ und damit wiederum insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in PBF(\mathfrak{H}^*)$.

Zweiter Unterfall: Sei nun $\beta^+ = \beta^*$. Dann ist $\zeta \notin FV(\Delta)$, da sonst $\beta^* \in TT([\beta^+, \zeta, \Delta]) \subseteq TTSEQ(\mathfrak{H})$. Damit ist dann $[\beta^+, \zeta, \Delta] = \Delta$ und damit $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^*, \beta, [\beta^+, \zeta, \Delta]] = [\beta^*, \beta, \Delta]$ und sodann ist $A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta^*, \beta, \Delta]\urcorner$. Sei nun $\beta^\S \in PAR\setminus TTSEQ(\mathfrak{H}^*)$. Dann ist mit $\zeta \notin FV(\Delta)$ auch $\zeta \notin FV([\beta^*, \beta, \Delta])$ und damit $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^*, \beta, \Delta] = [\beta^\S, \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta]]$ und es gilt: $\beta^\S \notin TTFM(\{[\beta^*, \beta, \Delta], [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta^\S \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Damit ist dann wieder insgesamt auch $\mathfrak{H}^+ \in PBF(\mathfrak{H}^*)$. Damit gilt in beiden Unterfällen und somit insgesamt in beiden Fällen, dass $\mathfrak{H}^+ \in PBF(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in RGS$.

Sodann ergibt sich mit Theorem 3-21-(iii), dass $VERS(\mathfrak{H}) = VERS(\mathfrak{H}\restriction Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)\setminus\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid i\text{+}1 \leq j < Dom(\mathfrak{H})\text{-}1\} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner)\}$ und dass $VERS(\mathfrak{H}^+) = VERS(\mathfrak{H}^*)\setminus\{(j, \mathfrak{H}^+_j) \mid i\text{+}1 \leq j < Dom(\mathfrak{H})\text{-}1\} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\beta^*, \beta, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\urcorner)\}$. Mit $Dom(VERS(\mathfrak{H}^*)) = Dom(VERS(\mathfrak{H}\restriction Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$ ergibt sich dann wieder $Dom(VERS(\mathfrak{H}^+)) = Dom(VERS(\mathfrak{H}))$.

Ausschlussannahme: Für die verbleibenden Schritte sei $\mathfrak{H} \notin SEF(\mathfrak{H}\restriction Dom(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup NEF(\mathfrak{H}\restriction Dom(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup PBF(\mathfrak{H}\restriction Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Mit e) ist dann $\mathfrak{H}^+ \notin SEF(\mathfrak{H}^*) \cup NEF(\mathfrak{H}^*) \cup PBF(\mathfrak{H}^*)$. Damit ergibt sich für die folgenden Fälle dann mit Theorem 3-25 jeweils, dass

$\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathrm{K}(\mathfrak{H}))\}$ und dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{+}) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{*}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathrm{K}(\mathfrak{H}^{+}))\}$. Mit $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{*})) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ ergibt sich dann $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{+})) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$ für alle verbleibenden Fälle.

(*AF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann ist nach Definition 3-1 $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\urcorner)$. Dann ist mit d) $\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H}^{*} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } [\beta^{*}, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})]\urcorner)\} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^{*})$ und damit $\mathfrak{H}^{+} \in \mathrm{RGS}$.

(*SBF*, *KEF*, *KBF*, *BEF*, *BBF*, *AEF*, *ABF*, *NBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es mit Definition 3-3 $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{GFORM}$, so dass $\mathrm{A}, \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{B}\urcorner)\}$. Mit d) gilt dann: $\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H}^{*} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\beta^{*}, \beta, \mathrm{B}]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $\mathrm{A}, \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und Definition 2-30 $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i}) = \mathrm{A}$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{j}) = \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$. Mit a) und b) ergibt sich dann, dass $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{*}))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{i}) = [\beta^{*}, \beta, \mathrm{A}]$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{j}) = \ulcorner[\beta^{*}, \beta, \mathrm{A}] \rightarrow [\beta^{*}, \beta, \mathrm{B}]\urcorner$. Damit gilt dann mit d), dass $\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H}^{*} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\beta^{*}, \beta, \mathrm{B}]\urcorner)\} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^{*})$ und damit $\mathfrak{H}^{+} \in \mathrm{RGS}$. Für KEF, KBF, BEF, BBF, AEF, ABF und NBF ist analog vorzugehen.

(*UEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es nach Definition 3-12 $\beta^{+} \in \mathrm{PAR}$, $\zeta \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $[\beta^{+}, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, $\beta^{+} \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\zeta\Delta\urcorner)\}$. Dann gilt mit d): $\mathfrak{H}^{+} = \mathfrak{H}^{*} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, [\beta^{*}, \beta, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\zeta\Delta\urcorner])\} = \mathfrak{H}^{*} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\zeta[\beta^{*}, \beta, \Delta]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $[\beta^{+}, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und Definition 2-30 $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, so dass $[\beta^{+}, \zeta, \Delta] = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i})$. Mit a) und b) gilt dann, dass $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^{*}))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{i}) = [\beta^{*}, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i})] = [\beta^{*}, \beta, [\beta^{+}, \zeta, \Delta]]$. Sodann lassen sich mit $\beta^{+} = \beta$ und $\beta^{+} \neq \beta$ zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Sei $\beta^{+} = \beta$. Dann ist $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{i}) = [\beta^{*}, \beta, [\beta^{+}, \zeta, \Delta]] = [\beta^{*}, \beta, [\beta, \zeta, \Delta]]$ und mit $\beta^{+} \notin \mathrm{TT}(\Delta)$ auch $\beta \notin \mathrm{TT}(\Delta)$ und somit mit Theorem 1-24-(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{i}) = [\beta^{*}, \beta, [\beta, \zeta, \Delta]] = [\beta^{*}, \zeta, \Delta]$. Mit $\beta \notin \mathrm{TT}(\Delta)$ ist sodann $[\beta^{*}, \beta, \Delta] = \Delta$ und damit $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^{+}) = \ulcorner\bigwedge\zeta[\beta^{*}, \beta, \Delta]\urcorner = \ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner$. Sodann gilt mit $\beta^{+} = \beta$ und $\beta^{*} \notin \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$: $\beta, \beta^{*} \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und damit mit a) und b) auch $\beta^{*} \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^{*}))$. Wäre nämlich $\beta^{*} \in \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^{*}))$. Dann ist $\beta^{*} \notin \mathrm{TT}(\Delta)$, da sonst $\beta^{*} \in \mathrm{TT}(\Delta) \subseteq \mathrm{TT}(\ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner) = \mathrm{TT}(\mathrm{K}(\mathfrak{H})) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$, was wegen $\beta^{*} \notin \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ ausgeschlossen ist. Also gäbe es dann $\mathrm{B} \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^{*})$, so dass $\beta^{*} \in \mathrm{TT}(\mathrm{B})$. Damit gäbe es mit Definition 2-31 $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^{*}))$, so dass $\beta^{*} \in \mathrm{TT}(\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{j}))$. Dann ist mit b) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^{*}_{j}) = [\beta^{*}, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{j})]$. Sodann ist mit $\beta^{*} \notin \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ auch $\beta^{*} \notin \mathrm{TT}(\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{j}))$. Damit gilt mit $\beta^{*} \in$

TT(A($\mathfrak{H}^*_j$)) und A($\mathfrak{H}^*_j$) = [β*, β, A($\mathfrak{H}_j$)] dann aber β ∈ TT(A($\mathfrak{H}_j$)). Sodann ergibt sich mit a) und b) aus j ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$*)), dass j ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und somit A($\mathfrak{H}_j$) ∈ VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1). Damit wäre aber β ∈ TTFM(VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und andererseits nach Voraussetzung β = β^+ ∉ TTFM(VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)). Widerspruch! Also ist β* ∉ TTFM({Δ} ∪ VAN($\mathfrak{H}$*)). Da sodann A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β*, ζ, Δ], i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$*)) und K($\mathfrak{H}^+$) = ⌜⋀ζΔ⌝ ist damit dann insgesamt $\mathfrak{H}^+$ ∈ UEF($\mathfrak{H}$*).

Zweiter Fall: Sei nun β^+ ≠ β. Dann lassen sich mit β^+ ≠ β* und β^+ = β* zwei Unterfälle unterscheiden. *Erster Unterfall*: Sei β^+ ≠ β*. Dann ist mit Theorem 1-25-(ii) und β^+ ≠ β: A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β*, β, [β^+, ζ, Δ]] = [β^+, ζ, [β*, β, Δ]]. Sodann ist K($\mathfrak{H}^+$) = ⌜⋀ζ[β*, β, Δ]⌝. Angenommen β^+ ∈ TTFM({[β*, β, Δ]} ∪ VAN($\mathfrak{H}$*)). Da β^+ ≠ β* und β^+ ∉ TT(Δ) ist zunächst β^+ ∉ TT([β*, β, Δ]). Also wäre β^+ ∈ TTFM(VAN($\mathfrak{H}$*)) und somit gäbe es mit Definition 2-31 ein j ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$*)), so dass β^+ ∈ TT(A($\mathfrak{H}^*_j$)). Da mit b) A($\mathfrak{H}^*_j$) = [β*, β, A($\mathfrak{H}_j$)] und β^+ ≠ β*, wäre damit aber bereits β^+ ∈ TT(A($\mathfrak{H}_j$)). Mit a) und b) ergäbe sich sodann aus j ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$*)), dass j ∈ Dom(VANS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und somit A($\mathfrak{H}_j$) ∈ VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und damit β^+ ∈ TTFM(VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) und andererseits nach Voraussetzung β^+ ∉ TTFM(VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)). Widerspruch! Also ist β^+ ∉ TTFM({[β*, β, Δ]} ∪ VAN($\mathfrak{H}$*)) und damit wiederum insgesamt $\mathfrak{H}^+$ ∈ UEF($\mathfrak{H}$*).

Zweiter Unterfall: Sei nun β^+ = β*. Dann ist ζ ∉ FV(Δ), da sonst β* ∈ TT([β^+, ζ, Δ]) ⊆ TTSEQ($\mathfrak{H}$). Damit ist dann [β^+, ζ, Δ] = Δ und damit A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β*, β, [β^+, ζ, Δ]] = [β*, β, Δ] und sodann ist K($\mathfrak{H}^+$) = ⌜⋀ζ[β*, β, Δ]⌝. Sei nun $\beta^§$ ∈ PAR\TTSEQ($\mathfrak{H}$*). Dann ist mit ζ ∉ FV(Δ) auch ζ ∉ FV([β*, β, Δ]) und damit A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β*, β, Δ] = [$\beta^§$, ζ, [β*, β, Δ]] und es gilt: $\beta^§$ ∉ TTFM({[β*, β, Δ]} ∪ VAN($\mathfrak{H}$*)) und damit wiederum insgesamt $\mathfrak{H}^+$ ∈ UEF($\mathfrak{H}$*). Damit gilt in beiden Unterfällen und somit insgesamt in beiden Fällen, dass $\mathfrak{H}^+$ ∈ UEF($\mathfrak{H}$*) ⊆ RGS.

(*UBF*): Sei nun $\mathfrak{H}$ ∈ UBF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1). Dann gibt es nach Definition 3-13 θ ∈ GTERM, ζ ∈ VAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ζ}, so dass ⌜⋀ζΔ⌝ ∈ VER($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1), und $\mathfrak{H}$ = $\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1 ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also [θ, ζ, Δ]⌝)}. Mit d) ist dann $\mathfrak{H}^+$ = $\mathfrak{H}$* ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, [β*, β, ⌜Also [θ, ζ, Δ]⌝])} = $\mathfrak{H}$* ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)-1, ⌜Also [β*, β, [θ, ζ, Δ]]⌝)}. Sodann gibt es mit ⌜⋀ζΔ⌝ ∈ VER($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) nach Definition 2-30 i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)), so dass A($\mathfrak{H}_i$) = ⌜⋀ζΔ⌝. Mit a) und b) ist dann i ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}$*)) und A($\mathfrak{H}^*_i$) = [β*, β, ⌜⋀ζΔ⌝] = ⌜⋀ζ[β*, β, Δ]⌝. Sodann ist mit Theorem 1-26-(ii) K($\mathfrak{H}^+$) = [β*, β, [θ, ζ, Δ]] = [[β*, β, θ], ζ, [β*, β, Δ]], wobei mit θ ∈ GTERM auch $[\beta^*, \beta, \theta] \in$ GTERM und mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$ auch $\mathrm{FV}([\beta^*, \beta, \Delta]) \subseteq \{\zeta\}$. Damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$.

(*PEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es nach Definition 3-14 $\theta \in$ GTERM, $\zeta \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $[\theta, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigvee\zeta\Delta\urcorner)\}$. Mit d) ist dann $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, [\beta^*, \beta, \ulcorner\text{Also } \bigvee\zeta\Delta\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigvee\zeta[\beta^*, \beta, \Delta]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $[\theta, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ nach Definition 2-30 $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = [\theta, \zeta, \Delta]$. Mit a) und b) ist dann $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)]$. Dann ist mit Theorem 1-26-(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \beta, [\theta, \zeta, \Delta]] = [[\beta^*, \beta, \theta], \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta]]$, wobei mit $\theta \in$ GTERM auch $[\beta^*, \beta, \theta] \in$ GTERM und mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$ auch $\mathrm{FV}([\beta^*, \beta, \Delta]) \subseteq \{\zeta\}$. Damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$.

(*IEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Mit Definition 3-16 gibt es dann $\theta \in$ GTERM, so dass $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \theta = \theta\urcorner)\}$. Dann ist mit d) $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, [\beta^*, \beta, \ulcorner\text{Also } \theta = \theta\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\beta^*, \beta, \theta] = [\beta^*, \beta, \theta]\urcorner)\}$, wobei mit $\theta \in$ GTERM auch $[\beta^*, \beta, \theta] \in$ GTERM. Damit ist dann $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$.

(*IBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es mit Definition 3-17 $\theta_0, \theta_1 \in$ GTERM, $\zeta \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner, [\theta_0, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\theta_1, \zeta, \Delta]\urcorner)\}$. Dann ist mit d) $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, [\beta^*, \beta, \ulcorner\text{Also } [\theta_1, \zeta, \Delta]\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\beta^*, \beta, [\theta_1, \zeta, \Delta]]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner, [\theta_0, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und Definition 2-30 $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) = [\theta_0, \zeta, \Delta]$. Dann gilt mit a) und b): $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \beta, \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner] = \ulcorner[\beta^*, \beta, \theta_0] = [\beta^*, \beta, \theta_1]\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_j) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_j)]$. Dann ist mit Theorem 1-26-(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_j) = [\beta^*, \beta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_j)] = [\beta^*, \beta, [\theta_0, \zeta, \Delta]] = [[\beta^*, \beta, \theta_0], \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta]]$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^+) = [\beta^*, \beta, [\theta_1, \zeta, \Delta]] = [[\beta^*, \beta, \theta_1], \zeta, [\beta^*, \beta, \Delta]]$, wobei mit $\theta_0, \theta_1 \in$ GTERM auch $[\beta^*, \beta, \theta_0], [\beta^*, \beta, \theta_1] \in$ GTERM und mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$ auch $\mathrm{FV}([\beta^*, \beta, \Delta]) \subseteq \{\zeta\}$. Damit gilt dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$. ■

Das folgende Theorem dient der Vorbereitung des Generalisierungstheorems (Theorem 4-24). Der Beweis ähnelt stark dem Beweis zu Theorem 4-8.

Theorem 4-9. *Einfache Substitution eines neuen Parameters für eine Individuenkonstante ist RGS-treu*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ RGS, $\alpha \in$ KONST und $\beta \in$ PAR\TTSEQ($\mathfrak{H}$), dann gibt es ein $\mathfrak{H}^+ \in$ RGS\{$\emptyset$}, so dass

(i) $\alpha \notin$ TTSEQ($\mathfrak{H}^+$),

(ii) TTSEQ($\mathfrak{H}^+$) $\subseteq$ TTSEQ($\mathfrak{H}$) $\cup$ {β},

(iii) VAN($\mathfrak{H}$) = {[α, β, B] | B $\in$ VAN($\mathfrak{H}^+$)} und

(iv) Wenn $\mathfrak{H} \neq \emptyset$, dann K($\mathfrak{H}$) = [$\alpha$, β, K($\mathfrak{H}^+$)].

Beweis: Sei $\mathfrak{H} \in$ RGS, $\alpha \in$ KONST und $\beta \in$ PAR\TTSEQ($\mathfrak{H}$). Sei nun $\mathfrak{H}^+$ wie folgt definiert:

a) $\mathfrak{H}^+ = \{(0, \ulcorner\text{Also } \beta = \beta\urcorner)\}^\frown[\beta, \alpha, \mathfrak{H}]$.

Zunächst gelten dann (i) und (ii) und es gilt auch, dass $\mathfrak{H}^+ \neq \emptyset$. Für $\mathfrak{H}^+$ kann nun mittels Induktion über Dom($\mathfrak{H}$) gezeigt werden, dass $\mathfrak{H}^+ \in$ RGS und

b) Dom(VERS($\mathfrak{H}^+$)) = $\{(l+1 \mid l \in \text{Dom(VERS}(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$.

Mit a) und b) folgen dann auch (iii) und (iv). *Zu (iii)*: Sei $\Delta \in$ VAN($\mathfrak{H}$). Dann gibt es ein $i \in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}$)), so dass $\mathfrak{H}_i = \ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$. Also ist mit b) i+1 $\in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}^+$)) und mit a) $\mathfrak{H}^+_{i+1} = \ulcorner$Sei [$\beta$, α, Δ]$\urcorner$. Also ist [β, α, Δ] $\in$ VAN($\mathfrak{H}^+$) und damit [α, β, [β, α, Δ]] $\in$ {[α, β, B] | B $\in$ VAN($\mathfrak{H}^+$)}. Nun ist $\beta \notin$ TTSEQ($\mathfrak{H}$) und damit $\beta \notin$ TT(Δ) und mit Theorem 1-24-(ii) [α, β, [β, α, Δ]] = [α, α, Δ] = Δ. Also $\Delta \in$ {[α, β, B] | B $\in$ VAN($\mathfrak{H}^+$)}. Sei nun $\Delta \in$ {[α, β, B] | B $\in$ VAN($\mathfrak{H}^+$)}. Dann gibt es ein $\Delta^* \in$ VAN($\mathfrak{H}^+$), so dass Δ = [α, β, Δ^*]. Wegen $\Delta^* \in$ VAN($\mathfrak{H}^+$) gibt es dann mit a) ein i+1 $\in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}^+$)) mit $\mathfrak{H}^+_{i+1} = \ulcorner$Sei $\Delta^*\urcorner$. Nun ist mit b) $i \in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}$)) und mit a) $\mathfrak{H}^+_{i+1}$ = [β, α, $\mathfrak{H}_i$] und damit [β, α, $\mathfrak{H}_i$] = $\ulcorner$Sei $\Delta^*\urcorner$ und weiter [α, β, [β, α, $\mathfrak{H}_i$]] = [α, β, $\ulcorner$Sei $\Delta^*\urcorner$] = $\ulcorner$Sei [α, β, Δ^*]$\urcorner$ = $\ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$. Wie zuvor ist mit Theorem 1-24-(iii) und $\beta \notin$ TTSEQ($\mathfrak{H}$) [α, β, [β, α, $\mathfrak{H}_i$]] = [α, α, $\mathfrak{H}_i$] = $\mathfrak{H}_i$ und damit $\mathfrak{H}_i = \ulcorner$Sei $\Delta\urcorner$ und A($\mathfrak{H}_i$) = Δ. Damit ist $\Delta \in$ VAN($\mathfrak{H}$). Damit gilt (iii).

Zu (iv): Angenommen $\mathfrak{H} \neq \emptyset$. Wegen $\beta \notin$ TTSEQ($\mathfrak{H}$) ist mit a) und Theorem 1-24-(ii) [α, β, K($\mathfrak{H}^+$)] = [α, β, A($\mathfrak{H}^+_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^+)\text{-}1}$)] = [$\alpha$, β, [β, α, A($\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^+)\text{-}2}$)]] = [$\alpha$, α, A($\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^+)\text{-}2}$)] = A($\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^+)\text{-}2}$). Nun ist Dom($\mathfrak{H}^+$) = Dom($\mathfrak{H}$)+1. Damit gilt weiter [$\alpha$, β, K($\mathfrak{H}^+$)] = A($\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^+)\text{-}2}$) = A($\mathfrak{H}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}$) = K($\mathfrak{H}$).

Nun zum Induktionsbeweis: Gelten nun $\mathfrak{H}^+ \in$ RGS und b) für alle k < Dom($\mathfrak{H}$). Sei Dom($\mathfrak{H}$) = 0. Dann ist $\mathfrak{H} = \emptyset$ = $\{(l+1 \mid l \in \text{Dom(VERS}(\mathfrak{H}))\}$. Mit a) und Definition 3-16 ist $\mathfrak{H}^+ = \{(0, \ulcorner\text{Also } \beta = \beta\urcorner)\} \in$ IEF($\emptyset$) $\subseteq$ RGS. Offenbar gilt Dom(VERS($\mathfrak{H}^+$)) = {0} =

$\{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$. Sei nun $0 < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$. Dann ist $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$. Dann ist mit Theorem 3-6 $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann ist nach I.V.:

c) $\mathfrak{H}^* = \{(0, \ulcorner\text{Also } \beta = \beta\urcorner)\}^\frown[\beta, \alpha, \mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1] \in \mathrm{RGS}$ und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) = \{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\} \cup \{0\}$.

Sodann ergibt sich mit $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ mit Definition 3-18, dass $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Da sich Operatoren durch die Substitution nicht verändern, gilt nun zunächst:

d) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$: $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)]$ und $\mathfrak{H}^*_{i+1} = \ulcorner\Xi\ [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)]\urcorner$, wobei $\mathfrak{H}_i = \ulcorner\Xi\ \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)\urcorner$ für ein $\Xi \in \mathrm{PERF}$.

Sodann gilt mit $\beta \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ und $\alpha \in \mathrm{KONST}$:

e) Für alle $i \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$: $\beta \notin \mathrm{TT}(\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i))$ und $\alpha \notin \mathrm{TT}([\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)])$,

da sonst im Gegensatz zur Voraussetzung $\beta \in \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ oder aber im Gegensatz zu Postulat 1-1 $\alpha = \beta$. Mit a) gilt:

f) $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*), \mathfrak{H}^+_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)})\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}])\}$.

Nun wird gezeigt, dass sich für die einzelnen Fälle AF … IBF jeweils ergibt, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$ und b), womit $\mathfrak{H}^+$ dann jeweils das gesuchte RGS-Element ist. Um Sonderbetrachtungen bei SBF, KEF, KBF, BEF, BBF, AEF, ABF, NBF, UEF, UBF, PEF, IEF und IBF zu vereinfachen wird nun noch vorbereitend gezeigt:

g) Wenn $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$, dann $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}\text{-}1)$.

Vorbereitungsteil: Sei $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*)$. Dann gibt es nach Definition 3-2 und mit c) und f) ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$, so dass es kein l mit $i < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$, und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\}$. Nun ist $\mathfrak{H}^*_0 = \ulcorner\text{Also } \beta = \beta\urcorner \notin \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*)$. Also ist $i \neq 0$ und mit d) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_i) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i\text{-}1})]$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})]$. Also $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i\text{-}1})] \rightarrow [\beta, \alpha,$

$A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\urcorner)\}$. Mit f) ist $\ulcorner$Also $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{i-1})] \rightarrow [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\urcorner = [\beta, \alpha, \ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{i-1}) \rightarrow A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner] = [\beta, \alpha, \mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-1}]$. Theorem 1-21 ergibt $\ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{i-1}) \rightarrow A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner = \mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-1}$ und mithin $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(Dom(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{i-1}) \rightarrow A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner)\}$. Sodann gilt mit c), d) und $i \neq 0$: $i\text{-}1 \in Dom(VANS(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und es gibt kein l mit $i\text{-}1 < l \leq Dom(\mathfrak{H})\text{-}2$, so dass $l \in Dom(VANS(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$. Damit ist dann auch $\mathfrak{H} \in SEF(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Für den Fall, dass $\mathfrak{H}^+ \in NEF(\mathfrak{H}^*)$, zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H} \in NEF(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Sei nun $\mathfrak{H}^+ \in PBF(\mathfrak{H}^*)$. Nach Definition 3-15 und mit c), d) und f) gibt es dann $\beta^* \in PAR$, $\zeta \in VAR$, $\Delta \in FORM$, wobei $FV(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, und $i \in Dom(VERS(\mathfrak{H}^*))$, so dass $A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^*, \zeta, \Delta] = [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)]$, wobei $i+1 \in Dom(VANS(\mathfrak{H}^*))$, $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})] = K(\mathfrak{H}^*)$, $\beta^* \notin TTFM(\{\Delta, [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$, es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$, es kein l mit $i+1 < l \leq Dom(\mathfrak{H})\text{-}1$ gibt, so dass $l \in Dom(VANS(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner$Also $K(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner$Also $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\urcorner)\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner])\}$. Mit f) ist $[\beta, \alpha, \ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner] = [\beta, \alpha, \mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-1}]$. Theorem 1-21 ergibt $\ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner = \mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-1}$ und mithin $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(Dom(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\urcorner)\}$. Mit $A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner \neq \ulcorner\beta = \beta\urcorner = A(\mathfrak{H}^*_0)$ ist $i \neq 0$ und daher $A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner = [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{i-1})]$.

Damit ergibt sich dann mit c), d) und $i \neq 0$ zunächst: $i\text{-}1 \in Dom(VERS(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$, $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und es gibt kein l mit $i < l \leq Dom(\mathfrak{H})\text{-}2$, so dass $l \in Dom(VANS(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$. Zu zeigen ist nun noch, dass $A(\mathfrak{H}_{i-1})$, $A(\mathfrak{H}_i)$ und $A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})$ die Voraussetzungen für $\mathfrak{H} \in PBF(\mathfrak{H}{\restriction}Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$ erfüllen.

Nun ist $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{i-1})] = A(\mathfrak{H}^*_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$ und $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] = A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta^*, \zeta, \Delta]$. Da Operatoren durch die Substitution nicht verändert werden, gilt damit wegen $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{i-1})] = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$: $A(\mathfrak{H}_{i-1}) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta^{+}\urcorner$ für ein $\Delta^+ \in FORM$, wobei $\beta \notin TT(\Delta^+)$ und $FV(\Delta^+) \subseteq \{\zeta\}$. Damit ist $\ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner = [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{i-1})] = [\beta, \alpha, \ulcorner\bigvee\zeta\Delta^{+}\urcorner] = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta, \alpha, \Delta^+]\urcorner$ und somit $\Delta = [\beta, \alpha, \Delta^+]$. Damit gilt wiederum: $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \zeta, \Delta] = [\beta^*, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta^+]]$ und $\beta^* \notin TT([\beta, \alpha, \Delta^+])$. Sodann gilt $\beta = \beta^*$ oder $\beta \neq \beta^*$. Wäre $\beta = \beta^*$, dann gäbe es kein $j \leq i$, so dass $\beta \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Nun ist aber $\beta \in TT(\ulcorner$Also $\beta = \beta\urcorner) = TT(\mathfrak{H}^*_0)$ und $0 \leq i$. Also ist $\beta \neq \beta^*$. Dann lassen sich mit $\beta^* \in TT([\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)])$ und $\beta^* \notin TT([\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)])$ zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Angenommen $\beta^* \in TT([\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)])$. Dann ist mit $\Delta = [\beta, \alpha, \Delta^+]$ und Theorem 1-25-(ii): $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \zeta, \Delta] = [\beta^*, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta^+]] = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta^+]]$. Sodann ist $\beta \notin TT(A(\mathfrak{H}_i))$ und wegen $\beta \neq \beta^*$ und $\beta \notin TT(\Delta^+)$ auch $\beta \notin TT([\beta^*, \zeta, \Delta^+])$ und damit mit Theorem 1-20 $A(\mathfrak{H}_i) = [\beta^*, \zeta, \Delta^+]$. Wäre nun $\beta^* \in TTFM(\{\Delta^+, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ oder gäbe es ein $j \leq i$-1, so dass $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}_j)$. Dann wäre wegen $\beta^* \neq \alpha$ mit d) auch $\beta^* \in TTFM(\{[\beta, \alpha, \Delta^+], [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})]\})$ oder es gäbe $j \leq i$, so dass $\beta^* \in TT(\mathfrak{H}^*_j)$. Widerspruch! Also ist im ersten Fall die Parameterbedingung für β^* auch in $\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})$-1 erfüllt und damit wiederum insgesamt $\mathfrak{H} \in PBF(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Zweiter Fall: Sei nun $\beta^* \notin TT([\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)])$. Mit $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta^+]]$, gilt dann $\zeta \notin FV([\beta, \alpha, \Delta^+])$. Dann ist $[\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] = [\beta^*, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta^+]] = [\beta, \alpha, \Delta^+]$ und damit mit $\beta \notin TT(A(\mathfrak{H}_i)) \cup TT(\Delta^+)$ wiederum mit Theorem 1-20 $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta^+$, wobei mit $\zeta \notin FV([\beta, \alpha, \Delta^+])$ auch $\zeta \notin FV(\Delta^+)$. Sei nun $\beta^+ \in PAR\backslash TTSEQ(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Mit $\zeta \notin FV(\Delta^+)$, gilt dann $A(\mathfrak{H}_i) = \Delta^+ = [\beta^+, \zeta, \Delta^+]$ und es gilt: $\beta^+ \notin TTFM(\{\Delta^+, A(\mathfrak{H}_{Dom(\mathfrak{H})-2})\})$ und es gibt kein $j \leq i$, so dass $\beta^+ \in TT(\mathfrak{H}_j)$. Damit ist dann ebenfalls insgesamt auch $\mathfrak{H} \in PBF(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Also gilt in beiden Fällen $\mathfrak{H} \in PBF(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Hauptteil: Nun zum Nachweis, dass sich für die einzelnen Fälle AF … IBF jeweils ergibt, dass $\mathfrak{H}^+ \in RGS$ und $Dom(VERS(\mathfrak{H}^+)) = \{(l+1 \mid l \in Dom(VERS(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$. Zunächst werden SEF, NEF und PBF behandelt. Nach einer Ausschlussannahme für alle anderen Fälle kann für diese $Dom(VERS(\mathfrak{H}^+))$ allein mit c), g) und Theorem 3-25 bestimmt werden.

(*SEF*, *NEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in SEF(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-2 gibt es dann ein $i \in Dom(VANS(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass es kein $l \in Dom(VANS(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))$ mit $i < l \leq Dom(\mathfrak{H})\text{-}2$ gibt und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(Dom(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}_i) \rightarrow K(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)\urcorner)\}$. Dann gilt mit a), d) und f): $i+1 \in Dom(VANS(\mathfrak{H}^*))$ und es gibt kein l mit $i+1 < l \leq Dom(\mathfrak{H})\text{-}1 = Dom(\mathfrak{H}^*)\text{-}1$, so dass $l \in Dom(VANS(\mathfrak{H}^*))$, und $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)]$ und $K(\mathfrak{H}^*) = [\beta, \alpha, K(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)]$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}_i) \rightarrow K(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] \rightarrow [\beta, \alpha, K(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)]\urcorner)\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) \rightarrow K(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\}$. Damit ist dann $\mathfrak{H}^+ \in SEF(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in RGS$.

Sodann ergibt sich mit Theorem 3-19-(iii), dass $VERS(\mathfrak{H}) = VERS(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid i \leq j < Dom(\mathfrak{H})\text{-}1\} \cup \{(Dom(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } A(\mathfrak{H}_i) \rightarrow K(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)\urcorner)\}$ und dass $VERS(\mathfrak{H}^+) = VERS(\mathfrak{H}^*)\backslash\{(j, \mathfrak{H}^+_j) \mid i+1 \leq j < Dom(\mathfrak{H})\} \cup \{(Dom(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] \rightarrow [\beta, \alpha, K(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)]\urcorner)\}$. Mit $Dom(VERS(\mathfrak{H}^*)) = \{(l+1 \mid l \in Dom(VERS(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1))\} \cup \{0\}$ ergibt sich dann auch $Dom(VERS(\mathfrak{H}^+)) = \{(l+1 \mid l \in Dom(VERS(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$. Für den Fall, dass $\mathfrak{H} \in NEF(\mathfrak{H}\upharpoonright Dom(\mathfrak{H})\text{-}1)$, zeigt man analog, dass dann auch $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$ und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$.

(*PBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-15 gibt es dann $\beta^* \in \mathrm{PAR}$, $\zeta \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, und $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$, $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i+1}) = [\beta^*, \zeta, \Delta]$, wobei $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, $\beta^* \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})\})$, es kein $j \leq i$ gibt, so dass $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$, es kein l mit $i+1 < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2$ gibt, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})\urcorner)\}$.

Damit ergibt sich dann mit c), d) und f) zunächst: $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] = [\beta, \alpha, \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner] = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner$, $i+2 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+2}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{i+1})] = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta]]$, $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})]$ und $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } \mathrm{K}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, \mathrm{K}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)]\urcorner)\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*)\urcorner)\}$ und es gibt kein l mit $i+2 < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1$, so dass $l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$. Sodann lassen sich mit $\beta^* \neq \beta$ und $\beta^* = \beta$ zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Sei $\beta^* \neq \beta$. Dann ist mit Theorem 1-25-(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+2}) = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta]] = [\beta^*, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$. Sodann ist $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner$. Wäre nun $\beta^* \in \mathrm{TTFM}(\{[\beta, \alpha, \Delta], [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})]\})$ oder gäbe es ein $j \leq i+1$, so dass $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}^*_j)$, dann wäre wegen $\beta^* \neq \beta$ mit d) auch $\beta^* \in \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})\})$ oder es gäbe $j \leq i$, so dass $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$. Widerspruch! Also ist $\beta^* \notin \mathrm{TTFM}(\{[\beta, \alpha, \Delta], [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})]\})$ und es gibt kein $j \leq i+1$, so dass $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}^*_j)$ und damit ist $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$.

Zweiter Fall: Sei nun $\beta^* = \beta$. Dann ist $\zeta \notin \mathrm{FV}(\Delta)$, da sonst $\beta \in \mathrm{TT}([\beta^*, \zeta, \Delta]) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$. Dann ist $[\beta^*, \zeta, \Delta] = \Delta$ und damit $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+2}) = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta]] = [\beta, \alpha, \Delta]$ und sodann ist $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = \ulcorner\bigvee\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner$. Sei nun $\beta^+ \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^*)$. Dann ist mit $\zeta \notin \mathrm{FV}(\Delta)$ auch $\zeta \notin \mathrm{FV}([\beta, \alpha, \Delta])$ und damit $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+2}) = [\beta, \alpha, \Delta] = [\beta^+, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$ und es gilt: $\beta^+ \notin \mathrm{TTFM}(\{[\beta, \alpha, \Delta], [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})]\})$ und es gibt kein $j \leq i+1$, so dass $\beta^+ \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}^*_j)$. Damit ist dann wieder $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$. Damit gilt in beiden Fällen $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$.

Sodann ergibt sich mit Theorem 3-21-(iii), dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\backslash\{(j, \mathfrak{H}_j) \mid i+1 \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})\urcorner)\}$ und dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)\backslash\{(j, \mathfrak{H}^+_j) \mid i+2 \leq j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}2})]\urcorner)\}$. Mit $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) = \{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\upharpoonright}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\} \cup \{0\}$ ergibt sich dann wieder $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$.

Ausschlussannahme: Für die verbleibenden Schritte sei $\mathfrak{H} \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Mit g) ist dann $\mathfrak{H}^+ \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^*) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^*)$. Damit ergibt sich für die folgenden Fälle dann jeweils mit Theorem 3-25, dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \mathrm{K}(\mathfrak{H}))\}$ und dass $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathrm{K}(\mathfrak{H}^*))\}$. Mit $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)) = \{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))\} \cup \{0\}$ ergibt sich dann $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^+)) = \{(l+1 \mid l \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))\} \cup \{0\}$ für alle verbleibenden Fälle.

(*AF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-1 ist dann $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Sei } \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})\urcorner)$. Dann ist mit f) $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1})]\urcorner)\} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$.

(*SBF*, *KEF*, *KBF*, *BEF*, *BBF*, *AEF*, *ABF*, *NBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-3 gibt es dann $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{GFORM}$, so dass $\mathrm{A}, \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \mathrm{B}\urcorner)\}$. Mit f) gilt dann: $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, \mathrm{B}]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $\mathrm{A}, \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und Definition 2-30 $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \mathrm{A}$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) = \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$. Mit c) und d) ergibt sich dann, dass $i+1, j+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}]$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{j+1}) = \ulcorner[\beta, \alpha, \mathrm{A}] \rightarrow [\beta, \alpha, \mathrm{B}]\urcorner$. Damit gilt dann $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, \mathrm{B}]\urcorner)\} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^*)$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}$. Für KEF, KBF, BEF, BBF, AEF, ABF und NBF ist analog vorzugehen.

(*UEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-12 gibt es dann $\beta^* \in \mathrm{PAR}$, $\zeta \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $[\beta^*, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$, $\beta^* \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\zeta\Delta\urcorner)\}$. Dann gilt mit f): $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\zeta\Delta\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigwedge\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $[\beta^*, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und Definition 2-30 ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $[\beta^*, \zeta, \Delta] = \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)$. Mit c) und d) gilt dann, dass $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta]]$. Sodann lassen sich mit $\beta^* \neq \beta$ und $\beta^* = \beta$ zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Sei $\beta^* \neq \beta$. Dann ist mit Theorem 1-25-(ii): $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta]] = [\beta^*, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$. Sodann ist $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^+) = \ulcorner\bigwedge\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner$. Wäre $\beta^* \in \mathrm{TTFM}(\{[\beta, \alpha, \Delta]\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*))$. Da $\beta^* \neq \beta$ und $\beta^* \notin \mathrm{TT}(\Delta)$ ist zunächst $\beta^* \notin \mathrm{TT}([\beta, \alpha, \Delta])$. Also wäre $\beta^* \in \mathrm{TTFM}(\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*))$ und somit gäbe es mit Definition 2-31 ein $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$, so dass $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_j))$. Mit $\mathfrak{H}^*_0 \in \mathrm{FSATZ}$ ist $j \neq 0$. Da mit d) dann $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_j) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{j\text{-}1})]$ und $\beta^* \neq \beta$ wäre damit aber bereits $\beta^* \in \mathrm{TT}(\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{j\text{-}1}))$. Mit c) und d) ergäbe sich sodann aus $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*))$, dass $j\text{-}1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und somit $A(\mathfrak{H}_{j\text{-}1}) \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\beta^* \in \mathrm{TTFM}(\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und andererseits nach Voraussetzung $\beta^* \notin \mathrm{TTFM}(\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$. Widerspruch! Also ist $\beta^* \notin \mathrm{TTFM}(\{[\beta, \alpha, \Delta]\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*))$ und damit $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}^*)$.

Zweiter Fall: Sei nun $\beta^* = \beta$. Dann ist $\zeta \notin \mathrm{FV}(\Delta)$, da sonst $\beta \in \mathrm{TT}([\beta^*, \zeta, \Delta]) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$. Damit ist dann $[\beta^*, \zeta, \Delta] = \Delta$ und damit $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, [\beta^*, \zeta, \Delta]] = [\beta, \alpha, \Delta]$ und sodann ist $K(\mathfrak{H}^+) = \ulcorner\bigwedge\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner$. Sei nun $\beta^+ \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^*)$. Dann ist mit $\zeta \notin \mathrm{FV}(\Delta)$ auch $\zeta \notin \mathrm{FV}([\beta, \alpha, \Delta])$ und damit $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \Delta] = [\beta^+, \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$ und es gilt: $\beta^+ \notin \mathrm{TTFM}(\{[\beta, \alpha, \Delta]\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*))$ und damit wiederum $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}^*)$. Damit gilt in beiden Fällen, dass $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$.

(*UBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-13 gibt es dann $\theta \in \mathrm{GTERM}$, $\zeta \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $\ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\theta, \zeta, \Delta]\urcorner)\}$. Mit f) ist dann $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } [\theta, \zeta, \Delta]\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, [\theta, \zeta, \Delta]]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $\ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ nach Definition 2-30 ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $A(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner$. Mit c) und d) ist dann $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner] = \ulcorner\bigwedge\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner$. Sodann ist mit Theorem 1-26-(ii) $K(\mathfrak{H}^+) = [\beta, \alpha, [\theta, \zeta, \Delta]] = [[\beta, \alpha, \theta], \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$, wobei mit $\theta \in \mathrm{GTERM}$ auch $[\beta, \alpha, \theta] \in \mathrm{GTERM}$ und mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$ auch $\mathrm{FV}([\beta, \alpha, \Delta]) \subseteq \{\zeta\}$. Damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$.

(*PEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-14 gibt es dann $\theta \in \mathrm{GTERM}$, $\zeta \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $[\theta, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \bigvee\zeta\Delta\urcorner)\}$. Mit f) ist dann $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } \bigvee\zeta\Delta\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigvee\zeta[\beta, \alpha, \Delta]\urcorner)\}$. Sodann gibt es mit $[\theta, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ nach Definition 2-30 ein $i \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $A(\mathfrak{H}_i) = [\theta, \zeta, \Delta]$. Mit c) und d) ist dann $i+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)]$. Dann ist mit Theorem 1-26-(ii) $A(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, A(\mathfrak{H}_i)] = [\beta, \alpha, [\theta, \zeta, \Delta]] = [[\beta, \alpha, \theta], \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$, wobei mit $\theta \in \mathrm{GTERM}$ auch $[\beta, \alpha, \theta] \in \mathrm{GTERM}$ und mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$ auch $\mathrm{FV}([\beta, \alpha, \Delta]) \subseteq \{\zeta\}$. Damit ist dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{RGS}$.

(*IEF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-16 gibt es dann $\theta \in \mathrm{GTERM}$, so dass $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}{\restriction}\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } \theta = \theta\urcorner)\}$. Dann ist mit f) $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup$

$\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } \theta = \theta\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, \theta] = [\beta, \alpha, \theta]\urcorner)\}$, wobei mit $\theta \in$ GTERM auch $[\beta, \alpha, \theta] \in$ GTERM. Damit ist dann $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq$ RGS.

(*IBF*): Sei nun $\mathfrak{H} \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-17 gibt es dann $\theta_0, \theta_1 \in$ GTERM, $\zeta \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, so dass $\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$, $[\theta_0, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1, \ulcorner\text{Also } [\theta_1, \zeta, \Delta]\urcorner)\}$. Dann ist mit f) $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), [\beta, \alpha, \ulcorner\text{Also } [\theta_1, \zeta, \Delta]\urcorner])\} = \mathfrak{H}^* \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } [\beta, \alpha, [\theta_1, \zeta, \Delta]]\urcorner)\}$. Mit $\ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$, $[\theta_0, \zeta, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und Definition 2-30 gibt es sodann $i, j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$, so dass $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_i) = \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_j) = [\theta_0, \zeta, \Delta]$. Dann gilt mit c) und d): $i+1, j+1 \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*))$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{i+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_i)] = [\beta, \alpha, \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner] = \ulcorner[\beta, \alpha, \theta_0] = [\beta, \alpha, \theta_1]\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{j+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_j)]$. Dann ist mit Theorem 1-26-(ii) $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^*_{j+1}) = [\beta, \alpha, \mathrm{A}(\mathfrak{H}_j)] = [\beta, \alpha, [\theta_0, \zeta, \Delta]] = [[\beta, \alpha, \theta_0], \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^+) = [\beta, \alpha, [\theta_1, \zeta, \Delta]] = [[\beta, \alpha, \theta_1], \zeta, [\beta, \alpha, \Delta]]$, wobei mit $\theta_0, \theta_1 \in$ GTERM auch $[\beta, \alpha, \theta_0], [\beta, \alpha, \theta_1] \in$ GTERM und mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$ auch $\mathrm{FV}([\beta, \alpha, \Delta]) \subseteq \{\zeta\}$. Damit gilt dann insgesamt $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}^*) \subseteq$ RGS. ■

Im Beweis des folgenden Theorems dient Theorem 4-8 als Induktionsbasis und als Hilfsmittel im Induktionsschritt. Das Theorem dient zur Vorbereitung der RGS-treuen Verkettung zweier RGS-Elemente, die nicht parameterfremd sind.

Theorem 4-10. *Mehrfache Substitution von neuen und paarweise verschiedenen Parametern für paarweise verschiedene Parameter ist RGS-treu*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ RGS, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\} \subseteq \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$, wobei für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$ gilt, dass $\beta^*_i \neq \beta^*_j$, und $\{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\} \subseteq \mathrm{PAR}\setminus\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\}$, wobei für $i, j < k$ mit $i \neq j$ gilt, dass $\beta_i \neq \beta_j$, dann ist $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}] \in$ RGS und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}([\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}])) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$.

Beweis: Durch Induktion über k. Die Behauptung gilt mit Theorem 4-8 für $k = 1$. Gelte die Behauptung nun für k. Sei nun $\mathfrak{H} \in$ RGS, $k+1 \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ und $\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\} \subseteq \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$, wobei für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$ gelte, dass $\beta^*_i \neq \beta^*_j$, und $\{\beta_0, \ldots, \beta_k\} \subseteq$ PAR, wobei für alle $i, j < k+1$ mit $i \neq j$ gelte, dass $\beta_i \neq \beta_j$. Dann gilt mit I.V. $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}] \in$ RGS und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}([\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}])) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$. Sodann ist mit Theorem 1-27-(iv) $[\beta^*_k, \beta_k, [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}]] = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \mathfrak{H}]$ und mit Theorem 4-8 dann $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \mathfrak{H}] \in$ RGS und $\mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}([\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_k\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \mathfrak{H}])) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}([\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}])) = \mathrm{Dom}(\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}))$. ■

Theorem 4-11. *UE-Fortsetzung einer Sequenz*

Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \subseteq \mathrm{VAR}$, wobei für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$ gilt: $\xi_i \neq \xi_j$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$, und $\{\beta_0, \ldots \beta_{k-1}\} \subseteq \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$, wobei für alle $i, j < k$ mit $i \neq j$ gilt: $\beta_i \neq \beta_j$, und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$, dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass

(i) $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$,

(ii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und

(iii) $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \ulcorner\bigwedge\xi_0\ldots\bigwedge\xi_{k-1}\Delta\urcorner$.

Beweis: Durch Induktion über k. Sei $k = 1$ und $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, sei $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$ und $\beta \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = [\beta, \xi, \Delta]$. Da dann mit Theorem 2-82 $[\beta, \xi, \Delta] = \mathrm{K}(\mathfrak{H}) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$, ist nach Definition 3-12 $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi\Delta\urcorner) \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$. Sodann ist $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^*) = (\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})) \cup (\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TT}(\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner)) = \mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ und mit Theorem 3-26-(v) ist $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$.

Gelte die Behauptung nun für k und sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \subseteq \mathrm{VAR}$, wobei für $i, j < k+1$ mit $i \neq j$ gelte: $\xi_i \neq \xi_j$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ und $\{\beta_0, \ldots \beta_k\} \subseteq \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$, wobei für $i, j < k+1$ mit $i \neq j$ gelte: $\beta_i \neq \beta_j$, und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta]$. Mit Theorem 1-28-(ii) ist dann $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta] = [\beta_k, \xi_k, [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]]$. Mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ ist dann $\mathrm{FV}\langle[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]) \subseteq \{\xi_k\}$ und mit der paarweisen Verschiedenheit der β_i und $\{\beta_0, \ldots \beta_k\} \subseteq \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$ ist dann $\beta_k \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$. Da sodann $[\beta_k, \xi_k, [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]] = \mathrm{K}(\mathfrak{H}) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$ ist nach Definition 3-12 $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Also } \bigwedge\xi_k[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]\urcorner) \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}') = \ulcorner\bigwedge\xi_k[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]\urcorner$ und $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = (\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})) \cup (\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TT}(\ulcorner\bigwedge\xi_k[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]\urcorner)) = \mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H})$ und mit Theorem 3-26-(v) ist $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Wegen der paarweisen Verschiedenheit der ξ_i ist sodann für alle $i < k$: $\xi_i \neq \xi_k$. Damit ist dann $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \ulcorner\bigwedge\xi_k[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]\urcorner = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \ulcorner\bigwedge\xi_k\Delta\urcorner]$. Mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ ist dann $\mathrm{FV}(\ulcorner\bigwedge\xi_k\Delta\urcorner) \subseteq \{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$, wobei die ξ_i mit $i < k$ paarweise verschieden sind. Sodann ist mit $\{\beta_0, \ldots \beta_k\} \subseteq \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$ dann $\{\beta_0, \ldots \beta_{k-1}\} \subseteq \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TTFM}(\{\ulcorner\bigwedge\xi_k\Delta\urcorner\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$, wobei die β_i mit $i < k$ ebenfalls paarweise verschieden sind. Nach I.V. gibt es damit mit $\mathrm{K}(\mathfrak{H}') = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots,$

$\xi_{k-1}\rangle$, $\ulcorner\bigwedge\xi_k\Delta\urcorner]$ ein $\mathfrak{H}^* \in$ RGS\{∅}, so dass PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$*) = PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$') = PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$), VAN($\mathfrak{H}$*) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$') ⊆ VAN($\mathfrak{H}$) und K($\mathfrak{H}$*) = $\ulcorner\bigwedge\xi_0\ldots\bigwedge\xi_k\Delta\urcorner$. ■

Theorem 4-12. *UB-Fortsetzung einer Sequenz*

Wenn $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\}$ ⊆ GTERM, $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$ ⊆ VAR, wobei für alle i, $j < k$ mit $i \neq j$ gilt, dass $\xi_i \neq \xi_j$, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$, und $\ulcorner\bigwedge\xi_0 \ldots \bigwedge\xi_{k-1}\Delta\urcorner$ ∈ VER($\mathfrak{H}$), dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in$ RGS\{∅}, so dass

(i) Dom($\mathfrak{H}$*) = Dom($\mathfrak{H}$)+k,

(ii) $\mathfrak{H}^*\restriction$Dom($\mathfrak{H}$) = $\mathfrak{H}$,

(iii) VAN($\mathfrak{H}$*) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$),

(iv) Für alle $i < k$-1 gilt: K($\mathfrak{H}^*\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)+$i$+1) = $\ulcorner\bigwedge\xi_{i+1} \ldots \bigwedge\xi_{k-1}[\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]\urcorner$, und

(v) K($\mathfrak{H}$*) = $[\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$.

Beweis: Durch Induktion über k: Sei k = 1. Seien $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, θ ∈ GTERM, ξ ∈ VAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ} und $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ ∈ VER($\mathfrak{H}$). Dann gilt mit Definition 3-13: $\mathfrak{H}^* = \mathfrak{H}^\frown\{(0, \ulcorner\text{Also } [\theta, \xi, \Delta]\urcorner)\}$ ∈ UBF($\mathfrak{H}$) ⊆ RGS\{∅} und es ist Dom($\mathfrak{H}$*) = Dom($\mathfrak{H}$)+1 und $\mathfrak{H}^*\restriction$Dom($\mathfrak{H}$) = $\mathfrak{H}$ und mit Theorem 3-27-(v) ist VAN($\mathfrak{H}$*) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$), (iv) ist wegen k = 1 trivialerweise erfüllt und K($\mathfrak{H}$') = [θ, ξ, Δ].

Gelte die Behauptung nun für k und sei $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, $\{\theta_0, \ldots, \theta_k\}$ ⊆ GTERM, $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ ⊆ VAR, wobei für alle i, $j < k$+1 mit $i \neq j$ gelte, dass $\xi_i \neq \xi_j$, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, und $\ulcorner\bigwedge\xi_0 \ldots \bigwedge\xi_k\Delta\urcorner$ ∈ VER($\mathfrak{H}$). Dann gilt mit FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, dass FV($\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_k\Delta$) ⊆ $\{\xi_0\}$ und mit θ_0 ∈ GTERM und $\ulcorner\bigwedge\xi_0 \ldots \bigwedge\xi_k\Delta\urcorner$ ∈ VER($\mathfrak{H}$) gilt mit Definition 3-13: $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}^\frown\{(0, \ulcorner\text{Also } [\theta_0, \xi_0, \bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_k\Delta]\urcorner)\}$ ∈ UBF($\mathfrak{H}$) ⊆ RGS\{∅}. Dann ist Dom($\mathfrak{H}$') = Dom($\mathfrak{H}$)+1 und $\mathfrak{H}'\restriction$Dom($\mathfrak{H}$) = $\mathfrak{H}$ und mit Theorem 3-27-(v) ist VAN($\mathfrak{H}$') ⊆ VAN($\mathfrak{H}$). Wegen der paarweisen Verschiedenheit der ξ_i ist sodann für alle i mit $0 < i \leq k$: $\xi_0 \neq \xi_i$. Damit ist dann K($\mathfrak{H}$') = $[\theta_0, \xi_0, \ulcorner\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_k\Delta\urcorner] = \ulcorner\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_k[\theta_0, \xi_0, \Delta]\urcorner$.

Sei nun $\zeta_i = \xi_{i+1}$ und $\theta'_i = \theta_{i+1}$ für alle $i \in k$. Dann gilt $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\}$ ⊆ GTERM, $\{\zeta_0, \ldots, \zeta_{k-1}\}$ ⊆ VAR, wobei für alle i, $j < k$ mit $i \neq j$ gilt, dass $\zeta_i \neq \zeta_j$, $[\theta_0, \xi_0, \Delta]$ ∈ FORM, wobei mit FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ und θ_0 ∈ GTERM gilt: FV($[\theta_0, \xi_0, \Delta]$) ⊆ $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\} = \{\zeta_0, \ldots, \zeta_{k-1}\}$, und mit Theorem 2-82 gilt: $\ulcorner\bigwedge\zeta_0 \ldots \bigwedge\zeta_{k-1}[\theta_0, \xi_0, \Delta]\urcorner = \ulcorner\bigwedge\xi_1 \ldots \bigwedge\xi_k[\theta_0, \xi_0, \Delta]\urcorner$ = K($\mathfrak{H}$') ∈ VER($\mathfrak{H}$'). Dann gilt mit I.V., dass es ein $\mathfrak{H}^* \in$ RGS\{∅} gibt, so dass:

a) $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')+k$,

b) $\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') = \mathfrak{H}'$

c) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$,

d) Für alle $i < k$-1: $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')+i+1) = \ulcorner\bigwedge\zeta_{i+1}\ldots\bigwedge\zeta_{k-1}[\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_i\rangle, \langle\zeta_0, \ldots, \zeta_i\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]\urcorner$ und

e) $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\zeta_0, \ldots, \zeta_{k-1}\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]$.

Dann ergibt sich mit a) wegen $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$: $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+k+1$. Sodann ergibt sich mit b) wegen $\mathfrak{H}'\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$ auch $\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$. Mit c) ergibt sich wegen $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Damit gilt bereits, dass $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und dass die Klauseln (i) bis (iii) für $\mathfrak{H}^*$ gelten. Aus d) ergibt sich sodann mit $\zeta_i = \xi_{i+1}$ und $\theta'_i = \theta_{i+1}$:

Für alle $i < k$-1: $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')+i+1) = \ulcorner\bigwedge\xi_{i+2} \ldots \bigwedge\xi_k[\langle\theta_1, \ldots, \theta_{i+1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{i+1}\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]\urcorner$.

Mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ gilt damit:

f) Für alle $i < k$-1: $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+i+1+1) = \ulcorner\bigwedge\xi_{i+2} \ldots \bigwedge\xi_k[\langle\theta_1, \ldots, \theta_{i+1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{i+1}\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]\urcorner$.

Damit gilt:

g) Für alle i mit $0 < i < k$: $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+i+1) = \ulcorner\bigwedge\xi_{i+1} \ldots \bigwedge\xi_k[\langle\theta_1, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_i\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]\urcorner$.

Sodann gilt:

h) Für alle i mit $0 < i < k+1$: $[\langle\theta_1, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_i\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]] = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]$.

h) kann mittels Induktion über i gezeigt werden. Es gilt nämlich zunächst mit Theorem 1-28-(ii), dass $[\theta_1, \xi_1, [\theta_0, \xi_0, \Delta]] = [\langle\theta_0, \theta_1\rangle, \langle\xi_0, \xi_1\rangle, \Delta]$. Gelte nun für i: Wenn $0 < i < k+1$, dann $[\langle\theta_1, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_i\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]] = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]$. Sei nun $0 < i+1 < k+1$. Dann ist $i = 0$ oder $0 < i$. Für $i = 0$ ergibt sich die Behauptung wie für die Induktionsbasis. Sei nun $0 < i$. Dann ergibt sich zunächst wieder mit Theorem 1-28-(ii): $[\langle\theta_1, \ldots, \theta_{i+1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{i+1}\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]] = [\theta_{i+1}, \xi_{i+1}, [\langle\theta_1, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_i\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]]$. Mit I.V. gilt dann $[\theta_{i+1}, \xi_{i+1}, [\langle\theta_1, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_i\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]] = [\theta_{i+1}, \xi_{i+1}, [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]]$ und wiederum mit Theorem 1-28-(ii): $[\theta_{i+1}, \xi_{i+1}, [\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]] = [\langle\theta_0, \ldots,$

$\theta_{i+1}\rangle$, $\langle\xi_0, \ldots, \xi_{i+1}\rangle$, $\Delta]$ und damit insgesamt: $[\langle\theta_1, \ldots, \theta_{i+1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{i+1}\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]] = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{i+1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{i+1}\rangle, \Delta]$. Also gilt h).

Sodann gilt mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}') = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1$ und $K(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')) = K(\mathfrak{H}') = \ulcorner\Lambda\xi_1 \ldots. \Lambda\xi_k[\theta_0, \xi_0, \Delta]\urcorner$, dass $K(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+0+1) = \ulcorner\Lambda\xi_1 \ldots. \Lambda\xi_k[\theta_0, \xi_0, \Delta]\urcorner$. Mit g) und h) gilt dann insgesamt Klausel (iv):

Für alle $i < k$: $K(\mathfrak{H}^*\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+i+1) = \ulcorner\Lambda\xi_{i+1} \ldots \Lambda\xi_k[\langle\theta_0, \ldots, \theta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]\urcorner$.

Zuletzt gilt mit e), h) und $\theta'_i = \theta_{i+1}$ und $\zeta_i = \xi_{i+1}$:

$$K(\mathfrak{H}^*) = [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\zeta_0, \ldots, \zeta_{k-1}\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]$$
$$=$$
$$[\langle\theta_1, \ldots, \theta_k\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_k\rangle, [\theta_0, \xi_0, \Delta]]$$
$$=$$
$$[\langle\theta_0, \ldots, \theta_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta]$$

und damit Klausel (v), womit insgesamt das Theorem für k+1 gilt. ■

Theorem 4-13. *Induktionsbasis für Theorem 4-14*

Wenn $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') = \emptyset$, dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass

(i) $K(\mathfrak{H}), K(\mathfrak{H}') \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*)$ und

(ii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Seien $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und sei $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}') = \emptyset$. Wenn $K(\mathfrak{H}) = K(\mathfrak{H}')$, können sowohl $\mathfrak{H}$ als auch $\mathfrak{H}'$ für $\mathfrak{H}^*$ gewählt werden. Sei nun $K(\mathfrak{H}) \neq K(\mathfrak{H}')$. Dann lassen sich mit $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = \emptyset$ und $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') \neq \emptyset$ zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Sei $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') = \emptyset$. Nun gibt es ein $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus(\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}'))$. Dann gibt es mit Theorem 4-4 ein $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{VER}(\mathfrak{H}') \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^+)$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$. Nun ist mit Theorem 2-82 $K(\mathfrak{H}) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H})$ und $K(\mathfrak{H}') \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}')$ und damit sind dann $K(\mathfrak{H}), K(\mathfrak{H}') \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^+)$. Sodann gibt es mit Theorem 4-7 $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+)\setminus\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} = (\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}'))\setminus\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$ und $K(\mathfrak{H}), K(\mathfrak{H}') \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*)$, womit $\mathfrak{H}^*$ das gesuchte RGS-Element ist.

Zweiter Fall: Sei nun $\mathrm{PAR} \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}) \cap \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}') \neq \emptyset$. Dann kommen in $\mathfrak{H}'$ k paarweise verschiedene Parameter für ein $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ vor. Sei nun $\{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\} = \mathrm{PAR} \cap$

TTSEQ($\mathfrak{H}$'), wobei für alle i, $j < k$ mit $i \neq j$ gelte $\beta_i \neq \beta_j$. Nun gibt es $\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1} \in$ PAR\(TTSEQ($\mathfrak{H}$) ∪ TTSEQ($\mathfrak{H}$')), wobei für alle i, $j < k$: Wenn $i \neq j$, dann $\beta^*_i \neq \beta^*_j$. Sodann gibt es $\xi_0, \ldots, \xi_{k-1} \in$ VAR\(TTSEQ($\mathfrak{H}$) ∪ TTSEQ($\mathfrak{H}$')), wobei für alle i, $j < k$: Wenn $i \neq j$, dann $\xi_i \neq \xi_j$.

Nun gilt mit Theorem 2-77 wegen VANS($\mathfrak{H}$') = ∅ auch VAN($\mathfrak{H}$') = ∅. Sodann gibt es mit Theorem 1-16 ein $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$ ∪ FV(K($\mathfrak{H}$')) = $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$ und TT(Δ) ∩ $\{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ = ∅, so dass K($\mathfrak{H}$') = $[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$. Mit Theorem 4-11 gilt dann, dass es ein $\mathfrak{H}^1 \in$ RGS\{∅} gibt, so dass PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}^1$) = PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$'), VAN($\mathfrak{H}^1$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$') = ∅ und damit auch VANS($\mathfrak{H}^1$) = ∅ und K($\mathfrak{H}^1$) = $\ulcorner\bigwedge\xi_0\ldots\bigwedge\xi_{k-1}\Delta\urcorner$. Sodann gilt dann mit K($\mathfrak{H}$') = $[\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$, dass PAR ∩ TT($\Delta$) ⊆ PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$') = $\{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ und damit mit TT(Δ) ∩ $\{\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\}$ = ∅, dass PAR ∩ TT(Δ) = PAR ∩ TT($\ulcorner\bigwedge\xi_0\ldots\bigwedge\xi_{k-1}\Delta\urcorner$) = PAR ∩ TT(K($\mathfrak{H}^1$)) = ∅.

Sodann gilt mit Theorem 4-10: $\mathfrak{H}^2 = [\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \mathfrak{H}^1] \in$ RGS und Dom(VERS($\mathfrak{H}^2$)) = Dom(VERS($\mathfrak{H}^1$)) und damit Dom(VANS($\mathfrak{H}^2$)) = Dom(VANS($\mathfrak{H}^1$)) = ∅ und somit auch VAN($\mathfrak{H}^2$) = ∅. Außerdem ist dann PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$) ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}^2$) ⊆ PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$) ∩ $\{\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\}$ = ∅. Ferner gilt wegen PAR ∩ TT(K($\mathfrak{H}^1$)) = ∅, dass K($\mathfrak{H}^2$) = $[\langle\beta^*_0, \ldots, \beta^*_{k-1}\rangle, \langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle$, K($\mathfrak{H}^1$)] = K($\mathfrak{H}^1$) = $\ulcorner\bigwedge\xi_0\ldots\bigwedge\xi_{k-1}\Delta\urcorner$. Nun gibt es ein $\alpha \in$ KONST\(TT($\mathfrak{H}$) ∪ TT($\mathfrak{H}^2$)). Mit Theorem 4-4 gibt es dann wegen PAR ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}$) ∩ TTSEQ($\mathfrak{H}^2$) = ∅ ein $\mathfrak{H}^3 \in$ RGS\{∅}, so dass:

a) Dom($\mathfrak{H}^3$) = Dom($\mathfrak{H}$)+1+Dom($\mathfrak{H}^2$),
b) $\mathfrak{H}^3\restriction$Dom($\mathfrak{H}$) = $\mathfrak{H}$,
c) $\mathfrak{H}^3_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})} = \ulcorner$Sei $\alpha = \alpha\urcorner$,
d) Für alle $i \in$ Dom($\mathfrak{H}^2$) ist $\mathfrak{H}^2_i = \mathfrak{H}^3_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})+1+i}$,
e) Dom(VERS($\mathfrak{H}^3$)) = Dom(VERS($\mathfrak{H}$)) ∪ {Dom($\mathfrak{H}$)} ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$)+1+l | $l \in$ Dom(VERS($\mathfrak{H}^2$))},
f) VER($\mathfrak{H}^3$) = VER($\mathfrak{H}$) ∪ {$\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$} ∪ VER($\mathfrak{H}^2$) und
g) VAN($\mathfrak{H}^3$) = VAN($\mathfrak{H}$) ∪ {$\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$} ∪ VAN($\mathfrak{H}^2$) = VAN($\mathfrak{H}$) ∪ {$\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$}.

Nun ist mit Theorem 2-82 K($\mathfrak{H}$) ∈ VER($\mathfrak{H}$) und somit mit f) K($\mathfrak{H}$) ∈ VER($\mathfrak{H}^3$). Sodann ist $\ulcorner\bigwedge\xi_0\ldots\bigwedge\xi_{k-1}\Delta\urcorner$ = K($\mathfrak{H}^2$) = K($\mathfrak{H}^3$). Mit Theorem 4-12 gibt es dann ein $\mathfrak{H}^4 \in$ RGS\{∅}, so dass

h) Dom($\mathfrak{H}^4$) = Dom($\mathfrak{H}^3$)+k,
i) $\mathfrak{H}^4\restriction$Dom($\mathfrak{H}^3$) = $\mathfrak{H}^3$,
j) VAN($\mathfrak{H}^4$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}^3$) = VAN($\mathfrak{H}$) ∪ {$\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$},

k) Für alle $i < k$: $K(\mathfrak{H}^4 \upharpoonright Dom(\mathfrak{H}^3)+i+1) = \ulcorner\bigwedge\xi_{i+1} \ldots \bigwedge\xi_{k-1}[\langle\beta_0, \ldots, \beta_i\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_i\rangle, \Delta]\urcorner$ und

l) $K(\mathfrak{H}^4) = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$.

Dann gilt zum einen, dass $K(\mathfrak{H}') = [\langle\beta_0, \ldots, \beta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta] = K(\mathfrak{H}^4) \in VER(\mathfrak{H}^4)$. Sodann gilt: $\mathfrak{H}^4_{Dom(\mathfrak{H})} = \mathfrak{H}^3_{Dom(\mathfrak{H})} = \ulcorner$Sei $\alpha = \alpha\urcorner$. Da sodann $\alpha \in KONST\backslash(TT(\mathfrak{H}) \cup TT(\mathfrak{H}^2))$ und damit $\alpha \notin TT(\Delta)$ und da $PAR \cap KONST = \emptyset$, ergibt sich mit a), b), c), d), h), i), k) und l), dass für alle $l \in Dom(\mathfrak{H}^4)$ gilt:

$\alpha \in TT(\mathfrak{H}^4_l)$ gdw $l = Dom(\mathfrak{H})$.

Damit gilt mit $\mathfrak{H}^4_{Dom(\mathfrak{H})} \in ANS(\mathfrak{H}^4)$ und Theorem 4-3: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^4$, so dass $\min(Dom(\mathfrak{A})) \leq Dom(\mathfrak{H}) \leq \max(Dom(\mathfrak{A}))$. Wäre nun $\mathfrak{A}$ ein geschlossener Abschnitt in $\mathfrak{H}^4$ und $\min(Dom(\mathfrak{A})) \leq Dom(\mathfrak{H})-1 < \max(Dom(\mathfrak{A}))$, dann wäre $\min(Dom(\mathfrak{A})) \leq Dom(\mathfrak{H}) \leq \max(Dom(\mathfrak{A}))$. Also gibt es keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^4$, so dass $\min(Dom(\mathfrak{A})) \leq Dom(\mathfrak{H})-1 < \max(Dom(\mathfrak{A}))$ und damit ist dann $A(\mathfrak{H}^4_{Dom(\mathfrak{H})-1}) = K(\mathfrak{H}) \in VER(\mathfrak{H}^4)$. Ferner ist $K(\mathfrak{H}') = K(\mathfrak{H}^4) \in VER(\mathfrak{H})$. Damit gibt es mit Theorem 4-7 ein $\mathfrak{H}^5 \in RGS\backslash\{\emptyset\}$, so dass $VAN(\mathfrak{H}^5) \subseteq VAN(\mathfrak{H}^4)\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \subseteq (VAN(\mathfrak{H}) \cup \{\alpha = \alpha\})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \subseteq VAN(\mathfrak{H})$ und $K(\mathfrak{H}), K(\mathfrak{H}') \in VER(\mathfrak{H}^5)$. ■

Theorem 4-14. *SB-, KE-, BE-, BB- und IB-Vorbereitungstheorem*
Wenn $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in RGS\backslash\{\emptyset\}$, dann gibt es ein $\mathfrak{H}^* \in RGS\backslash\{\emptyset\}$, so dass
(i) $K(\mathfrak{H}), K(\mathfrak{H}') \in VER(\mathfrak{H}^*)$ und
(ii) $VAN(\mathfrak{H}^*) \subseteq VAN(\mathfrak{H}) \cup VAN(\mathfrak{H}')$.

Beweis: Beweis durch Induktion über $|VANS(\mathfrak{H}')|$. Für $|VANS(\mathfrak{H}')| = \emptyset$ gilt die Behauptung mit Theorem 4-13. Gelte die Behauptung nun für n und seien $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}' \in RGS\backslash\{\emptyset\}$ und $|VANS(\mathfrak{H}')| = n+1$. Dann ist mit Theorem 3-18 $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H}'^\frown\{(0, \ulcorner$Also $A(\mathfrak{H}'_{\max(Dom(VANS(\mathfrak{H}')))} \rightarrow K(\mathfrak{H}')\urcorner)\} \in SEF(\mathfrak{H}') \subseteq RGS\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-19-(iv) und (v) ist $|VANS(\mathfrak{H}^1)| = n$ und mit Theorem 3-19-(ix) ist $VAN(\mathfrak{H}^1) \subseteq VAN(\mathfrak{H}')$. Mit I.V. gilt dann, dass es ein $\mathfrak{H}^2 \in RGS\backslash\{\emptyset\}$ gibt, so dass:

a) $K(\mathfrak{H}), K(\mathfrak{H}^1) \in VER(\mathfrak{H}^2)$ und
b) $VAN(\mathfrak{H}^2) \subseteq VAN(\mathfrak{H}) \cup VAN(\mathfrak{H}^1) \subseteq VAN(\mathfrak{H}) \cup VAN(\mathfrak{H}')$.

Folgende Sequenzen seien nun definiert, wobei $\alpha \in KONST\backslash TTSEQ(\mathfrak{H}^2)$:

$$
\begin{array}{llllll}
\mathfrak{H}^3 & = & \mathfrak{H}^2 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), & \ulcorner\text{Sei } A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))})\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^4 & = & \mathfrak{H}^3 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), & \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^5 & = & \mathfrak{H}^4 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), & \ulcorner\text{Also } K(\mathfrak{H}')\urcorner)\}.
\end{array}
$$

Mit Theorem 1-12 ist zunächst $K(\mathfrak{H}^3) \notin \mathrm{FSATZ}$ und daher $\mathfrak{H}^3 \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^2) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^2) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^2)$. Mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11 ist außerdem $K(\mathfrak{H}^4)$ keine Negation oder Subjunktion und daher $\mathfrak{H}^4 \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^3) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^3)$. Wäre $A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))}) = \ulcorner\alpha = \alpha\urcorner$, dann wäre $\alpha \in \mathrm{TT}(A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))})) \subseteq \mathrm{TT}(K(\mathfrak{H}^1)) \subseteq \mathrm{TTFM}(\mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2)) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^2)$, was der Annahme über α widerspricht. Also $\mathfrak{H}^4 \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^3) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^3) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^3)$. Wäre $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^4) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^4) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^4)$, dann wäre $\alpha \in \mathrm{TT}(A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))})) \cup \mathrm{TT}(K(\mathfrak{H}')) \subseteq \mathrm{TT}(K(\mathfrak{H}^1)) \subseteq \mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^2)$, was wieder der Annahme über α widerspricht. Also $\mathfrak{H}^5 \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^4) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^4) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^4)$.

Hingegen ist $\mathfrak{H}^3 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}^2)$ und damit $\mathfrak{H}^3 \in \mathrm{RGS}$ und mit Theorem 3-15-(vi) $K(\mathfrak{H})$, $K(\mathfrak{H}^1)$, $A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))}) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2) \cup \{A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))})\} = \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$ und mit Theorem 3-15-(viii) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^2) \cup \{A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))})\} \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$. Sodann ist $\mathfrak{H}^4 \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}^3)$ und damit $\mathfrak{H}^4 \in \mathrm{RGS}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$ und $K(\mathfrak{H})$, $K(\mathfrak{H}^1)$, $A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))}) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^4)$. Wegen $K(\mathfrak{H}^1) = \ulcorner A(\mathfrak{H}'_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}')))} \rightarrow K(\mathfrak{H}')\urcorner$ ist $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. Mit Theorem 3-25 gilt sodann $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^5) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Also } K(\mathfrak{H}')\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^5) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}')$ und $K(\mathfrak{H}) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^5)$ und mit Theorem 2-82 $K(\mathfrak{H}') = K(\mathfrak{H}^5) \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^5)$ und $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. $\mathfrak{H}^5$ ist damit das gesuchte RGS-Element. ■

4.2 Eigenschaften der deduktiven Konsequenzschaft

Nun werden übliche Theoreme zur deduktiven Konsequenzschaft etabliert, wobei insbesondere auch gezeigt wird, dass diese reflexiv (Theorem 4-15), monoton (Theorem 4-16), unter Einführung und Beseitigung der logischen Operatoren abgeschlossen (Theorem 4-18) und transitiv (Theorem 4-19) ist.

Theorem 4-15. *Erweiterte Reflexivität (AR)*
Wenn $X \subseteq$ GFORM und A $\in X$, dann $X \vdash$ A.

Beweis: Sei $X \subseteq$ GFORM und A $\in X$. Dann ist A $\in$ GFORM und nach Definition 3-1 ist {(0, ⌜Sei A⌝)} $\in$ AF(∅) $\subseteq$ RGS\{∅} und es gilt, dass A = K({(0, ⌜Sei A⌝)}) und VAN({(0, ⌜Sei A⌝)}) = {A} $\subseteq X$. Also mit Theorem 3-12 $X \vdash$ A. ■

Theorem 4-16. *Monotonie*
Wenn $X \vdash$ B und $X \subseteq Y \subseteq$ GFORM, dann $Y \vdash$ B.

Beweis: Sei $X \vdash$ B und $X \subseteq Y \subseteq$ GFORM. Dann gibt es mit Theorem 3-12 ein $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, so dass VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$ und K($\mathfrak{H}$) = B. Dann ist VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq Y$ und damit $Y \vdash$ B. ■

Theorem 4-17. *Principium non contradictionis*
Wenn $X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM, dann $X \vdash$ ⌜$\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)$⌝.

Beweis: Sei $X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM. Sei nun $\mathfrak{H}$ die folgende Sequenz:

0	Sei	$\Gamma \wedge \neg\Gamma$
1	Also	Γ
2	Also	$\neg\Gamma$
3	Also	$\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)$

Dann ist nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}\restriction 1 \in$ AF(∅) $\subseteq$ RGS\{∅} und mit Theorem 3-15 ist VERS($\mathfrak{H}\restriction 1$) ={(0, ⌜Sei $\Gamma \wedge \neg\Gamma$⌝)} = $\mathfrak{H}\restriction 1$ und VER($\mathfrak{H}\restriction 1$) = {⌜$\Gamma \wedge \neg\Gamma$⌝} und VANS($\mathfrak{H}\restriction 1$) = {(0, ⌜Sei $\Gamma \wedge \neg\Gamma$⌝)}und VAN($\mathfrak{H}\restriction 1$) = {⌜$\Gamma \wedge \neg\Gamma$⌝}. Dann ist nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}\restriction 2 \in$ KBF($\mathfrak{H}\restriction 1$) $\subseteq$ RGS\{∅}. Da nach Theorem 1-8 ⌜$\Gamma \wedge \neg\Gamma$⌝ $\notin$ TF(Γ), gilt sodann nach Definition 3-2, Definition 3-10 und Definition 3-15, dass $\mathfrak{H}\restriction 2 \notin$ SEF($\mathfrak{H}\restriction 1$) $\cup$ NEF($\mathfrak{H}\restriction 1$)

$\cup$ PBF($\mathfrak{H}\upharpoonright 1$). Mit Theorem 3-25 gilt dann VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) = VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright 1$) $\cup$ {(1, ⌜Also Γ⌝)} = $\mathfrak{H}\upharpoonright 2$. Sodann gilt mit Theorem 3-27-(ii) und -(iii), dass VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) = VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright 1$) und damit VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) = VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright 1$) = {⌜Γ ∧ ¬Γ⌝}.

Wiederum nach Definition 3-5 ist sodann $\mathfrak{H}\upharpoonright 3$ ∈ KBF($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) ⊆ RGS\{∅}. Da nach Theorem 1-8 ⌜Γ ∧ ¬Γ⌝ ∉ TF(Γ) und Γ ≠ ⌜¬Γ⌝, gilt sodann nach Definition 3-2, Definition 3-10 und Definition 3-15, dass $\mathfrak{H}\upharpoonright 3$ ∉ SEF($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) ∪ NEF($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) ∪ PBF($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$). Mit Theorem 3-25 gilt dann wiederum VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$) = VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) ∪ {1, ⌜Also ¬Γ⌝)} = $\mathfrak{H}\upharpoonright 3$ und mit Theorem 3-27-(ii) und -(iii), dass VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$) = VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) und damit VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$) = VAN($\mathfrak{H}\upharpoonright 2$) = {⌜Γ ∧ ¬Γ⌝}. Dann ist 0 = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$))) und 1, 2 ∈ Dom(VERS($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$)) und A($\mathfrak{H}\upharpoonright 3_1$) = Γ und A($\mathfrak{H}\upharpoonright 3_2$) = ⌜¬Γ⌝. Damit ist dann nach Definition 3-10 $\mathfrak{H}$ ∈ NEF($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$) und nach Theorem 3-20 ist VANS($\mathfrak{H}$) = VANS($\mathfrak{H}\upharpoonright 3$)\{(0, ⌜Sei Γ ∧ ¬Γ⌝)} = ∅ und damit auch VAN($\mathfrak{H}$) = ∅. Damit gilt insgesamt: $\mathfrak{H}$ ∈ RGS\{∅} und VAN($\mathfrak{H}$) = ∅ und K($\mathfrak{H}$) = ⌜¬(Γ ∧ ¬Γ)⌝. Mit Theorem 3-12 gilt damit ∅ ⊢ ⌜¬(Γ ∧ ¬Γ)⌝ und damit mit Theorem 4-16 X ⊢ ⌜¬(Γ ∧ ¬Γ)⌝. ■

Theorem 4-18. *Abgeschlossenheit unter Einführung und Beseitigung*

Wenn A, B, Γ ∈ GFORM, θ_0, θ_1 ∈ GTERM, ξ ∈ VAR und Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ}, dann:

(i)	Wenn X ⊢ B und A ∈ X, dann X\{A} ⊢ ⌜A → B⌝,	(SE)
(ii)	Wenn X ⊢ A und Y ⊢ ⌜A → B⌝, dann X ∪ Y ⊢ B,	(SB)
(iii)	Wenn X ⊢ A und Y ⊢ B, dann X ∪ Y ⊢ ⌜A ∧ B⌝,	(KE)
(iv)	Wenn X ⊢ ⌜A ∧ B⌝ oder X ⊢ ⌜B ∧ A⌝, dann X ⊢ A,	(KB)
(v)	Wenn X ⊢ ⌜A → B⌝ und Y ⊢ ⌜B → A⌝, dann X ∪ Y ⊢ ⌜A ↔ B⌝,	(BE)
(vi)	Wenn X ⊢ B und A ∈ X und Y ⊢ A und B ∈ Y, dann (X\{A}) ∪ (Y\{B}) ⊢ ⌜A ↔ B⌝,	(BE*)
(vii)	Wenn X ⊢ A und Y ⊢ ⌜A ↔ B⌝ oder Y ⊢ ⌜B ↔ A⌝, dann X ∪ Y ⊢ B,	(BB)
(viii)	Wenn X ⊢ A oder X ⊢ B, dann X ⊢ ⌜A ∨ B⌝,	(AE)
(ix)	Wenn X ⊢ ⌜A ∨ B⌝ und Y ⊢ ⌜A → Γ⌝ und Z ⊢ ⌜B → Γ⌝, dann X ∪ Y ∪ Z ⊢ Γ,	(AB)
(x)	Wenn X ⊢ ⌜A ∨ B⌝ und Y ⊢ Γ und A ∈ Y und Z ⊢ Γ und B ∈ Z, dann X ∪ (Y\{A}) ∪ (Z\{B}) ⊢ Γ,	(AB*)
(xi)	Wenn X ⊢ Γ und Y ⊢ ⌜¬Γ⌝ und A ∈ X ∪ Y, dann (X ∪ Y)\{A} ⊢ ⌜¬A⌝,	(NE)
(xii)	Wenn X ⊢ ⌜¬¬Γ⌝, dann X ⊢ Γ,	(NB)
(xiii)	Wenn X ⊢ [β, ξ, Δ] und β ∉ TTFM(X ∪ {Δ}), dann X ⊢ ⌜⋀ξΔ⌝,	(UE)
(xiv)	Wenn X ⊢ ⌜⋀ξΔ⌝, dann X ⊢ [θ_0, ξ, Δ],	(UB)
(xv)	Wenn X ⊢ [θ_0, ξ, Δ], dann X ⊢ ⌜⋁ξΔ⌝,	(PE)

(xvi) Wenn $X \vdash \ulcorner\forall\xi\Delta\urcorner$ und $Y \vdash \Gamma$ und $[\beta, \xi, \Delta] \in Y$ und $\beta \notin$ TTFM$((Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\}) \cup \{\Delta, \Gamma\})$, dann $X \cup (Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\}) \vdash \Gamma$, (PB)

(xvii) Wenn $X \subseteq$ GFORM, dann $X \vdash \ulcorner\theta_0 = \theta_0\urcorner$, und (IE)

(xviii) Wenn $X \vdash \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und $Y \vdash [\theta_0, \xi, \Delta]$, dann $X \cup Y \vdash [\theta_1, \xi, \Delta]$. (IB)

Beweis: Seien A, B, $\Gamma \in$ GFORM, $\theta_0, \theta_1 \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR und $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$. Es wird zunächst der Fall (i) behandelt, bei dem sich die Prämissenmenge verkleinert. Es folgen die Fälle (ii), (iii), (v), (vii) und (xviii), bei denen zwei Prämissenmengen vereinigt werden. In den Fällen (iv), (viii), (xii), (xiii), (xiv) und (xv) bleibt die Prämissenmenge unverändert. In der Reihenfolge (vi), (ix), (x), (xi), (xvi), (xvii) werden die verbleibenden Sonderfälle bearbeitet.

Zu (i) (SE): Sei $X \vdash$ B und A $\in X$. Dann gibt es nach Theorem 3-12 ein $\mathfrak{H} \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$, so dass K($\mathfrak{H}$) = B und VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$. Dann gibt es mit Theorem 4-2 ein $\mathfrak{H}' \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$, so dass VAN($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$) und K($\mathfrak{H}'$) = K($\mathfrak{H}$) und für alle $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}'$)): Wenn A($\mathfrak{H}'_i$) = A, dann i = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}'$))). Dann gilt mit Theorem 2-82 B = K($\mathfrak{H}'$) $\in$ VER($\mathfrak{H}'$). Sodann lassen sich mit A $\in$ VAN($\mathfrak{H}'$) und A $\notin$ VAN($\mathfrak{H}'$) zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: Sei A $\in$ VAN($\mathfrak{H}'$). Dann ist VANS($\mathfrak{H}'$) $\neq \emptyset$ und es gilt für alle $i \in$ Dom(VANS($\mathfrak{H}'$)): A($\mathfrak{H}'_i$) = A gdw i = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}'$))). Dann ist mit Theorem 3-18 $\mathfrak{H}^+ = \mathfrak{H}'^\frown\{(0, \ulcorner$Also A $\rightarrow$ B$\urcorner)\} \in$ SEF($\mathfrak{H}'$) $\subseteq$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$. Dann gilt mit Theorem 3-22, dass VAN($\mathfrak{H}^+$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}'$)$\setminus\{$A$\}$ $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$)$\setminus\{$A$\}$ $\subseteq X\setminus\{$A$\}$. Damit gilt insgesamt: $\mathfrak{H}^+ \in$ RGS$\setminus\{\emptyset\}$, K($\mathfrak{H}^+$) = $\ulcorner$A $\rightarrow$ B$\urcorner$ und VAN($\mathfrak{H}^+$) $\subseteq X\setminus\{$A$\}$ und damit mit Theorem 3-12 $X\setminus\{$A$\} \vdash \ulcorner$A $\rightarrow$ B$\urcorner$.

Zweiter Fall: Sei nun A $\notin$ VAN($\mathfrak{H}'$). Dann lässt sich $\mathfrak{H}'$ wie folgt zu einem $\mathfrak{H}^4 \in$ SEQ mit $\mathfrak{H}^4\upharpoonright$Dom($\mathfrak{H}'$) = $\mathfrak{H}'$ fortsetzen:

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{H}^1 & = & \mathfrak{H}' & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}'), & \ulcorner\text{Sei A}\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^2 & = & \mathfrak{H}^1 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^1), & \ulcorner\text{Also A} \wedge \text{B}\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^3 & = & \mathfrak{H}^2 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), & \ulcorner\text{Also B}\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^4 & = & \mathfrak{H}^3 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), & \ulcorner\text{Also A} \rightarrow \text{B}\urcorner)\}.
\end{array}$$

Zunächst ist $\mathfrak{H}^4_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')} \in$ ASATZ. Mit Theorem 1-8, Theorem 1-10 und Theorem 1-11 gilt sodann K($\mathfrak{H}^1$) $\neq$ K($\mathfrak{H}^2$) und K($\mathfrak{H}^2$) $\neq$ K($\mathfrak{H}^3$). Weiter gilt, dass K($\mathfrak{H}^2$) weder eine Subjunktion noch eine Negation ist. Sodann gilt mit Theorem 1-8, dass K($\mathfrak{H}^3$) = B $\neq \ulcorner$A $\rightarrow$ (A $\wedge$

B)⌝ und dass A($\mathfrak{H}^3_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')}$) = A ≠ ⌜¬(A ∧ B)⌝ = ⌜¬A($\mathfrak{H}^3_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^1)}$)⌝. Damit gilt mit Theorem 2-42, Definition 2-11, Definition 2-12 und Definition 2-13, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 3$ gilt: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den min(Dom($\mathfrak{A}$)) = Dom($\mathfrak{H}'$). Mit Theorem 2-47 gilt damit für alle k mit $1 \leq k \leq 3$: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}'$) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit ergibt sich auch, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 3$ gilt, dass Dom($\mathfrak{H}'$) = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}^k$))). Mit Theorem 3-19-(i), Theorem 3-20-(i), Theorem 3-21-(i) und Theorem 2-61 gilt dann, dass für alle k mit $2 \leq k \leq 3$ gilt: $\mathfrak{H}^k$ ∉ SEF($\mathfrak{H}^{k-1}$) ∪ NEF($\mathfrak{H}^{k-1}$) ∪ PBF($\mathfrak{H}^{k-1}$).

Hingegen ist *erstens* nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}^1$ ∈ AF($\mathfrak{H}'$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-15 VERS($\mathfrak{H}^1$) = VERS($\mathfrak{H}'$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)} und (Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝) ∈ VANS($\mathfrak{H}'$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)} = VANS($\mathfrak{H}^1$) und B ∈ VER($\mathfrak{H}'$) ⊆ VER($\mathfrak{H}^1$) und A ∈ VER($\mathfrak{H}^1$). Also ist *zweitens* nach Definition 3-4 $\mathfrak{H}^2$ ∈ KEF($\mathfrak{H}^1$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^2$) = VERS($\mathfrak{H}^1$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}^1$), ⌜Also A ∧ B⌝)}. Damit gilt (Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝) ∈ VANS($\mathfrak{H}^1$) = VANS($\mathfrak{H}^2$) und ⌜A ∧ B⌝ ∈ VER($\mathfrak{H}^2$). Also ist *drittens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^3$ ∈ KBF($\mathfrak{H}^2$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-25 VERS($\mathfrak{H}^3$) = VERS($\mathfrak{H}^2$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}^2$), ⌜Also B⌝)}. Damit gilt Dom($\mathfrak{H}'$) ∈ Dom($\mathfrak{H}^3$) und A($\mathfrak{H}^3_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}')}$) = A und (Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝) ∈ VANS($\mathfrak{H}^2$) = VANS($\mathfrak{H}^3$) und A($\mathfrak{H}^3_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3)-1}$) = B und es gibt kein l mit Dom($\mathfrak{H}'$) < l ≤ Dom($\mathfrak{H}^3$)-1, so dass (l, $\mathfrak{H}^3_l$) ∈ VANS($\mathfrak{H}^3$). Damit ist nach Definition 3-2 $\mathfrak{H}^4$ ∈ SEF($\mathfrak{H}^3$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-19-(iv) und -(v) VANS($\mathfrak{H}^4$) = VANS($\mathfrak{H}^3$)\{(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}^3$))), $\mathfrak{H}^4_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)))}$)} = VANS($\mathfrak{H}^3$)\{(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)} = VANS($\mathfrak{H}^1$)\{(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)} = (VANS($\mathfrak{H}'$) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)})\{(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)} = VANS($\mathfrak{H}'$)\{(Dom($\mathfrak{H}'$), ⌜Sei A⌝)} ⊆ VANS($\mathfrak{H}'$). Mit Theorem 2-75 ist dann VAN($\mathfrak{H}^4$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}'$) und wegen A ∉ VAN($\mathfrak{H}'$) und VAN($\mathfrak{H}'$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$) ⊆ X dann auch VAN($\mathfrak{H}^4$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$)\{A} ⊆ X\{A}. Da K($\mathfrak{H}^4$) = ⌜A → B⌝, gilt mit Theorem 3-12 X\{A} ⊢ ⌜A → B⌝.

Zu (ii) (SB), (iii) (KE), (v) (BE), (vii) (BB), (xviii) (IB): (ii) wird exemplarisch gezeigt. Klauseln (iii), (v), (vii) und (xviii) ergeben sich analog. Sei für (ii) X ⊢ A und Y ⊢ ⌜A → B⌝. Dann gibt es nach Theorem 3-12 $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ ∈ RGS\{∅}, so dass VAN($\mathfrak{H}$) ⊆ X und K($\mathfrak{H}$) = A und VAN($\mathfrak{H}'$) ⊆ Y und K($\mathfrak{H}'$) = ⌜A → B⌝. Mit Theorem 4-14 gibt es dann ein $\mathfrak{H}^*$ ∈ RGS\{∅}, so dass A, ⌜A → B⌝ ∈ VER($\mathfrak{H}^*$) und VAN($\mathfrak{H}^*$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$) ∪ VAN($\mathfrak{H}'$) ⊆ X ∪ Y. Nach Definition 3-3 ist dann $\mathfrak{H}^+$ = $\mathfrak{H}^*$⁀{(0, ⌜Also B⌝)} ∈ SBF($\mathfrak{H}^*$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-27-(v) ist VAN($\mathfrak{H}^+$) $\subseteq$ VAN($\mathfrak{H}$*) $\subseteq X \cup Y$ und es ist K($\mathfrak{H}^+$) = B. Also gilt mit Theorem 3-12: $X \cup Y \vdash$ B.

Zu (iv) (KB), (viii) (AE), (xii) (NB), (xiii) (UE), (xiv) (UB), (xv) (PE): (iv) wird exemplarisch gezeigt. Klauseln (viii), (xii), (xiii), (xiv) und (xv) ergeben sich analog. Sei für (iv) $X \vdash$ ⌜A ∧ B⌝ oder $X \vdash$ ⌜B ∧ A⌝. Sei nun $X \vdash$ ⌜A ∧ B⌝. Dann gibt es nach Theorem 3-12 $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, so dass VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$ und K($\mathfrak{H}$) = ⌜A ∧ B⌝. Dann ist mit Theorem 2-82 ⌜A ∧ B⌝ ∈ VER($\mathfrak{H}$) und daher nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}'$ = $\mathfrak{H}$⁀{(0, ⌜Also A⌝)} ∈ KBF($\mathfrak{H}$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-27-(v) ist VAN($\mathfrak{H}'$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$) ⊆ X und es ist K($\mathfrak{H}'$) = A. Also gilt wiederum nach Theorem 3-12: $X \vdash$ A. Für den Fall, dass $X \vdash$ ⌜B ∧ A⌝ zeigt man analog, dass dann ebenfalls $X \vdash$ A gilt.

Zu (vi:)(BE)*: Sei $X \vdash$ B und A ∈ X und $Y \vdash$ A und B ∈ Y. Dann gilt mit (i): X\{A} $\vdash$ ⌜A → B⌝ und Y\{B} $\vdash$ ⌜B → A⌝. Dann gilt mit (v): (X\{A}) ∪ (Y\{B}) $\vdash$ ⌜A ↔ B⌝.

Zu (ix) (AB): Sei $X \vdash$ ⌜A ∨ B⌝ und $Y \vdash$ ⌜A → Γ⌝ und $Z \vdash$ ⌜B → Γ⌝. Dann ergibt sich mit zweifacher Anwendung von (iii): $X \cup Y \cup Z \vdash$ ⌜(A ∨ B) ∧ ((A → Γ) ∧ (B → Γ))⌝. Dann gibt es mit Theorem 3-12 $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, so dass VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X \cup Y \cup Z$ und K($\mathfrak{H}$) = ⌜(A ∨ B) ∧ ((A → Γ) ∧ (B → Γ))⌝. Nun gibt es ein α ∈ KONST\TTSEQ($\mathfrak{H}$). Damit lässt sich $\mathfrak{H}$ wie folgt zu einem $\mathfrak{H}^6$ ∈ SEQ mit $\mathfrak{H}^6$↾Dom($\mathfrak{H}$) = $\mathfrak{H}$ fortsetzen:

$\mathfrak{H}^1$	=	$\mathfrak{H}$	∪	{(Dom($\mathfrak{H}$),	⌜Sei α = α⌝)}
$\mathfrak{H}^2$	=	$\mathfrak{H}^1$	∪	{(Dom($\mathfrak{H}^1$),	⌜Also A ∨ B⌝)}
$\mathfrak{H}^3$	=	$\mathfrak{H}^2$	∪	{(Dom($\mathfrak{H}^2$),	⌜Also (A → Γ) ∧ (B → Γ)⌝)}
$\mathfrak{H}^4$	=	$\mathfrak{H}^3$	∪	{(Dom($\mathfrak{H}^3$),	⌜Also A → Γ⌝)}
$\mathfrak{H}^5$	=	$\mathfrak{H}^4$	∪	{(Dom($\mathfrak{H}^4$),	⌜Also B → Γ⌝)}
$\mathfrak{H}^6$	=	$\mathfrak{H}^5$	∪	{(Dom($\mathfrak{H}^5$),	⌜Also Γ⌝)}.

Zunächst ist $\mathfrak{H}^6{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}$ ∈ ASATZ. Sodann gilt mit α ∈ KONST\TTSEQ($\mathfrak{H}$) auch α ∉ TTFM({A, B, Γ}) und damit insgesamt, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 6$ gilt: Wenn i ∈ Dom($\mathfrak{H}^k$), dann: α ∈ TT($\mathfrak{H}^k{}_i$) gdw i = Dom($\mathfrak{H}$). Sodann gilt für alle k mit $1 \leq k \leq 6$, dass Dom($\mathfrak{H}$) ∈ Dom(ANS($\mathfrak{H}^k$)). Mit Theorem 4-3 gilt damit, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 6$ gilt: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den min(Dom($\mathfrak{A}$)) ≤ Dom($\mathfrak{H}$) ≤ max(Dom($\mathfrak{A}$)). Damit ergibt sich auch, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 6$ gilt, dass Dom($\mathfrak{H}$) = max(Dom(VANS($\mathfrak{H}^k$))). Mit Theorem 3-19-(i), Theorem 3-20-(i), Theorem 3-21-(i) und

Theorem 2-61 gilt dann, dass für alle k mit $2 \leq k \leq 6$ gilt: $\mathfrak{H}^k \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^{k\text{-}1}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^{k\text{-}1}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^{k\text{-}1})$.

Hingegen ist *erstens* nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}^1 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-15 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \alpha = \alpha\urcorner)\}$ und $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \alpha = \alpha\urcorner)\}$ und $\ulcorner(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge ((\mathrm{A} \rightarrow \Gamma) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma))\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^1)$. Also ist *zweitens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^2 \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^2) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^1), \ulcorner\text{Also A} \vee \mathrm{B}\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)$, $\ulcorner(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge ((\mathrm{A} \rightarrow \Gamma) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma))\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2)$ und $\ulcorner\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2)$. Also ist *drittens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^3 \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^2) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } (\mathrm{A} \rightarrow \Gamma) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)$, $\ulcorner\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$ und $\ulcorner(\mathrm{A} \rightarrow \Gamma) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$. Also ist *viertens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^4 \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also A} \rightarrow \Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)$, $\ulcorner\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\urcorner$, $\ulcorner(\mathrm{A} \rightarrow \Gamma) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \Gamma)\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^4)$ und $\ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^4)$. Also ist *fünftens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^5) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Also B} \rightarrow \Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)$, $\ulcorner\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\urcorner$, $\ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^5)$ und $\ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^5)$. Schließlich ist *sechstens* nach Definition 3-9 $\mathfrak{H}^6 \in \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}^5) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^6) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^5) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^5), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^6) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } \alpha = \alpha\urcorner)\}$. Damit gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^6) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\}$ und es gilt $\Gamma \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^6)$. Dann gibt es mit Theorem 4-7 ein $\mathfrak{H}^+ \in \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^+) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^6)\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} = (\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \subseteq (X \cup Y \cup Z)\backslash\{\ulcorner\alpha = \alpha\urcorner\} \subseteq X \cup Y \cup Z$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^+) = \Gamma$. Damit gilt dann nach Theorem 3-12 $X \cup Y \cup Z \vdash \Gamma$.

Zu (x) (AB)*: Sei $X \vdash \ulcorner\mathrm{A} \vee \mathrm{B}\urcorner$ und $Y \vdash \Gamma$ und $\mathrm{A} \in Y$ und $Z \vdash \Gamma$ und $\mathrm{B} \in Z$. Dann gilt mit (i): $Y\backslash\{\mathrm{A}\} \vdash \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$ und $Z\backslash\{\mathrm{B}\} \vdash \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}\urcorner$. Dann gilt mit (ix): $X \cup (Y\backslash\{\mathrm{A}\}) \cup (Z\backslash\{\mathrm{B}\}) \vdash \Gamma$.

Zu (xi) (NE): Sei $X \vdash \Gamma$ und $Y \vdash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $\mathrm{A} \in X \cup Y$. Ist $\mathrm{A} = \ulcorner\Delta' \wedge \neg\Delta'\urcorner$ für ein $\Delta' \in \mathrm{GFORM}$, dann gilt mit Theorem 4-17 direkt: $(X \cup Y)\backslash\{\mathrm{A}\} \vdash \ulcorner\neg(\Delta' \wedge \neg\Delta')\urcorner = \ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner$. Sei nun $\mathrm{A} \neq \ulcorner\Delta' \wedge \neg\Delta'\urcorner$ für alle Δ'. Mit (iii) ergibt sich zunächst: $X \cup Y \vdash \ulcorner\Gamma \wedge \neg\Gamma\urcorner$. Sodann gilt wiederum mit Theorem 4-17: $X \cup Y \vdash \ulcorner\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner$ und damit mit (iii): $X \cup$

$Y \vdash \ulcorner(\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner$. Mit (i) ergibt sich sodann: $(X \cup Y)\setminus\{A\} \vdash \ulcorner A \rightarrow ((\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma))\urcorner$. Damit gibt es mit Theorem 3-12 ein $\mathfrak{H} \in \text{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\text{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq (X \cup Y)\setminus\{A\}$ und $\text{K}(\mathfrak{H}) = \ulcorner A \rightarrow ((\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma))\urcorner$. Dann lässt sich $\mathfrak{H}$ wie folgt zu einem $\mathfrak{H}^5 \in \text{SEQ}$ mit $\mathfrak{H}^5\upharpoonright\text{Dom}(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}$ fortsetzen:

$$
\begin{array}{lllll}
\mathfrak{H}^1 & = & \mathfrak{H} & \cup & \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } A\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^2 & = & \mathfrak{H}^1 & \cup & \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^1), \ulcorner\text{Also } (\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^3 & = & \mathfrak{H}^2 & \cup & \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } \Gamma \wedge \neg\Gamma\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^4 & = & \mathfrak{H}^3 & \cup & \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^5 & = & \mathfrak{H}^4 & \cup & \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Also } \neg A\urcorner)\}.
\end{array}
$$

Zunächst ist $\mathfrak{H}^5{}_{\text{Dom}(\mathfrak{H})} \in \text{ASATZ}$. Nach Annahme ist sodann $\text{K}(\mathfrak{H}^1) = A \neq \text{K}(\mathfrak{H}^2)$. Mit Theorem 1-8, Theorem 1-10 und Theorem 1-11 ist sodann $\text{K}(\mathfrak{H}^2) \neq \text{K}(\mathfrak{H}^3)$ und $\text{K}(\mathfrak{H}^3) \neq \text{K}(\mathfrak{H}^4)$. Zudem sind $\text{K}(\mathfrak{H}^2)$ und $\text{K}(\mathfrak{H}^3)$ weder Subjunktionen noch Negationen und $\text{K}(\mathfrak{H}^4)$ ist keine Subjunktion und nach Annahme ist $\text{K}(\mathfrak{H}^4) = \ulcorner\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner \neq \ulcorner\neg A\urcorner$. Damit gilt mit Theorem 2-42, Definition 2-11, Definition 2-12 und Definition 2-13, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 4$ gilt: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den $\min(\text{Dom}(\mathfrak{A})) = \text{Dom}(\mathfrak{H})$. Mit Theorem 2-47 gilt damit für alle k mit $1 \leq k \leq 4$: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den $\min(\text{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \text{Dom}(\mathfrak{H}) \leq \max(\text{Dom}(\mathfrak{A}))$. Damit ergibt sich auch, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 4$ gilt, dass $\text{Dom}(\mathfrak{H}) = \max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}^k)))$. Mit Theorem 3-19-(i), Theorem 3-20-(i), Theorem 3-21-(i) und Theorem 2-61 gilt dann für alle k mit $2 \leq k \leq 4$: $\mathfrak{H}^k \notin \text{SEF}(\mathfrak{H}^{k-1}) \cup \text{NEF}(\mathfrak{H}^{k-1}) \cup \text{PBF}(\mathfrak{H}^{k-1})$.

Hingegen ist *erstens* nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}^1 \in \text{AF}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-15 $\text{VERS}(\mathfrak{H}^1) = \text{VERS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } A\urcorner)\}$ und $\text{VANS}(\mathfrak{H}^1) = \text{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } A\urcorner)\}$, $\ulcorner A \rightarrow ((\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma))\urcorner \in \text{VER}(\mathfrak{H}) \subseteq \text{VER}(\mathfrak{H}^1)$ und $A \in \text{VER}(\mathfrak{H}^1)$. Also ist *zweitens* nach Definition 3-3 $\mathfrak{H}^2 \in \text{SBF}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \text{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\text{VERS}(\mathfrak{H}^2) = \text{VERS}(\mathfrak{H}^1) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^1), \ulcorner\text{Also } (\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner)\}$. Damit gilt $\text{VANS}(\mathfrak{H}^2) = \text{VANS}(\mathfrak{H}^1)$ und $\ulcorner(\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner \in \text{VER}(\mathfrak{H}^2)$. Also ist *drittens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^3 \in \text{KBF}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \text{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\text{VERS}(\mathfrak{H}^3) = \text{VERS}(\mathfrak{H}^2) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } \Gamma \wedge \neg\Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt $\text{VANS}(\mathfrak{H}^3) = \text{VANS}(\mathfrak{H}^2)$, $\ulcorner(\Gamma \wedge \neg\Gamma) \wedge \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner \in \text{VER}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \text{VER}(\mathfrak{H}^3)$ und $\ulcorner\Gamma \wedge \neg\Gamma\urcorner \in \text{VER}(\mathfrak{H}^3)$. Also ist *viertens* nach Definition 3-5 $\mathfrak{H}^4 \in \text{KBF}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \text{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\text{VERS}(\mathfrak{H}^4) = \text{VERS}(\mathfrak{H}^3) \cup \{(\text{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner)\}$. Damit gilt

$\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } \Gamma \wedge \neg\Gamma\urcorner)$, $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } \neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4)$ sowie $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei A}\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)$.

Insgesamt gilt $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2) \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)$, wobei $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2)$, $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^4{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) = \mathrm{A}$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \mathfrak{H}^4{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})}) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)$, $\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2)}) = \ulcorner\Gamma \wedge \neg\Gamma\urcorner$ und $\mathrm{A}(\mathfrak{H}^4{}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)\text{-}1}) = \ulcorner\neg(\Gamma \wedge \neg\Gamma)\urcorner$, $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), \mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2)}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4)$ und es gibt kein l mit $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}) < l \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)\text{-}1$, so dass $(l, \mathfrak{H}^4{}_l) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)$. Damit ist dann schließlich *fünftens* nach Definition 3-10 $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^4) \subseteq \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-20-(iv) und -(v) $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^5) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)\setminus\{(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4))), \mathfrak{H}^5{}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)))})\} = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)\setminus\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei A}\urcorner)\} = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1)\setminus\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei A}\urcorner)\} = (\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei A}\urcorner)\})\setminus\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei A}\urcorner)\} = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})\setminus\{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei A}\urcorner)\} \subseteq \mathrm{VANS}(\mathfrak{H})$. Mit Theorem 2-75 ist dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^5) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq (X \cup Y)\setminus\{\mathrm{A}\}$. Da $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^5) = \ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner$, gilt mit Theorem 3-12 $(X \cup Y)\setminus\{\mathrm{A}\} \vdash \ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner$.

Zu (xvi) (PB): Sei $X \vdash \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $Y \vdash \Gamma$ und $[\beta, \xi, \Delta] \in Y$ und $\beta \notin \mathrm{TTFM}((Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\}) \cup \{\Delta, \Gamma\})$. Dann gilt mit (i): $Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\} \vdash \ulcorner[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma\urcorner$. Sodann gilt mit $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$: $[\beta, \xi, \Gamma] = \Gamma$. Damit ist $[\beta, \xi, \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner] = \ulcorner[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow [\beta, \xi, \Gamma]\urcorner = \ulcorner[\beta, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma\urcorner$ und damit gilt $Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\} \vdash [\beta, \xi, \ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner]$. Sodann ergibt sich mit $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, \Gamma\})$, dass $\beta \notin \mathrm{TT}(\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner)$. Sodann ist mit $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$ und $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$ auch $\mathrm{FV}(\ulcorner\Delta \rightarrow \Gamma\urcorner) \subseteq \{\xi\}$. Da nach Annahme auch $\beta \notin \mathrm{TTFM}(Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\})$, gilt dann mit (xv): $Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\} \vdash \ulcorner\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma)\urcorner$. Mit (iii) gilt $X \cup (Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\}) \vdash \ulcorner\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge \bigvee\xi\Delta\urcorner$.

Dann gibt es nach Theorem 3-12 ein $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq X \cup (Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\})$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \ulcorner\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma) \wedge \bigvee\xi\Delta\urcorner$. Mit Theorem 4-5 gibt es dann ein $\mathfrak{H}^* \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, so dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}^*) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq X \cup (Y\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\})$ und $\ulcorner\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma)\urcorner, \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*)$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}^*) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$. Mit Theorem 2-82 ist genauer $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1, \ulcorner\Xi \bigvee\xi\Delta\urcorner) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*)$ für ein $\Xi \in \mathrm{PERF}$. Nun gibt es ein $\beta^* \in \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^*)$ und ein $\alpha \in \mathrm{KONST}\setminus\mathrm{TTSEQ}(\mathfrak{H}^*)$. Damit lässt sich $\mathfrak{H}^*$ wie folgt zu $\mathfrak{H}^5 \in \mathrm{SEQ}$ mit $\mathfrak{H}^5\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) = \mathfrak{H}^*$ fortsetzen:

$$\begin{array}{lllll}
\mathfrak{H}^1 & = \mathfrak{H}^* & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*), & \ulcorner\text{Sei } [\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^2 & = \mathfrak{H}^1 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^1), & \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\} \\
\mathfrak{H}^3 & = \mathfrak{H}^2 & \cup & \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), & \ulcorner\text{Also } [\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma\urcorner)\}
\end{array}$$

$$\mathfrak{H}^4 = \mathfrak{H}^3 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$$
$$\mathfrak{H}^5 = \mathfrak{H}^4 \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}.$$

Zunächst ist $\mathfrak{H}^5_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)} \in$ ASATZ. Sodann gilt mit $\alpha \in$ KONST\TTSEQ($\mathfrak{H}^*$) auch $\alpha \notin$ TTFM($\{[\beta^*, \xi, \Delta], \Gamma\}$) und damit, dass $K(\mathfrak{H}^1) \neq K(\mathfrak{H}^2)$, $K(\mathfrak{H}^2) \neq K(\mathfrak{H}^3)$ und $K(\mathfrak{H}^3) \neq \ulcorner[\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow K(\mathfrak{H}^2)\urcorner$. Mit Theorem 1-8 ist zudem $K(\mathfrak{H}^3) \neq K(\mathfrak{H}^4)$. Außerdem gilt mit Theorem 1-10 und Theorem 1-11, dass $K(\mathfrak{H}^2)$ keine Subjunktion und $K(\mathfrak{H}^2)$ und $K(\mathfrak{H}^3)$ keine Negationen sind. Zudem ist $K(\mathfrak{H}^1) = \ulcorner[\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner \neq \ulcorner\neg([\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma)\urcorner = \ulcorner\neg K(\mathfrak{H}^3)\urcorner$ und $K(\mathfrak{H}^1) = \Gamma \neq \ulcorner[\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow ([\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma)\urcorner = \ulcorner K(\mathfrak{H}^1) \rightarrow K(\mathfrak{H}^3)\urcorner$. Damit gilt mit Theorem 2-42, Definition 2-11, Definition 2-12 und Definition 2-13, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 4$ gilt: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) = \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)$. Mit Theorem 2-47 gilt damit für alle k mit $1 \leq k \leq 4$: Es gibt keinen geschlossenen Abschnitt $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{H}^k$ für den $\min(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A})) \leq \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathfrak{A}))$. Damit ergibt sich auch, dass für alle k mit $1 \leq k \leq 4$ gilt, dass $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*) = \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^k)))$. Mit Theorem 3-19-(i), Theorem 3-20-(i), Theorem 3-21-(i) und Theorem 2-61 gilt dann für alle k mit $2 \leq k \leq 4$: $\mathfrak{H}^k \notin \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}^{k-1}) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}^{k-1}) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}^{k-1})$.

Hingegen ist *erstens* nach Definition 3-1 $\mathfrak{H}^1 \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-15 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^*) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*), \ulcorner\text{Sei } [\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner)\}$ und $\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^*) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}), \ulcorner\text{Sei } [\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner)\}$, $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1, \mathfrak{H}^5_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^1)$, wobei $A(\mathfrak{H}^5_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$, und $\ulcorner\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma)\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^*) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^1)$ und $[\beta^*, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^1)$. Sodann ist *zweitens* nach Definition 3-16 $\mathfrak{H}^2 \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^2) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^1) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^1), \ulcorner\text{Also } \alpha = \alpha\urcorner)\}$. Damit gilt $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*), \ulcorner\text{Sei } [\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^1) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2)$ und $\ulcorner\bigwedge\xi(\Delta \rightarrow \Gamma)\urcorner, [\beta^*, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^1) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2)$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1, \mathfrak{H}^5_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^2)$. Also ist *drittens* nach Definition 3-13 $\mathfrak{H}^3 \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^2) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^2), \ulcorner\text{Also } [\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*), \ulcorner\text{Sei } [\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^2) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3)$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1, \mathfrak{H}^5_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3)$ und $[\beta^*, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^2) \subseteq \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$ und $\ulcorner[\beta^*, \xi, \Delta] \rightarrow \Gamma\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}^3)$. Also ist *viertens* nach Definition 3-3 $\mathfrak{H}^4 \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}^3) \subseteq \mathrm{RGS}\backslash\{\emptyset\}$ und mit Theorem 3-25 $\mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4) = \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^3) \cup \{(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^3), \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner)\}$. Damit gilt $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*), \ulcorner\text{Sei } [\beta^*, \xi, \Delta]\urcorner) \in \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^3) = \mathrm{VANS}(\mathfrak{H}^4)$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1, \mathfrak{H}^5_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}), (\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{+}3, \ulcorner\text{Also } \Gamma\urcorner) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}^4)$.

Insgesamt gilt damit $\beta^* \in \mathrm{PAR}$, $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$, $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$ $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1 \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^4)$, $A(\mathfrak{H}^4_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1, \mathfrak{H}^4_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H}^*)\text{-}1}) \in$

VERS($\mathfrak{H}^4$), A($\mathfrak{H}^4_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^*)}$) = [β*, ξ, Δ] und (Dom($\mathfrak{H}$*), $\mathfrak{H}^4_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^*)}$) ∈ VANS($\mathfrak{H}^4$), A($\mathfrak{H}^4_{\text{Dom}(\mathfrak{H}^4)\text{-}1}$) = Γ, β* ∉ TTFM({Δ, Γ}) und es gibt kein j ≤ Dom($\mathfrak{H}$*)-1, so dass β* ∈ TT($\mathfrak{H}^4_j$) und es gibt kein m mit Dom($\mathfrak{H}$*) < m ≤ Dom($\mathfrak{H}^4$)-1, so dass (m, $\mathfrak{H}^4_m$) ∈ VANS($\mathfrak{H}^4$). Schließlich ist damit nach Definition 3-15 $\mathfrak{H}^5$ ∈ PBF($\mathfrak{H}^4$) ⊆ RGS\{∅} und mit Theorem 3-21-(iv) und -(v) VANS($\mathfrak{H}^5$) = VANS($\mathfrak{H}^4$)\{(max(Dom(VANS($\mathfrak{H}^4$))), $\mathfrak{H}^5_{\max(\text{Dom}(\text{VANS}(\mathfrak{H}^4)))}$)} = VANS($\mathfrak{H}^4$)\{(Dom($\mathfrak{H}$*), ⌜Sei [β*, ξ, Δ]⌝)} = VANS($\mathfrak{H}^1$)\{(Dom($\mathfrak{H}$*), ⌜Sei [β*, ξ, Δ]⌝)} = (VANS($\mathfrak{H}$*) ∪ {(Dom($\mathfrak{H}$*), ⌜Sei [β*, ξ, Δ]⌝)})\{(Dom($\mathfrak{H}$*), ⌜Sei [β*, ξ, Δ]⌝)} = VANS($\mathfrak{H}$*)\{(Dom($\mathfrak{H}$*), ⌜Sei [β*, ξ, Δ]⌝)} ⊆ VANS($\mathfrak{H}$*). Mit Theorem 2-75 ist dann VAN($\mathfrak{H}^5$) ⊆ VAN($\mathfrak{H}$*) ⊆ X ∪ (Y\{[β, ξ, Δ]}). Da K($\mathfrak{H}^5$) = Γ, gilt mit Theorem 3-12 X ∪ (Y\{[β, ξ, Δ]}) ⊢ Γ.

Zu (xvii) (IE): Sei X ⊆ GFORM. Dann ist nach Definition 3-16 {(0, ⌜Also $\theta_0 = \theta_0$⌝)} ∈ IE(∅) ⊆ RGS\{∅} und es ist VANS({(0, ⌜Also $\theta_0 = \theta_0$⌝)}) = ∅ und somit nach Definition 2-31 VAN({(0, ⌜Also $\theta_0 = \theta_0$⌝)}) = ∅ und es ist K({(0, ⌜Also $\theta_0 = \theta_0$⌝)}) = ⌜$\theta_0 = \theta_0$⌝ und damit nach Theorem 3-12 ∅ ⊢ ⌜$\theta_0 = \theta_0$⌝. Mit Theorem 4-16 gilt X ⊢ ⌜$\theta_0 = \theta_0$⌝. ■

Theorem 4-19. *Transitivität*
Wenn X $_{\text{M}}$⊢ Y und Y ⊢ B, dann X ⊢ B.

Beweis: Zunächst wird durch Induktion über |Y| gezeigt, dass die Behauptung für alle endlichen Y gilt: Gelte die Behauptung für alle k < |Y| ∈ ℕ. Sei |Y| = 0. Sei nun X $_{\text{M}}$⊢ Y und Y ⊢ B. Dann ist Y = ∅ ⊆ X ⊆ GFORM. Mit Theorem 4-16 folgt X ⊢ B.

Sei nun 0 < |Y| und gelte X $_{\text{M}}$⊢ Y und Y ⊢ B. Dann ist nach Definition 3-25 X ∪ Y ⊆ GFORM und für alle Δ ∈ Y gilt: X ⊢ Δ. Da |Y| ≠ 0, gibt es ein A ∈ Y. Dann gilt mit Theorem 4-18-(i), dass |Y\{A}| ⊢ ⌜A → B⌝. Dann gilt |Y\{A}| < |Y|. Nach I.V. gilt damit X ⊢ ⌜A → B⌝ und, da A ∈ Y, gilt auch X ⊢ A. Mit Theorem 4-18-(ii) gilt damit X ⊢ B.

Damit, dass die Behauptung für endliches Y gilt, gilt sie dann auch für alle: Gelte nämlich X $_{\text{M}}$⊢ Y und Y ⊢ B. Dann ist nach Definition 3-25 X ∪ Y ⊆ GFORM und für alle Δ ∈ Y gilt: X ⊢ Δ. Gelte nun Y ⊢ B. Dann gibt es mit Theorem 3-12 $\mathfrak{H}$ ∈ RGS\{∅}, so dass VAN($\mathfrak{H}$) ⊆ Y und K($\mathfrak{H}$) = B. Dann ist nach Theorem 3-9 VAN($\mathfrak{H}$) endlich und VAN($\mathfrak{H}$) ⊆ GFORM. Dann gilt wieder nach Theorem 3-12, dass VAN($\mathfrak{H}$) ⊢ B. Sodann gilt mit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \subseteq Y$, dass für alle $\Gamma \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ gilt: $X \vdash \Gamma$ und damit $X \;_{\mathrm{M}}\!\vdash \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Damit gilt dann $X \vdash$ B. ■

Theorem 4-20. *Cut*
Wenn $X \cup \{\mathrm{B}\} \vdash$ A und $Y \vdash$ B, dann $X \cup Y \vdash$ A.

Beweis: Gelte $X \cup \{\mathrm{B}\} \vdash$ A und $Y \vdash$ B. Dann gilt mit Theorem 4-18-(i): $X\backslash\{\mathrm{B}\} \vdash \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}\urcorner$ und damit mit Theorem 4-16, dass $X \vdash \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}\urcorner$. Damit gilt mit Theorem 4-18-(ii): $X \cup Y \vdash$ A. ■

Theorem 4-21. *Deduktionstheorem und Umkehrung*
$X \cup \{\mathrm{A}\} \vdash$ B gdw $X \vdash \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$.

Beweis: Gelte zunächst $X \cup \{\mathrm{A}\} \vdash$ B. Dann gilt mit Theorem 4-18-(i): $X\backslash\{\mathrm{A}\} \vdash \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$ und damit mit Theorem 4-16, dass $X \vdash \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$. Gelte nun umgekehrt $X \vdash \ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner$. Dann ist nach Definition 3-21 und Theorem 3-9 $\ulcorner\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}\urcorner \in$ GFORM und damit auch A $\in$ GFORM. Damit gilt mit Theorem 4-15: $\{\mathrm{A}\} \vdash$ A und somit mit Theorem 4-18-(ii): $X \cup \{\mathrm{A}\} \vdash$ B. ■

Theorem 4-22. *Inkonsistenz und Ableitbarkeit*
$X \vdash$ A gdw $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\}$ ist inkonsistent.

Beweis: (*L-R*): Gelte zunächst $X \vdash$ A. Dann ist mit Definition 3-21 und Theorem 3-9 $X \subseteq$ GFORM und A $\in$ GFORM. Dann ist $\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner \in$ GFORM und damit gilt mit Theorem 4-16, dass $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\} \vdash$ A, und mit Theorem 4-15: $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\} \vdash \ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner$. Damit gilt nach Definition 3-24, dass $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\}$ inkonsistent ist.

(*R-L*): Sei nun $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\}$ inkonsistent. Dann gilt nach Definition 3-24, dass $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\} \subseteq$ GFORM und dass es ein $\Gamma \in$ GFORM gibt, so dass $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\} \vdash \Gamma$ und $X \cup \{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\} \vdash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. Dann gilt mit Theorem 4-18-(xi): $X\backslash\{\ulcorner\neg\mathrm{A}\urcorner\} \vdash \ulcorner\neg\neg\mathrm{A}\urcorner$ und damit mit Theorem 4-16: $X \vdash \ulcorner\neg\neg\mathrm{A}\urcorner$. Daraus folgt mit Theorem 4-18-(xii), dass $X \vdash$ A. ■

Theorem 4-23. *Eine Aussagenmenge ist genau dann inkonsistent, wenn sich alle Aussagen aus ihr ableiten lassen*
X ist inkonsistent gdw für alle Γ ∈ GFORM: $X \vdash \Gamma$.

Beweis: (*L-R*): Sei zunächst X inkonsistent. Dann gilt nach Definition 3-24, dass $X \subseteq$ GFORM und dass es A ∈ GFORM gibt, so dass $X \vdash$ A und $X \vdash$ ⌜¬A⌝. Sei nun Γ ∈ GFORM. Dann ist ⌜¬Γ⌝ ∈ GFORM. Dann gilt mit Theorem 4-16: $X \cup \{$⌜¬Γ⌝$\} \vdash$ A und $X \cup \{$⌜¬Γ⌝$\} \vdash$ ⌜¬A⌝. Damit ist $X \cup \{$⌜¬Γ⌝$\}$ inkonsistent. Damit gilt nach Theorem 4-22: $X \vdash \Gamma$.

(*R-L*): Gelte nun für alle Γ ∈ GFORM, dass $X \vdash \Gamma$. Nun gibt es ein Δ ∈ GFORM. Dann ist auch ⌜¬Δ⌝ ∈ GFORM. Dann gilt also $X \vdash \Delta$ und $X \vdash$ ⌜¬Δ⌝. Dann ist mit Definition 3-21 $X \subseteq$ GFORM und somit gilt insgesamt nach Definition 3-24, dass X inkonsistent ist. ■

Theorem 4-24. *Generalisierungstheorem*
Wenn ξ ∈ VAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ}, α ∈ KONST und $X \vdash$ [α, ξ, Δ], wobei α ∉ TTFM($X \cup \{\Delta\}$), dann $X \vdash$ ⌜⋀ξΔ⌝

Beweis: Sei ξ ∈ VAR, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ}, α ∈ KONST und $X \vdash$ [α, ξ, Δ], wobei α ∉ TTFM($X \cup \{\Delta\}$). Dann gibt nach Theorem 3-12 ein 𝔉 ∈ RGS\{∅}, so dass VAN(𝔉) ⊆ X und K(𝔉) = [α, ξ, Δ]. Sodann gibt es ein β ∈ PAR\TTSEQ(𝔉). Mit Theorem 4-9 gibt es dann ein 𝔉* ∈ RGS\{∅}, so dass:

a) α ∉ TTSEQ(𝔉*),
b) VAN(𝔉) = {[α, β, B] | B ∈ VAN(𝔉*)} und
c) K(𝔉) = [α, β, K(𝔉*)].

Da nun für alle Γ ∈ VAN(𝔉) gilt, dass α ∉ TT(Γ), gilt dann mit b), dass für alle B ∈ VAN(𝔉*) gilt, dass β ∉ TT(B) und damit β ∉ TTFM(VAN(𝔉*)). Wäre nämlich β ∈ TT(Γ) für ein Γ ∈ VAN(𝔉*), dann wäre α ∈ TT([α, β, Γ]) und mit b) wäre [α, β, Γ] ∈ VAN(𝔉) ⊆ X. Damit würde aber im Gegensatz zur Voraussetzung gelten, dass α ∈ TTFM(X). Damit gilt mit b): VAN(𝔉) = {[α, β, B] | B ∈ VAN(𝔉*)} = {B | B ∈ VAN(𝔉*)} = VAN(𝔉*).

Sodann ist mit c) [α, ξ, Δ] = K(𝔖) = [α, β, K(𝔖*)]. Da nach Eingangsannahme und mit a) gilt: α ∉ TT(Δ) ∪ TT(K(𝔖*)) ist dann mit Theorem 1-23 K(𝔖*) = [β, ξ, Δ]. Dann ist β ∉ TT(Δ), denn sonst würde wegen [α, ξ, Δ] = K(𝔖) im Gegensatz zur Wahl von β gelten, dass β ∈ TT(K(𝔖)) ⊆ TTSEQ(𝔖). Damit gilt dann insgesamt, dass 𝔖* ∪ {(Dom(𝔖*), ⌜Also ⋀ξΔ⌝)} ∈ UEF(𝔖*) ⊆ RGS\{∅}. Damit gilt mit Theorem 3-26-(v) VAN(𝔖* ∪ {(Dom(𝔖*), ⌜Also ⋀ξΔ⌝)}) ⊆ VAN(𝔖*) = VAN(𝔖) ⊆ X und Theorem 3-12, dass $X \vdash$ ⌜⋀ξΔ⌝. ■

Theorem 4-25. *Mehrfache IB*
Wenn $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\{\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\}$, $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\} \subseteq$ GTERM, $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\} \subseteq$ VAR, wobei für alle $i, j \in k$ mit $i \neq j$ auch $\xi_i \neq \xi_j$, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$, und $X \vdash [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$ und für alle $i < k$: $X \vdash$ ⌜$\theta_i = \theta'_i$⌝, dann $X \vdash [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$.

Beweis: Durch Induktion über k. Für $k = 1$ ergibt sich die Behauptung mit Theorem 4-18-(xviii). Gelte die Behauptung nun für k und sei $\{\theta_0, \ldots, \theta_k\}$, $\{\theta'_0, \ldots, \theta'_k\} \subseteq$ GTERM, $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\} \subseteq$ VAR, wobei für alle $i, j \in k+1$ mit $i \neq j$ auch $\xi_i \neq \xi_j$, Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$, und $X \vdash [\langle\theta_0, \ldots, \theta_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta]$ und für alle $i < k+1$: $X \vdash$ ⌜$\theta_i = \theta'_i$⌝.

Dann gilt mit Theorem 1-28-(ii), dass $[\langle\theta_0, \ldots, \theta_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta] = [\theta_k, \xi_k, [\langle\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]]$ und damit dass $X \vdash [\theta_k, \xi_k, [\langle\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]]$, wobei mit FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ gilt: FV($[\langle\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]$) ⊆ $\{\xi_k\}$. Dann gilt mit $X \vdash$ ⌜$\theta_k = \theta'_k$⌝ und Theorem 4-18-(xviii), dass $X \vdash [\theta'_k, \xi_k\ [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, \Delta]]$ und damit wieder mit Theorem 1-28-(ii), dass $X \vdash [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}, \theta'_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k\rangle, \Delta]$. Dann gilt mit Theorem 1-29-(ii): $[\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}, \theta'_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}, \xi_k\rangle, \Delta] = [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, [\theta'_k, \xi_k, \Delta]]$ und damit $X \vdash [\langle\theta_0, \ldots, \theta_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, [\theta'_k, \xi_k, \Delta]]$, wobei mit FV(Δ) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_k\}$ gilt: FV($[\theta'_k, \xi_k, \Delta]$) ⊆ $\{\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\}$. Damit gilt dann nach I.V., dass $X \vdash [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{k-1}\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_{k-1}\rangle, [\theta'_k, \xi_k, \Delta]]$ und damit wiederum mit Theorem 1-29-(ii): $X \vdash [\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_k\rangle, \langle\xi_0, \ldots, \xi_k\rangle, \Delta]$. ■

5 Modelltheorie

Im vorliegenden Kapitel wird ein modelltheoretischer Konsequenzbegriff zur Sprache L entwickelt. Zunächst werden die nötigen Begrifflichkeiten definiert – insbesondere die modelltheoretische Erfüllung und darauf aufbauend dann die modelltheoretische Konsequenzschaft – und grundlegende Zusammenhänge zwischen ihnen bewiesen (5.1). Daran schließen sich Theoreme zur Abgeschlossenheit der modelltheoretischen Konsequenzschaft an (5.2). Anschließend kann dann im nachfolgenden Kap. 6 die Korrektheit und Vollständigkeit des Redehandlungskalküls bezüglich des in Kap. 5.1 entwickelten modelltheoretischen Folgerungsbegriffs gezeigt werden.

5.1 Erfüllungsrelation und modelltheoretische Konsequenz

Die Entwicklung des modelltheoretischen Konsequenzbegriffs folgt dem Standardvorgehen.[14] Zunächst werden Interpretationsfunktionen, Modelle und Belegungen definiert. Dies genügt um in Definition 5-6 geschlossenen Termen ein Denotat zuzuweisen, wobei die übliche Definition sich in Theorem 5-2 spiegelt. Sodann kann in Definition 5-8 bestimmt werden, wann ein Modell mit einer Belegung eine Formel erfüllt. Die übliche Definition wird hier von Theorem 5-4 gespiegelt. Sodann werden ein Koinzidenz- und ein Substitutionslemma (Theorem 5-5 und Theorem 5-6) sowie weitere Theoreme bewiesen, die im Fortgang benötigt werden. Abschließend werden noch die gängigen weiterführenden Begriffe eingeführt, darunter die modelltheoretische Konsequenzschaft (Definition 5-10), die in der Formulierung der Korrektheit und der Vollständigkeit verwendet wird.

[14] Siehe etwa EBBINGHAUS, H.-D.; FLUM, J.; THOMAS, W.: *Mathematische Logik*, S. 29–62, GRÄDEL, E.: *Mathematische Logik*, S. 49–53, und WAGNER, H.: *Logische Systeme*, S. 47–54.

Definition 5-1. *Interpretationsfunktion*
I ist eine Interpretationsfunktion für D
gdw
D ist eine Menge und I ist eine Funktion mit Dom(I) = KONST ∪ FUNK ∪ PRÄ und

(i) Für alle $\alpha \in$ KONST: $I(\alpha) \in D$,
(ii) Für alle $\varphi \in$ FUNK: Wenn φ r-stellig ist, dann ist $I(\varphi)$ eine r-stellige Funktion über D,
(iii) Für alle $\Phi \in$ PRÄ: Wenn Φ r-stellig ist, dann $I(\Phi) \subseteq {}^{r}D$, und
(iv) $I(\ulcorner = \urcorner) = \{\langle a, a\rangle \mid a \in D\}$.

Definition 5-2. *Modell*
M ist ein Modell
gdw
Es gibt D, I, so dass I eine Interpretationsfunktion für D ist und $M = (D, I)$.

Hinweis: Die Nicht-Leerheit von D wird wegen KONST $\neq \emptyset$ mit Klausel (i) von Definition 5-1 gewährleistet. Anders als üblich werden die Belegungsfunktionen nun nicht über VAR, sondern über PAR definiert – die Parameter übernehmen also dem Kalkül entsprechend auch in der Modelltheorie die Aufgaben, die andernorts oft von freien Variablen geleistet werden. Dementsprechend werden Quantorformeln (z. B. $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$) nicht für Δ, sondern für eine Parameterinstanz (z. B. $[\beta, \xi, \Delta]$) ausgewertet (vgl. Definition 5-7 und Theorem 5-4).

Definition 5-3. *Belegung*
b ist eine Belegung für D
gdw
b ist eine Funktion mit Dom(b) = PAR und Ran(b) $\subseteq D$.

Definition 5-4. *Belegungsvariante*
b' ist in β eine Belegungsvariante von b für D
gdw
b' und b sind Belegungen für D und $\beta \in$ PAR und $b' \setminus \{(\beta, b'(\beta))\} \subseteq b$.

Definition 5-5. *Termdenotationsfunktionen für Modelle und Belegungen*

F ist eine Termdenotationsfunktion für D, I, b
gdw
(D, I) ist ein Modell und b eine Belegung für D und F ist eine Funktion auf GTERM und:

(i) Wenn $\alpha \in$ KONST, dann $F(\alpha) = I(\alpha)$,

(ii) Wenn $\beta \in$ PAR, dann $F(\beta) = b(\beta)$, und

(iii) Wenn $\varphi \in$ FUNK und φ r-stellig ist und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ GTERM, dann $F(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner) = I(\varphi)(\langle F(\theta_0), \ldots, F(\theta_{r-1})\rangle)$.

Theorem 5-1. *Für jedes Modell (D, I) und Belegung b für D gibt es genau eine Termdenotationsfunktion*

Wenn (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D ist, dann gibt es genau ein F, so dass F eine Termdenotationsfunktion für D, I, b ist.

Beweis: Sei (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D. Dann gibt es mit den Theoremen über eindeutige Lesbarkeit (Theorem 1-10 und Theorem 1-11) genau eine Funktion F auf GTERM, so dass Klauseln (i) bis (iii) von Definition 5-5 für F erfüllt sind und damit nach Definition 5-5 genau eine Termdenotationsfunktion für D, I, b. ■

Definition 5-6. *Termdenotationsoperation (TD)*

TD$(\theta, D, I, b) = a$
gdw

(i) Es gibt eine Termdenotationsfunktion F für D, I, b und $\theta \in$ GTERM und $a = F(\theta)$

oder

(ii) Es gibt keine Termdenotationsfunktion für D, I, b oder $\theta \notin$ GTERM und $a = \emptyset$.

Das folgende Theorem spiegelt die übliche Definition von Termdenotaten für Modelle und Belegungen wider:

Theorem 5-2. *Termdenotate für Modelle und Belegungen*
Wenn (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D ist, dann:

(i) Wenn $\alpha \in$ KONST, dann $\mathrm{TD}(\alpha, D, I, b) = I(\alpha)$,

(ii) Wenn $\beta \in$ PAR, dann $\mathrm{TD}(\beta, D, I, b) = b(\beta)$, und

(iii) Wenn $\varphi \in$ FUNK, wobei φ r-stellig ist, und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ GTERM, dann $\mathrm{TD}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner, D, I, b) = I(\varphi)(\langle\mathrm{TD}(\theta_0, D, I, b)), \ldots, \mathrm{TD}(\theta_{r-1}, D, I, b)\rangle)$.

Beweis: Sei (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D. Dann gibt es mit Theorem 5-1 genau eine Termdenotationsfunktion F für D, I, b. Dann gilt nach Definition 5-6 für alle $\theta \in$ GTERM: $\mathrm{TD}(\theta, D, I, b) = F(\theta)$. Daraus folgt dann mit Definition 5-5 die Behauptung. ■

Definition 5-7. *Erfüllungsfunktionen für Modelle*
F <u>ist eine Erfüllungsfunktion für</u> D, I
gdw
(D, I) ist ein Modell, F ist eine Funktion auf GFORM $\times$ $\{b \mid b$ ist eine Belegung für $D\}$, $\mathrm{Ran}(F) = \{0, 1\}$ und für alle Belegungen b für D gilt:

(i) Wenn $\Phi \in$ PRÄ, wobei Φ r-stellig ist, und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ GTERM dann:
$F(\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner, b) = 1$ gdw $\langle\mathrm{TD}(\theta_0, D, I, b), \ldots, \mathrm{TD}(\theta_{r-1}, D, I, b)\rangle \in I(\Phi)$,

(ii) Wenn A $\in$ GFORM, dann: $F(\ulcorner\neg A\urcorner, b) = 1$ gdw $F(A, b) = 0$,

(iii) Wenn A, B $\in$ GFORM, dann $F(\ulcorner A \wedge B\urcorner, b) = 1$ gdw $F(A, b) = 1$ und $F(B, b) = 1$,

(iv) Wenn A, B $\in$ GFORM, dann $F(\ulcorner A \vee B\urcorner, b) = 1$ gdw $F(A, b) = 1$ oder $F(B, b) = 1$,

(v) Wenn A, B $\in$ GFORM, dann $F(\ulcorner A \rightarrow B\urcorner, b) = 1$ gdw $F(A, b) = 0$ oder $F(B, b) = 1$,

(vi) Wenn A, B $\in$ GFORM, dann $F(\ulcorner A \leftrightarrow B\urcorner, b) = 1$ gdw $F(A, b) = F(B, b)$,

(vii) Wenn $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM und $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, dann
$F(\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner, b) = 1$
gdw
es gibt $\beta \in \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TT}(\Delta)$, so dass für alle b', die in β Belegungsvarianten von b für D sind: $F([\beta, \xi, \Delta], b') = 1$, und

(viii) Wenn $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM und $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, dann
$F(\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner) = 1$
gdw
es gibt $\beta \in \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TT}(\Delta)$ und b', das in β eine Belegungsvariante von b für D ist, so dass $F([\beta, \xi, \Delta], b') = 1$.

Theorem 5-3. *Für jedes Modell (D, I) gibt es genau eine Erfüllungsfunktion*
Wenn (D, I) ein Modell ist, dann gibt es genau eine Erfüllungsfunktion für D, I.

Beweis: Sei (D, I) ein Modell. Dann gibt es mit den Theoremen über eindeutige Lesbarkeit (Theorem 1-10 und Theorem 1-11) genau eine Funktion F auf GFORM $\times$ $\{b \mid b$ ist eine Belegung für $D\}$, so dass Klauseln (i) bis (viii) von Definition 5-7 erfüllt sind. Also gibt es genau eine Erfüllungsfunktion für D, I. ■

Definition 5-8. *Vierstelliger modelltheoretischer Erfüllungsprädikator ('.., .., .., $\vDash$ ..')*
$D, I, b \vDash \Gamma$
gdw
$\Gamma \in$ GFORM, b ist eine Belegung für D und es gibt eine Erfüllungsfunktion F für D, I, so dass $F(\Gamma, b) = 1$.

Das folgende Theorem spiegelt die übliche Definition der modelltheoretischen Konsequenz im hier gewählten grammatischen Rahmen wider. Dabei wird in der üblichen Weise auf den zu '.., .., .. $\vDash$ ..' gehörenden Negatprädikator ('.., .., .. $\nvDash$ ..') zurückgegriffen.

Theorem 5-4. *Übliche Erfüllungskonzeption*
Wenn (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D, A, B $\in$ GFORM, $\xi \in$ VAR, $\Phi \in$ PRÄ, Φ r-stellig, $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ GTERM, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, dann:

(i) $D, I, b \vDash \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$ gdw $\langle \mathrm{TD}(\theta_0, D, I, b), \ldots, \mathrm{TD}(\theta_{r-1}, D, I, b)\rangle \in I(\Phi)$,

(ii) $D, I, b \vDash \ulcorner\neg A\urcorner$ gdw $D, I, b \nvDash A$,

(iii) $D, I, b \vDash \ulcorner A \wedge B\urcorner$ gdw $D, I, b \vDash A$ und $D, I, b \vDash B$,

(iv) $D, I, b \vDash \ulcorner A \vee B\urcorner$ gdw $D, I, b \vDash A$ oder $D, I, b \vDash B$,

(v) $D, I, b \vDash \ulcorner A \rightarrow B\urcorner$ gdw $D, I, b \nvDash A$ oder $D, I, b \vDash B$,

(vi) $D, I, b \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B\urcorner$ gdw
$D, I, b \vDash A$ und $D, I, b \vDash B$ oder $D, I, b \nvDash A$ und $D, I, b \nvDash B$,

(vii) $D, I, b \vDash \ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ gdw
es gibt $\beta \in$ PAR\TT(Δ), so dass für alle b', die in β Belegungsvarianten von b für D sind: $D, I, b' \vDash [\beta, \xi, \Delta]$, und

(viii) $D, I, b \vDash \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ gdw
es gibt $\beta \in$ PAR\TT(Δ) und b', das in β eine Belegungsvariante von b für D ist, so dass $D, I, b' \vDash [\beta, \xi, \Delta]$.

Beweis: Seien (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D, A, B $\in$ GFORM, $\xi \in$ VAR, $\Phi \in$ PRÄ, Φ r-stellig, $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ GTERM, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$. Dann gibt es mit Theorem 5-3 genau eine Erfüllungsfunktion F für D, I. Damit gilt dann mit Definition 5-8 für alle $\Gamma \in$ GFORM: $D, I, b \vDash \Gamma$ gdw $F(\Gamma, b) = 1$ und $D, I, b \nvDash \Gamma$ gdw $F(\Gamma, b) = 0$. Daraus ergibt sich die Behauptung dann mit Definition 5-7. ■

Theorem 5-5. *Koinzidenzlemma*
Wenn (D, I) und (D, I') Modelle und b, b' Belegungen für D sind, dann:

(i) Für alle $\theta \in$ GTERM: Wenn $I{\restriction}\mathrm{TA}(\theta) = I'{\restriction}\mathrm{TA}(\theta)$ und $b{\restriction}\mathrm{TT}(\theta) = b'{\restriction}\mathrm{TT}(\theta)$, dann $\mathrm{TD}(\theta, D, I, b) = \mathrm{TD}(\theta, D, I', b')$, und

(ii) Für alle $\Gamma \in$ GFORM: Wenn $I{\restriction}\mathrm{TA}(\Gamma) = I'{\restriction}\mathrm{TA}(\Gamma)$ und $b{\restriction}\mathrm{TT}(\Gamma) = b'{\restriction}\mathrm{TT}(\Gamma)$, dann $D, I, b \vDash \Gamma$ gdw $D, I', b' \vDash \Gamma$.

Beweis: *Zu (i)*: Seien (D, I) und (D, I') Modelle und b, b' Belegungen für D. Der Beweis wird durch Induktion über den Termaufbau von $\theta \in$ TERM geführt. Sei zunächst $\theta \in$ ATERM $\cap$ GTERM und gelte $I{\restriction}\mathrm{TA}(\theta) = I'{\restriction}\mathrm{TA}(\theta)$ und $b{\restriction}\mathrm{TT}(\theta) = b'{\restriction}\mathrm{TT}(\theta)$. Dann ist $\theta \in$ KONST $\cup$ PAR. Sei nun $\theta \in$ KONST. Dann gilt mit $\{\theta\} = \mathrm{TA}(\theta) \cap$ KONST, $I{\restriction}\mathrm{TA}(\theta) = I'{\restriction}\mathrm{TA}(\theta)$ und Theorem 5-2-(i): $\mathrm{TD}(\theta, D, I, b) = I(\theta) = I'(\theta) = \mathrm{TD}(\theta, D, I', b')$. Sei nun $\theta \in$ PAR. Dann gilt mit $\{\theta\} = \mathrm{TT}(\theta) \cap$ PAR, $b{\restriction}\mathrm{TT}(\theta) = b'{\restriction}\mathrm{TT}(\theta)$ und Theorem 5-2-(ii): $\mathrm{TD}(\theta, D, I, b) = b(\theta) = b'(\theta) = \mathrm{TD}(\theta, D, I', b')$.

Gelte die Behauptung nun für $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ TERM und sei $\varphi \in$ FUNK, wobei φ r-stellig, und sei $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in$ FTERM $\cap$ GTERM und gelte $I{\restriction}\mathrm{TA}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner) = I'{\restriction}\mathrm{TA}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner)$ und $b{\restriction}\mathrm{TT}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner) = b'{\restriction}\mathrm{TT}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner)$. Dann gilt mit $\mathrm{FV}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner) = \bigcup\{\mathrm{FV}(\theta_i) \mid i < r\}$ für alle θ_i mit $i < r$ ebenfalls: $\theta_i \in$ GTERM. Sodann gilt mit $\bigcup\{\mathrm{TA}(\theta_i) \mid i < r\} \subseteq \mathrm{TA}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner)$ und $\bigcup\{\mathrm{TT}(\theta_i) \mid i < r\} \subseteq \mathrm{TT}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner)$ für alle $i < r$: $I{\restriction}\mathrm{TA}(\theta_i) = I'{\restriction}\mathrm{TA}(\theta_i)$ und $b{\restriction}\mathrm{TT}(\theta_i) = b'{\restriction}\mathrm{TT}(\theta_i)$. Mit I.V. gilt somit für alle $i < r$: $\mathrm{TD}(\theta_i, D, I, b) = \mathrm{TD}(\theta_i, D, I', b')$. Sodann gilt mit $\varphi \in \mathrm{TA}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner) \cap$ FUNK nach Annahme auch $I(\varphi) = I'(\varphi)$. Damit gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{TD}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner, D, I, b)\\
&=\\
&I(\varphi)(\langle \mathrm{TD}(\theta_0, D, I, b), \ldots, \mathrm{TD}(\theta_{r-1}, D, I, b)\rangle)\\
&=\\
&I'(\varphi)(\langle \mathrm{TD}(\theta_0, D, I', b'), \ldots, \mathrm{TD}(\theta_{r-1}, D, I', b')\rangle)\\
&=\\
&\mathrm{TD}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner, D, I', b').
\end{aligned}
$$

Zu (ii): Der Beweis wird durch Induktion über den Formelgrad geführt. Gelte dazu das Theorem für alle A ∈ FORM mit FGRAD(A) < k. Seien nun (D, I), (D, I') Modelle, b, b' Belegungen für D und sei Γ ∈ GFORM und gelte I↾TA(Γ) = I'↾TA(Γ) und b↾TT(Γ) = b'↾TT(Γ) und sei FGRAD(Γ) = k.

Sei FGRAD(Γ) = 0, also Γ ∈ AFORM. Dann gibt es $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$ ∈ TERM und Φ ∈ PRÄ, wobei Φ r-stellig ist, so dass Γ = ⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝. Dann gilt mit FV(⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝) = ∪{FV($\theta_i$) | $i < r$}, ∪{TA(θ_i) | $i < r$} ⊆ TA(⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝) und ∪{TT($\theta_i$) | $i < r$} ⊆ TT(⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝) nach der Annahme für Γ für alle $i < r$: θ_i ∈ GTERM, I↾TA(θ_i) = I'↾TA(θ_i) und b↾TT(θ_i) = b'↾TT(θ_i). Mit (i) gilt damit dann für alle $i < r$: TD(θ_i, D, I, b) = TD(θ_i, D, I', b'). Sodann gilt mit Φ ∈ TA(⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝) ∩ PRÄ nach Annahme auch I(Φ) = I'(Φ). Damit gilt mit Theorem 5-4-(i) folgende Kette:

$D, I, b \vDash \Gamma$
gdw
$D, I, b \vDash$ ⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝
gdw
⟨TD(θ_0, D, I, b), …, TD(θ_{r-1}, D, I, b)⟩ ∈ I(Φ)
gdw
⟨TD(θ_0, D, I', b'), …, TD(θ_{r-1}, D, I', b')⟩ ∈ I'(Φ)
gdw
$D, I', b' \vDash$ ⌜Φ($\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$)⌝
gdw
$D, I', b' \vDash \Gamma$.

Sei nun FGRAD(Γ) ≠ 0, also Γ ∈ JFORM ∪ QFORM. Es können *sieben* Fälle unterschieden werden. *Erstens*: Sei Γ = ⌜¬A⌝. Also FGRAD(A) < FGRAD(Γ). Dann ist nach der Annahme für Γ auch A ∈ GFORM, I↾TA(A) = I'↾TA(A) und b↾TT(A) = b'↾TT(A). Mit Theorem 5-4-(ii) und I.V. gilt damit:

$D, I, b \vDash \Gamma$
gdw
$D, I, b \vDash$ ⌜¬A⌝
gdw
$D, I, b \nvDash$ A
gdw
$D, I', b' \nvDash$ A
gdw
$D, I', b' \vDash$ ⌜¬A⌝

gdw
$D, I', b' \vDash \Gamma$.

Zweitens: Sei $\Gamma = \ulcorner A \wedge B \urcorner$. Also FGRAD(A) < FGRAD($\Gamma$) und FGRAD(B) < FGRAD($\Gamma$). Dann ist nach Annahme für Γ auch A, B $\in$ GTERM, $I\restriction(\mathrm{TA(A)} \cup \mathrm{TA(B)}) = I'\restriction(\mathrm{TA(A)} \cup \mathrm{TA(B)})$ und $b\restriction(\mathrm{TT(A)} \cup \mathrm{TT(B)}) = b'\restriction(\mathrm{TT(A)} \cup \mathrm{TT(B)})$. Mit Theorem 5-4-(iii) und I.V. gilt:

$D, I, b \vDash \Gamma$
gdw
$D, I, b \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$
gdw
$D, I, b \vDash$ A und $D, I, b \vDash$ B
gdw
$D, I', b' \vDash$ A und $D, I', b' \vDash$ B
gdw
$D, I', b' \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$
gdw
$D, I', b' \vDash \Gamma$.

Der *dritte* bis *fünfte* Fall verlaufen analog.

Sechstens: Sei $\Gamma = \ulcorner \bigwedge \zeta \Delta \urcorner$. Nach der Annahme für Γ gilt dann FV(Δ) $\subseteq \{\zeta\}$, $I\restriction\mathrm{TA}(\Delta) = I'\restriction\mathrm{TA}(\Delta)$ und $b\restriction\mathrm{TT}(\Delta) = b'\restriction\mathrm{TT}(\Delta)$. Gelte nun $D, I, b \vDash \ulcorner \bigwedge \zeta \Delta \urcorner$. Dann gibt es mit Theorem 5-4-(vii) ein $\beta \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TT}(\Delta)$, so dass für alle b^+, die in β Belegungsvarianten von b für D sind, gilt: $D, I, b^+ \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$. Sei nun b'_1 in β eine Belegungsvariante von b' für D. Sei nun $b_1 = (b\backslash\{(\beta, b(\beta))\}) \cup \{(\beta, b'_1(\beta))\}$. Dann ist b_1 in β eine Belegungsvariante von b für D und somit gilt: $D, I, b_1 \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$. Da $\beta \notin \mathrm{TT}(\Delta)$ gilt sodann mit $b\restriction\mathrm{TT}(\Delta) = b'\restriction\mathrm{TT}(\Delta)$ für alle $\beta' \in \mathrm{TT}(\Delta) \cap \mathrm{PAR}$: $b_1(\beta') = b(\beta') = b'(\beta') = b'_1(\beta')$. Da sodann auch $b_1(\beta) = b'_1(\beta)$ gilt damit wegen $\mathrm{TT}([\beta, \zeta, \Delta]) \subseteq \mathrm{TT}(\Delta) \cup \{\beta\}$, dass $b_1\restriction\mathrm{TT}([\beta, \zeta, \Delta]) = b'_1\restriction([\beta, \zeta, \Delta])$. Sodann gilt $I\restriction\mathrm{TA}([\beta, \zeta, \Delta]) = I\restriction(\mathrm{TA}([\beta, \zeta, \Delta]) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I\restriction(\mathrm{TA}(\Delta) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I\restriction\mathrm{TA}(\Delta) = I'\restriction\mathrm{TA}(\Delta) = I'\restriction(\mathrm{TA}(\Delta) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I'\restriction(\mathrm{TA}([\beta, \zeta, \Delta]) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I'\restriction(\mathrm{TA}([\beta, \zeta, \Delta])$ und somit $I\restriction\mathrm{TA}([\beta, \zeta, \Delta]) = I'\restriction\mathrm{TA}([\beta, \zeta, \Delta])$. Ferner ist $[\beta, \zeta, \Delta] \in$ GFORM und mit Theorem 1-13 ist FGRAD($[\beta, \zeta, \Delta]$) = FGRAD(Δ) < FGRAD(Γ). Damit gilt nach I.V. mit $D, I, b_1 \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$ auch: $D, I', b'_1 \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$. Also gilt für alle

b'^{+} die in β Belegungsvarianten von b' für D sind: $D, I', b'^{+} \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$ und somit nach Theorem 5-4-(vii) $D, I', b' \vDash \ulcorner\bigwedge\zeta\Delta\urcorner$. Die R-L-Richtung verläuft analog.

Siebtens: Sei $\Gamma = \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$. Nach der Annahme für Γ ist dann $FV(\Delta) \subseteq \{\zeta\}$, $I{\upharpoonright}TA(\Delta) = I'{\upharpoonright}TA(\Delta)$ und $b{\upharpoonright}TT(\Delta) = b'{\upharpoonright}TT(\Delta)$. Gelte nun $D, I, b \vDash \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$. Dann gibt es mit Theorem 5-4-(viii) ein $\beta \in PAR\backslash TT(\Delta)$ und b_1, das in β Belegungsvariante von b für D ist, so dass $D, I, b_1 \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$. Sei nun $b'_1 = (b'\backslash\{(\beta, b'(\beta))\}) \cup \{(\beta, b_1(\beta))\}$. Dann ist b'_1 in β eine Belegungsvariante von b' für D. Da $\beta \notin TT(\Delta)$ gilt sodann mit $b{\upharpoonright}TT(\Delta) = b'{\upharpoonright}TT(\Delta)$ für alle $\beta' \in TT(\Delta) \cap PAR$: $b_1(\beta') = b(\beta') = b'(\beta') = b'_1(\beta')$. Da sodann auch $b_1(\beta) = b'_1(\beta)$ gilt weiter mit $TT([\beta, \zeta, \Delta]) \subseteq TT(\Delta) \cup \{\beta\}$, dass $b_1{\upharpoonright}TT([\beta, \zeta, \Delta]) = b'_1{\upharpoonright}([\beta, \zeta, \Delta])$. Sodann gilt $I{\upharpoonright}TA([\beta, \zeta, \Delta]) = I{\upharpoonright}(TA([\beta, \zeta, \Delta]) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I{\upharpoonright}(TA(\Delta) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I{\upharpoonright}TA(\Delta) = I'{\upharpoonright}TA(\Delta) = I'{\upharpoonright}(TA(\Delta) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I'{\upharpoonright}(TA([\beta, \zeta, \Delta]) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I'{\upharpoonright}(TA([\beta, \zeta, \Delta])$ und somit $I{\upharpoonright}TA([\beta, \zeta, \Delta]) = I'{\upharpoonright}TA([\beta, \zeta, \Delta])$. Ferner ist $[\beta, \zeta, \Delta] \in GFORM$ und mit Theorem 1-13 ist $FGRAD([\beta, \zeta, \Delta]) = FGRAD(\Delta) < FGRAD(\Gamma)$. Damit gilt nach I.V. mit $D, I, b_1 \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$ auch: $D, I', b'_1 \vDash [\beta, \zeta, \Delta]$ und somit nach Theorem 5-4-(viii) $D, I', b' \vDash \ulcorner\bigvee\zeta\Delta\urcorner$. Die R-L-Richtung verläuft analog. ■

Mit Hilfe des Koinzidenzlemmas kann nun das Substitutionslemma bewiesen werden:

Theorem 5-6. *Substitutionslemma*

Wenn (D, I), (D, I') Modelle, b, b' Belegungen für D sind, $\xi \in VAR$, $\theta, \theta' \in GTERM$ und $TD(\theta, D, I, b) = TD(\theta', D, I', b')$ dann:

(i) Für alle $\theta^+ \in TERM$ mit $FV(\theta^+) \subseteq \{\xi\}$, $I{\upharpoonright}TA(\theta^+) = I'{\upharpoonright}TA(\theta^+)$ und $b{\upharpoonright}TT(\theta^+) = b'{\upharpoonright}TT(\theta)$ gilt: $TD([\theta, \xi, \theta^+], D, I, b) = TD([\theta', \xi, \theta^+], D, I', b')$, und

(ii) Für alle $\Delta \in FORM$ mit $FV(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, $I{\upharpoonright}TA(\Delta) = I'{\upharpoonright}TA(\Delta)$ und $b{\upharpoonright}TT(\Delta) = b'{\upharpoonright}TT(\Delta)$ gilt: $D, I, b \vDash [\theta, \xi, \Delta]$ gdw $D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \Delta]$.

Beweis: *Zu (i)*: Seien (D, I), (D, I') Modelle, b, b' Belegungen für D, $\xi \in VAR$, $\theta, \theta' \in GTERM$ und $TD(\theta, D, I, b) = TD(\theta', D, I', b')$. Der Beweis wird mittels Induktion über den Termaufbau von $\theta^+ \in TERM$ geführt. Sei zunächst $\theta^+ \in ATERM$, wobei $FV(\theta^+) \subseteq \{\xi\}$, $I{\upharpoonright}TA(\theta^+) = I'{\upharpoonright}TA(\theta^+)$ und $b{\upharpoonright}TT(\theta^+) = b'{\upharpoonright}TT(\theta^+)$. Dann ist $\theta^+ \in KONST \cup PAR \cup VAR$. Sei nun $\theta^+ \in KONST$. Dann ist $[\theta, \xi, \theta^+] = \theta^+ = [\theta', \xi, \theta^+]$ und damit gilt mit $TA(\theta^+)$

$= \{\theta^+\}$, $I\upharpoonright TA(\theta^+) = I'\upharpoonright TA(\theta^+)$ und Theorem 5-2-(i): $TD([\theta, \xi, \theta^+], D, I, b) = TD(\theta^+, D, I, b) = I(\theta^+) = I'(\theta^+) = TD(\theta^+, D, I', b') = TD([\theta', \xi, \theta^+], D, I', b')$. Sei nun $\theta^+ \in PAR$. Dann ist $[\theta, \xi, \theta^+] = \theta^+ = [\theta', \xi, \theta^+]$ und damit gilt mit $TT(\theta^+) = \{\theta^+\}$, $b\upharpoonright TT(\theta^+) = b'\upharpoonright TT(\theta^+)$ und mit Theorem 5-2-(ii): $TD([\theta, \xi, \theta^+], D, I, b) = TD(\theta^+, D, I, b) = b(\theta^+) = b'(\theta^+) = TD(\theta^+, D, I', b') = TD([\theta', \xi, \theta^+], D, I', b')$. Sei nun $\theta^+ \in VAR$. Dann ist $\theta^+ = \xi$. Dann ist $[\theta, \xi, \theta^+] = \theta$ und $[\theta', \xi, \theta^+] = \theta'$. Damit ist dann nach Annahme $TD([\theta, \xi, \theta^+], D, I, b) = TD(\theta, D, I, b) = TD(\theta', D, I', b') = TD([\theta', \xi, \theta^+], D, I', b')$.

Gelte die Behauptung nun für $\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1} \in TERM$ und sei $\varphi \in FUNK$, wobei φ r-stellig, und sei $\theta^+ = \ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner \in FTERM$, wobei $FV(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) \subseteq \{\xi\}$, $I\upharpoonright TA(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) = I'\upharpoonright TA(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner)$ und $b\upharpoonright TT(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) = b'\upharpoonright TT(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner)$. Dann gilt mit $FV(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) = \bigcup\{FV(\theta^+_i) \mid i < r\}$, $\bigcup\{TA(\theta^+_i) \mid i < r\} \subseteq TA(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner)$ und $\bigcup\{TT(\theta^+_i) \mid i < r\} \subseteq TT(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner)$ für alle $i < r$ ebenfalls: $FV(\theta^+_i) \subseteq \{\xi\}$, $I\upharpoonright TA(\theta^+_i) = I'\upharpoonright TA(\theta^+_i)$ und $b\upharpoonright TT(\theta^+_i) = b'\upharpoonright TT(\theta^+_i)$. Mit I.V. gilt somit für alle $i < r$: $TD([\theta, \xi, \theta^+_i], D, I, b) = TD([\theta', \xi, \theta^+_i], D, I', b')$. Sodann gilt mit $\varphi \in TA(\ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) \cap FUNK$ nach Annahme auch $I(\varphi) = I'(\varphi)$. Damit gilt mit Theorem 5-2-(iii) insgesamt:

$$
\begin{aligned}
&TD([\theta, \xi, \ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner], D, I, b)\\
&=\\
&TD(\ulcorner\varphi([\theta, \xi, \theta^+_0], \ldots, [\theta, \xi, \theta^+_{r-1}])\urcorner, D, I, b)\\
&=\\
&I(\varphi)(\langle TD([\theta, \xi, \theta^+_0], D, I, b), \ldots, TD([\theta, \xi, \theta^+_{r-1}], D, I, b)\rangle)\\
&=\\
&I'(\varphi)(\langle TD([\theta', \xi, \theta^+_0], D, I', b'), \ldots, TD([\theta', \xi, \theta^+_{r-1}], D, I', b')\rangle)\\
&=\\
&TD(\ulcorner\varphi([\theta', \xi, \theta^+_0], \ldots, [\theta', \xi, \theta^+_{r-1}])\urcorner, D, I', b')\\
&=\\
&TD([\theta', \xi, \ulcorner\varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner], D, I', b').
\end{aligned}
$$

Zu (ii): Der Beweis wird durch Induktion über den Formelgrad geführt. Gelte dazu das Theorem für alle $A \in FORM$ mit $FGRAD(A) < k$. Seien nun (D, I), (D, I') Modelle, b, b' Belegungen für D, $\xi \in VAR$, $\theta, \theta' \in GTERM$ und $TD(\theta, D, I, b) = TD(\theta', D, I', b')$ und sei $\Delta \in FORM$, wobei $FV(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, $I\upharpoonright TA(\Delta) = I'\upharpoonright TA(\Delta)$ und $b\upharpoonright TT(\Delta) = b'\upharpoonright TT(\Delta)$, und sei $FGRAD(\Delta) = k$. Sei $FGRAD(\Delta) = 0$, also $\Delta \in AFORM$. Dann gibt es $\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1}$

$\in$ TERM und $\Phi \in$ PRÄ, wobei Φ r-stellig ist, so dass $\Delta = \ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner$. Dann gilt mit $\mathrm{FV}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) = \bigcup\{\mathrm{FV}(\theta^+_i) \mid i < r\}$, $\bigcup\{\mathrm{TA}(\theta^+_i) \mid i < r\} \subseteq \mathrm{TA}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner)$ und $\bigcup\{\mathrm{TT}(\theta^+_i) \mid i < r\} = \mathrm{TT}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner)$ nach der Annahme für Δ für alle $i < r$: $\mathrm{FV}(\theta^+_i) \subseteq \{\xi\}$, $I\restriction\mathrm{TA}(\theta^+_i) = I'\restriction\mathrm{TA}(\theta^+_i)$ und $b\restriction\mathrm{TT}(\theta^+_i) = b'\restriction\mathrm{TT}(\theta^+_i)$. Mit (i) gilt damit dann für alle $i < r$: $\mathrm{TD}([\theta, \xi, \theta^+_i], D, I, b) = \mathrm{TD}([\theta', \xi, \theta^+_i], D, I', b')$. Sodann gilt mit $\Phi \in \mathrm{TA}(\ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner) \cap$ PRÄ nach Annahme auch $I(\Phi) = I'(\Phi)$. Damit gilt wegen Theorem 5-4-(i) insgesamt:

$D, I, b \models [\theta, \xi, \Delta]$
gdw
$D, I, b \models [\theta, \xi, \ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner]$
gdw
$D, I, b \models \ulcorner\Phi([\theta, \xi, \theta^+_0], \ldots, [\theta, \xi, \theta^+_{r-1}])\urcorner$
gdw
$\langle\mathrm{TD}([\theta, \xi, \theta^+_0], D, I, b), \ldots, \mathrm{TD}([\theta, \xi, \theta^+_{r-1}], D, I, b)\rangle \in I(\Phi)$
gdw
$\langle\mathrm{TD}([\theta', \xi, \theta^+_0], D, I', b'), \ldots, \mathrm{TD}([\theta', \xi, \theta^+_{r-1}], D, I', b')\rangle \in I'(\Phi)$
gdw
$D, I', b' \models \ulcorner\Phi([\theta', \xi, \theta^+_0], \ldots, [\theta', \xi, \theta^+_{r-1}])\urcorner$
gdw
$D, I', b' \models [\theta', \xi, \ulcorner\Phi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{r-1})\urcorner]$
gdw
$D, I', b' \models [\theta', \xi, \Delta]$.

Sei nun $\mathrm{FGRAD}(\Delta) \neq 0$, also $\Delta \in$ JFORM $\cup$ QFORM. Es können *sieben* Fälle unterschieden werden. *Erstens*: Sei $\Delta = \ulcorner\neg A\urcorner$. Also $\mathrm{FGRAD}(A) < \mathrm{FGRAD}(\Delta)$. Dann ist nach der Annahme für Δ auch $\mathrm{FV}(A) \subseteq \{\xi\}$, $I\restriction\mathrm{TA}(A) = I'\restriction\mathrm{TA}(A)$ und $b\restriction\mathrm{TT}(A) = b'\restriction\mathrm{TT}(A)$. Mit I.V. und Theorem 5-4-(ii) gilt dann:

$D, I, b \models [\theta, \xi, \Delta]$
gdw
$D, I, b \models [\theta, \xi, \ulcorner\neg A\urcorner]$
gdw
$D, I, b \models \ulcorner\neg[\theta, \xi, A]\urcorner$
gdw
$D, I, b \not\models [\theta, \xi, A]$
gdw
$D, I', b' \not\models [\theta', \xi, A]$
gdw
$D, I', b' \models \ulcorner\neg[\theta', \xi, A]\urcorner$

gdw
$D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \ulcorner\neg A\urcorner]$
gdw
$D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \Delta]$.

Zweitens: Sei $\Delta = \ulcorner A \wedge B\urcorner$. Also FGRAD(A) < FGRAD(Δ) und FGRAD(B) < FGRAD(Δ). Dann ist nach Annahme für Δ auch $FV(A) \cup FV(B) \subseteq \{\xi\}$, $I\upharpoonright(TA(A) \cup TA(B)) = I'\upharpoonright(TA(A) \cup TA(B))$ und $b\upharpoonright(TT(A) \cup TT(B)) = b'\upharpoonright(TT(A) \cup TT(B))$. Mit I.V. und Theorem 5-4-(iii) gilt dann:

$D, I, b \vDash [\theta, \xi, \Delta]$
gdw
$D, I, b \vDash [\theta, \xi, \ulcorner A \wedge B\urcorner]$
gdw
$D, I, b \vDash \ulcorner[\theta, \xi, A] \wedge [\theta, \xi, B]\urcorner$
gdw
$D, I, b \vDash [\theta, \xi, A]$ und $D, I, b \vDash [\theta, \xi, B]$
gdw
$D, I', b' \vDash [\theta', \xi, A]$ und $D, I', b' \vDash [\theta', \xi, B]$
gdw
$D, I', b' \vDash \ulcorner[\theta', \xi, A] \wedge [\theta', \xi, B]\urcorner$
gdw
$D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \ulcorner A \wedge B\urcorner]$
gdw
$D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \Delta]$.

Der *dritte* bis *fünfte* Fall verlaufen analog.

Sechstens: Sei $\Delta = \ulcorner\bigwedge\zeta A\urcorner$. Nach der Annahme für Δ ist dann $FV(A) \subseteq \{\xi, \zeta\}$, $I\upharpoonright TA(A) = I'\upharpoonright TA(A)$ und $b\upharpoonright TT(A) = b'\upharpoonright TT(A)$. Angenommen $\zeta = \xi$. Dann ist $[\theta, \xi, \Delta] = [\theta, \zeta, \ulcorner\bigwedge\zeta A\urcorner] = \ulcorner\bigwedge\zeta A\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner\bigwedge\zeta A\urcorner] = [\theta', \xi, \Delta]$ und somit $[\theta, \xi, \Delta] = \Delta = [\theta', \xi, \Delta]$. Sodann gilt $FV(\Delta) = \emptyset$ und somit $\Delta \in$ GFORM. Da nach Annahme $I\upharpoonright TA(\Delta) = I'\upharpoonright TA(\Delta)$ und $b\upharpoonright TT(\Delta) = b'\upharpoonright TT(\Delta)$ gilt damit mit Theorem 5-5-(ii): $D, I, b \vDash [\theta, \xi, \Delta]$ gdw $D, I, b \vDash \Delta$ gdw $D, I', b' \vDash \Delta$ gdw $D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \Delta]$. Sei nun $\zeta \neq \xi$. Dann ist $[\theta, \xi, \Delta] = \ulcorner\bigwedge\zeta[\theta, \xi, A]\urcorner$ und $[\theta', \xi, \Delta] = \ulcorner\bigwedge\zeta[\theta', \xi, A]\urcorner$. Sodann gilt mit $\zeta \neq \xi$ und $\zeta, \xi \notin TT(\theta^{\#})$ für alle $\theta^{\#} \in$ GTERM nach Theorem 1-25-(ii) für alle $\beta^{+} \in$ PAR: $[\beta^{+}, \zeta, [\theta, \xi, A]] = [\theta, \xi, [\beta^{+}, \zeta, A]]$ und $[\beta^{+}, \zeta, [\theta', \xi, A]] = [\theta', \xi, [\beta^{+}, \zeta, A]]$.

Gelte nun $D, I, b \vDash \ulcorner\bigwedge\zeta[\theta, \xi, \mathrm{A}]\urcorner$. Dann gibt es mit Theorem 5-4-(vii) ein $\beta^+ \in \mathrm{PAR}\setminus\mathrm{TT}([\theta, \xi, \mathrm{A}])$, so dass für alle b^+, die in β^+ Belegungsvarianten von b für D sind: $D, I, b^+ \vDash [\beta^+, \zeta, [\theta, \xi, \mathrm{A}]]$. Sei nun $\beta^\# \in \mathrm{PAR}\setminus(\mathrm{TT}([\theta, \xi, \mathrm{A}]) \cup \mathrm{TT}(\theta) \cup \mathrm{TT}(\theta'))$. Sei nun b'_1 in $\beta^\#$ eine Belegungsvariante von b' für D. Sei nun $b_1 = (b\setminus\{(\beta^\#, b(\beta^\#))\}) \cup \{(\beta^\#, b'_1(\beta^\#))\}$. Dann ist b_1 in $\beta^\#$ eine Belegungsvariante von b für D und $b_1(\beta^\#) = b'_1(\beta^\#)$. Sei nun $b_2 = (b\setminus\{(\beta^+, b(\beta^+))\}) \cup \{(\beta^+, b'_1(\beta^\#))\}$. Dann ist b_2 in β^+ eine Belegungsvariante von b für D und somit gilt also $D, I, b_2 \vDash [\beta^+, \zeta, [\theta, \xi, \mathrm{A}]]$. Sodann ist $\mathrm{TD}(\beta^+, D, I, b_2) = b_2(\beta^+) = b'_1(\beta^\#) = b_1(\beta^\#) = \mathrm{TD}(\beta^\#, D, I, b_1)$. Sodann gilt nach Annahme für β^+ und $\beta^\#$, dass $\beta^+, \beta^\# \notin \mathrm{TT}([\theta, \xi, \mathrm{A}])$ und damit $b_2\upharpoonright\mathrm{TT}([\theta, \xi, \mathrm{A}]) = b\upharpoonright\mathrm{TT}([\theta, \xi, \mathrm{A}]) = b_1\upharpoonright\mathrm{TT}([\theta, \xi, \mathrm{A}])$. Sodann ist trivialerweise $I\upharpoonright\mathrm{TA}([\theta, \xi, \mathrm{A}]) = I\upharpoonright\mathrm{TA}([\theta, \xi, \mathrm{A}])$. Ferner ist $\mathrm{FV}([\theta, \xi, \mathrm{A}]) \subseteq \{\zeta\}$ und mit Theorem 1-13 ist $\mathrm{FGRAD}([\theta, \xi, \mathrm{A}]) = \mathrm{FGRAD}(\mathrm{A}) < \mathrm{FGRAD}(\Delta)$. Damit gilt dann nach I.V. wegen $D, I, b_2 \vDash [\beta^+, \zeta, [\theta, \xi, \mathrm{A}]]$ auch $D, I, b_1 \vDash [\beta^\#, \zeta, [\theta, \xi, \mathrm{A}]] = [\theta, \xi, [\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]]$.

Sodann gilt mit $\beta^\# \notin \mathrm{TT}(\theta)$, dass $b_1\upharpoonright\mathrm{TT}(\theta) = b\upharpoonright\mathrm{TT}(\theta)$, und mit $\beta^\# \notin \mathrm{TT}(\theta')$, dass $b'_1\upharpoonright\mathrm{TT}(\theta') = b'\upharpoonright\mathrm{TT}(\theta')$, und da trivialerweise $I\upharpoonright\mathrm{TA}(\theta) = I\upharpoonright\mathrm{TA}(\theta)$ und $I'\upharpoonright\mathrm{TA}(\theta') = I'\upharpoonright\mathrm{TA}(\theta')$ gilt somit nach Theorem 5-5-(i): $\mathrm{TD}(\theta, D, I, b_1) = \mathrm{TD}(\theta, D, I, b)$ und $\mathrm{TD}(\theta', D, I', b'_1) = \mathrm{TD}(\theta', D, I', b')$ und somit nach Eingangsannahme insgesamt $\mathrm{TD}(\theta, D, I, b_1) = \mathrm{TD}(\theta', D, I', b'_1)$. Ferner gilt mit $b\upharpoonright\mathrm{TT}(\mathrm{A}) = b'\upharpoonright\mathrm{TT}(\mathrm{A})$, $b_1(\beta^\#) = b'_1(\beta^\#)$ und $\mathrm{TT}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) \subseteq \mathrm{TT}(\mathrm{A}) \cup \{\beta^\#\}$, dass $b_1\upharpoonright\mathrm{TT}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) = b'_1\upharpoonright([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}])$. Sodann gilt: $I\upharpoonright\mathrm{TA}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) = I\upharpoonright(\mathrm{TA}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I\upharpoonright(\mathrm{TA}(\mathrm{A}) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I\upharpoonright\mathrm{TA}(\mathrm{A}) = I'\upharpoonright\mathrm{TA}(\mathrm{A}) = I'\upharpoonright(\mathrm{TA}(\mathrm{A}) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I'\upharpoonright(\mathrm{TA}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) \cap (\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ})) = I'\upharpoonright(\mathrm{TA}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}])$ und somit $I\upharpoonright\mathrm{TA}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) = I'\upharpoonright\mathrm{TA}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}])$. Ferner ist $\mathrm{FV}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) \subseteq \{\xi\}$ und mit Theorem 1-13 ist $\mathrm{FGRAD}([\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]) < \mathrm{FGRAD}(\Delta)$. Damit gilt mit $D, I, b_1 \vDash [\theta, \xi, [\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]]$ nach I.V. auch: $D, I', b'_1 \vDash [\theta', \xi, [\beta^\#, \zeta, \mathrm{A}]] = [\beta^\#, \zeta, [\theta', \xi, \mathrm{A}]]$. Also gilt für alle b'^+ die in $\beta^\#$ Belegungsvarianten von b' für D sind: $D, I', b'^+ \vDash [\beta^\#, \zeta, [\theta', \xi, \mathrm{A}]]$ und somit nach Theorem 5-4-(vii) $D, I', b' \vDash \ulcorner\bigwedge\zeta[\theta', \xi, \mathrm{A}]\urcorner$. Die R-L-Richtung verläuft analog.

Siebtens: Sei $\Delta = \ulcorner\bigvee\zeta A\urcorner$. Nach der Annahme für Δ ist dann $FV(A) \subseteq \{\xi, \zeta\}$, $I{\upharpoonright}TA(A) = I'{\upharpoonright}TA(A)$ und $b{\upharpoonright}TT(A) = b'{\upharpoonright}TT(A)$. Angenommen $\zeta = \xi$. Dann ist $[\theta, \xi, \Delta] = [\theta, \zeta, \ulcorner\bigvee\zeta A\urcorner] = \ulcorner\bigvee\zeta A\urcorner = [\theta', \zeta, \ulcorner\bigvee\zeta A\urcorner] = [\theta', \xi, \Delta]$ und somit $[\theta, \xi, \Delta] = \Delta = [\theta', \xi, \Delta]$. Sodann gilt $FV(\Delta) = \emptyset$ und somit $\Delta \in GFORM$. Da nach Annahme $I{\upharpoonright}TA(\Delta) = I'{\upharpoonright}TA(\Delta)$ und $b{\upharpoonright}TT(\Delta) = b'{\upharpoonright}TT(\Delta)$ gilt damit mit Theorem 5-5-(ii): $D, I, b \vDash [\theta, \xi, \Delta]$ gdw $D, I, b \vDash \Delta$ gdw $D, I', b' \vDash \Delta$ gdw $D, I', b' \vDash [\theta', \xi, \Delta]$. Sei nun $\zeta \neq \xi$. Dann ist $[\theta, \xi, \Delta] = \ulcorner\bigvee\zeta[\theta, \xi, A]\urcorner$ und $[\theta', \xi, \Delta] = \ulcorner\bigvee\zeta[\theta', \xi, A]\urcorner$. Sodann gilt mit $\zeta \neq \xi$ und $\zeta, \xi \notin TT(\theta^\#)$ für alle $\theta^\# \in GTERM$ nach Theorem 1-25-(ii) für alle $\beta^+ \in PAR$: $[\beta^+, \zeta, [\theta, \xi, A]] = [\theta, \xi, [\beta^+, \zeta, A]]$ und $[\beta^+, \zeta, [\theta', \xi, A]] = [\theta', \xi, [\beta^+, \zeta, A]]$.

Gelte nun $D, I, b \vDash \ulcorner\bigvee\zeta[\theta, \xi, A]\urcorner$. Dann gibt es mit Theorem 5-4-(viii) ein $\beta^+ \in PAR\setminus TT([\theta, \xi, A])$ und b_1, das in β^+ Belegungsvariante von b für D ist, so dass $D, I, b_1 \vDash [\beta^+, \zeta, [\theta, \xi, A]]$. Sei nun $\beta^\# \in PAR\setminus(TT([\theta, \xi, A]) \cup TT(\theta) \cup TT(\theta'))$. Sei nun $b'_1 = (b'\setminus\{(\beta^\#, b'(\beta^\#))\}) \cup \{(\beta^\#, b_1(\beta^+))\}$. Dann ist b'_1 in $\beta^\#$ eine Belegungsvariante von b' für D und $b'_1(\beta^\#) = b_1(\beta^+)$. Sei nun $b_2 = (b\setminus\{(\beta^\#, b(\beta^\#))\}) \cup \{(\beta^\#, b'_1(\beta^\#))\}$. Dann ist b_2 in $\beta^\#$ eine Belegungsvariante von b für D und $TD(\beta^\#, D, I, b_2) = b_2(\beta^\#) = b'_1(\beta^\#) = b_1(\beta^+) = TD(\beta^+, D, I, b_1)$. Sodann gilt nach Annahme für β^+, $\beta^\#$, dass $\beta^+, \beta^\# \notin TT([\theta, \xi, A])$ und damit $b_2{\upharpoonright}TT([\theta, \xi, A]) = b{\upharpoonright}TT([\theta, \xi, A]) = b_1{\upharpoonright}TT([\theta, \xi, A])$. Sodann ist trivialerweise $I{\upharpoonright}TA([\theta, \xi, A]) = I{\upharpoonright}TA([\theta, \xi, A])$. Ferner ist $FV([\theta, \xi, A]) \subseteq \{\zeta\}$ und mit Theorem 1-13 ist $FGRAD([\theta, \xi, A]) = FGRAD(A) < FGRAD(\Delta)$. Damit gilt mit $D, I, b_1 \vDash [\beta^+, \zeta, [\theta, \xi, A]]$ nach I.V., dass $D, I, b_2 \vDash [\beta^\#, \zeta, [\theta, \xi, A]] = [\theta, \xi, [\beta^\#, \zeta, A]]$.

Sodann ist mit $\beta^\# \notin TT(\theta)$ und $\beta^\# \notin TT(\theta')$: $b_2{\upharpoonright}TT(\theta) = b{\upharpoonright}TT(\theta)$ und $b'_1{\upharpoonright}TT(\theta') = b'{\upharpoonright}TT(\theta')$ und somit nach Theorem 5-5-(i) $TD(\theta, D, I, b_2) = TD(\theta, D, I, b)$ und $TD(\theta', D, I', b'_1) = TD(\theta', D, I', b')$ und somit nach Eingangsannahme insgesamt $TD(\theta, D, I, b_2) = TD(\theta', D, I', b'_1)$. Ferner gilt mit $b{\upharpoonright}TT(A) = b'{\upharpoonright}TT(A)$, $b_2(\beta^\#) = b'_1(\beta^\#)$ und $TT([\beta^\#, \zeta, A]) \subseteq TT(A) \cup \{\beta^\#\}$, dass $b_2{\upharpoonright}TT([\beta^\#, \zeta, A]) = b'_1{\upharpoonright}([\beta^\#, \zeta, A])$ und es gilt $I{\upharpoonright}TA([\beta^\#, \zeta, A]) = I{\upharpoonright}(TA([\beta^\#, \zeta, A]) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I{\upharpoonright}(TA(A) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I{\upharpoonright}TA(A) = I'{\upharpoonright}TA(A) = I'{\upharpoonright}(TA(A) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I'{\upharpoonright}(TA([\beta^\#, \zeta, A]) \cap (KONST \cup FUNK \cup PRÄ)) = I'{\upharpoonright}(TA([\beta^\#, \zeta, A])$ und somit $I{\upharpoonright}TA([\beta^\#, \zeta, A]) = I'{\upharpoonright}TA([\beta^\#, \zeta, A])$. Ferner ist $FV([\beta^\#, \zeta, A]) \subseteq \{\xi\}$ und mit Theorem 1-13 ist

FGRAD([$\beta^{\#}$, ζ, A]) < FGRAD(Δ). Damit gilt mit D, I, $b_2 \vDash$ [θ, ξ, [$\beta^{\#}$, ζ, A]] nach I.V.: D, I', $b'_1 \vDash$ [θ', ξ, [$\beta^{\#}$, ζ, A]] = [$\beta^{\#}$, ζ, [θ', ξ, A]] und somit nach Theorem 5-4-(viii): D, I', $b' \vDash$ ⌜$\bigvee\zeta$[θ', ξ, A]⌝. Die R-L-Richtung verläuft analog. ■

Nun werden zur Vereinfachung späterer Beweise einige Konsequenzen des Substitutionslemmas bewiesen.

Theorem 5-7. *Koreferenzialität*
Wenn (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D ist, $\xi \in$ VAR, θ, $\theta' \in$ GTERM und TD(θ, D, I, b) = TD(θ', D, I, b), dann:

(i) Für alle $\theta^+ \in$ TERM mit FV(θ^+) $\subseteq$ {ξ} gilt: TD([θ, ξ, θ^+], D, I, b) = TD([θ', ξ, θ^+], D, I, b), und

(ii) Für alle $\Delta \in$ FORM mit FV(Δ) $\subseteq$ {ξ} gilt: D, I, $b \vDash$ [θ, ξ, Δ] gdw D, I, $b \vDash$ [θ', ξ, Δ].

Beweis: Sei (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D, $\xi \in$ VAR, θ, $\theta' \in$ GTERM und TD(θ, D, I, b) = TD(θ', D, I, b). Dann gilt trivialerweise für alle $\mu \in$ TERM $\cup$ FORM: I↾TA(μ) = I↾TA(μ) und b↾TT(μ) = b↾TT(μ) und damit folgt die Behauptung mit Theorem 5-6. ■

Theorem 5-8. *Invarianz der Erfüllung von Quantorformeln bzgl. Parameterwahl*
Wenn (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D ist, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq$ {ξ} und $\beta \in$ PAR\TT(Δ), dann:

(i) D, I, $b \vDash$ ⌜$\bigwedge\xi\Delta$⌝ gdw für alle b', die in β Belegungsvarianten von b für D sind gilt: D, I, $b' \vDash$ [β, ξ, Δ], und

(ii) D, I, $b \vDash$ ⌜$\bigvee\xi\Delta$⌝ gdw es gibt b', das in β Belegungsvariante von b für D ist, so dass D, I, $b' \vDash$ [β, ξ, Δ].

Beweis: Sei (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq$ {ξ}, und $\beta \in$ PAR\TT(Δ). *Zu (i)*: Die R-L-Richtung ergibt sich direkt mit Theorem 5-4-(vii). Gelte nun für die L-R-Richtung D, I, $b \vDash$ ⌜$\bigwedge\xi\Delta$⌝. Dann gibt es ein β^* $\in$ PAR\TT(Δ), so dass für alle b^*, die in β^* Belegungsvarianten von b für D sind gilt: D, I, $b^* \vDash$ [β^*, ξ, Δ]. Sei nun b' in β eine Belegungsvariante von b für D. Sei nun b^* = (b\{(β^*, b(β^*))}) $\cup$ {(β^*, b'(β))}. Dann ist b^* in β^* eine Belegungsvariante von b für D und somit gilt D, I, $b^* \vDash$ [β^*, ξ, Δ]. Ferner gilt dann: TD(β^*, D, I, b^*) = b^*(β^*) = b'(β)

= TD(β, D, I, b'). Mit β, β* ∉ TT(Δ) gilt sodann auch b*↾TT(Δ) = b↾TT(Δ) = b'↾TT(Δ) und damit mit Theorem 5-6-(ii): D, I, b' ⊨ [β, ξ, Δ].

Zu (ii): Die R-L-Richtung ergibt sich direkt mit Theorem 5-4-(viii). Gelte nun für die L-R-Richtung D, I, b ⊨ ⌜⋁ξΔ⌝. Dann gibt es ein β* ∈ PAR\TT(Δ) und b*, das in β* Belegungsvariante von b für D, so dass D, I, b* ⊨ [β*, ξ, Δ]. Sei nun b' = (b\{(β, b(β))}) ∪ {(β, b*(β*))}. Dann ist b' in β eine Belegungsvariante von b für D und es ist TD(β*, D, I, b*) = b*(β*) = b'(β) = TD(β, D, I, b'). Mit β, β* ∉ TT(Δ) gilt sodann auch wieder b*↾TT(Δ) = b'↾TT(Δ) und damit mit Theorem 5-6-(ii): D, I, b' ⊨ [β, ξ, Δ]. ■

Theorem 5-9. *Einfaches Substitutionslemma für Belegungen*
Wenn (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D ist, ξ ∈ VAR, β ∈ PAR und θ ∈ GTERM, dann:

(i) Wenn b' in β eine Belegungsvariante von b für D ist und b'(β) = TD(θ, D, I, b), dann gilt für alle θ^+ ∈ TERM mit FV(θ^+) ⊆ {ξ} und β ∉ TT(θ^+): TD([θ, ξ, θ^+], D, I, b) = TD([β, ξ, θ^+], D, I, b'), und

(ii) Wenn b' in β eine Belegungsvariante von b für D ist und b'(β) = TD(θ, D, I, b), dann gilt für alle Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ} und β ∉ TT(Δ): D, I, b ⊨ [θ, ξ, Δ] gdw D, I, b' ⊨ [β, ξ, Δ].

Beweis: Sei (D, I) ein Modell, b eine Belegung für D, ξ ∈ VAR, β ∈ PAR und θ ∈ GTERM. Sei nun b' in β eine Belegungsvariante von b für D, wobei b'(β) = TD(θ, D, I, b). Sei nun μ ∈ TERM ∪ FORM mit FV(μ) ⊆ {ξ} und β ∉ TT(μ). Dann gilt trivialerweise I↾TA(μ) = I↾TA(μ). Sodann gilt mit β ∉ TT(μ), dass b↾TT(μ) = b'↾TT(μ). Ferner gilt nach Annahme: TD(β, D, I, b') = b'(β) = TD(θ, D, I, b).

Damit folgt nach Theorem 5-6-(i) für alle θ^+ ∈ TERM mit FV(θ^+) ⊆ {ξ} und β ∉ TT(θ^+): TD([θ, ξ, θ^+], D, I, b) = TD([β, ξ, θ^+], D, I, b') und mit Theorem 5-6-(ii) für alle Δ ∈ FORM, wobei FV(Δ) ⊆ {ξ} und β ∉ TT(Δ): D, I, b ⊨ [θ, ξ, Δ] gdw D, I, b' ⊨ [β, ξ, Δ]. ■

Definition 5-9. *Vierstellige modelltheoretische Erfüllung für Mengen*
$D, I, b \; {}_{\mathrm{M}}\!\vDash X$
gdw
(D, I) ist ein Modell, b ist eine Belegung für D, $X \subseteq$ GFORM und für alle $\Delta \in X$ gilt: $D, I, b \vDash \Delta$.

Definition 5-10. *Modelltheoretische Konsequenz*
$X \vDash \Gamma$
gdw
$X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM und für alle D, I, b gilt: Wenn $D, I, b \; {}_{\mathrm{M}}\!\vDash X$, dann $D, I, b \vDash \Gamma$.

Definition 5-11. *Allgemeingültigkeit*
$\vDash \Gamma$ gdw $\emptyset \vDash \Gamma$.

Definition 5-12. *Erfüllbarkeit*
Γ ist erfüllbar
gdw
$\Gamma \in$ GFORM und es gibt D, I, b, so dass $D, I, b \vDash \Gamma$.

In Definition 5-8 bis Definition 5-12 wurden einige der üblichen modelltheoretischen Begrifflichkeiten eingeführt. Mit der nächsten Definition wird nun noch ein dreistelliger Erfüllungsbegriff für Aussagen, der insbesondere für den Umgang mit parameterfreien Aussagen interessant ist, etabliert. Sodann werden zu den in Definition 5-10 bis Definition 5-13 für geschlossene Formeln eingeführten Begriffen analoge Begriffe für Aussagenmengen etabliert, wie dies bereits mit Definition 5-9 für den in Definition 5-8 für geschlossene Formeln etablierten Erfüllungsbegriff geschehen ist.

Definition 5-13. *Dreistellige modelltheoretische Erfüllung*
$D, I \vDash \Gamma$
gdw
(D, I) ist ein Modell und für alle b, die Belegungen für D sind, gilt: $D, I, b \vDash \Gamma$.

Definition 5-14. *Dreistellige modelltheoretische Erfüllung für Mengen*
$D, I \,_{\mathrm{M}}\!\vDash X$
gdw
(D, I) ist ein Modell, $X \subseteq$ GFORM und für alle $\Delta \in X$ gilt: $D, I \vDash \Delta$.

Definition 5-15. *Modelltheoretische Konsequenz für Mengen*
$X \,_{\mathrm{M}}\!\vDash Y$
gdw
$X \cup Y \subseteq$ GFORM und für alle $\Delta \in Y$ gilt: $X \vDash \Delta$.

Definition 5-16. *Allgemeingültigkeit für Mengen*
$_{\mathrm{M}}\!\vDash X$
gdw
$X \subseteq$ GFORM und für alle $\Delta \in X$ gilt: $\vDash \Delta$.

Definition 5-17. *Erfüllbarkeit für Mengen*
X ist erfüllbar$_{\mathrm{M}}$
gdw
$X \subseteq$ GFORM und es gibt D, I, b, so dass $D, I, b \vDash X$.

Da im Folgenden immer aus dem Kontext hervorgehen wird, ob auf Aussagen oder Aussagenmengen Bezug genommen wird, unterschlagen wir im Folgenden den Index 'M' bei den Begriffen aus Definition 5-9 und Definition 5-14 bis Definition 5-17. Zuletzt wird nun noch der Abschluss einer Aussagenmenge unter modelltheoretischer Konsequenzschaft definiert. Danach folgen in diesem Abschnitt nur noch einige einfache Hilfstheoreme.

Definition 5-18. *Der Abschluss einer Aussagenmenge unter modelltheoretischer Konsequenz*
$X^{\vDash} = \{\Delta \mid \Delta \in$ GFORM und $X \vDash \Delta\}$.

Theorem 5-10. *Erfüllung überträgt sich auf Untermengen*
Wenn $D, I, b \vDash X$, dann gilt für alle $Y \subseteq X$: $D, I, b \vDash Y$.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Definition 5-9. ■

Theorem 5-11. *Erfüllbarkeit überträgt sich auf Untermengen*
Wenn X erfüllbar ist, dann gilt für alle $Y \subseteq X$: Y ist erfüllbar.

Beweis: Ergibt sich direkt aus Definition 5-17 und Theorem 5-10. ■

Theorem 5-12. *Konsequenzschaft und Erfüllbarkeit*
Wenn $X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM, dann: $X \vDash \Gamma$ gdw $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ ist nicht erfüllbar.

Beweis: Sei $X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM. Sei $X \vDash \Gamma$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann $D, I, b \vDash \Gamma$. Angenommen $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ wäre erfüllbar. Dann gibt es D, I, b, so dass $D, I, b \vDash X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$. Mit Definition 5-9 und Theorem 5-4-(ii) gilt dann $D, I, b \nvDash \Gamma$ und andererseits aber mit Theorem 5-10 $D, I, b \vDash X$ und damit nach Annahme $D, I, b \vDash \Gamma$. Widerspruch!

Sei umgekehrt $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ nicht erfüllbar. Also gibt es keine D, I, b, so dass $D, I, b \vDash X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$. Mit Definition 5-9 gibt es dann keine D, I, b, so dass $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. Gelte nun $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und $D, I, b \nvDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. Damit gilt nach Theorem 5-4-(ii) dann $D, I, b \vDash \Gamma$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann $D, I, b \vDash \Gamma$. Also $X \vDash \Gamma$. ■

5.2 Abgeschlossenheit der modelltheoretischen Konsequenzschaft

Der folgende Abschnitt führt zur Korrektheit hin. Es wird für jede Regel des Redehandlungskalküls (vgl. Kap. 3.1) beziehungsweise für jede Fortsetzungsoperation (vgl. Kap. 3.2) ein modelltheoretisches Theorem bewiesen, dass der jeweiligen Abschlussklausel in Kap. 4.2 entspricht, also Theorem 4-15 (AR) oder einer der Klauseln von Theorem 4-18. Zunächst wird jedoch die modelltheoretische Monotonie (vgl. dazu Theorem 4-16) vorausgeschickt.

Theorem 5-13. *Modelltheoretische Monotonie*
Wenn $X' \subseteq X \subseteq$ GFORM und $X' \vDash \Gamma$, dann $X \vDash \Gamma$.

Beweis: Sei $X' \subseteq X \subseteq$ GFORM und $X' \vDash \Gamma$. Dann gilt für alle D, I, b: Wenn D, I, $b \vDash X'$, dann D, I, $b \vDash \Gamma$. Gelte nun D, I, $b \vDash X$. Dann gilt mit $X' \subseteq X$ nach Theorem 5-10, dass D, I, $b \vDash X'$ und damit nach Annahme, dass D, I, $b \vDash \Gamma$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn D, I, $b \vDash X$, dann D, I, $b \vDash \Gamma$. Also $X \vDash \Gamma$. ■

Theorem 5-14. *Modelltheoretische Entsprechung zu AR*
Wenn $X \subseteq$ GFORM und A $\in X$, dann $X \vDash$ A.

Beweis: Sei $X \subseteq$ GFORM und A $\in X$. Dann gilt nach Definition 5-9 für alle D, I, b: Wenn D, I, $b \vDash X$, dann D, I, $b \vDash$ A und damit $X \vDash$ A. ■

Theorem 5-15. *Modelltheoretische Entsprechung zu SE*
Wenn $X \vDash$ B und A $\in X$, dann $X\setminus\{\text{A}\} \vDash \ulcorner\text{A} \rightarrow \text{B}\urcorner$.

Beweis: Sei $X \vDash$ B und A $\in X$. Sei nun D, I, $b \vDash X\setminus\{\text{A}\}$. Dann ist ($D$, I) ein Modell und b eine Belegung für D und für alle $\Delta \in X\setminus\{\text{A}\}$ gilt: D, I, $b \vDash \Delta$. Dann gilt entweder D, I, $b \vDash$ A oder D, I, $b \nvDash$ A. Im ersten Fall gilt, dass D, I, $b \vDash \Delta$ für alle $\Delta \in X$, und somit gilt D, I, $b \vDash X$. Nach Voraussetzung gilt dann auch D, I, $b \vDash$ B. Mit Theorem 5-4-(v) gilt dann D, I, $b \vDash \ulcorner\text{A} \rightarrow \text{B}\urcorner$. Das gilt aber auch, falls D, I, $b \nvDash$ A. Also gilt für alle D, I, b, für die D, I, $b \vDash X\setminus\{\text{A}\}$ gilt, auch D, I, $b \vDash \ulcorner\text{A} \rightarrow \text{B}\urcorner$. Also $X\setminus\{\text{A}\} \vDash \ulcorner\text{A} \rightarrow \text{B}\urcorner$. ■

Theorem 5-16. *Modelltheoretische Entsprechung zu SB*
Wenn $X \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ und $Y \vDash A$, dann $X \cup Y \vDash B$.

Beweis: Seien $X \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ und $Y \vDash A$. Sei $D, I, b \vDash X \cup Y$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und sodann gilt mit Theorem 5-10 $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y$. Nach Voraussetzung gilt dann $D, I, b \vDash A$ und $D, I, b \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$. Mit letzterem und Theorem 5-4-(v) gilt $D, I, b \nvDash A$ oder $D, I, b \vDash B$ und damit mit $D, I, b \vDash A$, dass $D, I, b \vDash B$. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X \cup Y$gilt, auch $D, I, b \vDash B$. Also $X \cup Y \vDash B$. ■

Theorem 5-17. *Modelltheoretische Entsprechung zu KE*
Wenn $X \vDash A$ und $Y \vDash B$, dann $X \cup Y \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$.

Beweis: Sei $X \vDash A$ und $Y \vDash B$. Gelte $D, I, b \vDash X \cup Y$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und mit Theorem 5-10 gilt $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash A$ und $D, I, b \vDash B$. Mit Theorem 5-4-(iii) gilt dann $D, I, b \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X \cup Y$ gilt, auch $D, I, b \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$. Also $X \cup Y \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$. ■

Theorem 5-18. *Modelltheoretische Entsprechung zu KB*
Wenn $X \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$, dann $X \vDash A$ und $X \vDash B$.

Beweis: Sei $X \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$. Sei $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash \ulcorner A \wedge B \urcorner$. Mit Theorem 5-4-(iii) gilt dann $D, I, b \vDash A$ und $D, I, b \vDash B$. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X$ gilt, auch $D, I, b \vDash A$ und $D, I, b \vDash B$. Also $X \vDash A$ und $X \vDash B$. ■

Theorem 5-19. *Modelltheoretische Entsprechung zu BE*
Wenn $X \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ und $Y \vDash \ulcorner B \rightarrow A \urcorner$, dann $X \cup Y \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$.

Beweis: Sei $X \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ und $Y \vDash \ulcorner B \rightarrow A \urcorner$. Sei $D, I, b \vDash X \cup Y$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und mit Theorem 5-10 gilt $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash$

Y. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ und $D, I, b \vDash \ulcorner B \rightarrow A \urcorner$. Mit Theorem 5-4-(v) gilt dann (i) $D, I, b \nvDash$ A oder $D, I, b \vDash$ B und zum anderen (ii) $D, I, b \nvDash$ B oder $D, I, b \vDash$ A. Angenommen (der erste Fall von (i)), $D, I, b \nvDash$ A. Mit (ii) muss dann auch $D, I, b \nvDash$ B der Fall sein. Angenommen (der zweite Fall von (i)), $D, I, b \vDash$ B. Dann muss mit (ii) auch $D, I, b \vDash$ A der Fall sein. Also gelten $D, I, b \vDash$ A und $D, I, b \vDash$ B oder $D, I, b \nvDash$ A und $D, I, b \nvDash$ B. Mit Theorem 5-4-(vi) gilt dann $D, I, b \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X \cup Y$ gilt, auch $D, I, b \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$. Also $X \cup Y \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$. ■

Es bietet sich an, eine Variante zu Theorem 5-19 als Korollar zu notieren, in der nicht gefordert wird, dass bestimmte Subjunktionen modelltheoretische Konsequenzen von bestimmten Aussagenmengen sein müssen.

Theorem 5-20. *Modelltheoretische Entsprechung zu BE**
Wenn $X \vDash$ B und A $\in X$ und $Y \vDash$ A und B $\in Y$, dann $(X \setminus \{A\}) \cup (Y \setminus \{B\}) \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$.

Beweis: Sei $X \vDash$ B und A $\in X$ und $Y \vDash$ A und B $\in Y$. Nach Theorem 5-15 gelten dann $X \setminus \{A\} \vDash \ulcorner A \rightarrow B \urcorner$ und $Y \setminus \{B\} \vDash \ulcorner B \rightarrow A \urcorner$. Mit Theorem 5-19 folgt $(X \setminus \{A\}) \cup (Y \setminus \{B\}) \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$. ■

Theorem 5-21. *Modelltheoretische Entsprechung zu BB*
Wenn $X \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$ oder $X \vDash \ulcorner B \leftrightarrow A \urcorner$ und $Y \vDash$ A, dann $X \cup Y \vDash$ B.

Beweis: Sei $X \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$ oder $X \vDash \ulcorner B \leftrightarrow A \urcorner$ und $Y \vDash$ A. Sei nun $D, I, b \vDash X \cup Y$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und nach Theorem 5-10 gilt $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash$ A. Sei nun $X \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$. Dann gilt $D, I, b \vDash \ulcorner A \leftrightarrow B \urcorner$. Mit Theorem 5-4-(vi) gilt dann $D, I, b \vDash$ A und $D, I, b \vDash$ B oder $D, I, b \nvDash$ A und $D, I, b \nvDash$ B. Sei nun $X \vDash \ulcorner B \leftrightarrow A \urcorner$. Dann gilt $D, I, b \vDash \ulcorner B \leftrightarrow A \urcorner$. Mit Theorem 5-4-(vi) gilt dann wie im ersten Fall $D, I, b \vDash$ A und $D, I, b \vDash$ B oder $D, I, b \nvDash$ A und $D, I, b \nvDash$ B. $D, I, b \nvDash$ A und $D, I, b \nvDash$ B kann aber nicht der Fall sein, weil $D, I, b \vDash$ A. Also $D, I, b \vDash$ A und $D, I, b \vDash$ B. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X \cup Y$ gilt, auch $D, I, b \vDash$ B. Also $X \cup Y \vDash$ B. ■

Theorem 5-22. *Modelltheoretische Entsprechung zu AE*
Wenn $X \vDash$ A oder $X \vDash$ B, dann $X \vDash$ ⌜A ∨ B⌝.

Beweis: Sei $X \vDash$ A oder $X \vDash$ B. Sei $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D. Nach Voraussetzung gilt sodann auch $D, I, b \vDash$ A oder $D, I, b \vDash$ B. Mit Theorem 5-4-(iv) gilt in beiden Fällen $D, I, b \vDash$ ⌜A ∨ B⌝. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X$ gilt, auch $D, I, b \vDash$ ⌜A ∨ B⌝. Also $X \vDash$ ⌜A ∨ B⌝. ■

Theorem 5-23. *Modelltheoretische Entsprechung zu AB*
Wenn $X \vDash$ ⌜A ∨ B⌝ und $Y \vDash$ ⌜A → Γ⌝ und $Z \vDash$ ⌜B → Γ⌝, dann $X \cup Y \cup Z \vDash$ Γ.

Beweis: Sei $X \vDash$ ⌜A ∨ B⌝ und $Y \vDash$ ⌜A → Γ⌝ und $Z \vDash$ ⌜ B → Γ⌝. Sei $D, I, b \vDash X \cup Y \cup Z$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und mit Theorem 5-10 gilt $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y$ und $D, I, b \vDash Z$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash$ ⌜A ∨ B⌝ und $D, I, b \vDash$ ⌜A → Γ⌝ und $D, I, b \vDash$ ⌜ B → Γ⌝. Mit Theorem 5-4-(iv) und -(v) gelten dann: (i) $D, I, b \vDash$ A oder $D, I, b \vDash$ B und (ii) $D, I, b \nvDash$ A oder $D, I, b \vDash$ Γ und (ii) $D, I, b \nvDash$ B oder $D, I, b \vDash$ Γ. Angenommen (der erste Fall von (i)), $D, I, b \vDash$ A. Dann muss mit (ii) $D, I, b \vDash$ Γ der Fall sein. Angenommen (der zweite Fall von (i)), $D, I, b \vDash$ B. Dann muss mit (iii) auch $D, I, b \vDash$ Γ der Fall sein. In beiden Fällen gilt also $D, I, b \vDash$ Γ. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash X \cup Y \cup Z$ gilt, auch $D, I, b \vDash$ Γ. Also $X \cup Y \cup Z \vDash$ Γ. ■

Es bietet sich an, eine Variante zu Theorem 5-23 als Korollar zu notieren, in der nicht gefordert wird, dass bestimmte Subjunktionen modelltheoretische Konsequenzen von bestimmten Aussagenmengen sein müssen.

Theorem 5-24. *Modelltheoretische Entsprechung zu AB**
Wenn $X \vDash$ ⌜A ∨ B⌝ und $Y \vDash$ Γ und A ∈ Y und $Z \vDash$ Γ und B ∈ Z, dann $X \cup (Y \setminus \{$A$\}) \cup (Z \setminus \{$B$\}) \vDash$ Γ.

Beweis: Sei $X \vDash$ ⌜A ∨ B⌝ und $Y \vDash$ Γ und A ∈ Y und $Z \vDash$ Γ und B ∈ Z. Nach Theorem 5-15 gelten dann $Y \setminus \{$A$\} \vDash$ ⌜A → Γ⌝ und $Z \setminus \{$B$\} \vDash$ ⌜B → Γ⌝. Mit Theorem 5-23 folgt $X \cup (Y \setminus \{$A$\}) \cup (Z \setminus \{$B$\}) \vDash$ Γ. ■

Theorem 5-25. *Modelltheoretische Entsprechung zu NE*
Wenn $X \vDash$ B und $Y \vDash$ ⌜¬B⌝ und A $\in X \cup Y$, dann $(X \cup Y)\backslash\{$A$\} \vDash$ ⌜¬A⌝.

Beweis: Sei $X \vDash$ B und $Y \vDash$ ⌜¬B⌝ und A $\in X \cup Y$. Sei $D, I, b \vDash (X \cup Y)\backslash\{A\}$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D, so dass für alle $\Delta \in (X \cup Y)\backslash\{A\}$ gilt: $D, I, b \vDash \Delta$. Wäre nun $D, I, b \vDash$ A. Dann gilt für alle $\Delta \in X$ und für alle $\Delta \in Y$: $D, I, b \vDash \Delta$ und damit $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash$ B und $D, I, b \vDash$ ⌜¬B⌝. Mit Theorem 5-4-(ii) gilt dann $D, I, b \vDash$ B und $D, I, b \nvDash$ B. Sed certe hoc esse non potest. Also $D, I, b \nvDash$ A und mithin $D, I, b \vDash$ ⌜¬A⌝. Also gilt für alle D, I, b, für die $D, I, b \vDash (X \cup Y)\backslash\{A\}$ gilt, auch $D, I, b \vDash$ ⌜¬A⌝. Also $(X \cup Y)\backslash\{$A$\} \vDash$ ⌜¬A⌝. ■

Theorem 5-26. *Modelltheoretische Entsprechung zu NB*
Wenn $X \vDash$ ⌜¬¬A⌝, dann $X \vDash$ A.

Beweis: Sei $X \vDash$ ⌜¬¬A⌝. Sei $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash$ ⌜¬¬A⌝. Mit Theorem 5-4-(ii) gilt dann $D, I, b \nvDash$ ⌜¬A⌝. Nochmalige Anwendung von Theorem 5-4-(ii) ergibt $D, I, b \vDash$ A. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann $D, I, b \vDash$ A. Also $X \vDash$ A. ■

Theorem 5-27. *Modelltheoretische Entsprechung zu UE*
Wenn $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$,und $X \vDash [\beta, \xi,$ A$]$ und $\beta \notin$ TTFM$(X \cup \{$A$\})$, dann $X \vDash$ ⌜$\bigwedge\xi$A⌝.

Beweis: Sei $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, $X \vDash [\beta, \xi,$ A$]$ und $\beta \notin$ TTFM$(X \cup \{$A$\})$. Sei $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D. Sei b' in β eine Belegungsvariante von b für D. Sei $\Delta \in X$. Also $D, I, b \vDash \Delta$. Nun ist nach Voraussetzung $\beta \notin$ TT(Δ). Also gilt $b\restriction$TT$(\Delta) = b'\restriction$TT$(\Delta)$. Nach Theorem 5-5-(ii) gilt dann auch $D, I, b' \vDash \Delta$. Also $D, I, b' \vDash \Delta$ für alle $\Delta \in X$ und somit $D, I, b' \vDash X$. Mit $X \vDash [\beta, \xi,$ A$]$, ist dann auch $D, I, b' \vDash [\beta, \xi,$ A$]$. Also gilt für alle b', die in β eine Belegungsvariante von b für D sind: $D, I, b' \vDash [\beta, \xi,$ A$]$. Mit Theorem 5-4-(vii) folgt $D, I,$

$b \vDash \ulcorner\bigwedge\xi A\urcorner$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann auch $D, I, b \vDash \ulcorner\bigwedge\xi A\urcorner$. Also $X \vDash \ulcorner\bigwedge\xi A\urcorner$. ■

Theorem 5-28. *Modelltheoretische Entsprechung zu UB*
Wenn $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash \ulcorner\bigwedge\xi A\urcorner$, dann $X \vDash$ [θ, ξ, A].

Beweis: Sei $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash \ulcorner\bigwedge\xi A\urcorner$. Sei $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und nach Voraussetzung gilt $D, I, b \vDash \ulcorner\bigwedge\xi A\urcorner$. Dann gibt es nach Theorem 5-4-(vii) ein $\beta \in$ PAR\TT(A), so dass für alle b', die in β eine Belegungsvariante von b für D sind, gilt $D, I, b' \vDash$ [β, ξ, A]. Sei $b^* = (b \setminus \{(\beta, b(\beta))\}) \cup \{(\beta, \mathrm{TD}(\theta, D, I, b))\}$. Offenbar ist b^* in β eine Belegungsvariante von b für D. Also $D, I, b^* \vDash$ [β, ξ, A]. Mit $b^*(\beta) = \mathrm{TD}(\theta, D, I, b)$ und $\beta \notin$ TT(A) folgt dann mit Theorem 5-9-(ii), dass $D, I, b \vDash$ [θ, ξ, A]. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann $D, I, b \vDash$ [θ, ξ, A]. Also $X \vDash$ [θ, ξ, A]. ■

Theorem 5-29. *Modelltheoretische Entsprechung zu PE*
Wenn $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash$ [θ, ξ, A], dann $X \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$.

Beweis: Sei $\theta \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash$ [θ, ξ, A]. Sei $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und nach Voraussetzung gilt $D, I, b \vDash$ [θ, ξ, A]. Sei nun $\beta \in$ PAR\TT(A) und sei $b^* = (b \setminus \{(\beta, b(\beta))\}) \cup \{(\beta, \mathrm{TD}(\theta, D, I, b))\}$. Dann ist b^* in β eine Belegungsvariante von b für D. Mit $b^*(\beta) = \mathrm{TD}(\theta, D, I, b)$, $\beta \notin$ TT(A) und Theorem 5-9-(ii) folgt dann $D, I, b^* \vDash$ [β, ξ, A]. Mit Theorem 5-4-(viii) folgt damit dann $D, I, b \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann $D, I, b \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$. Also $X \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$. ■

Theorem 5-30. *Modelltheoretische Entsprechung zu PB*
Wenn $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$ und $Y \vDash$ B und $\{[\beta, \xi, A]\} \in Y$ und $\beta \notin$ TTFM(($Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\}) \cup \{A, B\}$), dann $X \cup (Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\}) \vDash$ B.

Beweis: Seien $\beta \in$ PAR, $\xi \in$ VAR, A $\in$ FORM, wobei FV(A) $\subseteq \{\xi\}$, $X \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$, $Y \vDash$ B, $\{[\beta, \xi, A]\} \in Y$ und $\beta \notin$ TTFM(($Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\}) \cup \{A, B\}$). Sei $D, I, b \vDash X \cup (Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\})$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und mit Theorem 5-10 gilt $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\}$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b \vDash \ulcorner\bigvee\xi A\urcorner$. Da $\beta \notin$ TT(A), gibt es dann nach Theorem 5-8-(ii) ein b', das in β eine Belegungsvariante von b für D ist, so dass $D, I, b' \vDash [\beta, \xi, A]$. Sei nun $\Delta' \in Y$, also $\Delta' \in Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\}$ oder $\Delta' = [\beta, \xi, A]$. Im ersten Fall gilt $D, I, b \vDash \Delta'$. Da aber $\beta \notin$ TT(Δ'), gilt $b\restriction$TT(Δ') = $b'\restriction$TT(Δ'). Mit Theorem 5-5-(ii) folgt dann $D, I, b' \vDash \Delta'$. Für den zweiten Fall gilt bereits $D, I, b' \vDash [\beta, \xi, A]$. Also $D, I, b' \vDash \Delta'$ für alle $\Delta' \in Y$ und somit $D, I, b' \vDash Y$. Nach Voraussetzung gilt dann auch $D, I, b' \vDash$ B. Da aber $\beta \notin$ TT(B), gilt $b\restriction$TT(B) = $b'\restriction$TT(B). Mit Theorem 5-5-(ii) folgt dann $D, I, b \vDash$ B. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X \cup (Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\})$, dann $D, I, b \vDash$ B. Also $X \cup (Y\backslash\{[\beta, \xi, A]\}) \vDash$ B. ■

Theorem 5-31. *Modelltheoretische Entsprechung zu IE*
Für alle $X \subseteq$ GFORM und $\theta \in$ GTERM gilt: $X \vDash \ulcorner\theta = \theta\urcorner$.

Beweis: Sei $X \subseteq$ GFORM und $\theta \in$ GTERM. Gelte $D, I, b \vDash X$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D. Mit $\langle$TD(θ, D, I, b), TD(θ, D, I, b)$\rangle \in \{\langle a, a\rangle \mid a \in D\}$ gilt $\langle$TD(θ, D, I, b), TD(θ, D, I, b)$\rangle \in I(\ulcorner=\urcorner)$. Nach Theorem 5-4-(i) gilt dann $D, I, b \vDash \ulcorner\theta = \theta\urcorner$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X$, dann $D, I, b \vDash \ulcorner\theta = \theta\urcorner$. Also $X \vDash \ulcorner\theta = \theta\urcorner$. ■

Theorem 5-32. *Modelltheoretische Entsprechung zu IB*
Wenn θ_0, $\theta_1 \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und $Y \vDash [\theta_0, \xi, \Delta]$, dann $X \cup Y \vDash [\theta_1, \xi, \Delta]$.

Beweis: Seien θ_0, $\theta_1 \in$ GTERM, $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM, wobei FV(Δ) $\subseteq \{\xi\}$, und $X \vDash \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und $Y \vDash [\theta_0, \xi, \Delta]$. Sei nun $D, I, b \vDash X \cup Y$. Dann ist (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D und mit Theorem 5-10 gilt $D, I, b \vDash X$ und $D, I, b \vDash Y$. Nach Voraussetzung gilt dann $D, I, b \vDash \ulcorner\theta_0 = \theta_1\urcorner$ und $D, I, b \vDash [\theta_0, \xi, \Delta]$. Nach Theorem 5-4-(i) gilt dann $\langle$TD(θ_0, D, I, b), TD(θ_1, D, I, b)$\rangle \in I(\ulcorner=\urcorner) = \{\langle a, a\rangle \mid a \in D\}$. Damit gilt TD($\theta_0$, D, I, b) = TD(θ_1, D, I, b). Nach Theorem 5-7-(ii) gilt dann mit $D, I, b \vDash [\theta_0, \xi, \Delta]$ auch $D, I, b \vDash [\theta_1, \xi, \Delta]$. Also gilt für alle D, I, b: Wenn $D, I, b \vDash X \cup Y$, dann $D, I, b \vDash [\theta_1, \xi, \Delta]$. Also $X \cup Y \vDash [\theta_1, \xi, \Delta]$. ■

6 Korrektheit und Vollständigkeit des Redehandlungskalküls

Nachdem der Redehandlungskalkül und die Modelltheorie etabliert wurden, ist nun zu zeigen, dass die jeweiligen Konsequenzschaftsbegriffe äquivalent sind. Wie üblich, zerfällt dieser Adäquatheitsnachweis in zwei Teile: *Erstens* der Nachweis der Korrektheit des Redehandlungskalküls bezüglich der Modelltheorie. Salopp: Alles, was ableitbar ist, folgt auch modelltheoretisch (6.1). *Zweitens* der Nachweis der Vollständigkeit des Redehandlungskalküls bezüglich der Modelltheorie. Salopp: Alles, was modelltheoretisch folgt, ist auch ableitbar (6.2).

Dabei richten wir uns mit der Rede von der *Korrektheit und Vollständigkeit des Redehandlungskalküls* an den Üblichkeiten aus. Umgekehrt kann man die beiden Resultate natürlich auch so lesen, dass in Kap. 6.1 gezeigt wird, dass die modelltheoretische Konsequenzrelation vollständig bezüglich des Kalküls ist. In Kap. 6.2 würde dann gezeigt, dass die modelltheoretische Konsequenzrelation korrekt bezüglich des Kalküls ist. Diese abweichende Redeweise wird im Folgenden nicht weiter verfolgt, um Konfusionen zu vermeiden. Doch obwohl von Korrektheit und Vollständigkeit im üblichen Sinne geredet wird, soll damit nicht unterstellt oder gar behauptet werden, dass die modelltheoretische Konsequenzrelation in irgendeiner Weise vorgängig gegenüber der durch den Kalkül etablierten deduktiven Konsequenz ist und dass Kalküle gegenüber der Modelltheorie zu rechtfertigen wären und nicht umgekehrt. Das Adäquatheitsresultat bringt zunächst nur zum Ausdruck, dass der Redehandlungskalkül und die Modelltheorie mit äquivalenten Konsequenzrelationen verbunden sind.

6.1 Korrektheit des Redehandlungskalküls

Der vorliegende Abschnitt besteht im Wesentlichen aus einem einzelnen Beweis, nämlich dem für Theorem 6-1, das besagt, dass in jeder Ableitung $\mathfrak{H}$ die Konklusion aus VAN($\mathfrak{H}$) modelltheoretisch folgt. Der Beweis wird per Induktion über die Länge einer Ableitung geführt. Dazu wird unter Ausnutzung der I.V. für alle 17 möglichen Fortsetzungen von $\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 zu $\mathfrak{H}$ gezeigt, dass VAN($\mathfrak{H}$) $\vDash$ K($\mathfrak{H}$). Dabei werden zunächst die ›interessanteren‹ Fälle betrachtet, bei denen sich die Menge der verfügbaren Annahmen bei der Fortsetzung von $\mathfrak{H}\restriction\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$-1 zu $\mathfrak{H}$ verkleinert oder vergrößert. Die betreffenden vier

Fälle entsprechen AF, SEF, NEF und PBF beziehungsweise AR, SE, NE und PB. Für die verbleibenden 13 Fälle kann ausgeschlossen werden, dass die letzte Fortsetzung der betrachteten Ableitung zu einem der ersten vier Fälle gehört. Die Korrektheit des Redehandlungskalküls gegenüber der Modelltheorie wird dann am Ende des Abschnitts in Theorem 6-2 etabliert.

Theorem 6-1. *Hauptbeweis der Korrektheit*
Wenn $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$, dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$.

Beweis: Beweis per Induktion über $|\mathfrak{H}|$. Gelte dazu das Theorem für alle $l < |\mathfrak{H}|$ und sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. Dann ist nach Definition 3-19 $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEQ}$ und für alle $j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$ gilt: $\mathfrak{H}\upharpoonright j\text{+}1 \in \mathrm{RGF}(\mathfrak{H}\upharpoonright j)$. Sodann gilt mit Theorem 3-8 für alle $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})$, dass $\mathfrak{H}\upharpoonright j\text{+}1 \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$. Damit gilt nach I.V. für alle $j < \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$: $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j\text{+}1) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright j\text{+}1)$. Nach Theorem 3-6 und Definition 3-18 gilt sodann, dass $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{KEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{BEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{BBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{AEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{UBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{PEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{IEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \in \mathrm{IBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

Ferner ist $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\mathfrak{H} \notin \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Damit lassen sich *zwei* Großfälle unterscheiden. Sei für den *ersten Fall* nun zunächst $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Damit lassen sich vier Unterfälle unterscheiden, wobei für die drei letzteren mit Definition 3-2, Definition 3-10 und Definition 3-16 gilt: $\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \neq 0$ und damit $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1 \in \mathrm{RGS}\setminus\{\emptyset\}$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$.

(*AF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Theorem 3-15-(viii) ist dann $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \in \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Theorem 5-14 liefert dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$.

(*SEF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Theorem 3-19-(x) ist dann $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \ulcorner \mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)))}) \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)\urcorner$. Sodann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Mit Theorem 3-19-(ix) gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)))})\}$ und damit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\mathrm{A}(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)))})\} \vDash$

$K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Mit Theorem 5-15 folgt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\setminus\{A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\} \vDash \ulcorner A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\urcorner$. Theorem 5-13 führt zu $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))}) \rightarrow K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)\urcorner$ und damit zu $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash K(\mathfrak{H})$.

(*NEF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Nach Theorem 3-20-(x) gilt dann $K(\mathfrak{H}) = \ulcorner\neg A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\urcorner$. Mit Theorem 3-20-(i) und Theorem 2-92, gibt es sodann $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$ und $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$, so dass $\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))) \leq j$ und $(j, \mathfrak{H}_j) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ und entweder $A(\mathfrak{H}_j) = \Gamma$ und $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2}) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ oder $A(\mathfrak{H}_j) = \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $A(\mathfrak{H}_{\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-2}) = \Gamma$.

Damit ist entweder $\Gamma = K(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1)$ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner = K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ oder $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner = K(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1)$ und $\Gamma = K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Sei nun zunächst $\Gamma = K(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1)$ und $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner = K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \Gamma$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. Außerdem ist Γ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$ bei j verfügbar und daher nach Theorem 3-29-(iv) $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ und mit Theorem 5-13 dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash \Gamma$. Sei nun $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner = K(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1)$ und $\Gamma = K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash \Gamma$. Sodann ist dann $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$ bei j verfügbar und daher mit Theorem 3-29-(iv) wiederum $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ und mit Theorem 5-13 dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. In beiden Fällen gilt also $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash \Gamma$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. Mit Theorem 3-20-(ix) gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\}$ und damit auch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\} \vDash \Gamma$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\} \vDash \ulcorner\neg\Gamma\urcorner$. Mit Theorem 5-25 (wobei sowohl X als auch Y durch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\}$ instanziiert werden) und Theorem 5-13 folgt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\neg A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\urcorner$ und damit dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash K(\mathfrak{H})$. Für $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner = K(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1)$ und $\Gamma = K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ verläuft der Fall analog.

(*PBF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Nach Theorem 3-21-(x) gilt dann $K(\mathfrak{H}) = K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Mit Theorem 3-21-(i) und Theorem 2-93 gibt es sodann $\beta \in \mathrm{PAR}$, $\xi \in \mathrm{VAR}$, $\Delta \in \mathrm{FORM}$ mit $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$ und $\Gamma \in \mathrm{GFORM}$, so dass $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1}) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ und $(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1, \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ und $A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))}) = [\beta, \xi, \Delta]$ und $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, K(\mathfrak{H})\})$ und es kein $j \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$. Sodann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \vDash K(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) = K(\mathfrak{H})$. Mit Theorem 3-21-(ix) gilt sodann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup$

$\{A(\mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))})\} = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{[\beta, \xi, \Delta]\}$ und somit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{[\beta, \xi, \Delta]\} \vDash K(\mathfrak{H})$. Sodann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))) \vDash \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$.

Nun gilt, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Nach Theorem 3-21-(iii) ist nämlich zunächst $(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1, \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H})$, da $(\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1, \mathfrak{H}_{\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1}) \in \mathrm{VERS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ und $\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1 < \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))$. Also ist $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}$ bei $\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1$ verfügbar. Mit Theorem 3-29-(iv) folgt, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Damit gilt mit Theorem 5-13, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$.

Es gilt bereits, dass $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta, K(\mathfrak{H})\})$. Da es kein $j \leq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))-1$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j)$, gibt es sodann kein $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1))$, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(\mathfrak{H}_j) = \mathrm{TT}(A(\mathfrak{H}_j))$ und $j \neq \max(\mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)))$. Damit gilt mit Theorem 3-21-(iv) und -(v), dass es kein $j \in \mathrm{Dom}(\mathrm{VANS}(\mathfrak{H}))$ gibt, so dass $\beta \in \mathrm{TT}(A(\mathfrak{H}_j))$. Also ist $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}))$ und damit insgesamt $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{\Delta, K(\mathfrak{H})\})$ und schließlich $\beta \notin \mathrm{TTFM}((\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})\setminus\{[\beta, \xi, \Delta]\}) \cup \{\Delta, K(\mathfrak{H})\})$. Nach Theorem 5-30 (wobei X durch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und Y durch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \cup \{[\beta, \xi, \Delta]\}$ instanziiert wird) folgt daher insgesamt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash K(\mathfrak{H})$.

Zweiter Fall: Sei nun $\mathfrak{H} \notin \mathrm{AF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \cup \mathrm{SEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \cup \mathrm{NEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1) \cup \mathrm{PBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Dann ist zunächst nach Theorem 3-28 $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Sodann lassen sich 13 Unterfälle unterscheiden.

(*SBF*, *KEF*, *BEF*, *BBF*, *IBF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{SBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Nach Definition 3-3 gibt es dann $\Delta \in \mathrm{GFORM}$, so dass $\Delta, \ulcorner\Delta \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Wegen $\Delta, \ulcorner\Delta \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ gibt es sodann $j, l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$, so dass Δ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$ bei j und $\ulcorner\Delta \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1$ bei l verfügbar ist. Dann ist $K(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) = \Delta$ und $K(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) = \ulcorner\Delta \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \Delta$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) \vDash \ulcorner\Delta \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner$. Mit Theorem 3-29-(iv) gilt dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$. Da $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})-1)$ gilt damit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und somit mit Theorem 5-13 auch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \Delta$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\Delta \rightarrow K(\mathfrak{H})\urcorner$. Theorem 5-16 ergibt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash K(\mathfrak{H})$. Analog zeigt man für KEF mit Theorem 5-17, für BEF mit Theorem 5-19, für BBF mit Theorem 5-21 und für IBF mit Theorem 5-32, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash K(\mathfrak{H})$.

(*KBF*, *AEF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{KBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-5 gibt es dann $\Delta \in \mathrm{GFORM}$, so dass $\ulcorner\Delta \wedge \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\ulcorner\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \wedge \Delta\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Wegen $\ulcorner\Delta \wedge \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ oder $\ulcorner\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \wedge \Delta\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ gibt es $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$, so dass $\ulcorner\Delta \wedge \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ oder $\ulcorner\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \wedge \Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ bei j verfügbar ist. Dann ist $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) = \ulcorner\Delta \wedge \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ oder $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) = \ulcorner\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \wedge \Delta\urcorner$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \ulcorner\Delta \wedge \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ oder $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \ulcorner\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \wedge \Delta\urcorner$. Mit Theorem 3-29-(iv) gilt dann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und damit mit Theorem 5-13 auch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\Delta \wedge \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ oder $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\mathrm{K}(\mathfrak{H}) \wedge \Delta\urcorner$. Theorem 5-18 ergibt in beiden Fällen $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$. Analog zeigt man für AEF mit Theorem 5-22, dass $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$.

(*ABF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{ABF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-9 gibt es dann $\mathrm{B}, \Delta \in \mathrm{GFORM}$ so dass $\ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner$, $\ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$, $\ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Dann gibt es $j, k, l \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$, so dass $\ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ bei j und $\ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ bei k und $\ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ bei l verfügbar ist. Dann ist $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) = \ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright k+1) = \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) = \ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright k+1) \vDash \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) \vDash \ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Mit Theorem 3-29-(iv) gilt sodann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright k+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und damit $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright k+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright l+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$. Damit gilt mit Theorem 5-13 auch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\mathrm{B} \vee \Delta\urcorner$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ und $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\Delta \rightarrow \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Theorem 5-23 ergibt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$.

(*NBF*, *UBF*, *PEF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{NBF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-11 ist dann $\ulcorner\neg\neg\mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Sodann gibt es $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$, so dass $\ulcorner\neg\neg\ \mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ bei j verfügbar ist. Dann ist $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) = \ulcorner\neg\neg\mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash \ulcorner\neg\neg\mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Mit Theorem 3-29-(iv) gilt sodann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1) = \mathrm{VAN}(\mathfrak{H})$ und daher mit Theorem 5-13 auch $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \ulcorner\neg\neg\mathrm{K}(\mathfrak{H})\urcorner$. Theorem 5-26 ergibt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$. Analog zeigt man für UBF mit Theorem 5-28 und für PEF mit Theorem 5-29, dass dann auch jeweils $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}) \vDash \mathrm{K}(\mathfrak{H})$.

(*UEF*): Sei $\mathfrak{H} \in \mathrm{UEF}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$. Nach Definition 3-12 gibt es dann $\beta \in \mathrm{PAR}$, $\xi \in \mathrm{VAR}$ und $\Delta \in \mathrm{FORM}$, wobei $\mathrm{FV}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, so dass $[\beta, \xi, \Delta] \in \mathrm{VER}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1)$ und $\beta \notin \mathrm{TTFM}(\{\Delta\} \cup \mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1))$ und $\mathrm{K}(\mathfrak{H}) = \ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$. Dann gibt es $j \in \mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$, so dass $[\beta, \xi, \Delta]$ in $\mathfrak{H}\upharpoonright\mathrm{Dom}(\mathfrak{H})\text{-}1$ bei j verfügbar ist. Dann ist $\mathrm{K}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) = [\beta, \xi, \Delta]$. Dann gilt $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \vDash [\beta, \xi, \Delta]$. Mit Theorem 3-29-(iv) gilt sodann $\mathrm{VAN}(\mathfrak{H}\upharpoonright j+1) \subseteq$

VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) = VAN($\mathfrak{H}$) und damit mit Theorem 5-13 auch VAN($\mathfrak{H}$) $\vDash$ [β, ξ, Δ]. Mit VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1) = VAN($\mathfrak{H}$) folgt aus $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta\} \cup$ VAN($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1)) zudem $\beta \notin$ TTFM($\{\Delta\} \cup$ VAN($\mathfrak{H}$)). Theorem 5-27 ergibt VAN($\mathfrak{H}$) $\vDash$ K($\mathfrak{H}$).

(*IEF*): Sei $\mathfrak{H} \in$ IEF($\mathfrak{H}$↾Dom($\mathfrak{H}$)-1). Nach Definition 3-16 gibt es dann $\theta \in$ GTERM, so dass K($\mathfrak{H}$) = $\ulcorner\theta = \theta\urcorner$. Theorem 5-31 ergibt VAN($\mathfrak{H}$) $\vDash$ K($\mathfrak{H}$). ■

Theorem 6-2. *Korrektheit des Redehandlungskalküls gegenüber der Modelltheorie*
Für alle X, Γ: Wenn $X \vdash \Gamma$, dann $X \vDash \Gamma$.

Beweis: Sei $X \vdash \Gamma$. Nach Theorem 3-12 ist dann $X \subseteq$ GFORM und es gibt $\mathfrak{H} \in$ RGS\{∅}, so dass Γ = K($\mathfrak{H}$) und VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$. Mit Theorem 6-1 folgt dann VAN($\mathfrak{H}$) $\vDash \Gamma$. Mit Theorem 5-13 und VAN($\mathfrak{H}$) $\subseteq X$ ergibt sich $X \vDash \Gamma$. ■

6.2 Vollständigkeit des Redehandlungskalküls

Im Folgenden wird über den Nachweis, dass konsistente Mengen erfüllbar sind, die Vollständigkeit des Redehandlungskalküls bezüglich der in Definition 5-10 für L definierten modelltheoretischen Konsequenzschaft gezeigt. Da GFORM, die Menge der geschlossenen L-Formeln, abzählbar ist, reicht es dabei, diesen Nachweis für abzählbare Mengen zu erbringen. Dazu wird der Beweisweg über die Konstruktion von Hintikka-Mengen und den Nachweis, dass Hintikka-Mengen durch die entsprechende kanonische Termstruktur erfüllt werden, gewählt.[15] Dazu ist L zu einer Sprache L_H zu erweitern, die aus L entsteht, indem das Inventar von L um abzählbar unendlich viele neue Individuenkonstanten erweitert wird:

Definition 6-1. *Das Inventar von* L_H *(KONSTERW, PAR, VAR, FUNK, PRÄ, JUNK, QUANT, PERF, HZ)*

Das Inventar von L_H enthält folgende paarweise disjunkte Mengen: Die abzählbar unendliche Menge KONSTERW = KONST ∪ KONSTNEU, wobei KONSTNEU = $\{c^*_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (dabei sei für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$: $c^*_i \neq c^*_j$ und $c^*_i \in \{c^*_i\}$ und es sei KONST ∩ KONSTNEU = ∅), sowie PAR, VAR, FUNK, PRÄ, JUNK, QUANT, PERF, HZ.

Hinweis: Im Folgenden sei für alle mit Definition D definierten Ausdrücke P P_H der für L_H statt L definierte Ausdruck und D_H die entsprechende Definition und für alle Theoreme T sei T_H das entsprechende Theorem für L_H. Dabei gilt für das Verhältnis von P und P_H jeweils, dass geeignete Einschränkungen von P_H bzw. $P_H(a)$ auf L wieder zu P bzw. $P(a)$ führen. So gilt etwa: (i) EAUS = EAUS_H ∩ EAUS, TERM = TERM_H ∩ EAUS, FORM = FORM_H ∩ EAUS, SATZ = SATZ_H ∩ EAUS, SEQ = SEQ_H ∩ SEQ, RGS = RGS_H ∩ SEQ. (ii) TT = $\text{TT}_H{\restriction}$EAUS, TTSEQ = $\text{TTSEQ}_H{\restriction}$SEQ, TTFM = $\text{TTFM}_H{\restriction}$Pot(FORM), A = $\text{A}_H{\restriction}$SATZ, K = $\text{K}_H{\restriction}$SEQ, VAN = $\text{VAN}_H{\restriction}$SEQ. (iii) Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann RGF($\mathfrak{H}$) = $\text{RGF}_H(\mathfrak{H})$ ∩ SEQ. Viele dieser Zusammenhänge sind ohne technische Schwierigkeiten aber nur mit viel Schreibaufwand zu zeigen. Aus diesen Gründen werden die Beweise hier nicht reproduziert. In jenen Fällen, in denen der Zusammenhang nicht unmittelbar einsichtig ist oder im Beweisgang besondere Komplikationen zu bewäl-

[15] Siehe etwa GRÄDEL, E.: *Mathematische Logik,* S. 109–119, WAGNER, H.: *Logische Systeme,* S. 97–101, und KLEINKNECHT, R.: *Grundlagen der modernen Definitionstheorie,* S. 154–157.

tigen sind, werden die Beweise ausgeführt. Zum Beispiel wird der angeführte Zusammenhang RGS = $\text{RGS}_{\text{H}} \cap$ SEQ in Theorem 6-6 mit gezeigt. In Theorem 6-3-(i) wird gezeigt, dass sich $\text{Modelle}_{\text{H}}$ zu Modellen transformieren lassen, indem die jeweilige $\text{Interpretationsfunktion}_{\text{H}}$ auf EAUS (bzw. in diesem Fall genauer: KONST $\cup$ FUNK $\cup$ PRÄ) beschränkt wird. Bei der Substitutionsoperation ist die Äquivalenz für L-Argumente trivial. Um Indexhäufungen hinter eckigen Klammern zu vermeiden (vgl. den Beweis zu Theorem 6-10), wird daher auf den H-Index bei den Substitutionsklammern verzichtet.

Die folgenden Theoreme sichern zunächst den Zusammenhang zwischen der Erfüllbarkeit in L und L_{H} (Theorem 6-3 bis Theorem 6-5) sowie der Konsistenz in L und L_{H} (Theorem 6-6 bis Theorem 6-8). Daran schließt sich dann die Hintikka-Mengen-Definition (Definition 6-2) an. Sodann wird gezeigt, dass alle konsistenten L-Aussagenmengen eine Hintikka-Obermenge haben (Theorem 6-9) und dass jede Hintikka-Menge $\text{erfüllbar}_{\text{H}}$ ist (Theorem 6-10). Daraus ergibt sich dann die Vollständigkeit des Redehandlungskalküls (Theorem 6-11).

Theorem 6-3. *Beschränkungen von L_H-Modellen auf L sind L-Modelle*

(i) Wenn (D, I) ein Modell_{H} ist, dann ist $(D, I{\upharpoonright}(\text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ}))$ ein Modell,

(ii) b ist eine $\text{Belegung}_{\text{H}}$ für D gdw b ist eine Belegung für D, und

(iii) b' ist in β eine $\text{Belegungsvariante}_{\text{H}}$ von b für D gdw b' ist in β eine Belegungsvariante von b für D.

Beweis: *Zu (i)*: Sei (D, I) ein Modell_{H}. Dann ist nach Definition $5\text{-}2_{\text{H}}$ I eine $\text{Interpretationsfunktion}_{\text{H}}$ für D. Dann ist nach Definition $5\text{-}1_{\text{H}}$ $\text{Dom}(I) = \text{KONSTERW} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ}$. Mit $\text{KONST} \subseteq \text{KONSTERW}$, ist dann $\text{Dom}(I{\upharpoonright}(\text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ})) = \text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ}$ und es ist für alle $\mu \in \text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ}$: $I{\upharpoonright}(\text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ})(\mu) = I(\mu)$ und damit ergibt sich mit Definition $5\text{-}1_{\text{H}}$ und Definition 5-1, dass $I{\upharpoonright}(\text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ})$ eine Interpretationsfunktion für D und damit $(D, I{\upharpoonright}(\text{KONST} \cup \text{FUNK} \cup \text{PRÄ}))$ ein Modell ist.

Zu (ii): Mit Definition $5\text{-}3_{\text{H}}$ und Definition 5-3 gilt:

b ist eine $\text{Belegung}_{\text{H}}$ für D
gdw
b ist eine Funktion mit $\text{Dom}(b) = \text{PAR}$, so dass für alle $\beta \in \text{PAR} : b(\beta) \in D$

gdw
b ist eine Belegung für D.

Zu (iii): Mit Definition 5-4$_H$, (ii) und Definition 5-4 gilt:

b' ist in β eine Belegungsvariante$_H$ von b für D
gdw
b' und b sind Belegungen$_H$ für D und $\beta \in$ PAR und $b'\backslash\{(\beta, b'(\beta))\} \subseteq b$
gdw
b' und b sind Belegungen für D und $\beta \in$ PAR und $b'\backslash\{(\beta, b'(\beta))\} \subseteq b$
gdw
b' ist in β eine Belegungsvariante von b für D.

■

Theorem 6-4. *L_H-Modelle verhalten sich im Bezug auf geschlossene L-Terme, L-Aussagen und L-Aussagenmengen genauso wie ihre Beschränkungen auf L*
Wenn (D, I) ein Modell$_H$ und b eine Belegung$_H$ für D ist, dann gilt für alle $\theta \in$ GTERM, $\Gamma \in$ GFORM und $X \subseteq$ GFORM:

(i) $\mathrm{TD_H}(\theta, D, I, b) = \mathrm{TD}(\theta, D, I{\upharpoonright}(\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ}), b)$,

(ii) $D, I, b \vDash_H \Gamma$ gdw $D, I{\upharpoonright}(\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ}), b \vDash \Gamma$, und

(iii) $D, I, b \vDash_H X$ gdw $D, I{\upharpoonright}(\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ}), b \vDash X$.

Beweis: (i) und (ii) zeigt man analog zum Koinzidenzlemma (Theorem 5-5) durch Induktion über den Term- und Formelaufbau. Dabei wird zusätzlich auf Theorem 6-3 zurückgegriffen. (iii) ergibt sich dann mit (ii) und Definition 5-9$_H$ bzw. Definition 5-9. ■

Theorem 6-5. *Eine L-Aussagenmenge ist genau dann L_H-erfüllbar, wenn sie L-erfüllbar ist*
Wenn $X \subseteq$ GFORM, dann: X ist erfüllbar$_H$ gdw X ist erfüllbar.

Beweis: Sei $X \subseteq$ GFORM. Sei nun X erfüllbar$_H$. Dann gibt es nach Definition 5-17$_H$ D, I, b, so dass $D, I, b \vDash_H X$. Mit Theorem 6-4 gilt dann $D, I{\upharpoonright}(\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ}), b \vDash X$ und damit ist X erfüllbar. Sei nun X erfüllbar. Dann gibt es D^-, I^-, b^-, so dass $D^-, I^-, b^- \vDash X$. Nun gibt es ein $a \in D$. Sei nun $I^+ = I^- \cup (\mathrm{KONSTNEU} \times \{a\})$. Dann ist ($D$, I^+) ein Modell$_H$ und b^- eine Belegung$_H$ und $I^+{\upharpoonright}(\mathrm{KONST} \cup \mathrm{FUNK} \cup \mathrm{PRÄ}) = I^-$. Mit Theorem 6-4 ergibt sich dann $D^-, I^+, b^- \vDash_H X$ und damit ist X erfüllbar$_H$. ■

Theorem 6-6. *L-Sequenzen sind genau dann RGS_H-Elemente, wenn sie RGS-Elemente sind*
Wenn $\mathfrak{H} \in$ SEQ, dann: $\mathfrak{H} \in RGS_H$ gdw $\mathfrak{H} \in$ RGS.

Beweis: Der Beweis ist durch Induktion über Dom($\mathfrak{H}$) zu führen. Dabei ist der Induktionsanfang mit $\emptyset \in RGS_H \cap$ RGS gegeben und man überzeugt sich für $\mathfrak{H} \in$ SEQ mit $0 <$ Dom($\mathfrak{H}$) leicht, dass wenn die Behauptung für $\mathfrak{H}\restriction$Dom($\mathfrak{H}$)-1 gilt, sie auch für $\mathfrak{H}$ gilt. ■

Theorem 6-7. *Eine L-Aussage ist genau dann aus einer L-Aussagenmenge L_H-ableitbar, wenn sie aus dieser Menge L-ableitbar ist*
Wenn $X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM, dann: $X \vdash_H \Gamma$ gdw $X \vdash \Gamma$.

Beweis: Sei $X \cup \{\Gamma\} \subseteq$ GFORM. Dann ergibt sich die Rechts-Links-Richtung direkt mit Theorem 3-12, Theorem 6-6 und Theorem $3\text{-}12_H$. Für die Links-Rechts-Richtung gelte nun $X \vdash_H \Gamma$. Dann gibt es nach Theorem $3\text{-}12_H$ ein $\mathfrak{H} \in RGS_H\setminus\{\emptyset\}$, so dass $VAN_H(\mathfrak{H}) \subseteq X$ und $K_H(\mathfrak{H}) = \Gamma$. Dann lässt sich durch Induktion über $|KONSTNEU \cap TTSEQ_H(\mathfrak{H})| \in \mathbb{N}$ zeigen, dass es ein $\mathfrak{H}^* \in SEQ \cap (RGS_H\setminus\{\emptyset\})$ mit $VAN_H(\mathfrak{H}^*) = VAN_H(\mathfrak{H})$ und $K_H(\mathfrak{H}^*) = K_H(\mathfrak{H})$ gibt. Mit Theorem 6-6 gilt dann für ein solches $\mathfrak{H}^*$, dass $\mathfrak{H}^* \in RGS\setminus\{\emptyset\}$, $VAN(\mathfrak{H}^*) = VAN_H(\mathfrak{H}^*) = VAN_H(\mathfrak{H}) \subseteq X$ und $K(\mathfrak{H}^*) = K_H(\mathfrak{H}^*) = K_H(\mathfrak{H}) = \Gamma$. Damit ergibt sich dann $X \vdash \Gamma$.

Sei $|KONSTNEU \cap TTSEQ_H(\mathfrak{H})| = k$ und gelte die Behauptung für alle $\mathfrak{H}^*$ mit $|KONSTNEU \cap TTSEQ_H(\mathfrak{H}^*)| < k$. Angenommen $k = 0$. Offenbar ist dann $\mathfrak{H}$ selbst jenes $\mathfrak{H}^* \in SEQ \cap (RGS_H\setminus\{\emptyset\})$ mit $VAN_H(\mathfrak{H}^*) = VAN_H(\mathfrak{H})$ und $K_H(\mathfrak{H}^*) = K_H(\mathfrak{H})$. Sei nun $0 < k$. Sei nun α die Individuenkonstante mit dem größten Index in $KONSTNEU \cap TTSEQ_H(\mathfrak{H})$. Nun gibt es ein $\beta \in PAR\setminus TTSEQ_H(\mathfrak{H})$. Nach Theorem $4\text{-}9_H$ gibt es dann ein $\mathfrak{H}^* \in RGS_H\setminus\{\emptyset\}$ mit $\alpha \notin TTSEQ_H(\mathfrak{H}^*)$, $TTSEQ_H(\mathfrak{H}^*)\setminus\{\beta\} \subseteq TTSEQ_H(\mathfrak{H})$, $VAN_H(\mathfrak{H}) = \{[\alpha, \beta, B] \mid B \in VAN_H(\mathfrak{H}^*)\}$ und $K_H(\mathfrak{H}) = [\alpha, \beta, K_H(\mathfrak{H}^*)]$. Da wegen $VAN_H(\mathfrak{H}) \subseteq X \subseteq$ GFORM gilt, dass $\alpha \notin TTFM_H(VAN_H(\mathfrak{H}))$, muss $\beta \notin TTFM_H(VAN_H(\mathfrak{H}^*))$ und damit $[\alpha, \beta, B] = B$ für alle $B \in VAN_H(\mathfrak{H}^*)$ gelten. Also $VAN_H(\mathfrak{H}) = VAN_H(\mathfrak{H}^*)$. Da wegen $K_H(\mathfrak{H}) = \Gamma \in$ GFORM auch $\alpha \notin TT_H(K_H(\mathfrak{H}))$, muss sodann $\beta \notin TT_H(K_H(\mathfrak{H}^*))$ und damit $K_H(\mathfrak{H}) = [\alpha, \beta, K_H(\mathfrak{H}^*)] = K_H(\mathfrak{H}^*)$ gelten. Also $K_H(\mathfrak{H}) = K_H(\mathfrak{H}^*)$. Aus $\alpha \notin TTSEQ_H(\mathfrak{H}^*)$ und $TTSEQ_H(\mathfrak{H}^*)\setminus\{\beta\} \subseteq TTSEQ_H(\mathfrak{H})$ folgt zudem $|KONSTNEU \cap TTSEQ_H(\mathfrak{H}^*)| < k$. Nach I.V. gibt es dann ein $\mathfrak{H}'$, so dass $VAN_H(\mathfrak{H}') = VAN_H(\mathfrak{H}^*) = VAN_H(\mathfrak{H})$ und $K_H(\mathfrak{H}') = K_H(\mathfrak{H}^*) = K_H(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{H}' \in SEQ \cap (RGS_H\setminus\{\emptyset\})$. ■

Theorem 6-8. *Eine L-Aussagenmenge ist genau dann L_H-konsistent, wenn sie L-konsistent ist*
Wenn $X \subseteq$ GFORM, dann: X ist konsistent$_{\mathrm{H}}$ gdw X ist konsistent.

Beweis: Sei $X \subseteq$ GFORM und sei X nicht konsistent$_{\mathrm{H}}$. Dann gilt mit Theorem 4-23$_{\mathrm{H}}$ für alle $\Delta \in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$, dass $X \vdash_{\mathrm{H}} \Delta$. Dann gilt $X \vdash_{\mathrm{H}} \ulcorner c_0 = c_0 \urcorner$ und $X \vdash_{\mathrm{H}} \ulcorner \neg(c_0 = c_0)\urcorner$. Nun sind $\ulcorner c_0 = c_0\urcorner$, $\ulcorner\neg(c_0 = c_0)\urcorner \in$ GFORM und damit ergibt sich mit Theorem 6-7: $X \vdash \ulcorner c_0 = c_0\urcorner$ und $X \vdash \ulcorner\neg(c_0 = c_0)\urcorner$ und somit ist X nicht konsistent. Sei nun X nicht konsistent. Dann gibt es A $\in$ GFORM $\subseteq$ GFORM$_{\mathrm{H}}$, so dass $X \vdash$ A und $X \vdash \ulcorner\neg A\urcorner$. Mit Theorem 6-7 ist dann auch $X \vdash_{\mathrm{H}}$ A und $X \vdash_{\mathrm{H}} \ulcorner\neg\, A\urcorner$ und damit ist X inkonsistent$_{\mathrm{H}}$. ■

Definition 6-2. *Hintikka-Menge*
X ist eine Hintikka-Menge
gdw
$X \subseteq$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und:

(i) Wenn A $\in$ AFORM$_{\mathrm{H}} \cap X$, dann $\ulcorner\neg A\urcorner \notin X$,

(ii) Wenn A $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner\neg\neg A\urcorner \in X$, dann A $\in X$,

(iii) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner A \wedge B\urcorner \in X$, dann $\{A, B\} \subseteq X$,

(iv) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner\neg(A \wedge B)\urcorner \in X$, dann $\{\ulcorner\neg A\urcorner, \ulcorner\neg B\urcorner\} \cap X \neq \emptyset$,

(v) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner A \vee B\urcorner \in X$, dann $\{A, B\} \cap X \neq \emptyset$,

(vi) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner\neg(A \vee B)\urcorner \in X$, dann $\{\ulcorner\neg A\urcorner, \ulcorner\neg B\urcorner\} \subseteq X$,

(vii) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner A \rightarrow B\urcorner \in X$, dann $\{\ulcorner\neg A\urcorner, B\} \cap X \neq \emptyset$,

(viii) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner\neg(A \rightarrow B)\urcorner \in X$, dann $\{A, \ulcorner\neg B\urcorner\} \subseteq X$,

(ix) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner A \leftrightarrow B\urcorner \in X$, dann $\{A, B\} \subseteq X$ oder $\{\ulcorner\neg A\urcorner, \ulcorner\neg B\urcorner\} \subseteq X$,

(x) Wenn A, B $\in$ GFORM$_{\mathrm{H}}$ und $\ulcorner\neg(A \leftrightarrow B)\urcorner \in X$, dann $\{A, \ulcorner\neg B\urcorner\} \subseteq X$ oder $\{\ulcorner\neg A\urcorner, B\} \subseteq X$,

(xi) Wenn $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM$_{\mathrm{H}}$, wobei FV$_{\mathrm{H}}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner \in X$, dann gilt für alle $\theta \in$ GTERM$_{\mathrm{H}}$, dass $[\theta, \xi, \Delta] \in X$,

(xii) Wenn $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM$_{\mathrm{H}}$, wobei FV$_{\mathrm{H}}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und $\ulcorner\neg\bigwedge\xi\Delta\urcorner \in X$, dann gibt es ein $\theta \in$ GTERM$_{\mathrm{H}}$, so dass $\ulcorner\neg[\theta, \xi, \Delta]\urcorner \in X$.

(xiii) Wenn $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM$_{\mathrm{H}}$, wobei FV$_{\mathrm{H}}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und $\ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner \in X$, dann gibt es ein $\theta \in$ GTERM$_{\mathrm{H}}$, so dass $[\theta, \xi, \Delta] \in X$,

(xiv) Wenn $\xi \in$ VAR, $\Delta \in$ FORM$_{\mathrm{H}}$, wobei FV$_{\mathrm{H}}(\Delta) \subseteq \{\xi\}$, und $\ulcorner\neg\bigvee\xi\Delta\urcorner \in X$, dann gilt für alle $\theta \in$ GTERM$_{\mathrm{H}}$, dass $\ulcorner\neg[\theta, \xi, \Delta]\urcorner \in X$,

(xv) Wenn $\theta \in$ GTERM$_{\mathrm{H}}$, dann $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in X$,

(xvi) Wenn $\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1} \in$ GTERM$_H$, $\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1} \in$ GTERM$_H$, für alle $i < r$: $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in X$ und $\varphi \in$ FUNK r-stellig, dann $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1}) = \varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner \in X$, und

(xvii) Wenn $\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1} \in$ GTERM$_H$, $\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1} \in$ GTERM$_H$, für alle $i < r$: $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in X$ und $\Phi \in$ PRÄ r-stellig und $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner \in X$, dann $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner \in X$.

Theorem 6-9. *Hintikka-Obermengen für konsistente L-Aussagenmengen*
Wenn $X \subseteq$ GFORM und X konsistent, dann gibt es ein $Y \subseteq$ GFORM$_H$, so dass

(i) Y ist eine Hintikka-Menge und

(ii) $X \subseteq Y$.

Beweis: Sei $X \subseteq$ GFORM und X konsistent. Sei nun g eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und GFORM$_H$. Nun wird unter Rückgriff auf g mit Hilfe der (Konversen der) CANTORschen Paarungsfunktion C eine Aufzählung der $\Gamma \in$ GFORM$_H$ definiert, in der jede Aussage abzählbar unendlich oft als Wert auftritt.[16] Sei dazu $F = \{(k, \Gamma) \mid$ Es gibt $i, j \in \mathbb{N}$, $k = \frac{(i+j)\cdot(i+j+1)}{2}+j$ und $\Gamma = g(j)\}$. Dann ist F eine Funktion von $\mathbb{N}$ nach GFORM$_H$. Zunächst ist Dom(F) $\subseteq \mathbb{N}$. Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit der Surjektivität der CANTORschen Paarungsfunktion und Dom(g) = $\mathbb{N}$, dass es $i, j \in \mathbb{N}$ und $\Gamma \in$ GFORM$_H$ gibt, so dass $k = \frac{(i+j)\cdot(i+j+1)}{2}+j$ und $\Gamma = g(j)$. Also ist auch $\mathbb{N} \subseteq$ Dom(F) und damit insgesamt Dom(F) = $\mathbb{N}$. Nach den Definitionen von F und g gilt sodann Ran(F) $\subseteq$ GFORM$_H$. Seien nun (k, Γ), $(k, \Gamma^*) \in F$. Dann gibt es i, j und i', j' so dass $\frac{(i+j)\cdot(i+j+1)}{2}+j = k = \frac{(i'+j')\cdot(i'+j'+1)}{2}+j'$ und $\Gamma = g(j)$ und $\Gamma^* = g(j')$. Dann ist wegen der Injektivität der CANTORschen Paarungsfunktion $i = i'$ und $j = j'$ und damit mit der Injektivität von g: $\Gamma = g(j) = g(j') = \Gamma^*$. Sodann gilt für alle $l \in \mathbb{N}$ und alle $\Gamma \in$ GFORM$_H$: Es gibt ein $k > l$, so dass $F(k) = \Gamma$. Sei nämlich $l \in \mathbb{N}$ und $\Gamma \in$ GFORM$_H$. Dann gibt es ein $s \in \mathbb{N}$, so dass $\Gamma = g(s)$. Dann ist $l \leq \frac{(l+s)\cdot(l+s+1)}{2}+s < \frac{(l+1+s)\cdot(l+1+s+1)}{2}+s$ und $F(\frac{(l+1+s)\cdot(l+1+s+1)}{2}+s) = g(s) = \Gamma$.

Nun wird unter Rückgriff auf F eine Funktion G auf $\mathbb{N}$ definiert, mit der die gewünschte Hintikka-Obermenge zu X erzeugt wird. Sei dazu $G(0) = X$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei nun $G(k+1)$ wie folgt bestimmt: Wenn $F(k) \in G(k)$, dann:

---

[16] Zur CANTORschen Paarungsfunktion C: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \overset{bij}{\to} \mathbb{N}$ mit $C(i, j) = (i+j)\cdot(i+j+1)/2+j$ siehe etwa DEISER, O.: *Mengenlehre*, S. 112–113.

(i*) Wenn $F(k) = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner \mid$ Für alle $i < r$: $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in G(k)\} \cup \{\ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{s-1}) = \varphi(\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{s-1})\urcorner \mid \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{s-1})\urcorner = \theta_0$ und für alle $i < s$: $\ulcorner\theta^*_i = \theta^+_i\urcorner \in G(k)\}$,

(ii*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k)$,

(iii*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg\neg A\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{A\}$,

(iv*) Wenn $F(k) = \ulcorner A \wedge B\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{A, B\}$,

(v*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg(A \wedge B)\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\}$, falls $G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\}$ konsistent$_H$, $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg B\urcorner\}$ sonst,

(vi*) Wenn $F(k) = \ulcorner A \vee B\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{A\}$, falls $G(k) \cup \{A\}$ konsistent$_H$, $G(k+1) = G(k) \cup \{B\}$ sonst,

(vii*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg(A \vee B)\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner, \ulcorner\neg B\urcorner\}$,

(viii*) Wenn $F(k) = \ulcorner A \rightarrow B\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\neg A\}$, falls $G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\}$ konsistent$_H$, $G(k+1) = G(k) \cup \{B\}$ sonst,

(ix*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg(A \rightarrow B)\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{A, \ulcorner\neg B\urcorner\}$,

(x*) Wenn $F(k) = \ulcorner A \leftrightarrow B\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{A, B\}$, falls $G(k) \cup \{A, B\}$ konsistent$_H$, $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\ \ulcorner\neg B\urcorner\}$ sonst,

(xi*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg(A \leftrightarrow B)\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{A, \ulcorner\neg B\urcorner\}$, falls $G(k) \cup \{A, \ulcorner\neg B\urcorner\}$ konsistent$_H$, $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner, B\}$ sonst,

(xii*) Wenn $F(k) = \ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{[\theta, \xi, \Delta] \mid \theta \in \mathrm{TTFM}_H(G(k)) \cap \mathrm{GTERM}_H\}$,

(xiii*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg\bigwedge\xi\Delta\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg[\alpha, \xi, \Delta]\urcorner\}$ für das $\alpha \in$ KONSTNEU mit dem kleinsten Index, für welches gilt $\alpha \notin \mathrm{TTFM}_H(G(k))$,

(xiv*) Wenn $F(k) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{[\alpha, \xi, \Delta]\}$ für das $\alpha \in$ KONSTNEU mit dem kleinsten Index, für welches gilt $\alpha \notin \mathrm{TTFM}_H(G(k))$,

(xv*) Wenn $F(k) = \ulcorner\neg\bigvee\xi\Delta\urcorner$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg[\theta, \xi, \Delta]\urcorner \mid \theta \in \mathrm{TTFM}_H(G(k)) \cap \mathrm{GTERM}_H\}$.

Wenn $F(k) \notin G(k)$, dann: Wenn $F(k) = \ulcorner\theta = \theta\urcorner$ für ein $\theta \in \mathrm{GTERM}_H$, dann $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\theta = \theta\urcorner\}$, $G(k+1) = G(k)$ sonst.

Man beachte, dass G wohldefiniert ist, da kein $\alpha \in$ KONSTNEU Teilterm eines $\Gamma \in X \subseteq$ GFORM ist und da für jedes $k \in \mathbb{N}$ beim Schritt von $G(k)$ zu $G(k+1)$ höchstens ein Element von KONSTNEU zu den Teiltermen von Elementen von $G(k)$ hinzukommen kann: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist KONSTNEU\TTFM$_H(G(k))$ abzählbar unendlich.

Nach Konstruktion von G gilt nun zunächst:

a) $X = G(0) \subseteq \bigcup\mathrm{Ran}(G)$,

b) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $G(k)$ konsistent$_H$,

c) Wenn $l \leq k$, dann $G(l) \subseteq G(k)$,

d) Wenn $Y \subseteq \bigcup\mathrm{Ran}(G)$ und $|Y| \in \mathbb{N}$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $Y \subseteq G(k)$,

e) $\bigcup\mathrm{Ran}(G)$ ist konsistent$_H$.

a) ergibt sich direkt aus der Definition von G. *Nun zu b)*: $G(0) = X \subseteq$ GFORM ist nach Voraussetzung konsistent und damit mit Theorem 6-8 konsistent$_H$. Gelte nun für k: $G(k)$ ist konsistent$_H$. Wäre nun $G(k+1)$ inkonsistent$_H$. Dann gilt nicht für alle $\Gamma \in G(k+1)$, dass $G(k) \vdash \Gamma$, da sonst mit Theorem 4-19$_H$ auch $G(k)$ inkonsistent$_H$ wäre. Damit ist der Fall $G(k+1) \subseteq G(k) \cup \{\ulcorner\theta = \theta\urcorner\}$ für $\theta \in$ GTERM ausgeschlossen. Also ist $F(k) \in G(k)$. Für diesen Fall sind aus demselben Grund die Fälle (i*)-(iv*), (vii*), (ix*), (xii*) und (xv*) ausgeschlossen (was sich leicht mit den L$_H$-Versionen der Theoreme aus Kap. 4.2 ergibt). Also ist $F(k) \in G(k)$ und $F(k) = \ulcorner\neg(A \wedge B)\urcorner$ oder $F(k) = \ulcorner A \vee B\urcorner$ oder $F(k) = \ulcorner A \rightarrow B\urcorner$ oder $F(k) = \ulcorner A \leftrightarrow B\urcorner$ oder $F(k) = \ulcorner\neg(A \leftrightarrow B)\urcorner$ oder $F(k) = \ulcorner\neg\bigwedge\xi\Delta\urcorner$ oder $F(k) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$. Angenommen $F(k) = \ulcorner\neg(A \wedge B)\urcorner$. Dann ist nach (v*) $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\}$, falls $G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\}$ konsistent$_H$, $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg B\urcorner\}$ sonst. Dann ist $G(k) \cup \{\ulcorner\neg A\urcorner\}$ inkonsistent$_H$ und $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg B\urcorner\}$ ebenfalls. Dann gilt mit Theorem 4-22$_H$: $G(k) \vdash_H$ A und $G(k) \vdash_H$ B und somit $G(k) \vdash_H \ulcorner A \wedge B\urcorner$. Damit wäre dann auch $G(k)$ inkonsistent$_H$. Widerspruch! Die anderen junktoralen Fälle zeigt man analog. Sei nun $F(k) = \ulcorner\neg\bigwedge\xi\Delta\urcorner$. Dann ist nach (xiii*) $G(k+1) = G(k) \cup \{\ulcorner\neg[\alpha, \xi, \Delta]\urcorner\}$ für das $\alpha \in$ KONSTNEU mit dem kleinsten Index, für welches gilt $\alpha \notin$ TTFM$_H(G(k))$. Dann ist $G(k) \cup \{\ulcorner\neg[\alpha, \xi, \Delta]\urcorner\}$ inkonsistent$_H$. Dann gilt $G(k) \vdash_H [\alpha, \xi, \Delta]$. Dann gilt aber wegen $\alpha \notin$ TTFM$_H(G(k))$ und $\ulcorner\neg\bigwedge\xi\Delta\urcorner \in G(k)$, dass $\alpha \notin$ TTFM$_H(G(k) \cup \{\Delta\})$ und damit mit

Theorem 4-24$_H$: $G(k) \vdash_H \ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$. Dann ist $G(k)$ inkonsistent$_H$. Widerspruch! Den Fall $F(k) = \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$ zeigt man analog. Also b).

Durch Induktion über k zeigt man sodann leicht, dass nach der Definition von G c) gilt. Damit gilt auch d): Sei dazu $Y \subseteq \bigcup\mathrm{Ran}(G)$ und $|Y| \in \mathbb{N}$. Dann gilt für alle $\Gamma \in Y$: Es gibt ein $l \in \mathbb{N}$, so dass $\Gamma \in G(l)$. Sei nun $k = \max(\{l \mid$ Es gibt ein $\Gamma \in Y$, so dass $\Gamma \in G(l)\}$. Dann gilt mit c) für alle $\Gamma \in Y$: $\Gamma \in G(k)$.

Damit gilt auch e). Wäre nämlich $\bigcup\mathrm{Ran}(G)$ inkonsistent$_H$. Dann gäbe es eine endliche inkonsistente$_H$ Teilmenge Y von $\bigcup\mathrm{Ran}(G)$ und damit ein k, so dass $G(k)$ inkonsistent$_H$ wäre, was im Widerspruch zu b) steht.

Damit kann nun gezeigt werden, dass $\bigcup\mathrm{Ran}(G)$ eine Hintikka-Menge ist. Zunächst gilt mit e) Klausel (i) von Definition 6-2. Sei nun $\ulcorner\neg\neg A\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Dann gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so dass $\ulcorner\neg\neg A\urcorner \in G(l)$. Sodann gibt es ein $k > l$, so dass $\ulcorner\neg\neg A\urcorner = F(k)$. Dann ist mit c) $\ulcorner\neg\neg A\urcorner \in G(k)$. Dann ist nach (iii*) $A \in G(k+1)$ und damit $A \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Also gilt Klausel (ii) von Definition 6-2. Die anderen junktoralen Fälle (Klauseln (iii) bis (x) von Definition 6-2) und die beiden Partikularfälle (Klauseln (xii) und (xiii) von Definition 6-2) zeigt man analog.

Sei nun $\theta \in \mathrm{GTERM}_H$. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\ulcorner\theta = \theta\urcorner = F(k)$. Dann gilt: Wenn $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \notin G(k)$, dann $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in G(k+1)$ und somit in beiden Fällen: $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Damit gilt zum einen Klausel (xv) von Definition 6-2. Zum anderen gelten damit die beiden Universalfälle, Klauseln (xi) und (xiv) von Definition 6-2. Sei nämlich $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Sei nun $\theta \in \mathrm{GTERM}_H$. Dann ist (wie eben gezeigt) $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in G(l)$ für ein $l \in \mathbb{N}$ und es ist $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner \in G(i)$ für ein $i \in \mathbb{N}$. Sodann gibt es ein $k > l, i$, so dass $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner = F(k)$. Dann ist mit c) $\ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner, \ulcorner\theta = \theta\urcorner \in G(k)$. Dann ist nach (xii*) $[\theta, \xi, \Delta] \in G(k+1)$ und damit $[\theta, \xi, \Delta] \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Also gilt Klausel (xi) von Definition 6-2. Klausel (xiv) zeigt man analog.

Nun verbleiben noch die zwei IB-Klauseln, also Klauseln (xvi) und (xvii), von Definition 6-2. *Zunächst zu (xvi)*: Sei dazu $\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{s-1} \in \mathrm{GTERM}_H$, $\theta^+_0, \ldots, \theta^+_{s-1} \in \mathrm{GTERM}_H$, für alle $i < s$: $\ulcorner\theta^*_i = \theta^+_i\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$ und $\varphi \in$ FUNK s-stellig. Wie bereits gezeigt, ist $\ulcorner\varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{s-1}) = \varphi(\theta^*_0, \ldots, \theta^*_{s-1})\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Damit gibt es mit d) ein $l \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i < s$: $\ulcorner\theta^*_i = \theta^+_i\urcorner \in G(l)$ und $\ulcorner\varphi(\theta^*_0, \dots, \theta^*_{s\text{-}1}) = \varphi(\theta^*_0, \dots, \theta^*_{s\text{-}1})\urcorner \in G(l)$. Dann gibt es ein $k > l$, so dass für $G(k)$ selbiges gilt und $F(k) = \ulcorner\varphi(\theta^*_0, \dots, \theta^*_{s\text{-}1}) = \varphi(\theta^*_0, \dots, \theta^*_{s\text{-}1})\urcorner$. Dann ist mit (i*) $\ulcorner\varphi(\theta^*_0, \dots, \theta^*_{s\text{-}1}) = \varphi(\theta^+_0, \dots, \theta^+_{s\text{-}1})\urcorner \in G(k+1) \subseteq \bigcup\mathrm{Ran}(G)$.

Nun zu (xvii): Sei dazu $\theta_0, \dots, \theta_{r\text{-}1} \in \mathrm{GTERM_H}$, $\theta'_0, \dots, \theta'_{r\text{-}1} \in \mathrm{GTERM_H}$, für alle $i < r$: $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$ und $\Phi \in$ PRÄ r-stellig und $\ulcorner\Phi(\theta_0, \dots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner \in \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. Dann gibt es mit d) ein $l \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i < r$: $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in G(l)$ und $\ulcorner\Phi(\theta_0, \dots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner \in G(l)$. Dann gibt es ein $k > l$, so dass für $G(k)$ selbiges gilt und $F(k) = \ulcorner\Phi(\theta_0, \dots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner$. Dann ist mit (i*) $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \dots, \theta'_{r\text{-}1})\urcorner \in G(k+1) \subseteq \bigcup\mathrm{Ran}(G)$. ■

Theorem 6-10. *Jede Hintikka-Menge ist L_H-erfüllbar*
Wenn X eine Hintikka-Menge ist, dann ist X erfüllbar$_{\mathrm{H}}$.

Beweis: Sei X eine Hintikka-Menge. Sei nun $A = \{(\theta, \theta') \mid (\theta, \theta') \in \mathrm{GTERM_H} \times \mathrm{GTERM_H}$ und $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner \in X\}$.

Dann gilt: A ist eine Äquivalenzrelation über $\mathrm{GTERM_H}$. *Zur Reflexivität* gilt nach Definition 6-2-(xv): $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in X$ und damit $(\theta, \theta) \in A$. Nun *zur Symmetrie*: Sei $(\theta, \theta') \in A$. Dann ist $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner \in X$ und es ist, wie eben gezeigt, $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in X$. Damit ist dann $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner \in X$ und $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in X$ und damit (mit θ für θ_0, θ_1 und θ'_1 und θ' für θ'_0 und $\ulcorner\theta = \theta\urcorner$ für $\ulcorner\Phi(\theta_0, \theta_1)\urcorner$ und $\ulcorner\theta' = \theta\urcorner$ für $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \theta'_1)\urcorner$) nach Definition 6-2-(xvii) auch $\ulcorner\theta' = \theta\urcorner \in X$. Also $(\theta, \theta') \in A$. Nun *zur Transitivität*: Sei $(\theta, \theta') \in A$ und $(\theta', \theta^*) \in A$. Dann gilt: $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner \in X$ und $\ulcorner\theta' = \theta^*\urcorner \in X$. Sodann gilt wie bereits gezeigt $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in X$, womit (mit θ für θ_0 und θ'_0 und θ' für θ_1 und θ^* für θ'_1 und $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner$ für $\ulcorner\Phi(\theta_0, \theta_1)\urcorner$ und $\ulcorner\theta = \theta^*\urcorner$ für $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \theta'_1)\urcorner$) nach Definition 6-2-(xvii) auch $\ulcorner\theta = \theta^*\urcorner \in X$ gilt und damit $(\theta, \theta^*) \in A$.

Sei nun für alle $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$: $[\theta]_A = \{\theta' \mid (\theta, \theta') \in A\}$. Da A eine Äquivalenzrelation über $\mathrm{GTERM_H}$ ist, gilt dann:

a) Für alle $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$: $\theta \in [\theta]_A$.

b) Für alle $\theta, \theta' \in \mathrm{GTERM_H}$: $[\theta]_A = [\theta']_A$ gdw $(\theta, \theta') \in A$ gdw $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner \in X$.

c) Für alle $\theta, \theta' \in \mathrm{GTERM_H}$: Wenn $[\theta]_A \cap [\theta']_A \neq \emptyset$, dann $[\theta]_A = [\theta']_A$.

Die zweite Äquivalenz in b) ergibt sich dabei aus der Definition von A.

Sei nun D_X = GTERM$_H$/A = $\{[\theta]_A \mid \theta \in$ GTERM$_H\}$. Sei sodann I_X eine Funktion mit Dom(I_X) = KONST $\cup$ KONSTNEU $\cup$ FUNK $\cup$ PRÄ, wobei für alle $\alpha \in$ KONST $\cup$ KONSTNEU: $I_X(\alpha) = [\alpha]_A$ und für alle $\varphi \in$ FUNK: Wenn φ r-stellig, dann $I_X(\varphi) = \{(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle, [\theta^*]_A) \mid (\langle\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\rangle, \theta^*) \in {}^r$GTERM$_H \times$ GTERM$_H$ und $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \theta^{*}\urcorner \in X\}$ und für alle $\Phi \in$ PRÄ: Wenn Φ r-stellig, dann $I_X(\Phi) = \{\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle \mid \langle\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\rangle \in {}^r$GTERM$_H$ und $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in X\}$. Sei zuletzt b_X eine Funktion mit Dom(b_X) = PAR und für alle $\beta \in$ PAR: $b_X(\beta) = [\beta]_A$.

Dann ist nach Definition 5-1$_H$ I_X eine Interpretationsfunktion$_H$ für D_X. Zunächst gilt für alle $\alpha \in$ KONST $\cup$ KONSTNEU: $I_X(\alpha) = [\alpha]_A \in D_X$. Sei nun $\varphi \in$ FUNK r-stellig. Dann ist $I_X(\varphi) = \{(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle, [\theta^*]_A) \mid (\langle\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\rangle, \theta^*) \in {}^r$GTERM$_H \times$ GTERM$_H$ und $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \theta^{*}\urcorner \in X\}$. Damit ist $I_X(\varphi) \subseteq {}^rD_X \times D_X$. Sei nun $\langle a_0, \ldots, a_{r-1}\rangle \in {}^rD_X$. Dann gibt es $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in$ GTERM$_H$, so dass für alle $i < r$: $a_i = [\theta_i]_A$. Sodann gilt mit Definition 6-2-(xv) $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in X$ und damit $(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle, [\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})]_A) \in I_X(\varphi)$ und also $\langle a_0, \ldots, a_{r-1}\rangle \in$ Dom($I_X(\varphi)$). Seien nun $(\langle a_0, \ldots, a_{r-1}\rangle, a^*) \in I_X(\varphi)$ und $(\langle a_0, \ldots, a_{r-1}\rangle, a^+) \in I_X(\varphi)$. Dann gibt es $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}$ und θ^*, so dass für alle $i < r$: $a_i = [\theta_i]_A$ und $a^* = [\theta^*]_A$ und $(\langle\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}\rangle, \theta^*) \in {}^r$GTERM$_H \times$ GTERM$_H$ und $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \theta^{*}\urcorner \in X$ und es gibt $\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}$ und θ^+, so dass für alle $i < r$: $a_i = [\theta'_i]_A$ und $a^+ = [\theta^+]_A$ und $(\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}\rangle, \theta^+) \in {}^r$GTERM$_H \times$ GTERM$_H$ und $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}) = \theta^{+}\urcorner \in X$. Dann gilt für alle $i < r$: $[\theta_i]_A = a_i = [\theta'_i]_A$. Damit gilt dann für alle $i < r$: $(\theta_i, \theta'_i) \in A$ und damit $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in X$. Damit gilt nach Definition 6-2-(xvi): $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner \in X$ und damit mit b): $[\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]_A = [\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner]_A$. Mit $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \theta^{*}\urcorner \in X$ und $\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}) = \theta^{+}\urcorner \in X$ und b) gilt sodann auch $[\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]_A = [\theta^*]_A$ und $[\ulcorner\varphi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner]_A = [\theta^+]_A$ und damit insgesamt $a^* = [\theta^*]_A = [\theta^+]_A = a^+$. Also ist $I_X(\varphi)$ insgesamt eine r-stellige Funktion über D_X. Ferner gilt für alle $\Phi \in$ PRÄ: Wenn Φ r-stellig ist, dann $I_X(\Phi) \subseteq {}^rD_X$. Zuletzt gilt $I_X(\ulcorner=\urcorner) = \{\langle a, a\rangle \mid a \in D_X\}$. Sei nämlich $\langle a, a'\rangle \in I_X(\ulcorner=\urcorner)$. Dann gibt es $\theta, \theta' \in$ GTERM$_H$, so dass $a = [\theta]_A$ und $a' = [\theta']_A$ und $\ulcorner\theta = \theta'\urcorner \in X$. Damit ergibt sich mit b): $a = [\theta]_A = [\theta']_A = a'$. Sei nun $a \in D_X$. Dann gibt es ein $\theta \in$

$\mathrm{GTERM_H}$, so dass $a = [\theta]_A$. Dann gilt nach Definition 6-2-(xv) $\ulcorner\theta = \theta\urcorner \in X$ und damit ergibt sich $\langle a, a\rangle \in I_x(\ulcorner{=}\urcorner)$. Damit ist dann gemäß Definition 5-2$_\mathrm{H}$ (D_x, I_x) ein Modell$_\mathrm{H}$. Sodann sieht man leicht ein, dass b_x eine Belegung$_\mathrm{H}$ für D_x ist.

Sodann gilt für alle $\varphi \in$ FUNK: Wenn φ r-stellig ist und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in \mathrm{GTERM_H}$, dann: $I_x(\varphi)(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle) = [\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]_A$. Seien dazu $\varphi \in$ FUNK r-stellig und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in \mathrm{GTERM_H}$. Dann gilt mit Definition 6-2-(xv) $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1}) = \varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in X$ und damit $(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle, [\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})]_A) \in I_x(\varphi)$ und damit $I_x(\varphi)(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle) = [\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]_A$.

Nun wird gezeigt, dass für alle $\Phi \in$ PRÄ: Wenn Φ r-stellig ist und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in \mathrm{GTERM_H}$, dann: $\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle \in I_x(\Phi)$ gdw $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in X$. Seien dazu $\Phi \in$ PRÄ, Φ r-stellig und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in \mathrm{GTERM_H}$. Gelte nun zunächst $\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle \in I_x(\Phi)$. Dann gibt es $\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}$, so dass für alle $i < r$: $[\theta_i]_A = [\theta'_i]_A$ und $\langle\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1}\rangle \in {}^{r}\mathrm{GTERM_H}$ und $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner \in X$. Dann gilt mit b) für alle $i < r$: $\ulcorner\theta_i = \theta'_i\urcorner \in X$. Mit der oben gezeigten Symmetrie gilt dann für alle $i < r$: $\ulcorner\theta'_i = \theta_i\urcorner \in X$. Sodann gilt $\ulcorner\Phi(\theta'_0, \ldots, \theta'_{r-1})\urcorner \in X$ und damit nach Definition 6-2-(xvii) auch $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in X$. Sei nun umgekehrt $\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in X$. Dann ergibt sich leicht, dass $\langle[\theta]_0, \ldots, [\theta]_{r-1}\rangle \in I_x(\Phi)$.

Sodann ergibt sich mit Theorem 5-2$_\mathrm{H}$ durch Induktion über den Termaufbau für alle $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$: $\mathrm{TD}(\theta, D_x, I_x, b_x) = [\theta]_A$. Sei nämlich $\alpha \in$ KONST $\cup$ KONSTNEU. Dann ist $\mathrm{TD}(\alpha, D_x, I_x, b_x) = I_x(\alpha) = [\alpha]_A$. Sei $\beta \in$ PAR. Dann ist $\mathrm{TD}(\beta, D_x, I_x, b_x) = b_x(\beta) = [\beta]_A$. Gelte die Behauptung nun für $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in \mathrm{GTERM_H}$ und sei $\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner \in \mathrm{FTERM_H}$. Dann ist $\mathrm{TD_H}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner, D_x, I_x, b_x) = I_x(\varphi)(\langle\mathrm{TD}(\theta_0, D_x, I_x, b_x), \ldots, \mathrm{TD_H}(\theta_{r-1}, D_x, I_x, b_x)\rangle)$ und damit mit I.V. $\mathrm{TD_H}(\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner, D_x, I_x, b_x) = I_x(\varphi)(\langle[\theta_0]_A, \ldots, [\theta_{r-1}]_A\rangle) = [\ulcorner\varphi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner]_A$.

Damit gilt dann für alle $\mathrm{A} \in \mathrm{AFORM_H}$: $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \mathrm{A}$ gdw $\mathrm{A} \in X$. Sei nämlich $\mathrm{A} \in \mathrm{AFORM_H}$. Dann gibt es $\Phi \in$ PRÄ, Φ r-stellig, und $\theta_0, \ldots, \theta_{r-1} \in \mathrm{GTERM_H}$, so dass $\mathrm{A} = \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$. Dann gilt:

$D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \mathrm{A}$

gdw

$D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r-1})\urcorner$

gdw

$\langle \mathrm{TD_H}(\theta_0, D_x, I_x, b_x), \ldots, \mathrm{TD_H}(\theta_{r\text{-}1}, D_x, I_x, b_x)\rangle \in I_x(\Phi)$

gdw

$\langle [\theta]_0, \ldots, [\theta]_{r\text{-}1}\rangle \in I_x(\Phi)$

gdw

$\ulcorner\Phi(\theta_0, \ldots, \theta_{r\text{-}1})\urcorner \in X$

gdw

$\mathrm{A} \in X$.

Nun wird durch Induktion über $\mathrm{FGRAD_H}(\Gamma)$ gezeigt: Wenn $\Gamma \in X$, dann $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \Gamma$ und wenn $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner \in X$, dann $D_x, I_x, b_x \nvDash_\mathrm{H} \Gamma$. Daraus ergibt sich unmittelbar $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} X$ und damit, dass X erfüllbar$_\mathrm{H}$ ist.

Gelte die Behauptung für alle $k < \mathrm{FGRAD_H}(\Gamma)$. Sei nun $\mathrm{FGRAD_H}(\Gamma) = 0$. Dann ist $\Gamma \in \mathrm{AFORM_H}$. Sei nun $\Gamma \in X$. Dann gilt: $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \Gamma$. Sei nun $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner \in X$. Dann gilt mit Definition 6-2-(i), $\Gamma \notin X$ und damit: $D_x, I_x, b_x \nvDash_\mathrm{H} \Gamma$.

Sei nun $\mathrm{FGRAD_H}(\Gamma) > 0$. Dann ist $\Gamma \in \mathrm{JFORM_H} \cup \mathrm{QFORM_H}$. Zunächst wird nun gezeigt: Wenn $\Gamma \in X$, dann $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \Gamma$. Sei dazu $\Gamma \in X$. Es können *sieben* Fälle unterschieden werden. *Erstens*: Sei $\Gamma = \ulcorner\neg\mathrm{B}\urcorner$. Dann ist $\mathrm{FGRAD_H}(\mathrm{B}) < \mathrm{FGRAD_H}(\Gamma)$ und damit nach I.V. $D_x, I_x, b_x \nvDash_\mathrm{H} \mathrm{B}$ und somit $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \ulcorner\neg\mathrm{B}\urcorner = \Gamma$. *Zweitens*: Sei $\Gamma = \ulcorner\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\urcorner$. Dann gilt mit Definition 6-2-(iii): $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in X$. Da sodann $\mathrm{FGRAD_H}(\mathrm{A}) < \mathrm{FGRAD_H}(\Gamma)$ und $\mathrm{FGRAD_H}(\mathrm{B}) < \mathrm{FGRAD_H}(\Gamma)$, gilt damit nach I.V.: $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \mathrm{A}$ und $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \mathrm{B}$ und damit $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} \ulcorner\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}\urcorner = \Gamma$. Der *dritte* bis *fünfte* Fall verlaufen analog.

Sechstens: Sei $\Gamma = \ulcorner\bigwedge\xi\Delta\urcorner$. Dann gilt mit Definition 6-2-(xi) $[\theta, \xi, \Delta] \in X$ für alle $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$. Da für alle $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$ nach Theorem 1-13$_\mathrm{H}$ $\mathrm{FGRAD_H}([\theta, \xi, \Delta]) < \mathrm{FGRAD_H}(\Gamma)$, gilt damit nach I.V. für alle $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$: $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} [\theta, \xi, \Delta]$. Sei nun $\beta \in \mathrm{PAR}\backslash\mathrm{TT_H}(\Delta)$ und sei b' in β eine Belegungsvariante$_\mathrm{H}$ von b_x für D_x. Dann ist $b'(\beta) \in D_x$ und somit gibt es ein $\theta \in \mathrm{GTERM_H}$, so dass $b'(\beta) = [\theta]_A$. Dann ist $\mathrm{TD_H}(\theta, D_x, I_x, b_x) = [\theta]_A$ und somit $b'(\beta) = \mathrm{TD_H}(\theta, D_x, I_x, b_x)$. Wegen $D_x, I_x, b_x \vDash_\mathrm{H} [\theta, \xi, \Delta]$ folgt dann mit Theorem 5-9$_\mathrm{H}$-(ii): $D_x, I_x, b' \vDash_\mathrm{H} [\beta, \xi, \Delta]$. Also gilt für alle b', die in β

Belegungsvarianten$_H$ von b_x für D_x sind: D_x, I_x, b' $\vDash_H$ [β, ξ, Δ]. Nach Theorem 5-8$_H$-(i) gilt somit D_x, I_x, b_x $\vDash_H$ ⌜⋀ξΔ⌝ = Γ.

Siebtens: Sei Γ = ⌜⋁ξΔ⌝. Dann gibt es mit Definition 6-2-(xiii) ein θ ∈ GTERM$_H$, so dass [θ, ξ, Δ] ∈ X. Nach Theorem 1-13$_H$ ist dann FGRAD$_H$([θ, ξ, Δ]) < FGRAD$_H$(Γ) und damit gilt nach I.V. D_x, I_x, b_x $\vDash_H$ [θ, ξ, Δ]. Sei nun β ∉ TT$_H$(Δ). Sei nun b' = (b_x\{(β, b_x(β))} ∪ {(β, $[θ]_A$)}. Dann ist b' in β eine Belegungsvariante$_H$ von b_x für D_x mit b'(β) = $[θ]_A$. Sodann ist TD$_H$(θ, D_x, I_x, b_x) = $[θ]_A$ und somit b'(β) = TD$_H$(θ, D_x, I_x, b_x). Wegen D_x, I_x, b_x $\vDash_H$ [θ, ξ, Δ] folgt dann mit Theorem 5-9$_H$-(ii): D_x, I_x, b' $\vDash_H$ [β, ξ, Δ]. Also gibt es ein b', das in β Belegungsvariante$_H$ von b_x für D_x ist, so dass D_x, I_x, b' $\vDash_H$ [β, ξ, Δ]. Nach Theorem 5-8$_H$-(ii) gilt somit D_x, I_x, b_x $\vDash_H$ ⌜⋁ξΔ⌝ = Γ.

Nun wird gezeigt: Wenn ⌜¬Γ⌝ ∈ X, dann D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ Γ. Sei nun ⌜¬Γ⌝ ∈ X. Nach Annahme ist 0 < FGRAD$_H$(Γ). Damit können *sieben* Fälle unterschieden werden. *Erstens*: Sei Γ = ⌜¬B⌝. Dann ist mit Definition 6-2-(ii) B ∈ X und weil FGRAD$_H$(B) < FGRAD$_H$(Γ) gilt nach I.V. D_x, I_x, b_x $\vDash_H$ B. Mit Theorem 5-4$_H$-(ii) folgt D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ ⌜¬B⌝ = Γ. *Zweitens*: Sei Γ = ⌜A ∧ B⌝. Dann ist mit Definition 6-2-(iv) ⌜¬A⌝ ∈ X oder ⌜¬B⌝ ∈ X und weil FGRAD$_H$(A) < FGRAD$_H$(Γ) und FGRAD$_H$(B) < FGRAD$_H$(Γ) gilt nach I.V. D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ A oder D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ B. Mit Theorem 5-4$_H$-(iii) folgt D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ ⌜A ∧ B⌝ = Γ. Der *dritte* bis *fünfte* Fall verlaufen analog.

Sechstens: Sei Γ = ⌜¬⋀ξΔ⌝. Dann gilt mit Definition 6-2-(xii): Es gibt ein θ ∈ GTERM$_H$, so dass ¬[θ, ξ, Δ] ∈ X. Nach Theorem 1-13$_H$ gilt dann FGRAD$_H$([θ, ξ, Δ]) < FGRAD$_H$(Γ). Damit gilt nach I.V.: D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ [θ, ξ, Δ]. Sei nun β ∉ TT$_H$(Δ). Sei nun b' in β die Belegungsvariante$_H$ von b_x für D_x mit b'(β) = $[θ]_A$. Dann ist TD$_H$(θ, D_x, I_x, b_x) = $[θ]_A$ und somit b'(β) = TD$_H$(θ, D_x, I_x, b_x). Wegen D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ [θ, ξ, Δ] folgt dann mit Theorem 5-9$_H$-(ii): D_x, I_x, b' $\nvDash_H$ [β, ξ, Δ]. Also gibt es ein b', das in β Belegungsvariante$_H$ von b_x für D_x ist, so dass D_x, I_x, b' $\nvDash_H$ [β, ξ, Δ]. Somit gilt mit Theorem 5-8$_H$-(i) D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ ⌜⋀ξΔ⌝.

Siebtens: Sei Γ = ⌜¬⋁ξΔ⌝. Dann gilt mit Definition 6-2-(xiv) für alle θ ∈ GTERM$_H$ ⌜¬[θ, ξ, Δ]⌝ ∈ X. Da für alle θ ∈ GTERM$_H$ nach Theorem 1-13$_H$ FGRAD$_H$([θ, ξ, Δ]) < FGRAD$_H$(Γ), gilt damit nach I.V. für alle θ ∈ GTERM$_H$: D_x, I_x, b_x $\nvDash_H$ [θ, ξ, Δ]. Sei nun β

$\notin TT_H(\Delta)$ und sei b' in β eine Belegungsvariante$_H$ von b_X für D_X. Dann ist $b'(\beta) \in D_X$ und somit gibt es ein $\theta \in GTERM_H$, so dass $b'(\beta) = [\theta]_A$. Dann ist $TD_H(\theta, D_X, I_X, b_X) = [\theta]_A$ und somit $b'(\beta) = TD_H(\theta, D_X, I_X, b_X)$. Wegen $D_X, I_X, b_X \nvDash_H [\theta, \xi, \Delta]$ folgt dann mit Theorem 5-9$_H$-(ii): $D_X, I_X, b' \nvDash_H [\beta, \xi, \Delta]$. Also gilt für alle b', die in β Belegungsvarianten$_H$ von b_X für D_X sind: $D_X, I_X, b' \nvDash_H [\beta, \xi, \Delta]$. Mit Theorem 5-8$_H$-(ii) gilt somit $D_X, I_X, b_X \nvDash_H \ulcorner\bigvee\xi\Delta\urcorner$.

Damit wurde gezeigt: Wenn $\Gamma \in X$, dann $D_X, I_X, b_X \vDash_H \Gamma$ und wenn $\ulcorner\neg\Gamma\urcorner \in X$, dann $D_X, I_X, b_X \nvDash_H \Gamma$. Allein aus dem ersten Teil ergibt sich bereits gemäß Definition 5-17$_H$ und Definition 5-9$_H$, dass X erfüllbar$_H$ ist. ■

Theorem 6-11. *Modelltheoretische Konsequenzschaft impliziert Ableitbarkeit*
Für alle X, Γ: Wenn $X \vDash \Gamma$, dann $X \vdash \Gamma$.

Beweis: Sei $X \vDash \Gamma$. Dann ist nach Definition 5-10 $X \cup \{\Gamma\} \subseteq GFORM$ und damit auch $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\} \subseteq GFORM$. Sodann ist mit Theorem 5-12 $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ nicht erfüllbar. Wäre nun $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ konsistent. Dann gäbe es mit Theorem 6-9 eine Hintikka-Menge Z, so dass $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\} \subseteq Z$. Dann gilt mit Theorem 6-10, dass Z erfüllbar$_H$ ist, und mit Theorem 5-11$_H$ wäre damit aber auch $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ erfüllbar$_H$. Damit wäre dann mit Theorem 6-5 aber $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ erfüllbar. Widerspruch! Also ist $X \cup \{\ulcorner\neg\Gamma\urcorner\}$ nicht konsistent und damit inkonsistent. Damit gilt mit Theorem 4-22: $X \vdash \Gamma$. ■

Theorem 6-12. *Kompaktheitssatz*

(i) Wenn $X \vDash \Gamma$, dann gibt es ein $Y \subseteq X$, so dass $|Y| \in \mathbb{N}$ und $Y \vDash \Gamma$,

(ii) Wenn $X \subseteq GFORM$, dann: X ist erfüllbar gdw für alle $Y \subseteq X$ mit $|Y| \in \mathbb{N}$ gilt: Y ist erfüllbar.

Beweis: *Zu (i)*: Sei $X \vDash \Gamma$. Mit Theorem 6-11 gilt dann $X \vdash \Gamma$. Also gibt es nach Definition 3-21 ein $\mathfrak{H}$, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus $VAN(\mathfrak{H})$ ist und $VAN(\mathfrak{H}) \subseteq X$. Dann ist nach Theorem 3-9 $|VAN(\mathfrak{H})| \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt nach Definition 3-20 $\mathfrak{H} \in RGS\backslash\{\emptyset\}$ und damit Theorem 6-1 auch $VAN(\mathfrak{H}) \vDash \Gamma$. Also (i).

Zu (ii): Sei $X \subseteq$ GFORM. Die Links-Rechts-Richtung ergibt sich direkt aus Theorem 5-11. Zur Rechts-Links-Richtung: Seien alle $Y \subseteq X$ mit $|Y| \in \mathbb{N}$ erfüllbar. Wäre X nicht erfüllbar. Nach Definition 5-17 gäbe es dann keine D, I, b, so dass $D, I, b \vDash X$. Damit gilt nach Definition 5-10 $X \vDash \ulcorner(\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0) \wedge \neg(\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0)\urcorner$. Mit (i) gibt es dann $Y \subseteq X$, so dass $|Y| \in \mathbb{N}$ und $Y \vDash \ulcorner(\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0) \wedge \neg(\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0)\urcorner$. Angenommen es gäbe D, I, b, so dass D, I, $b \vDash Y$. Nach Definition 5-9 wäre dann (D, I) ein Modell und b eine Belegung für D. Sodann wäre nach Definition 5-10 auch $D, I, b \vDash \ulcorner(\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0) \wedge \neg(\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0)\urcorner$ und damit mit Theorem 5-4-(ii) und -(iii) $D, I, b \vDash \ulcorner\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0\urcorner$ und $D, I, b \nvDash \ulcorner\mathrm{c}_0 = \mathrm{c}_0\urcorner$. Widerspruch! Damit ist Y nicht erfüllbar und es ist $|Y| \in \mathbb{N}$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also ist X erfüllbar. ■

7 Rück- und Ausblick

Es wurde ein pragmatisierter Kalkül des natürlichen Schließens entwickelt, für den gilt: (i) Jede Satzsequenz $\mathfrak{H}$ ist keine Ableitung einer Aussage aus einer Aussagenmenge oder es gibt genau eine Aussage Γ und eine Aussagenmenge X, so dass $\mathfrak{H}$ eine Ableitung von Γ aus X ist, wobei dies für jede Satzsequenz ohne Rückgriff auf metasprachliche Kommentarmittel feststellbar ist. (ii) Die klassische modelltheoretische Konsequenzrelation für die erste Stufe ist äquivalent zu der Konsequenzrelation für den Kalkül. Dabei wurde der Bezug auf die Sprache L fix gehalten, wobei L allerdings eine beliebig, aber fest gewählte Sprache mit bestimmten Eigenschaften ist: Die Entwicklung des Kalküls und seiner Metatheorie lässt sich also auf alle entsprechenden Sprachen übertragen.

Wir gehen davon aus, dass dieser Kalkül geeignet ist, die Behauptung plausibilisieren, dass sich gängige Folgerungspraxen unter alleinigem Rückgriff auf Regelwerke etablieren bzw. erschließen lassen, wobei bei der Ausübung dieser Praxen keine metasprachliche Begleitpraxen (etwa kommentierender Art) nötig sind. Konfessorisch: Folgern in einer Sprache besteht im Vollzug von (regelgeleiteten) Redehandlungen in dieser Sprache und nicht im Vollzug von Redehandlungen in dieser Sprache *und* begleitenden metasprachlichen Redehandlungen. Kurz: Ableiten in einer Sprache ist Redehandeln in *dieser* Sprache. Diese Thesen sind philosophisch zu substantiieren.

Sodann sind weitere metatheoretische Untersuchungen angebracht, etwa eine Ausweitung des Vollständigkeitsresultats für überabzählbare Sprachen und eine genauere Untersuchung des Zusammenhangs der einzelnen Kalkülregeln – exemplarisch: In welchem Sinne sind die logischen Operatoren interdefinierbar? Sodann ist zu untersuchen, wie sich der hier verfolgte Ansatz ausbauen lässt, um Redehandlungsregeln für das axiomatische Setzen, das Definieren, das Konstatieren, das Anziehen von Aussagen als Gründen, den Umgang mit Kennzeichnungen, modalen Operatoren etc. zu entwickeln. Ferner ist zu prüfen, wie sich das Ableiten im Kalkül durch zulässige Regeln handlicher gestalten lässt. *Last but not least* ist eine propädeutische Fassung des Kalküls vorzulegen, mit der gleichzeitig auch demonstriert werden sollte, dass sich Verfügbarkeitsrede und Kalkülregeln für reine Anwendungszwecke auch ohne Rückgriff auf genuin mengentheoretisches Vokabular entwickeln lassen.

Literatur

BOSTOCK, D. *Intermediate Logic* (1997): Intermediate Logic. Oxford: Clarendon Press.

DALEN, D. V. *Logic and structure* (2004): Logic and structure. 4. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer.

DEISER, O. *Mengenlehre* (2004): Einführung in die Mengenlehre. Die Mengenlehre Georg Cantors und ihre Axiomatisierung durch Ernst Zermelo. 2. Aufl. Berlin [u.a.]: Springer.

EBBINGHAUS, H.-D. *Mengenlehre* (2003): Einführung in die Mengenlehre. 4. Aufl. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl.

EBBINGHAUS, H.-D.; FLUM, J.; THOMAS, W. *Mathematische Logik* (1996): Einführung in die mathematische Logik. 4. Aufl. Heidelberg [u.a.]: Spektrum, Akad. Verl.

GLOEDE, K. *Mathematische Logik* (2006/07): Skriptum zur Vorlesung Mathematische Logik. Mathematisches Institut der Universität Heidelberg. http://www.math.uni-heidelberg.de/logic/skripten/math_logik/mathlogik.pdf.

GRÄDEL, E. *Mathematische Logik* (2009): Mathematische Logik. SS 2009. Mathematische Grundlagen der Informatik. RWTH Aachen. http://www.logic.rwth-aachen.de/files/MaLo/script-2up.pdf.

HINST, P. *Pragmatische Regeln* (1982): Pragmatische Regeln des logischen Argumentierens. In: GETHMANN, C. F. (Hg.): Logik und Pragmatik. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 199–215.

HINST, P. *Logischer Grundkurs* (1997/1998): Logischer Grundkurs I. Logische Propädeutik und Mengenlehre. WS 1997/1998. LMU München.

HINST, P. *Logik* (2009): Grundbegriffe der Logik. Typoskript, München.

KALISH, D.; MONTAGUE, R.; MAR, G. *Logic* (1980): Logic. Techniques of formal reasoning. 2. Aufl. San Diego, Ca: Harcourt Brace Jovanovich.

KLEINKNECHT, R. *Grundlagen der modernen Definitionstheorie* (1979): Grundlagen der modernen Definitionstheorie. Königstein/Ts.: Scriptor-Verl.

LINK, G. *Collegium Logicum* (2009): Collegium Logicum: Logische Grundlagen der Philosophie und der Wissenschaften. 2 Bände. Paderborn: Mentis, Bd. 1.

PELLETIER, F. J. *A Brief History of Natural Deduction* (1999): A Brief History of Natural Deduction. In: History and Philosophy of Logic, Bd. 20.1, S. 1–31. Online unter http://www.sfu.ca/~jeffpell/papers/NDHistory.pdf.

PELLETIER, F. J. *A History of Natural Deduction* (2001): A History of Natural Deduction and Elementary Logic Textbooks. 1999. In: WOODS, J.; BROWN, B. (Hgg.): Logical Consequence: Rival Approaches. Proceedings of the 1999 Conference of the Society of Exact Philosophy. Oxford: Hermes Science Publishing, S. 105–138. Online unter http://www.sfu.ca/~jeffpell/papers/pelletierNDtexts.pdf.

PRAWITZ, D. *Natural deduction* (2006): Natural deduction. A proof-theoretical study. Unabridged republ. of the ed. Almqvist & Wiksell, Stockholm, 1965. Mineola, NY: Dover Publ.

RAUTENBERG, W. *Mathematical Logic* (2006): A Concise Introduction to Mathematical Logic. 2. Aufl. New York [u.a.]: Springer.

SHAPIRO, S. *Classical Logic* (2000ff): Classical Logic. In: ZALTA, E. N. (Hg.): The Stanford Encyclopedia of Philosophy, Winter 2009 Edition. http://plato.stanford.edu/archives/win2009/entries/logic-classical/.

SIEGWART, G. *Vorfragen* (1997): Vorfragen zur Wahrheit. München: Oldenbourg.

SIEGWART, G. *Denkwerkzeuge* (2002ff): Denkwerkzeuge. Eine Vorschule der Philosophie. http://www.phil.uni-greifswald.de/bereich2/philosophie/personal/prof-dr-geo-siegwart/skripte.html.

SIEGWART, G. *Alethic Acts* (2007): Alethic Acts and Alethiological Reflection. An Outline of a Constructive Philosophy of Truth. In: SIEGWART, G.; GREIMANN, D. (Hgg.): Truth and speech acts. Studies in the philosophy of language. New York [u.a.]: Routledge, S. 41–58.

TENNANT, N. *Natural logic* (1990): Natural logic. 1. ed., Repr. in paperback with corrections. Edinburgh: Edinburgh Univ. Press.

WAGNER, H. *Logische Systeme* (2000): Logische Systeme der Informatik. WS 2000/2001. Universität Dortmund. http://lrb.cs.uni-dortmund.de/Lehre/LSI_WS9900/lsiws2000.pdf.

Definitionsverzeichnis

Theoremverzeichnis

Regelverzeichnis