scientiæ studia, São Paulo, v. 8, n. 4, p. 597-621, 2010

A solução cartesiana da quadratura do círculo

Davide Crippa

resumo

Apesar do problema da quadratura do círculo, isto é, o problema de construir um quadrado tendo a mesma área que a de um círculo dado, permanecer um problema aberto entre os matemáticos do começo do século xvii, e de Descartes ter até mesmo declarado a impossibilidade de sua solução, ele próprio havia fornecido uma solução, datada dos anos de 1625-1628. Neste artigo, examinarei essa solução comparando-a a uma análise feita por Euler um século mais tarde e também a uma solução conhecida desde os antigos e apresentada por Pappus. Interrogar-me-ei, em seguida, sobre as razões que conduziram Descartes a excluir as duas construções por serem inaceitáveis em relação ao ideal de exatidão explicitado em *A geometria* de 1637.

Palavras-chave • Descartes. Quadratura do círculo. Quadratriz. Pappus. Clavius. Euler. Exatidão geométrica. Aceitabilidade de objetos matemáticos. Arquimedes.

1 A questão da quadratura do círculo

Durante a primeira metade do século xvii, o problema de saber se a quadratura do círculo é possível – isto é, se é possível construir, com métodos geométricos, um quadrado com área igual à de um círculo dado – permaneceu um problema aberto na agenda dos matemáticos (cf. Mancosu, 1996, p. 79).

É talvez surpreendente ver que, em face da prudência mostrada, por exemplo, por Mersenne,[1] a opinião de Descartes quanto à possibilidade da quadratura do círculo é definitiva. Em uma carta de 1638, ao expor a Mersenne quais são os gêneros de problemas que devem ser postos fora do âmbito da geometria, ele julga de maneira categórica que a quadratura do círculo é impossível:

1 Diz Mersenne: "Essa questão é extremamente difícil, pois, com efeito, encontram-se excelentes geômetras que sustentam não ser possível encontrar um quadrado cuja superfície seja igual àquela do círculo, e outros que sustentam o contrário (...). Quanto à quadratura do círculo, ninguém demonstrou que ela seja possível ou impossível, o que faz a muitos não perderem a esperança de encontrá-la" (Mersenne *apud* Mancosu, 1996, p. 79).

> Mas, quanto às questões de geometria que eles vos prometem me propor, as quais não conseguem solucionar e crêem não poder serem resolvidas pelo meu método, eu penso que me encontro em uma posição desvantajosa. Com efeito, primeiramente, é contra o estilo dos geômetras propor aos outros questões que eles mesmos não podem resolver. Depois, há as que são impossíveis, como a quadratura do círculo etc., há outras que, embora sejam possíveis, estendem-se, contudo, para além dos limites que coloquei, não porque exigem outras regras ou mais espírito, mas porque é preciso mais trabalho (...). Enfim, há as que pertencem à aritmética e não à geometria, como aquelas de Diofanto (AT, 2, 90-1).[2]

Ao examinarmos mais de perto o problema, observamos que a designação *impossível* exige uma clarificação. Soluções ao problema da quadratura do círculo, na verdade, haviam sido produzidas desde a Antiguidade. Assim, conforme o testemunho de Pappus no quarto livro da *Collectio mathematica,*[3] testemunho que Descartes conhecia desde sua iniciação às matemáticas, os antigos geômetras haviam tentado resolver a quadratura do círculo por meio de certo número de curvas, tais como a quadratriz, cuja introdução é geralmente atribuída a Hipias (cf. Apêndice 1).

Por outro lado, entre os manuscritos de Descartes publicados com o título *Excerpta ex MSS. R. Des-Cartes* no volume *Opuscula posthuma, physica & mathematica* em Amsterdam em 1701 (cf. AT, 10, p. 285-324), podemos encontrar um fragmento, o de número 6 (AT, 10, p. 304-5), datado dos anos de 1625-1628, que contém uma solução ao problema da quadratura do círculo, atribuída ao próprio Descartes, e diferente em relação àquela de Pappus.

Na sequência deste artigo, propor-me-ei dois objetivos. Em primeiro lugar, farei uma reconstrução da quadratura contida no fragmento 6 dos *Opuscula*. Em seguida, discutirei as razões pelas quais Descartes, tendo em conta certos padrões de exatidão em vigor em *A geometria* de 1637, não aceitou como legítimas nem a solução que encontramos na *Collectio mathematica* de Pappus nem a que ele mesmo havia proposto anos antes.

2 As citações de Descartes serão feitas a partir da edição *standard* das obras completas (*Œuvres de Descartes*), editadas por Charles Adam e Paul Tannery (AT).
3 Utilizarei doravante a tradução em francês feita por Paul Ver Eecke (1933).

2 Quadrando o círculo

2.1 Discussão do fragmento cartesiano

É digno de nota que Descartes jamais retorne ao seu texto a respeito da quadratura do círculo ao longo de sua carreira. A primeira referência a essa demonstração é atribuída a Euler, que lhe dedica um comentário – *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem* –, publicado em 1763, em um periódico intitulado *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, da Academia de St Petersburgh.[4]

O fragmento em que Descartes apresenta sua quadratura é breve, e pode ser citado na íntegra:

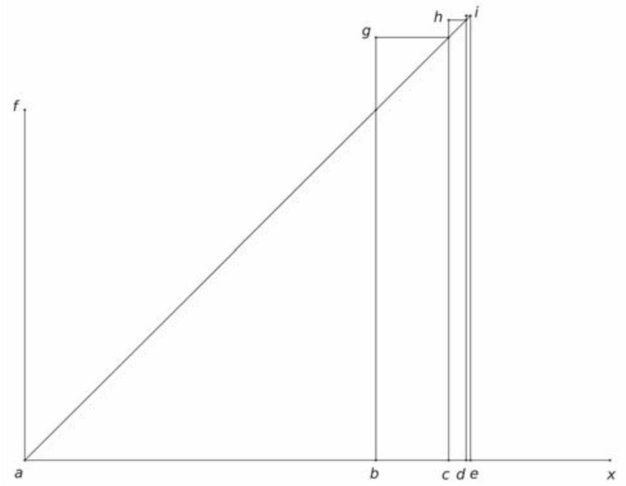

Figura 1

> A quadratura do círculo. Para quadrar o círculo, nada encontro de mais apto do que, sendo dado um quadrado *bf*, juntar o retângulo *cg*, delimitado pelas linhas *ac* e *cb*, igual à quarta parte do quadrado *bf*; e, em seguida, juntar o retângulo *dh*, formado pelos segmentos *da*, *dc*, igual à quarta parte do precedente; e, da mesma maneira, juntar o retângulo *ei* e outros infinitos até atingir o ponto *x*. Todos eles juntos comporão a terça parte do quadrado *bf*. E esta linha *ax* será o diâmetro do círculo, cuja circunferência é igual ao perímetro desse quadrado *bf*. Por outro lado, *ac* é o diâmetro do círculo inscrito no octógono isoperimétrico ao quadrado *bf*, *ad* é o diâmetro do círculo inscrito na figura de 16 lados e *ae*, o diâmetro inscrito na figura de 32 lados, isoperimétrico ao quadrado *bf*; e assim ao infinito (AT, 10, p. 304-5).[5]

4 Uma cópia das quatro primeiras páginas do texto cartesiano (cf. AT, 10, p. 285 ss), contendo o fragmento sobre a quadratura, foi encontrada na Biblioteca de Leyde entre as cartas de Huyghens (Huyg. 29a folia in-4). De sua parte, Euler se refere ao fragmento cartesiano pelo título da edição *Princeps* de 1701: "*In Excerptis ex Manuscriptis Cartesii paucis quidem verbis refertur constructio quidem geometrica promptissime ad circuli veram dimensionem appropinquans* (...)" (Euler, 1763, p. 157), o que parece indicar sua familiaridade com esta última.

5 "*Circuli quadratio. Ad quadrandum circulum nihil aptius invenio, quam si dato quadrato* bf *adiungatur rectangulum* cg *comprehensum sub lineis* ac & cb, *quod sit aequale quartae parti quadrati* bf*; item rectangulum* dh, *factum ex lineis* da, dc, *aequale quartae parti precedentis; & eodem modo rectangulum* ei, *atque alia infinita usque ad* x*; quae omnia simul aequabantur tertiae parti quadrati* bf. *Et haec linea* ax *erit diameter circuli, cujus circunferentia aequalis est circumferentiae huius quadrati* bf*: est autem ac diameter circuli octogono, quadrato bf isoperimetro, inscripti; ad diameter circuli inscripti figurae 16 laterum, ae diameter inscripti figurae 32 laterum, quadrato* bf *isoperimetrae; & sic in infinitum*" (AT, 10, p. 304-5).

O texto pode ser dividido em duas partes: na primeira, Descartes apresenta a construção de uma sequência infinita de retângulos *cg*, *dh*, *ei*..., tal que a área de cada um seja igual a um quarto da do precedente, e a área do primeiro seja igual a um quarto da área de um quadrado dado *bf*, para concluir, a partir daí, que a soma de suas áreas equivale a um terço da área de *bf*.[6] Na segunda, ele afirma que a sequência desses retângulos, construídos como na figura, determina os diâmetros dos círculos inscritos nos polígonos regulares de lado 2^n (para $n \geq 2$), isoperimétricos ao quadrado de perímetro dado *bf*, de maneira que o segmento máximo *ax* determinará a medida do diâmetro do círculo inscrito na figura isoperimétrica de área maior: *ax* será, portanto, o diâmetro do círculo isoperimétrico ao quadrado *bf*.[7]

O problema que Descartes afirma ter resolvido não é, rigorosamente, nem aquele da quadratura do círculo nem aquele da retificação da circunferência, e pode ser resumido assim: sendo dada a medida da circunferência, pede-se que se encontre seu diâmetro. Notemos, entretanto, que Descartes dá ao fragmento o título: *Circulo quadratio* (quadratura do círculo). A equivalência entre os dois resultados pode ser estabelecida sobre a base da primeira proposição do tratado arquimediano da *Medida do círculo*,[8] conhecido entre os matemáticos do século XVII:

> Todo círculo equivale [em área] ao triângulo retângulo no qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto é igual ao raio e o outro é igual ao perímetro [circunferência] (Arquimedes, 1960, p. 127; Heiberg, 1910-1915, 1, p. 259).

Uma vez estabelecida essa equivalência, se conhecermos o raio de um círculo dado e a medida da circunferência, podemos construir uma figura retilínea de área igual àquela do círculo. E, como o fragmento de Descartes presume que se saiba a medida do raio (ou do diâmetro), a partir daquela da circunferência, a quadratura do círculo pode ser, por conseguinte, resolvida.

6 Em outras palavras: $1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + \ldots = S = 1/4(1 + 1/4 + 1/4^2 + 1/4^3 + \ldots) = S + 1/4(1 + S)$. *Ergo* $S = 1/3$. Ou seja, Descartes fornece a soma da progressão geométrica $\sum_{i=1}^{n}(1/4)^n = 1/3$. Podemos observar que esse resultado pode ter sido obtido desta outra série: $\sum_{i=0}^{n}(1/4)^n = 4/3$, cujas aplicações em geometria remontam à quadratura arquimediana da parábola. É, portanto, razoável supor que Descartes tivesse conhecimento da solução, seja pela perspectiva de Arquimedes seja por meio dos calculadores medievais (cf. Boyer, 1959, p. 77).

7 Esse resultado era conhecido de Descartes, que o menciona nas *Regras para a direção do espírito* (AT, 11, p. 388-9).

8 A primeira edição do século XVI foi publicada em Veneza por Lucas Gauricus. Ela contém o tratado sobre a quadratura da parábola e o da dimensão do círculo em uma tradução latina que foi identificada recentemente como sendo a de Guillaume de Moerbeke, feita no século XIII. Essa edição raríssima traz o título: *Campani viri clarissimi Tetragonismus, id est circuli quadratura, Romae edita cum addtionibus Gaurici; Archimedis Syracusani Tetragonismus; de quadratura circuli secundum Boetium. Venetis, 1503, pet. in-4º* (cf. Ver Eecke, 1960 [1921], 1, p. 697-718).

Por outro lado, nenhuma indicação no texto torna explícita a relação entre a construção dos retângulos, cujas áreas estão em sucessão geométrica, e o fato de que suas bases formam a sequência, respectivamente, dos diâmetros dos círculos inscritos (apótemas) em polígonos regulares com 8, 16, 32, 64 lados, *sic in infinitum*, isoperimétricos ao quadrado *bf* inicial.

A fim de dar uma explicação do modo pelo qual se organizam os dois momentos da demonstração cartesiana, utilizarei o comentário feito por Euler em 1763.

2.2 O comentário de Euler

Euler enuncia preliminarmente um problema cuja resolução servirá para explicar a relação entre a construção cartesiana dos retângulos e a sucessão dos diâmetros dos círculos inscritos nos polígonos de lados crescentes em medida dupla. O problema pode ser enunciado como segue:

> Sendo dado um círculo inscrito em um polígono regular de n lados, encontrar um segundo círculo tal que, se for circunscrito ao redor dele um polígono de $2n$ lados, os dois polígonos serão isoperimétricos.

Procedendo por uma espécie de análise conforme o estilo da geometria antiga, Euler supõe o problema resolvido. Em seguida, fornece a primeira circunferência *MNE*, tendo *C* como centro e *CE* como raio. O segmento *EP* é a metade do lado de um polígono regular circunscrito à *MNE*. Em seguida, Euler supõe dado o segmento *QF*, metade do lado do segundo polígono, cujos lados são o dobro do primeiro, e *CF*, o raio do círculo que deve ser determinado. Teremos, consequentemente, $QF = 1/2EP$; e, como o círculo inscrito no polígono de $2n$ lados é maior que o círculo *MNE*, teremos $CE < CF$. Seja *O* a metade do segmento *EP*; então, *QO* será paralelo a *EF*. Enfim, seja *V* o ponto de intersecção entre o raio *CQ* e o lado *EP*. Como *V* está entre *O* e *E*, *EV* será menor do que *EO*. Euler deduz, em seguida, as proporções:

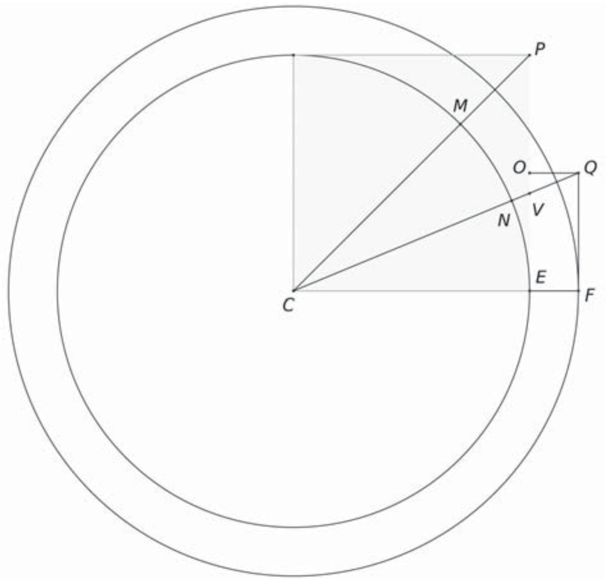

Figura 2

$$EV : CE = FQ : CF \quad \text{e} \quad EV : CE = EP : (CE + CP),$$

que ele escreve como igualdades entre relações:

$$\frac{EV}{CE} = \frac{FQ}{CF} \quad \text{e} \quad \frac{EV}{CE} = \frac{EP}{CE + CP}.$$

A primeira igualdade pode ser deduzida da semelhança entre os triângulos *VCE* e *QFC*, ao passo que a segunda exige um pouco mais de trabalho.[9]

A partir das proporções acima, a seguinte igualdade entre as áreas pode ser facilmente deduzida:

$$\mathrm{r}(CF.EF) = 1/4(\mathrm{q}(CP) - \mathrm{q}(CE)),$$ [10]

escrita por Euler com notação algébrica: .

Como, entretanto, $FQ = 1/2\,EP$ e $\frac{FQ}{CF} = \frac{EP}{CE + CP}$, teremos também:

$$CF = 1/2(CE + CP).$$

Em seguida, eliminando *CE* dos dois membros da última igualdade, teremos:

$$EF = 1/2(CP - CE).$$

Por conseguinte, o produto entre *CF* e *EF* será igual a $1/4(CP^2 - CE^2)$. O ponto *F*, suposto dado como extremo de *QF* (metade do octógono regular), satisfará também a relação seguinte: o retângulo de lados *CF*, *EF* será igual a um quarto do quadrado sobre *EP*.

Como $EO = QF = 1/2\,EP$, o ângulo $QCF = 1/2\,PCF$ e *EP* é perpendicular a *CF*, o ponto *F* poderá ser encontrado como projeção ortogonal sobre *CE* da interseção entre a reta *CV*, bissetriz do ângulo *PCE*, e a mediatriz do segmento *EP*.

9 É preciso considerar: $\frac{EV}{CE} = \tan ECV$; $\frac{EP}{CE} = \tan 2ECV$; $\frac{EP}{CP} = \mathrm{sen}\, 2ECV$. Ora, por meio da fórmula de duplicação da tangente, teremos: $\tan 2ECV = \frac{2\tan ECV}{1 - \tan^2 ECV}$ e $\mathrm{sen}\, 2ECV = \frac{2\tan ECV}{1 + \tan^2 ECV}$. Ao estabelecermos que $\tan ECV = t$, teremos: $\frac{EP}{CE} = \frac{2t}{1 - t^2}$, $\frac{EP}{CP} = \frac{2t}{1 + t^2}$. Por conseguinte: $\frac{CE + CP}{EP} = \frac{1 - t^2 + 1 + t^2}{2t} = \frac{1}{t} = \frac{CE}{EV}$.

10 Utilizaremos a notação r(*AB.CD*) para indicar a área do retângulo de lados *AB*, *CD*, e q(*AB*) para a área do quadrado de lado *AB*.

Uma vez resolvido o primeiro problema, Euler passa a demonstrar a construção cartesiana. Sejam *CE*, *CF*, *CG*, *CH*… (conforme a figura 3) os raios dos círculos inscritos, respectivamente, em um quadrado, em um octógono, em um 16-gono, em um 32-gono… isoperimétricos. Consideremos, em seguida, os segmentos *EP*, *FQ*, *GR*, *HS*, respectivamente, semilados do quadrado, do octógono, do 16-gono … Teremos, sobre a base do resultado precedente:

$$FQ = \frac{1}{2}EP\ ,\quad GR = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{4}EP\ ,\quad HS = \frac{1}{2}GR = \frac{1}{4}FQ = \frac{1}{4}EP\ldots$$

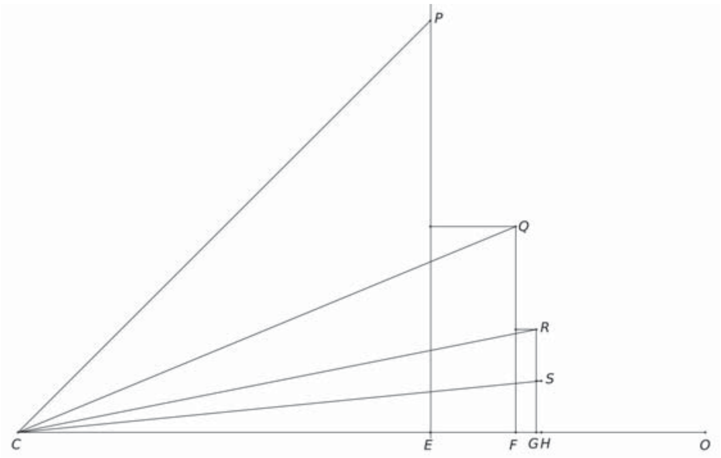

Figura 3

Sabemos também, a partir do problema precedente, que: $CF.EF = 1/4\,EP^2 = FQ^2$. Do mesmo modo, teremos:

$$CG.FG = \frac{1}{4}FQ^2 = \frac{1}{4}CF.EF = GR^2 = \frac{1}{16}EP^2\ ,$$

$$CH.GH = \frac{1}{4}GR^2 = \frac{1}{4}CG.FG = HS^2 = \frac{1}{32}EP^2 \quad \text{etc.}$$

Se dobrarmos os semilados dos polígonos, poderemos definir uma sucessão de pontos *F*, *G*, *H*, *I*… tal que os retângulos construídos r (*CG*, *FG*) e r (*CH*, *GH*)… serão iguais a um quarto dos respectivos quadrados q (*EP*), q (*QF*) etc.. Assim:

$$r(CF,EF) = \frac{1}{4}EP^2 ,$$

$$r(CG,FG) = \frac{1}{16}EP^2 ,$$

$$r(CH,GH) = \frac{1}{32}EP^2 .$$

Desse modo, a soma dos retângulos (à esquerda) corresponderá ao limite da série geométrica de razão 1/4, para n tendendo ao infinito, multiplicada pela área do quadrado q(*EP*), isto é, $1/3\,EP^2$, como na construção cartesiana. Notemos também que a solução do precedente problema fornece uma maneira de construir a sucessão de pontos *F*, *G*, *H*, *I*... com régua e compasso. Se chamarmos tais pontos, para simplificar, $F1$, $F2$, $F3$..., cada um deles será a projeção do ponto de interseção entre a bissetriz do ângulo *PCE*/n e a normal ao segmento *CE*/n (n = 1, 2, 3...) sobre *CE* (ou, eventualmente, sobre seu prolongamento).

Cabe observar que Euler separa o comentário da proposição cartesiana de seus desenvolvimentos analíticos, fornecidos em uma segunda parte do comentário, e que sua reconstrução da passagem de Descartes não pressupõe nenhum conhecimento técnico que não estivesse disponível ao próprio Descartes. É possível, portanto, que Descartes tenha seguido esse caminho para construir a sucessão de retângulos *cg*, *dh*, *ei* ...

No que diz respeito à ordem seguida por Descartes na exposição de seus resultados, Pierre Costabel pretendeu ver, em razão da preferência explícita "(...) pela consideração das áreas, o cuidado de justificar a existência do limite *Cx* antes mesmo de passar à interpretação desse limite como medida relacionada a um polígono regular" (Costabel, 1985, p. 45). Ainda que sejam insuficientes os elementos para concluir que Descartes possa ter chegado, em certo momento de sua carreira, a uma noção de passagem ao limite, podemos levantar a hipótese, sugerida por Whiteside (1961, p. 179 ss), de que ele se serviu da série de razão 1/4 como série de comparação para testar a convergência do método dos isoperimétricos.[11]

11 Um procedimento similar é aplicado, provavelmente de forma inconsciente, por Brouncker (cf. Whiteside, 1961, p. 179 ss).

3 O problema da exatidão

3.1 Exatidão e aceitabilidade

A solução de um problema e sua aceitação no interior de uma comunidade matemática não dependem apenas da ausência de erros no cálculo ou da ausência de argumentos falaciosos na estrutura lógico-argumentativa. Frequentemente, o emprego de procedimentos de resolução depende de sua aceitabilidade em relação a padrões extramatemáticos.[12] Com esse propósito, Henk Bos mostrou que, entre os matemáticos dos séculos xvi e xvii, um conjunto de critérios, que ele chamou de Exatidão geométrica, esteve no centro de um importante debate voltado a determinar os meios necessários e suficientes para que se pudesse considerar um objeto como conhecido, aceitar ou refutar certos procedimentos para construir objetos ou soluções de problemas em geometria e, por conseguinte, para que fosse possível receber um problema como geometricamente solúvel ou como resolvido.[13]

Como observa Panza (2011, p. 43), o problema da exatidão geométrica, no interior das matemáticas do século xvii, segue uma dupla articulação que consiste primeiramente na fixação de procedimentos admissíveis para resolver problemas, os quais, embora formulados por meio do emprego de conceitos introduzidos pelos livros geométricos dos *Elementos*, resistem (tais como a quadratura do círculo) a uma solução por meio de régua e compasso; e que consiste, em segundo lugar, na determinação das condições de admissibilidade geométrica de outras curvas para além do círculo.

Em *A geometria*, em particular, os dois momentos da questão estão entrelaçados. Como a solução de um problema matemático é concebida por Descartes em termos da construção de um ponto ou de um lugar por meio de curvas, sua resposta ao problema da exatidão consiste na formulação de um critério de aceitabilidade das curvas, fundado, por sua vez, sobre certas restrições no âmbito construtivo. A seguinte passagem ilustra bem as considerações precedentes:

12 Eu emprego o termo "extramatemático" conforme o significado utilizado por H. Bos: "deve ser enfatizado que a resposta para esta questão não pode ser derivada de axiomas dentro de um *corpus* aceito de conhecimento matemático. (...) Qualquer resposta para a questão sobre os meios de construção aceitos necessariamente assume a forma de um postulado escolhido: a razão para sua escolha vai além do âmbito do argumento provado. A questão de se essas razões são corretas ou válidas não tem, estritamente falando, significado algum. Matemáticos são livres para aceitar ou para rejeitar qualquer decisão proposta em relação à questão de quais meios de construção são legítimos em geometria e quais não são" (Bos, 2001, p. 8).

13 "A literatura matemática do início da modernidade apresenta, a princípio, uma desconcertante variedade de construções geométricas e de argumentos sobre sua legitimidade. (...) Seus argumentos dizem respeito a uma questão meta ou extramatemática; portanto, eles não podem ser classificados de acordo com sua correção" (Bos, 2001, p. 17).

> mas é muito claro, parece-me, que, tomando, como fazemos, por geométrico o que é preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e considerando a geometria como uma ciência que ensina em geral a conhecer as medidas de todos os corpos, não se deve excluir as linhas mais compostas de preferência às mais simples, desde que possamos imaginá-las sendo descritas por um movimento contínuo, ou por vários que se imbricam e em cujo caso os últimos sejam inteiramente determinados pelos que os precedem; com efeito, desse modo, podemos ter sempre um conhecimento exato de sua medida (AT, 6, p. 389-90).

A noção de construtibilidade que Descartes emprega aqui poderia ser interpretada como a tentativa de tomar as cláusulas construtivas fixadas pelos postulados de Euclides como base para construções recursivas (cf. Panza, 2005, p. 28), a partir das quais se poderiam determinar outras curvas, cujo caráter eletivo não poderia ser posto em dúvida. Evidentemente, para Descartes também, entre as curvas aceitas na geometria devemos incluir os círculos e as retas, construídas com régua e compasso. Em seguida, por meio dessas mesmas construções com régua e compasso, podemos obter certas configurações de retas e de círculos que formarão sistemas articulados. Submetendo tais sistemas a movimentos apropriados, alguns de seus pontos, quando forçados a deslocarem-se sobre trajetórias unívocas, traçarão novas curvas. Essas curvas *compostas* serão aceitas na geometria. Assim, serão aceitas todas as curvas engendradas por sistemas articulados e submetidos a movimentos que combinam as curvas precedentemente construídas umas com as outras e com círculos e retas. Chamaremos tal critério de aceitabilidade, para sublinhar sua continuidade com as cláusulas construtivas euclidianas, de critério por *régua e compasso reiterado* (cf. Panza, 2005, p. 28-31).

Cabe, porém, perguntar: o que significa ser submetido a *movimentos apropriados*? Uma caracterização poderia ser a seguinte: um sistema articulado submete-se a um movimento apropriado, se as propriedades geométricas da curva traçada por esse sistema não dependem de características cinemáticas do movimento. Assim, a construção da quadratriz, apresentada por Pappus, não poderá garantir a admissibilidade dessa curva na geometria, porque a trajetória do ponto que traça a curva depende da velocidade dos eixos moventes. Não é, pois, surpreendente que Descartes, tendo isso por fundamento, não admita como aceitável a quadratura do círculo obtida por meio dessa curva, se ela for construída pelo sistema descrito precedentemente.

Diferentemente dessa construção, o procedimento aplicado por Descartes em sua quadratura não exige a aplicação de nenhuma curva, com exceção das retas e dos arcos de círculo implicados na construção dos retângulos (de fato, como mostramos, cada um dos arcos pode ser obtido por bissecções sucessivas de segmentos e de ângulos). Trata-se, pois, de um procedimento euclidiano, por régua e compasso. É verdade que ele poderia ser julgado aproximado e, portanto, *não exato*. Todavia, essa conclusão, embora *prima facie* razoável, invoca uma justificação: por qual razão esse procedimento não se conforma ao critério de aceitabilidade exposto precedentemente?

Por outro lado, enquanto esse critério estabelece que uma curva será aceitável, se existir um sistema articulado de engendramento que obedeça a certos requisitos, Descartes concebe e expõe, sempre em *A geometria*, dois outros sistemas de engendramento de curvas, a saber, a construção ponto por ponto e a construção por meio de cordas.

3.1.1 As construções ponto por ponto

Na presente discussão, limitar-me-ei a considerar o primeiro tipo de construção, que é introduzido primeiramente em relação aos problemas indeterminados, nos quais duas variáveis estão ligadas por uma equação (é o caso do famoso problema de Pappus, discutido por Descartes no primeiro e segundo livros de *A geometria*). Como os pontos que resolvem os problemas desse tipo são infinitos, eles formam um lugar em um plano (uma reta nos casos mais elementares, ou uma curva), que pode ser construído como Descartes explica:

> podemos tomar de forma arbitrária uma das duas quantidades desconhecidas, x ou y, e procurar a outra por essa equação (...). Igualmente, tomando sucessivamente infinitas grandezas distintas para a linha y, encontraremos também infinitas grandezas para a linha x, e assim teremos uma infinidade de diferentes pontos (...), por meio dos quais se descreve a linha curva requerida (AT, 6, p. 385-6).

Em outros termos, uma construção ponto por ponto de um lugar é obtida ao tomarmos um número arbitrário de valores para uma das duas grandezas desconhecidas (por exemplo, y), para podermos conduzir o problema a uma equação de uma só incógnita (por exemplo, x), que pode ser resolvida geometricamente, conforme os métodos ilustrados no primeiro e terceiro livros. Por meio desses processos de construção, podemos determinar um número arbitrário de pontos cujo conjunto distribui-se sobre a curva procurada.

Ainda no segundo livro, Descartes apresenta a construção ponto por ponto como método de construção geral das curvas, sem referência ao contexto do problema de Pappus. O caso tratado em *A geometria* é aquele da construção das ovais. Descreverei apenas uma das diferentes maneiras de construir essas curvas.

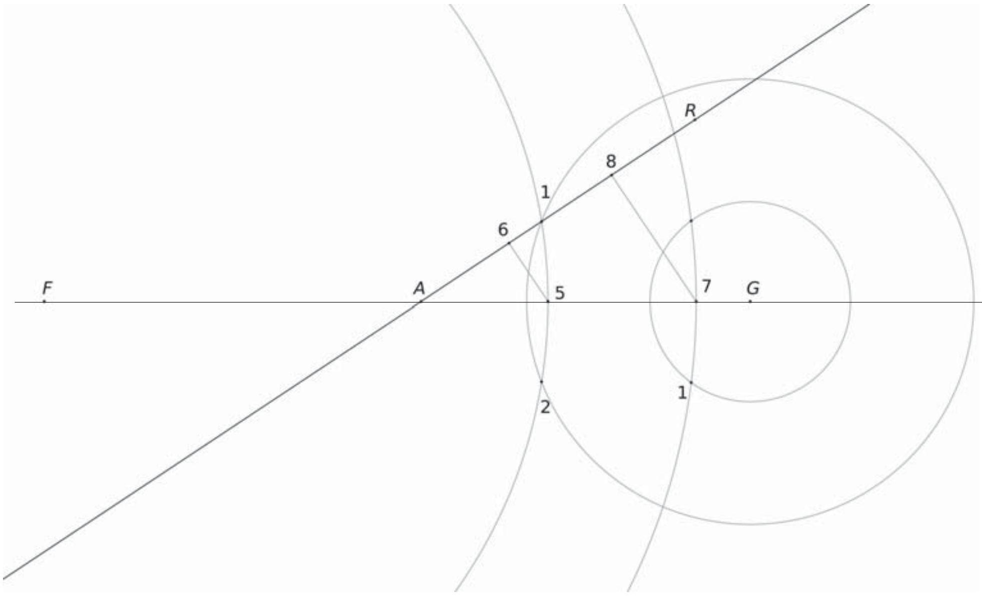

Figura 4

Sejam *FG* e *AR* (conforme a figura 4) duas linhas que se cortam em *A* conforme um ângulo dado. *A* gira entre *F* e *G*, de maneira que a relação entre *AF* e *AG* seja também dada (tomada aleatoriamente, observa Descartes). Tomamos, em seguida, *AR* = *AG*. Tomamos o ponto 5, arbitrariamente escolhido sobre *AG*, e traçamos o círculo de centro *F* e com raio *F*5. Traçamos o segmento 56, perpendicular a *AR* e, em seguida, o círculo de centro *G* e com raio *R*6. Os dois pontos de intersecção entre os dois círculos de raios respectivamente *F*5 e *R*6 pertencem à oval. Repetindo a mesma construção, a partir de outros pontos escolhidos arbitrariamente sobre *AG* (como 7), podemos determinar um conjunto formado por um número arbitrário de pontos distribuídos sobre a mesma curva. Não é, entretanto, de forma imediata que se considera esse procedimento de construção como tão exato e preciso quanto aquele obtido por um sistema articulado, visto que é preciso verificar, no caso das construções ponto por ponto, se todos os pontos da curva foram efetivamente construídos. Além disso, Descartes devia ter em mente, quando tratou desse tipo de construção, as observações de certos matemáticos, tais como Kepler (cf. Bos, 2001, p. 187-8) e Snellius (cf. Bos, 2001, p. 218), que tinham criticado esse modo de construir uma curva, por não oferecer a curva em sua totalidade, ao contrário de um *ato de movimento*, que daria a totalidade dos pontos de uma curva sem deixar *buracos* em seu traçado.

3.1.2 As construções genéricas e específicas

Sobre qual fundamento, então, Descartes se apoia para concluir a não aceitabilidade do procedimento da quadratura a partir de sua solução para o problema da exatidão e, ao mesmo tempo, a aceitabilidade de seu procedimento de construção ponto por ponto?

Para responder a essa questão, começarei por mostrar que, ao tratar das construções ponto por ponto, Descartes distingue duas formas de construção de uma curva:

> e, tendo explicado o modo de encontrar uma infinidade de pontos por onde elas [as curvas] passam, penso ter dado suficientemente o meio de descrevê-las. Da mesma forma, é conveniente observar que há uma grande diferença entre esse modo de encontrar vários pontos para traçar uma linha curva e aquele pelo qual nos servimos para a espiral e suas semelhantes; pois, no caso dessa última, não encontramos indiferentemente todos os pontos dessa linha que procuramos, mas somente os que podem ser determinados por alguma medida mais simples do que a requerida para compô-la; e, assim, propriamente falando, não encontramos um dos seus pontos, isto é, um daqueles que lhe são de tal modo próprios que não podem ser encontrados senão por ela (AT, 6, p. 411).

A primeira maneira, exemplificada dentre outros casos pela construção das ovais, permite construir *indiferentemente* todos os pontos: ela é definida por Bos como *genérica*; ao passo que a segunda não oferece senão um subconjunto de pontos da curva, obtidos por meios mais simples que os exigidos para sua construção. Essa segunda maneira é definida como *específica* (Bos, 2001, p. 345).

3.1.3 A construção de Clavius

Descartes, ao fazer alusão a um método utilizado *para a espiral* e outras curvas do mesmo gênero, não dá nenhum exemplo de construção específica. Por outro lado, numerosos estudos (cf. Sasaki, 2003, p. 47; Mancosu, 1996, p. 74) mostraram que ele tinha em mente provavelmente a construção ponto por ponto da quadratriz,[14] apresentada por Clavius no Livro 6 de seus *Commentaria* aos *Elementos* de Euclides, publicados em 1598 (o texto específico foi reeditado na *Geometria practica* de 1604. Eis como a construção da quadratriz é descrita:

14 A construção de Clavius não é a única construção da quadratriz em circulação durante a primeira metade do século XVII. Encontramos uma construção em Viète, na obra *In artem analyticen isagoge* (Viète, 1631), e outra em Gilles Personne de Roberval, *Observations sur la composition des mouvements et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes* (Roberval, 1736) (que dá uma construção da curva sem limitar-se à porção necessária para quadrar o círculo).

Então, descreverei a curva quadratriz geometricamente dessa maneira. Seja o arco *BD* dividido em várias partes iguais, e um dos dois outros lados *AD*, *BC* no mesmo número de partes iguais. Essa divisão será muito simples, se for primeiramente bissectado seja o arco *DB* seja um dos dois lados *AD*, *BC* e, em seguida, cada parte for novamente bissectada, e assim posteriormente tanto quanto se quiser (Clavius, 1604, p. 321).[15]

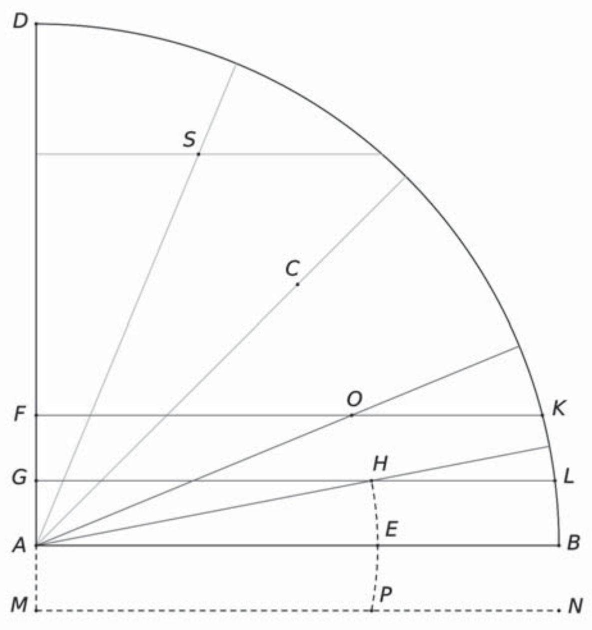

Figura 5

As intersecções dos segmentos traçados desse modo formarão um conjunto de pontos pertencentes a uma quadratriz. No fragmento citado, Clavius declara oferecer uma construção da quadratriz mais precisa e mais geométrica que a apresentada na *Collectio* de Pappus. Ele se refere, em particular, a uma das duas objeções relatadas pelo próprio Pappus e atribuídas a Sporus. Segundo este último, o ponto de intersecção entre a quadratriz e o eixo não pode ser construído, pois os dois segmentos em movimento coincidirão sobre o eixo horizontal, e o traçado da curva cessará antes de encontrá-lo.[16]

Segundo Clavius, essa construção ofereceria, portanto, o ponto de intersecção entre a quadratriz e o eixo, sem necessidade de recorrer à geração da quadratriz pela combinação de superfícies plectoides, apresentadas na *Collectio mathematica* (cf. Pappus

15 "*quare nos Geometrice eandem lineam Quadratricem describemus hoc modo. Arcus* BD *in quotius partes aequales dividatur, & latus utrum* AD, BC *in totidem aequales partes. Facillima divisio erit, si et arcus* DB *et utrumque latus* AD, BC *secetur primum bifariam, deinde utraque semissis iterum bifariam, etc., ita deinceps, quantum libuerit. Quo autem plures existerint divisiones, eo accuratius linea describebitur* (...)" (Clavius, 1604, p. 321).

16 As objeções de Sporus contra a construção dessa curva são, de fato, duas (cf. Pappus de Alexandria, 1933, p. 193). A construção da quadratriz, primeiramente, estaria baseada em uma circularidade, visto que a rotação uniforme de um eixo ao longo do ângulo reto deveria acontecer simultaneamente à translação de outro eixo ao longo da vertical. Assim, a fim de que os dois eixos moventes encontrem-se no mesmo momento sobre o lado *AD* do círculo, é preciso que as velocidades dos movimentos estejam na mesma proporção, o que exigiria, segundo Sporus, conhecer a proporção entre a reta e o arco e, portanto, poder efetuar a retificação do círculo (Bos, 2001, p. 42). A segunda objeção é assim apresentada por Pappus: a extremidade da linha da qual muitos se servem para a quadratura do círculo (isto é, o ponto onde a linha corta a reta *AD*) não é encontrada de modo algum (Pappus de Alexandria, 1933, p. 193). Notemos, finalmente, que a primeira objeção foi posta em dúvida por Bos (2001, p. 42), enquanto a segunda parece, com efeito, procedente.

de Alexandria, 1933, Proposições 33, 34, p. 197-201). Entretanto, para construir o ponto de intersecção, Clavius teve que recorrer a uma astúcia. Ele pede para continuar o procedimento de divisões sucessivas do arco e do segmento até obter o segmento *AF* e o arco *BK*. Em seguida, pede para construir os segmentos *BL*, *BN*, *AM* de comprimento igual a *AG* e para traçar os segmentos *MN* e *GL*. A intersecção entre os segmentos *GL* e *AK* dará, então, o ponto *H*, pertencente por construção à quadratriz. Clavius pede, então, para traçar o segmento *MP* igual a *GH* e, depois, para prolongar a quadratriz até o ponto *P*, abaixo da base *AB*, pelo mesmo procedimento. Ela cortará a base no ponto E procurado. Nesse ponto, Clavius acrescenta que, se tivermos construído os segmentos *GH*, *AE*, *MP* muito próximos entre si, o ponto *E* poderá ser encontrado pela intersecção entre o arco do círculo *HP* (de centro *A*) e o segmento *AB*.[17] Notemos que esse procedimento não constrói o ponto *E*, mas um ponto muito próximo. Estando consciente disso, Clavius considera que essa construção aproximada determina o ponto da quadratriz quando o erro não é perceptível pelos sentidos:

> (...) pois o ponto *E*, sobre o lado *AB*, não pode ser encontrado geometricamente, visto que lá embaixo cessa toda intersecção entre as duas retas: ele será encontrado sem erro considerável, a saber, sem erro que pode ser percebido por meio dos sentidos (...) (Clavius, 1589, p. 321).[18]

Em favor da hipótese que considera essa discussão com base na distinção feita em *A geometria* entre dois procedimentos de construção ponto por ponto, comecemos por notar que o estudo de Clavius deixa uma forte impressão sobre Descartes bem antes da composição do tratado de 1637 (cf. Sasaki, 2003, p. 70).

Em torno de 1614-1615, Beeckman, com quem Descartes colaborou entre 1618 e 1619, faz referência, em seu *diário*, ao mesmo texto de Clavius sobre a quadratriz em relação ao problema prático de construir condutores de água com inclinação cada vez maior com respeito ao plano do horizonte. Mais particularmente, Beeckman mostra que a melhor maneira de dispor tubos é tal que suas extremidades pertençam a uma quadratriz, sobre a qual ele considera a mesma construção dada por Clavius (cf. Beeckman, 1939-1953, 1, p. 43).

Em seguida, uma carta de 1629, endereçada por Descartes a Mersenne, testemunha que nessa época Descartes conhecia com certeza a construção ponto por ponto da quadratriz dada por Clavius:

17 "*verum punctum* E, *quod sensum attinet, indicare videatur*" (Clavius, 1589, p. 321).
18 "*sed quia punctum E, in latere* AB, *invenire geometrice non potest, cum ibi omnis sectio rectarum cesset: ut illud sine notabili errore, quiscilicet sub sensum cadat, reperiamur*" (Clavius, 1589, p. 321).

> a linha hélice que vós não nomeastes e que não é uma linha aceita na geometria mais do que aquela que se chama *quadraticem*, porque ela serve para quadrar o círculo e, igualmente, para dividir o ângulo em todos os tipos de partes iguais tanto quanto aquela e tem muitas outras utilidades que podereis ver nos *Elementos* de Euclides comentados por Clavius. Com efeito, embora possamos encontrar uma infinidade de pontos por onde passa a hélice e a quadratriz, mesmo assim, não se pode encontrar geometricamente nenhum dos pontos que sejam necessários para os efeitos tanto de uma quanto da outra (AT, 1, p. 70-1).

Essas duas evidências são importantes para mostrar que Descartes devia conhecer o estudo de Clavius quando comentou, no segundo livro da *A geometria*, as construções ponto por ponto específicas. Notemos que, na carta de 1629, Descartes escreve que, entre os pontos que não podem ser encontrados geometricamente, há aqueles *necessários para os efeitos desejados*. Como a quadratura do círculo poderia ser incluída entre os efeitos desejados, decorrentes do emprego da quadratriz, podemos inferir que Descartes queria sublinhar que o ponto de intersecção E entre a quadratriz e o eixo, requerido para estabelecer a proporção que dá a quadratura do círculo, não poderia ser construída pelo procedimento empregado por Clavius.

Observemos também que as duas construções de Clavius estão estreitamente ligadas ao fragmento cartesiano sobre a quadratura do círculo. É suficiente compará-las para observar que o procedimento de construção que dá os pontos da quadratriz na construção feita por Clavius dá também os pontos P, Q, R, ... (ver a figura 3), a partir dos quais podemos construir, por simples projeção ortogonal E, F, G..., as bases dos triângulos cuja medida do arco está em progressão geométrica na razão de 1/4. Nesses dois casos, de fato, os pontos são obtidos pela bisecção sucessiva de um ângulo reto e de um dos lados do quadrado dado inicial.

O ponto x na construção cartesiana é, contudo, determinado diferentemente de seu análogo E na de Clavius. Enquanto Clavius determina E construindo, pela aplicação do procedimento explicado acima, um ponto que se aproxima do primeiro ponto, de tal modo que a distância entre os dois fique abaixo de nosso limite de percepção, no fragmento de Descartes, o procedimento de construção do ponto x, diâmetro do círculo de perímetro dado, não se detém em razão de um limite físico de percepção: a distância entre o ponto x e o ponto que dá a apótema do polígono regular de 2^n lados pode ser sempre diminuída: é suficiente, em teoria, repetir o mesmo procedimento para obter a apótema do polígono de lados duplos do precedente. Por essa razão, a quadratura do círculo cartesiana, diferentemente da construção da quadratura de Clavius, está baseada em um procedimento de aproximação infinita.

Subjacentes a essas conclusões diferentes, podemos perceber duas diferentes concepções de exatidão na geometria. Para Clavius, haveria um paralelo entre a exatidão geométrica e a precisão prática. E, mesmo que talvez esse paralelo jamais seja aclarado, podemos concluir, a partir dos exemplos discutidos, que a precisão obtida, segundo Clavius, nos métodos práticos de desenho e de construção seria um critério suficiente para decidir pela exatidão teórica de um procedimento ou de uma construção. Ao contrário, a noção de exatidão que Descartes põe em prática, pelo menos em *A geometria* de 1637, parece ter uma relação mais atenuada com os métodos da geometria prática. Podemos observá-la no caso dos sistemas de traçado das curvas, os quais, ainda que realizáveis na prática, permanecem sistemas imagináveis, como também no caso da distinção entre genéricas e específicas para as construções ponto por ponto.

4 A recusa da aceitabilidade da quadratura do círculo

Convém considerar que o caráter infinito do procedimento de aproximação que figura no fragmento sobre a quadratura do círculo é fundamental para que apreendamos a distinção entre os dois modos de construção ponto por ponto. Ao retornar ao exemplo das ovais, quero observar que, nesse caso, cada ponto do lugar é obtido como intersecção entre duas curvas geométricas, determinadas, por sua vez, pela aplicação de uma sequência finita de construções exatas, a partir de um ponto escolhido arbitrariamente sobre uma reta: essa característica é generalizável para toda construção ponto por ponto *genérica*.

Ao contrário, a solução cartesiana para a quadratura do círculo mostra, em virtude de sua quase equivalência com a construção ponto por ponto da quadratura dada por Clavius, que, nesse último caso, o ponto E (ver a figura 5), intersecção entre essa curva e a reta AB, não pode ser construído com um número finito de passos por meio do mesmo procedimento que fornece os pontos C, O, H. Por conseguinte, esse método, apesar de encontrar um número infinito de pontos da quadratriz, não encontra, como observa Descartes – e contra a opinião de Clavius –, esse ponto E, necessário para os efeitos desejados. Daí, portanto, o caráter *específico* dessa construção ponto por ponto da quadratura.[19]

19 O caráter específico da construção de Clavius é explicado (em termos naturalmente estranhos ao próprio Descartes) considerando a cardinalidade do conjunto de pontos que formam um lugar. De fato, sabemos que todos os pontos de um arco de quadratriz, tal como de toda curva "mecânica" (cujo conjunto é coextensivo ao das curvas transcendentes), formam uma infinidade não numerável, ao passo que apenas um conjunto numerável de pontos, ainda que infinitos, tem a possibilidade de ser construído com régua e compasso. Segue-se disso que o método de construção legado por Clavius permite construir um subconjunto do conjunto de pontos que formam uma curva transcendente (no caso examinado, a quadratriz) (cf. Rashed, 1998, p. 22).

Conclusões

Para concluir, responderei às questões deixadas abertas precedentemente: sobre qual critério Descartes se apoia para deduzir a não aceitabilidade do procedimento da quadratura e, ao mesmo tempo, a aceitabilidade do procedimento de construção ponto por ponto genérica das curvas?

Retornemos ao modelo de exatidão introduzido no item 3. Relembremos que um procedimento de construção de uma curva foi definido como exato quando satisfaz as seguintes condições:

(1) se ele é um procedimento feito com régua e compasso;
(2) ou, então, se ele se funda sobre sistemas articulados e submetidos a movimentos que combinam dois segmentos e um círculo, para construir de maneira apropriada novas curvas que não podem ser construídas por meio de régua e compasso;
(3) se ele está baseado em sistemas articulados e submetidos a movimentos que combinam as curvas precedentemente construídas umas com as outras e com círculos e segmentos.

Consequentemente, podemos apresentar com precisão a solução cartesiana ao problema da exatidão, especificando que um objeto geométrico é *determinado por um procedimento exato*, se:

(a) for uma curva construída por uso reiterado de régua e compasso;
(b) no caso de um ponto pertencente a um lugar, se for construído pela intersecção entre duas curvas construídas por uso reiterado de régua e compasso, a partir de um ponto arbitrariamente escolhido sobre uma reta; condição que é equivalente à seguinte: um ponto é determinado exatamente, se ele pode ser ligado – por uma cadeia finita de construções que fazem uso reiterado de régua e compasso – a um ponto arbitrariamente escolhido (como no exemplo das ovais).

20 Além disso, Descartes parece ver uma ligação entre a construção de pontos genéricos e o procedimento de uso reiterado de régua e compasso. Assim, podemos ler em *A geometria* a seguinte afirmação (que, entretanto, não é provada): "(...) esse modo de traçar uma linha curva, encontrando indefinidamente vários de seus pontos, não se estende àquelas que podem também ser descritas por um movimento regular e contínuo" (AT, 6, p. 412).

Com base em (a) e (b), podemos concluir que:

- Se os pontos de um lugar são construídos por meio de um procedimento ponto por ponto genérico, então eles são exatamente determinados.[20]
- No fragmento sobre a quadratura do círculo, o ponto x, que fornece o diâmetro do círculo isoperimétrico ao quadrado dado, não é determinado exatamente pelo procedimento de bissecção sucessiva do segmento *EP* e do ângulo *PCF*.
- Por conseguinte, tampouco o ponto de intersecção entre a quadratriz e a base na construção ponto por ponto dada por Clavius é exatamente determinada.

Podemos, portanto, concluir que, dada a solução cartesiana para o problema da exatidão – incluindo nessa solução um critério de aceitabilidade geométrica das curvas, bem como um critério de determinação exata de um objeto –, nem a solução da quadratura do círculo apresentada por Pappus, nem aquela oferecida por Descartes no fragmento 6 dos *Opuscula posthuma* são aceitas como soluções geométricas do problema.

Cabe ainda notar que essa conclusão não explica por que Descartes considerou ser impossível a solução desse problema, mas contribui para esclarecer a significação do termo "impossibilidade" no contexto da prática cartesiana de resolução de problemas; impossibilidade, não como pura e simples ausência de solução, mas como ausência de solução conforme a um ideal de exatidão e, portanto, de geometria.

Apêndices

Apêndice 1
Sobre uma demonstração de Pappus: a quadratriz

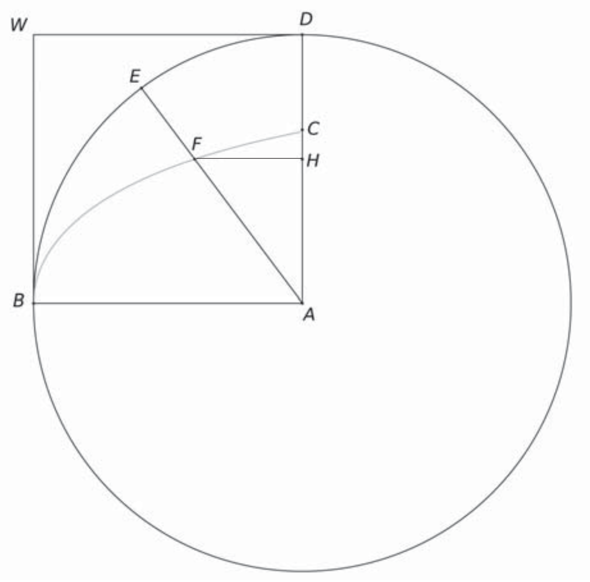

Figura 6

Segundo Pappus, no quarto livro da *Collectio* (Pappus de Alexandria, 1933, p. 191-2), a quadratriz pode ser obtida a partir da trajetória do ponto de interseção de um segmento AE (conforme a figura 6), em rotação ao redor do centro A de um círculo, com um segmento BC em translação em direção vertical com velocidade constante. Suponhamos dado o círculo de raio AD e construamos o quadrado $ADWB$ sobre o raio. Para obter a quadratura do círculo de raio AD, tomando AD e AB como eixos, é suficiente traçar, pelo mecanismo descrito, uma curva que intercepta AD em C. Entre as propriedades dessa curva, observemos a seguinte: se um raio AE qualquer for traçado a partir do centro, ele interceptará a quadratriz em um ponto F tal que, sendo H um ponto perpendicular a F sobre o lado AD do quadrado, teremos a seguinte proporção:

$$AB\ (= AD) : FH = \text{arco}BD : \text{arco}ED.$$

Utilizando a trigonometria, podemos, a partir da proporção precedente, encontrar a equação da quadratriz em coordenadas polares. Seja θ o ângulo compreendido entre os segmentos AE e AD. Chamemos a ao segmento AD e r ao segmento AT. Como o arco BED é um quarto do círculo, teremos: $\text{arco}(BED) = \frac{1}{4} 2\pi = \frac{\pi}{2}$. Tendo por base a proporção precedente, podemos obter igualmente: $a : r\text{sen} = \frac{\pi}{2} : \theta$. Poderemos obter, assim, a equação polar dessa curva: $r = \frac{2a\theta}{\pi \text{sen}\theta}$.

A fim de obter a quadratura do círculo a partir da quadratriz, Pappus começa por demonstrar a seguinte proporção: arco$BD : AD = AD : AC$.

A demonstração é dada por absurdo, segundo o seguinte esquema: suponhamos, juntamente com Pappus, que arco(BD) : $AD \neq AD$: AC e deduzamos que a quadratriz deve cortar o segmento AD (conforme a figura 7) em um ponto K, tal que ou $AK > AC$ ou AK < AC. Como, a partir desses dois casos, chegamos a uma contradição, a proposição está demonstrada.

Passarei à consideração do primeiro caso (o segundo pode ser tratado de modo análogo). Seja, pois, AK maior que AC; e com centro A e raio AK, seja traçado o arco do círculo KFL, sendo F o ponto de intersecção do círculo e da quadratriz. Unam-se, em seguida, os pontos A e F e prolongue-se o segmento até E, ponto da circunferência de raios AB, AD.

Por hipótese, temos:

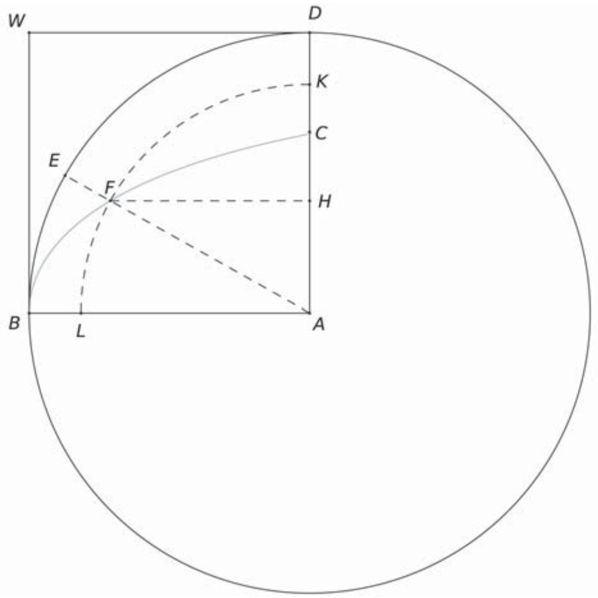

Figura 7

AB (=AD) : AK = arco(DEB) : AB,
AB : AK = arco(KFL) : arco(DEB),
portanto, arco(KFL) = AB.

Mas, conforme a propriedade da quadratriz,

BA : FH = arco(BED) : ED, e
BA : FH = arco(KLF) : arco(FK).

Como provamos que arco(KFL) = AB, podemos concluir que FH = arco(FK), o que é absurdo.

Como os comprimentos de AB e AC são conhecidos, o comprimento do arco BD poderá ser determinado. Ao multiplicarmos por 4 os membros da proporção, obteremos a medida da circunferência, ou seja, sua retificação. Por força de um teorema demonstrado por Arquimedes em *A medida do círculo*, que estabelece que todo círculo tem a mesma área que um triângulo retângulo tendo por base um segmento de comprimento igual à circunferência e por altura um segmento igual ao raio, Pappus pode passar imediatamente da retificação da circunferência à quadratura do círculo.

Apêndice 2
A primeira proposição de *A medida do círculo* de Arquimedes

Já citei anteriormente o enunciado da Proposição 1 do tratado de Arquimedes:

> Todo círculo equivale [em área] ao triângulo retângulo no qual um dos lados adjacentes ao ângulo reto seja igual ao raio e o outro seja igual ao perímetro [circunferência] (Arquimedes, 1960, p. 127; 1910-1915, 1, p. 259).

Fornecerei a seguir a demonstração dessa proposição, tal como se encontra no texto de Arquimedes. O autor considera, antes de tudo, o círculo dado *ABCD* e o triângulo *K* (conforme mostra a figura 8), e procede por uma demonstração apagógica,[21] como segue abaixo.

Se supusermos o círculo como desigual ao triângulo *K*, então ele deve ser-lhe ou maior ou menor. Consideremos a primeira possibilidade, a saber, que o círculo seja maior que *K*. Podemos escrever, para simplificar, em notação moderna: S(*ABCD*) > S(*K*).

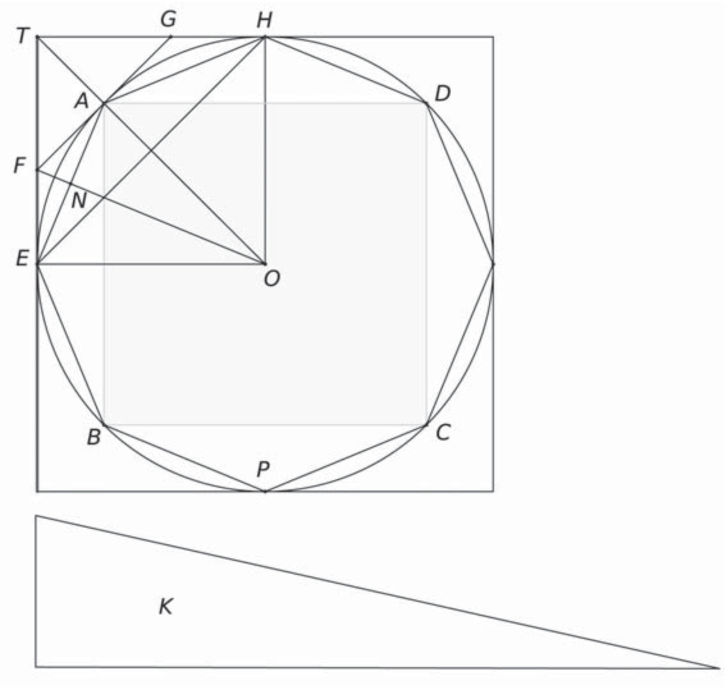

Figura 8

21 O argumento apagógico é um tipo de argumento por redução ao absurdo que infere a partir de uma premissa disjuntiva (que pode ter mais de dois disjuntos), como aqui, a premissa que o círculo é maior ou menor que o triângulo.

Em seguida, Arquimedes pede que se inscreva no círculo um quadrado, e depois um octógono, um polígono de 16 lados etc., obtidos por bisseções dos segmentos precedentes, até que se obtenha um polígono regular *P* tal que a diferença entre a área do círculo e a sua seja menor que a diferença entre a área do círculo e a área de *K*. Este resultado pode ser transcrito assim:

$$S(ABCD) - S(P) < S(ABCD) - S(K).$$

A área do polígono será, portanto, maior que a área do triângulo *K*: $S(P) > S(K)$. Ao mesmo tempo, o perímetro do polígono será menor que a circunferência do círculo, e seu apótema inferior ao raio. Por conseguinte, a área desse polígono será inferior à área do triângulo, em contradição com as hipóteses.

Arquimedes pode passar, depois disso, à segunda alternativa. Seja, pois, se possível, $S(ABCD) < S(K)$. Poderemos, assim, circunscrever um quadrado ao círculo *ABCD*. Seja *T* o ponto de encontro entre dois lados adjacentes e tangentes à circunferência nos pontos *E* e *H*. Dividamos ao meio o arco *EH* em *A*, e de *A* tracemos a tangente ao círculo *FAG*. O ângulo *TAG* será reto, e obteremos as seguintes desigualdades: $TG > GA > GH$. Arquimedes pode, assim, concluir que a área do quadrângulo *EFGH* é inferior à metade da área do triângulo *TEH*. Do mesmo modo, se dividirmos o arco *AH* e traçarmos a tangente ao ponto de bissecção, esta reta cortará de *GAH* uma área superior à metade. Continuando esse processo, podemos, dessa forma, chegar ao polígono *P*', tal que:

$$S(P') - S(ABCD) < S(K) - S(ABCD).$$

Teremos assim: $S(P') < S(ABCD)$. Mas, visto que o perímetro do polígono é maior que a circunferência do círculo, e seu apótema é igual ao raio do círculo, segue-se que a área do polígono ultrapassa a do triângulo *K*. Obtemos, assim, uma nova contradição.

Não sendo, portanto, nem maior nem menor, o círculo *ABCD* tem área igual à do triângulo *K*.

Agradecimentos. Tenho muito a agradecer a Carlos J. Alvarez, Eduardo Salles de Oliveira Barra, César Augusto Battisti, Jordan Bell, Karine Chemla, Sébastien Maronne, Carmen Martinez, Marco Panza, David Rabouin, Eric Vandendriessche.

Traduzido do original em francês por César Augusto Battisti.

Davide Crippa
Doutorando em História e Filosofia das Ciências Exatas
da Université Paris 7, Equipe SPHERE-REHSEIS,
Paris, França.
davide.crippa@gmail.com

ABSTRACT

Although the problem of squaring the circle, that is, the problem of constructing a square having the same area of a given circle, was considered an open problem among early XVIIth century mathematicians, René Descartes affirmed that it could not be solved. On the other hand, he himself provided a solution to the problem, that can be dated in the period, 1625-1628. In this article, I will examine this solution by comparing it to an analysis made a century later by Euler, and to a solution known to the ancients and discussed by Pappus. I will investigate, successively, the reasons that led Descartes to dismiss these two solutions as not acceptable in the light of the ideal of exactness deployed in the *Geometry*.

Keywords • Descartes. Quadrature of the circle. Quadratrix. Pappus. Clavius. Euler. Geometrical exactness. Acceptability. Archimedes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adam, C. & Tannery, P. (Ed.) *Œuvres de Descartes*. Paris: Vrin/Centre National Du Livre, 1995-1998. 11 v. (AT)

Arquimedes. La mesure du cercle. In: Eecke P. V. (Ed.). *Les oeuvres completes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon.* Paris: Blanchard, 1960 [1921]. v. 1, p. 125-34.

Beeckman, I. *Journal tenu par Isaac Beeckman de 1604 à 1634.* Introdução e notas C. de Waard. La Haye: M. Nijhoff, 1939-1953. 4 v.

Biard, J. & Rashed, R. (Ed.). *Descartes et le moyen age. Actes du colloque organisé à la Sorbonne du 4 au 7 juin 1996.* Paris: Vrin, 1998.

Bos, H. J. M. *Redefining geometrical exactness*. New York: Springer, 2001.

Boyer, C. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover, 1959.

Clavius, C. *Elementorum libri xv accessit xvi de solidorum regolarium cuiuslibet intra quodlibet comparatione* [...]. Romae: Sanctium & Soc., 1589.

____. *Geometria practica*. Moguntia: Typographeo Ioannis Albini, 1604.

Costabel, P. Descartes et les mathématiques de l'infini. *Historia Scientiarum*, 29, p. 37-49, 1985.

Eecke P. V. (Ed.). *Les oeuvres completes d'Archimède, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon.* Paris: Blanchard, 1960 [1921]. 2v.

Euler, L. Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae,* 8, p. 157-68, 1763.

Heiberg, J. L. (Ed.). *Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii*. Leipzig: Teubner, 1910–1915. 3 v.

Mancosu, P. *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century.* Oxford: Oxford University Press, 1996.

Panza, M. Rethinking geometrical exactness. *Historia Mathematica*, 38, 1, p. 42-95, 2011.

____. *Newton et les origines de l'analyse*. Paris: Blanchard, 2005.

Pappus de Alexandria. *La collection mathématique.* Tradução de P. V. Eecke. Paris: P. Desclée de Brouwer, 1933.

Rashed, R. La *Geométrie* de Descartes et la distinction entre courbes géométriques et courbes mécaniques. In: Biard, J. & Rashed, R. (Eds.). *Descartes et le moyen age. Actes du colloque organisé à la Sorbonne du 4 au 7 juin 1996.* Paris: Vrin, 1998. p. 11-26.

Roberval, G. P. Observations sur la composition des mouvements, et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes. In: Gosse, P. & Neaulme, I. (Eds.). *Oeuvres de mathématique.* Amsterdam: Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, 1736. v. 3. p. 1-67.

Sasaki, C. *Descartes' mathematical thought*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003. (Boston Studies in the Philosophy of Science, 237)

Viète, F. *In artem analyticen isagoge: eiusdem ad logisticam speciosam notae priores nunc primum in lucem editae.* Paris: Annot. J. de Beaugrand, 1631.

Whiteside, D. T. Patterns of mathematical thought in the later seventeenth century. *Archive for History of Exact Sciences*, 3, 1, p. 179-388, 1961.