ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXIV / 1999, s. 26–42*

Jerzy DADACZYŃSKI

FILOZOFIA MATEMATYKI IMMANUELA KANTA I JEJ DZIEDZICTWO

Wśród głównych kierunków badań podstaw matematyki, które powstały na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku, wyróżnia się logicyzm, intuicjonizm oraz formalizm. Były one stowarzyszone, jak się zazwyczaj wskazuje, z konkretnymi koncepcjami w filozofii matematyki. I tak logicyzm wiąże się zwykle z platonizmem (skrajnym realizmem), intuicjonizm z konceptualizmem oraz formalizm z nominalizmem. Tradycyjnie, jeśli mówi się o związkach wspomnianych kierunków badań podstaw matematyki z filozofią I. Kanta, to wskazuje się jedynie na intuicjonizm, którego liczne tezy były zdeterminowane zaproponowanym przez filozofa z Królewca konceptualizmem w zakresie ontologii matematyki, a także koncepcją sądów syntetycznych *a priori* w teorii poznania.

Celem niniejszego opracowania jest uświadomienie tego, że wpływy filozofii matematyki I. Kanta na filozofie matematyki, skonfederowane z głównymi kierunkami badań podstaw matematyki, były o wiele szersze. Więcej, myśl I. Kanta do tego stopnia zdominowała dziewiętnastowieczne myślenie o matematyce, że wszystkie wspomniane filozofie nie mogły obojętnie przechodzić obok tego spadku. Filozofia matematyki I. Kanta była po prostu punktem odniesienia, do którego musiały się ustosunkować wszystkie wymienione filozofie. Można powiedzieć, że głównym celem tych filozofii było albo podważenie dorobku myśliciela z Królewca, przede wszystkim w zakresie epistemologii matematyki, albo jego podjęcie i rozwinięcie w program badań podstaw matematyki, albo przynajmniej częściowa akceptacja niektórych jego istotnych twierdzeń. Wszystkie one w jakiś sposób „zmagały się" ze spadkiem kantowskim.

Tak określona problematyka jednoznacznie determinuje plan prowadzonych badań. Najpierw zostaną zaprezentowane główne wyniki dociekań I. Kanta w zakresie filozofii matematyki. Następnie uwaga zostanie zwró-

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

cona na filozofie matematyki stowarzyszone z logicyzmem, intuicjonizmem oraz formalizmem. Ukazane zostanie, jak reprezentanci tych filozofii ustosunkowywali się do dorobku I. Kanta, jak traktowali go jako istotny punkt odniesienia.

Filozofia myśliciela z Królewca stanowiła generalnie punkt zwrotny w dziejach teorii poznania. Przy tej okazji I. Kant podjął szczegółowe zagadnienie z zakresu epistemologii matematyki, określając charakter sądów matematycznych[1]. Przejął on zasadniczy podział sądów od G. W. Leibniza oraz empirystów angielskich na prawdy rozumu oraz prawdy faktyczne. Zarówno według tradycji kontynentalnej, jak i angielskiej, zdania matematyki miały być prawdami rozumu. I. Kant określił prawdy rozumu mianem sądów analitycznych, natomiast prawdy faktyczne mianem sądów syntetycznych. Oprócz tego dokonał on dalszego podziału sądów syntetycznych na empiryczne, uzyskane na drodze doświadczenia, które nazwał sądami *a posteriori* oraz nieempiryczne, niezależne od doświadczenia, które nazwał sądami *a priori*. Sądy *a priori* charakteryzują się tym, że są one powszechne i konieczne. W ten sposób powstała koncepcja sądów syntetycznych *a priori*. W ramach tych ostatnich dokonał I. Kant kolejnego rozłącznego podziału. Rozpadają się one na intuicyjne oraz dyskursywne. Sądy intuicyjne związane są ze strukturą percepcji, natomiast sądy dyskursywne — z porządkującą funkcją pojęć ogólnych. Przykłady sądów dyskursywnych to zdania czystego przyrodoznawstwa a także znana zasada przyczynowości.

Istotne dla niniejszego opracowania jest jednak to, że twierdzenia matematyki określone zostały jako intuicyjne sądy syntetyczne *a priori*. I. Kant starał się w *Krytyce czystego rozumu* wytłumaczyć, jak możliwe są matematyczne sądy syntetyczne *a priori*. Przede wszystkim stwierdził on, że sądy matematyki dotyczą czasu i przestrzeni. Czasu i przestrzeni nie pojmował on jednak jako realnych przedmiotów poza poznającym podmiotem. Czas i przestrzeń są apriorycznymi formami podmiotowej zmysłowości. Są one dodawane do wszystkich wrażeń, tworząc w sumie wyobrażenia. Czas i przestrzeń są odpowiednio przedmiotem arytmetyki i geometrii. Ponieważ czas oraz przestrzeń są apriorycznymi formami zmysłowości, dodawanymi do wszelkich bez wyjątku wrażeń, dlatego sądy matematyki, czyli sądy o czasie i przestrzeni, są aprioryczne, są konieczne i powszechne. Z drugiej strony, wspomniany fakt, że sądy matematyki są „o czymś", mają swój przedmiot,

---

[1] Główne wyniki filozofii matematyki I. Kanta opracowano na podstawie następujacych publikacji: R. Morawski, *Immanuel Kant*, [w:] *Filozofia matematyki. Antologia tekstów klasycznych*, (red. R. Murawski), Poznań 1986, s.107; T. Batóg, *Filozofia matematyki*, [w:] [*Filozofia a nauka], s. 177–186; S. Kömer, The philosophy of mathematics. An introductory essay, London 1960, s. 25–31.*

czas i przestrzeń, sprawia, że posiadają one konkretną treść. Nie są więc zdaniami analitycznymi (zdaniami logiki) ale posiadają charakter syntetyczny. W ten sposób przeciwstawił się I. Kant logicyzmowi w poglądach G. W. Leibniza, a także empirystów angielskich. Syntetyczny charakter sądów matematyki wyklucza bowiem możliwość — akceptowaną przez G. W. Leibniza — wyprowadzenia twierdzeń matematyki z twierdzeń logiki.

Oprócz przełomu w zakresie epistemologii matematyki, dokonał również I. Kant rewolucji w ontologii matematyki. Partykularne przedmioty matematyki, takie chociażby, jak liczby czy też figury geometryczne, nie istnieją poza podmiotem poznającym. Są one konstruowane przez poznający podmiot w intuicji, czyli w apriorycznej naoczności. Stanowisko filozofa królewiackiego jest zatem stanowiskiem konceptualizmu. Wiąże się z tym przyjmowana przez niego koncepcja istnienia obiektów matematycznych. Przedmioty matematyki istnieją wtedy i tylko wtedy, kiedy odpowiadające im pojęcie jest niesprzeczne oraz gdy same przedmioty są konstruowalne w apriorycznej naoczności. Było to zerwanie z dotychczas przyjmowanym rozwiązaniem, które wywodziło się od Platona i stanowiło, że przedmiot matematyki istnieje, gdy jego pojęcie jest niesprzeczne. Niesprzeczność pojęcia stała się u I. Kanta z warunku wystarczającego jedynie warunkiem koniecznym istnienia odpowiednich przedmiotów matematyki.

Istotnie nowe jest także przekonanie I. Kanta dotyczące szczegółowego zagadnienia z zakresu ontologii matematyki, jakie stanowi kwestia nieskończoności. Zaakceptował on tradycyjny, arystotelesowski podział nieskończoności na nieskończoność potencjalną oraz aktualną. Nie zgadzał się jednak z przekonaniem Arystotelesa o tym, że pojęcie nieskończoności aktualnej jest niemożliwe. Zdaniem Kanta jest nieskończoność aktualna jedną z idei rozumu, czyli należy do grupy pojęć, które są z jednej strony wewnętrznie niesprzeczne, ale z drugiej nie są one stosowalne do doświadczenia zewnętrznego, ponieważ ich egzemplarzy nie można ani zaobserwować, ani też skonstruować[2].

Po naszkicowaniu głównych wyników filozofii matematyki I. Kanta, należy obecnie przedstawić, jak istotny punkt odniesienia stanowiła ona dla twórców głównych kierunków w zakresie badania podstaw matematyki, jak wielki wpływ wywierała na stosowne filozofie, względnie też, jak wiele wysiłku wkładano w przezwyciężenie utrwalonych w dziewiętnastym wieku tez kantowskich.

[2]Do zbioru idei rozumu zaliczat I. Kant także pojęcia Boga, duszy oraz świata (kosmosu).

Chronologicznie pierwszym kierunkiem w zakresie badania podstaw matematyki jest logicyzm[3]. Zaczął on się kształtować już w latach osiemdziesiątych dziewiętnastego wieku pod wpływem dokonań G. Fregego w logice, G. Cantora w teorii mnogości oraz R. Dedekinda i G. Peano, którzy zaksjomatyzowali po raz pierwszy dyscyplinę, z której, jak uważano, była wyprowadzalna cała matematyka klasyczna, mianowicie arytmetykę liczb naturalnych. Sama idea logicyzmu została po raz pierwszy, jak to już wspomniano, sformułowana przez G. W. Leibniza. Miała ona polegać na wyprowadzeniu całej matematyki z logiki. Jednak dopiero rozwój logiki w dziewiętnastym wieku, powstanie teorii zbiorów (teorii mnogości) oraz arytmetyzacja matematyki klasycznej, dokonana również w dziewiętnastym wieku, umożliwiły próbę realizacji tego zadania. W praktyce wykonanie planu logicyzmu polegało na wykonaniu dwu kroków. Po pierwsze, należało pokazać, że wszystkie aksjomaty i twierdzenia matematyki dają się wyprowadzić z twierdzeń logiki, po wtóre zaś, należało wszystkie pojęcia matematyki, łącznie z jej pojęciami pierwotnymi, zdefiniować wyłącznie przy pomocy pojęć logicznych.

Wykonanie tego zadania zostało zdecydowanie ułatwione przez proces arytmetyzacji matematyki klasycznej, który dokonał się w dziewiętnastym wieku. Pokazano wówczas, że wszystkie działy matematyki klasycznej można sprowadzić do (czy też wywieść z) arytmetyki liczb naturalnych. Dotyczyło to po kolei arytmetyki liczb całkowitych, wymiernych, rzeczywistych (a także zespolonych), analizy matematycznej, geometrii euklidesowej (przy pomocy metody kartezjatiskiej) oraz geometrii nieeuklidesowych, dla których znaleziono modele euklidesowe. W efekcie więc wszystkie twierdzenia matematyki klasycznej można było wyprowadzić z twierdzeń arytmetyki liczb naturalnych, natomiast wszystkie pojęcia matematyki klasycznej można było zdefiniować przy pomocy pojęć występujących w arytmetyce liczb naturalnych (w tym oczywiście również stałych logicznych). Kolejnym istotnym krokiem było podanie przez R. Dedekinda i G. Peano aksjomatyki arytmetyki liczb naturałnych[4]. Ta ostatnia składała się z pięciu aksjomatów i posługiwała się trzema pojęciami pierwotnymi[5]. Można więc konkludować, że wszystkie twierdzenia matematyki klasycznej można wyprowadzić z ak-

[3]Zarys koncepcji looicyzmu został opracowany na podstawie następujących prac: S. Körner, dz. cyt., s. 32–71; J. Perzanowski, *Logicyzm*, [w:] *Mała encykdopedia logiki*, Wrocław 1988, s. 93–95; L. Borkowski, *Logika formalna*, Warszawa 1970, s. 214–241.

[4]Nie wyjaśnionym po dzień dzisiejszy problemem z zakresu dziejów matematyki jest to, czy G. Peano samodzielnie skonstruował swoją wersję aksjomatyki arytmetyki liczb naturalnych, czy też skorzystał z wcześniejszej aksjomatyzacji R. Dedekinda.

[5]Oczywiście, oprócz tych trzech pojęć pierwotnych posłużono się w aksjomatyce arytmetyki liczb naturalnych stałymi logicznymi.

sjomatów arytmetyki liczb naturalnych, a wszystkie pojęcia matematyki klasycznej — zdefiniować przy pomocy pojęć pierwotnych arytmetyki liczb naturalnych (i stałych logicznych).

W takiej sytuacji wykonanie programu logicyzmu sprowadzało się w istocie do pokazania, że pięć aksjomatów arytmetyki liczb naturalnych da się wyprowadzić z twierdzeń logiki, zaś trzy pojęcia pierwotne tej aksjomatyki dają się zdefiniować przez pojęcia tylko logiczne.

Zadania tego podjął się jako pierwszy Frege, w latach osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych XIX wieku. Jego wykonanie domagało się stworzenia skomplikowanej aparatury logicznej[6]. Ostatecznie Frege podołał postawionemu zadaniu i zrealizował program logicyzmu[7].

Po zrealizowaniu tego programu wyciągnął on natychmiast doniosłe wnioski filozoficzne, przede wszystkim zaś wniosek z zakresu epistemologii matematyki. Otóż G. Frege uważał, że wszystkie zdania logiki są sądami analitycznymi. Również zdania dające się udowodnić wyłącznie przy pomocy praw logiki oraz definicji terminów w nich występujących nazywa G. Frege analitycznymi[8]. Zatem ostatecznie cała matematyka składa się z sądów analitycznych[9].

Był to wynik zasadniczo odmienny od tego, który prezentował I. Kant[10]. Istotą jego epistemołogii matematyki było przekonanie, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*. Zdaniem myśliciela z Królewca matematyka posiadała pewną treść i dlatego nie była redukowalna do logiki.

[6]Chodziło przede wszystkim o stworzenie, przynajmiej w pewnym ograniczonym zakresie, teorii relacji ancestralnych. Warto też w tym miejscu wspomnieć, że logika, którą posługiwał się G. Frege, była logiką w specyficznym tego słowa znaczeniu. Nie była to tylko pewna teoria wynikania, ale równocześnie zakładano w niej specjalną teorię przedmiotów (obiektów). G. Frege mówił o „zakresach pojęć". Jego logikę da się jednak wyrazić w kategoriach teoriomnogościowych. W istocie zatem nie chodziło o sprowadzenie matematyki klasycznej do logiki w sensie teorii wynikania, lecz do jakiejś wersji teorii mnogości. Ta sama uwaga dotyczy późniejszej próby realizacji programu logicyzmu przez B. Russella i A. N. Whiteheada.

[7]Oczywiście, należy pamiętać o tym, że system, do którego G. Frege sprowadził arytmetykę liczb naturalnych, zawierał liczne antynomie. Usunęli je, z jednej strony B. Russell i A. N. Whitehead w teorii typów, z drugiej zaś E. Zermelo, który zaksjomatyzował teorię mnogości.

[8]Por. L. Borkowski, dz. cyt., s. 240.

[9]Twierdzenie przedstawione powyżej wykracza w istocie poza twierdzenie sformułowane przez G. Fregego. Był on bowiem przekonany, że zdania arytmetyki i analizy, analityczne, posiadają zasadniczo odmienny charakter od sądów geometrii. Tu zgadzał się z I. Kantem i twierdził, że mająone charakter sądów syntetycznych *a priori*.

[10]Oczywiście należałoby poddać dokładniejszej analizie to, czy koncepcje analityczności sądów I. Kanta i G. Fregego pokrywały się ze sobą. W ogóle problem podziału sądów na analityczne i syntetyczne (i kryteriów tego podziału) jest po dzień dzisiejszy dyskutowany. Odzywają się też głosy negujące podstawy dokonywania takiego rozłącznego podziału.

Natomiast realizacja programu logicyzmu świadczyła o czymś dokładnie przeciwnym.

Wypada zauważyć, że przeciwne przekonanie G. Fregego było oparte nie tylko na refleksji filozoficznej, lecz również na starannie przeprowadzonych badaniach podstaw matematyki. Co więcej, można odnieść wrażenie, że program logicyzmu został między innymi przeprowadzony właśnie po to, by podważyć epistemologiczną tezę Kanta. świadczy o tym fakt, że natychmiast po jego realizacji wyciągnięto wnioski antykantowskie. Innymi słowy: filozofia matematyki Kanta była niezwykle istotnym punktem odniesienia dla filozofii matematyki stowarzyszonej z logicyzmem, lub precyzyjniej, z filozofią, która wynikała z realizacji programu logicyzmu.

Należy oczywiście pamiętać o tym, że sposób realizacji programu logicyzmu został podważony przez odkrycie antynomii logicznych (teoriomnogościowych), które dotykały samych podstaw systemu zbudowanego przez G. Fregego. Dotyczy to przede wszystkim antynomii Russella. Ostatecznie logik niemiecki stracił przekonanie do prawidłowości skonstruowanej przez siebie logicyzacji arytmetyki (matematyki klasycznej). W konsekwencji musiał również zmienić swoje poglądy z zakresu epistemologii matematyki. Przyjął tezę zwalczanego poprzednio przez siebie kantyzmu i orzekł, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*.

Natomiast sam system G. Fregego zrekonstruowano w ten sposób, by zachować wszystkie jego wyniki, a jednocześnie by nie dotykały go znane antynomie. Dokonali tego, budując teorię typów logicznych, B. Russell oraz A. N. Whitehead. Epistemologiczny wydźwięk realizacji tego zamierzenia był tak samo antykantowski, jak pierwsze wnioski wyciągnięte przez G. Fregego. Ponieważ matematyka jest wywiedlna z logiki, dlatego zdania matematyki są analityczne *a priori*.

Filozofia matematyki I. Kanta stanowiła również niezwykle ważny punkt odniesienia dla filozofii skonfederowanej z intuicjonizmem w ramach badań podstaw matematyki. O ile jednak logicyści starali się przeciwstawić kantyzmowi w filozofii matematyki, o tyle intuicjoniści rozwijali jego podstawowe idee.

Już I. Kant podkreślał rolę intuicji w epistemologii i ontologii matematyki. Intuicjoniści holenderscy podjęli tę myśl na początku dwudziestego wieku, zmieniając jednak do pewnego stopnia konotacje terminu „intuicja". Głosili oni, że matematyka jest naturalnym wytworem ludzkiego intelektu. Ma ona być wyrazem jego życiowej, wolnej aktywności. Matematyka jest produktem ścisłej strony ludzkiego myślenia, opartego o pewne intuicje podstawowe, ale nie kierującego się żadnymi stałymi czy sztywnymi zasadami. Intuicjoniści wyrażali przekonanie, że zbiór podstawowych intuicji i idei wyznaczających aktywność rozumu, których produktem jest matematyka, zmienia się w czasie. Wspomniana aktywność jest niezależna od języka matematycznego, a także od dowodów formalnie poprawnych, ale nieintuicyjnych[11].

Intuicja — zdaniem twórcy omawianego kierunku L. E. J. Brouwera — jest swoistą aktywnością rozumu polegającą na konstruowaniu pojęć wraz z rozumieniem warunkowanym przez zdolność jasnego wyróżniania pojęć oraz ich związków. Scharakteryzować ją można jako podstawową aktywność życiową, która jest *a priori*, jest niezależna od języka i jest obiektywna, ponieważ jest taka sama dla wszystkich ludzi[12].

Wydaje się, że L. E. J. Brouwer odszedł nieco od koncepcji intuicji prezentowanej wcześniej przez I. Kanta. Owszem, dla filozofa z Królewca intuicja miała również charakter aprioryczny. Można ją było wręcz zdefiniować jako aprioryczną naoczność. W ujęciu holenderskiego matematyka intuicja jest jednak ludzką aktywnością, która polega na konstruowaniu pojęć. Natomiast według I. Kanta intuicja wydaje się mieć bardziej „bierny" charakter. To nie intuicja dokonuje konstrukcji pojęć, ale to „w" intuicji, czyli apriorycznej naoczności, umysł ludzki konstruuje obiekty matematyczne, których pojęcia już posiada. Wydaje się zatem, że L. E. J. Brouwer nie tylko „uaktywnił" intuicję kantowską, ale równocześnie dokonał uproszczenia w epistemologii I. Kanta.

Intuicja — jak wspomniano — jest, zdaniem L. E. J. Brouwera, aktywnością aprioryczną. Jest ona nie tylko niezależna od języka, ale również od logiki. To raczej od niej i od samej matematyki logika jest zależna. Nie można zatem sprowadzić matematyki do logiki. Zatem sądy matematyki, będące apriorycznymi, nie są jednocześnie analitycznymi. Są zatem sądami syntetycznymi *a priori*. Widać zatem, że w tym istotnym zakresie epistemologii poglądy intuicjonistów, przeciwne przekonaniom logicystów, były zbieżne z podstawową tezą I. Kanta.

W filozofii matematyki myśliciela z Królewca istotną funkcję spełniały aprioryczne formy naoczności: czas i przestrzeń. Intuicjonizm przejął z niej aprioryczną formę czasu: „intuicjonizm [...] przyszedł znów do siebie, odrzucając kantowską aprioryczność przestrzeni, a podkreślając zdecydowanie aprioryczność czasu. Ten neointuicjonizm uznaje rozpadanie się momentów życia na jakościowo różne części, które rozdzielone przez czas mogą być na nowo połączone, za podstawowe zjawisko ludzkiego umysłu, przechodzące — dzięki abstrahowaniu od jego treści emocjonalnej — w podstawowe zjawisko myślenia matematycznego. Ta intuicja dwujedyności, ta praintuicja mate-

[11] Por. J. Perzanowski, *Intuicjonizm*, [w:] *Mała encyklopedia logiki*, s. 75 (74–77).
[12] Por. tamże.

matyki, stwarza nie tylko liczby jeden i dwa, ale także wszystkie skończone liczby porządkowe, gdyż jeden z elementów tej dwujedyności może znów być pomyślany jako nowa dwujedyność — i proces ten może być powtarzany dowolnie wiele razy. To prowadzi jeszcze do skonstruowania najmniejszej liczby porządkowej ω. W końcu ta podstawowa intuicja matematyki, w której jednoczy się to, co połączone i to, co rozdzielone, to, co spójne i to, co dyskretne, prowadzi bezpośrednio do powstania intuicji liniowego kontinuum, tzn. [intuicji] tego, co „pomiędzy", czego nie można wyczerpać przez wstawianie nowych elementów i co w związku z tym nie może być traktowane jedynie jako kolekcja jednostek. W ten sposób aprioryczność czasu sprawia, że nie tylko twierdzenia arytmetyczne są sądami syntetycznymi *a priori*, ale to samo odnosi się również do twierdzeń geometrii i to nie tylko elementarnej dwu– czy trójwymiarowej, ale również nieeuklidesowej i n–wymiarowej. Od czasów Kartezjusza nauczyliśmy się bowiem sprowadzać za pomocą rachunku współrzędnych wszystkie te geometrie do arytmetyki".

Może powstać pytanie, dlaczego L. E. J. Brouwer skorzystał w swej koncepcji matematyki jedynie z apriorycznej formy czasu, a odrzucił kantowską aprioryczną formę przestrzeni. Rozstrzygnięcie to wynikało z odkrycia w dziewiętnastym wieku geometrii nieeuklidesowych, co w przekonaniu wielu falsyfikowało kantowską filozofię geometrii opartą na apriorycznej formie przestrzeni. Brouwer znalazł łatwe rozwiązanie tej sytuacji problemowej. Już w dziewiętnastym wieku pokazano, że wszystkie geometrie — klasyczna i nieklasyczne — mogą być zarytmetyzowane, sprowadzone do arytmetyki metodą Kartezjusza. Dlatego wystarczała intuicja ciągu liczb naturalnych i budowana na tym ciągu arytmetyka liczb naturalnych, by wywieść z tej podstawy matematyki wszystkie geometrie. Dodatkowo oparł się Brouwer na przekonaniu, że podmiot poznający może z intuicji czasu skonstruować intuicję *continuum* liniowego, z którego wywodzi się cała geometria.

Zatem można konkludować, że epistemologia intuicjonistów jest przejęta od I. Kanta i dostosowana do aktualnego stopnia rozwoju matematyki. Dalsze analizy bedą zmierzały do ukazania, iż również ontologia matematyki filozofa z Królewca zaważyła na ontologii przyjmowanej przez intuicjonistów. Miało to dalej istotne konsekwencje w przyjmowanych przez nich rozwiązaniach dotyczących podstaw matematyki, logiki i projektu zbudowania nowej, intuicjonistycznej matematyki.

Stanowisko I. Kanta w zakresie ontologii matematyki było stanowiskiem konceptualistycznym. W jego konceptualizmie była zawarta teza konstruktywizmu. Intuicjoniści przejęli konceptualizm kantowski. Uczeń L. E. J. Brouwera, A. Heyting, twierdził: „nie przypisujemy istnienia niezależnego od naszej myśli, tzn. transcendentalnego, ani liczbom całkowitym, ani żadnym innym przedmiotom matematycznym [...]. Przedmioty matematyczne z natury swej są zależne od ludzkiej myśli, i to nawet gdyby były niezależne od aktualnych aktów myślenia. Istnienie ich jest zagwarantowane o tyle tylko, o ile mogą być określone przez myśl. Ale ta możliwość poznania ujawnia się nam dopiero przez sam akt poznawania. Wiara w transcendentalne istnienie, nie poparta pojęciami, musi być odrzucona jako środek dowodu matematycznego".

Podobnie jak I. Kant, intuicjoniści wiązali z konceptualizmem tezę konstruktywizmu. Nie wypracowali oni jednoznacznej i klarownej koncepcji konstrukcji matematycznej. Często powiada się, że tyle jest typów konstrukcji co konstruktywistów, wśród których znajdują się oczywiście wszyscy intuicjoniści. Najogólniej jednak można powiedzieć, że intuicjoniści konstrukcję jakiegoś obiektu rozumieli jako podanie zespołu operacji wraz z kolejnością ich stosowania, prowadzącą do tego obiektu przez stosowanie tych operacji w ustalonej kolejności do obiektów podstawowych — to znaczy obiektów wyprowadzonych z intuicji podstawowych, bądź do obiektów wcześniej w ten sposób skonstruowanych[13].

Przejęcie od I. Kanta ogólnej idei o konstruktywnym charakterze obiektów matematycznych zaprowadziło intuicjonistów do daleko idących wniosków w zakresie podstaw matematyki, logiki oraz konieczności zrekonstruowania matematyki klasycznej. Konstruktywistyczna rekonstrukcja, jak się okazało, mogła obejmować tylko niektóre fragmenty matematyki klasycznej.

Zgodnie z — przyjmowaną przez intuicjonistów za I. Kantem — tezą konstruktywizmu, wykazanie istnienia jakiegoś przedmiotu matematycznego musi być związane z prezentacją jego konstrukcji. Tymczasem w matematyce klasycznej istnieją dowody egzystencjalne nie wprost, które nie podają konstrukcji przedmiotu, którego istnienie uzasadniają. Intuicjoniści — domagający się za I. Kantem konstrukcji przedmiotu matematycznego — odrzucają tego typu dowody istnienia w matematyce. Jednak tym samym odrzucają oni klasyczną logikę arystotelesowską. Można to zaprezentować na przykładzie, który wywodzi się jeszcze z czasów dyskusji twórcy teorii mnogości, Cantora, z praintuicjonistą, Kroneckerem[14]. G. Cantor, chcąc udowodnić istnienie liczb przestępnych (transcendentalnych) rozumował następująco:

[13] Por. J. Perzanowski, *Intuicjonizm*, s. 76.

[14] Por. J. Dadaczyński, *Heurystyczne funkcje założeń filozoficznych w kontekście odkrycia teorii mnogości G. Cantora*, Kraków 1994, s.110–111.

$$\text{Niech } A \text{ będzie zbiorem wszystkich liczb algebraicznych z przedziału liczb rzeczywistych } (0,1). \tag{1}$$

Przyjmuje się w rozumowaniu klasyczną zasadę wyłączonego środka:

$$p \vee \neg p. \tag{2}$$

Zasadę wyłączonego środka można zapisać w rachunku kwantyfikatorów:

$$\Pi_{x \in (0,1)}(x \in A) \vee \neg \Pi_{x \in (0,1)}(x \in A). \tag{3}$$

Zdanie to, zgodnie z regułami rachunku kwantyfikatorów, można przekształcić następująco:

$$\Pi_{x \in (0,1)}(x \in A) \vee \Sigma_{c \in (0,1)} \neg (c \in A). \tag{4}$$

Przy założeniu, że prawdziwy jest pierwszy człon alternatywy (4) i uwzględnieniu, że zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb algebraicznych, można wywnioskować, iż zbiór liczb naturalnych jest równoliczny ze zbiorem liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$, co stanowi sprzeczność ze znanym twierdzeniem Cantora. Zatem, zgodnie z zasadami klasycznego rachunku zdań i predykatów, prawdziwy jest drugi człon alternatywy (4). Jeśli przez T oznaczyć zbiór wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $(0,1)$, które nie są liczbami algebraicznymi (są zatem liczbami transcendentalnymi, przestępnymi), wówczas prawdziwe jest zdanie:

$$\Sigma_{x \in (0,1)}(c \in T). \tag{5}$$

Zatem — taki Cantor wyciągnął wniosek — istnieje liczba przestępna c.

W ten sposób prowadzone rozumowanie nie pozwala jednak orzec o żadnej konkretnej liczbie rzeczywistej, że jest ona liczbą przestępną. Nie podano bowiem w dowodzie żadnej procedury określającej sposób konstrukcji jakiejkolwiek liczby przestępnej. Wobec tak rozumianego, niekonstruktywnego charakteru dowodu należało, zdaniem Kroneckera, odrzucić konkluzję, w której stwierdzano istnienie liczby transcendentalnej c.

Jednak przy pełnej akceptacji zasad logiki klasycznej (zdań i kwantyfikatorów), na których oparte były reguły wnioskowania, Cantorowskiemu dowodowi istnienia liczb przestępnych nic nie można było zarzucić. Każdy następny krok logicznie wynikał ze zdań wcześniej wprowadzonych w procesie dowodowym i ze zdań (twierdzeti i definicji) wcześniej akceptowanych w matematyce. Zatem jedynym sposobem zakwestionowania, od strony formalnej, dowodu mogło być ewentualne zakwestionowanie punktu wyjścia, czyli prawdziwości zdania (3). Ponieważ jednak zdanie (3), to nic innego jak egzemlifikacja, uszczegółowienie zasady wyłączonego środka, zakwestionowanie zdania (3) było identyczne z odrzuceniem powszechnej obowiązywalności zasady wyłączonego środka: $p \vee \neg p$.

Zatem już kroneckerowska krytyka dowodów niekonstruktywnych, wynikająca z przyjętych założeń konceptualistycznych, niosła w sobie, wówczas jeszcze ukrytą, negację jednej z podstawowych zasad logiki klasycznej. Intuicjoniści podnieśli tę krytykę niekonstruktywnych dowodów twierdzeń egzystencjalnych. Tym samym odrzucili oni klasyczną logikę arystotelesowską. Bowiem odrzucając dowody niekonstruktywne twierdzeń egzystencjalnych, odrzucili oni zasadę wyłączonego środka[15]. Generalnie zaś można stwierdzić, że akceptowana w kręgach intuicjonistów filozofia kantowska, zawierająca ideę konstruktywizmu, doprowadziła w konsekwencji do odrzucenia logiki klasycznej i zbudowania logiki intuicjonistycznej przez A. Heytinga.

Warto też zauważyć, że z tego typu rozumowań korzystano w matematyce klasycznej (chociażby w analizie), a także w teorii mnogości w bardzo licznych dowodach niezwykle ważnych twierdzeń. Zatem wynikająca z zasad ontologicznego konceptualizmu krytyka dowodów niekonstruktywnych, przeprowadzona przez intuicjonistów, doprowadziła w istocie do znacznego „zubożenia” matematyki intuicjonistycznej w stosunku do matematyki klasycznej. Ostatecznie przyjmowane przez intuicjonistów ontologiczne zasady I. Kanta kazały im w duchu konstruktywistycznym zbudować nową matematykę, która musiała być znacznie „zubożona” w stosunku do klasycznej[16].

Generalnie zatem można stwierdzić, że filozofia I. Kanta decydująco wpłynęła na filozofię matematyki intuicjonistów, a także na wiele ich rozstrzygnięć z zakresu podstaw matematyki. Przejęto tezę, że twierdzenia matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*, niesprowadzalnymi do logiki, korzystano z kocepcji apriorycznej formy czasu w budowaniu arytmetyki i geometrii, zmieniono nieco kantowską koncepcję intuicji. Zgodnie z I. Kantem, intuicjoniści stali na stanowisku konceptualizmu w ontologii matematyki i konsekwentnie wysuwali tezę konstruktywizmu. To w konsekwencji doprowadziło do odrzucenia logiki klasycznej i do rekonstrukcji matematyki w duchu konstruktywistycznym.

---

[15]Intuicjoniści stosują dowody nie wprost jedynie do obalania przypuszczeń oraz do dowodów nieistnienia, odrzucając ich stosowanie do uzyskiwania rezultatów pozytywnych [por. J. Perzanowski, *Intuicjonizm*, s. 76.].

[16]Wymóg konstruktywności kazał już semiintuicjonistom francuskim odrzucić teoriomnogościowy aksjomat wyboru. Ponieważ aksjomat ten lub jego substytuty interweniują w wielu dowodach teorii mnogości i analizy, dlatego prowadziło to do dalszego „zubożenia” matematyki klasycznej.

Pozostaje jeszcze do omówienia to, na ile dla filozofii związanej z formalizmem koncepcja matematyki I. Kanta stanowiła istotny punkt odniesienia. Pozornie mogłoby się wydawać, że stanowisko formalizmu w podstawach matematyki stoi wyłącznie na przedłużeniu linii rozwojowej wyznaczonej jeszcze przez G. W. Leibniza, który postulował wprowadzenie generalnie w nauce — a zatem i w matematyce — języka formalnego. Potocznie przyjmuje się, że taki język, wprowadzony ostatecznie właśnie przez formalistów, nie posiada w ich pojęciu żadnej interpretacji. Obiektami matematyki byłyby zatem same formalne znaki. Byłoby to stanowisko nominalizmu w ontologii matematyki. Zatem można by powiedzieć tyle, że filozofia matematyki formalistów przeciwstawia się koncepcji matematyki I. Kanta, tak jak nominalizm przeciwstawia się konceptualizmowi. Taka teza wynika jednak ze zbyt powierzchownej znajomości filozofii matematyki skonfederowanej z formalizmem albo też utożsamienia jej wyłącznie z tzw. formalizmem ścisłym, reprezentowanym przez H. B. Curry'ego. W istocie kantyzm zasadniczo wpłynął na niektóre podstawowe rozwiązania filozoficzne, przyjęte przez twórcę formalizmu, D. Hilberta.

Podzielił on matematykę na dwie części, finistyczną, opisującą konkretne skończone przedmioty, oraz infinistyczną, opisującą nieskończoność aktualną. Odnośnie do pierwszej wysuwał następujące – odwołujące się do koncepcji I. Kanta — twierdzenia: „w uznaniu, że takie warunki [wstępne warunki wnioskowania logicznego — J. D.] muszą być uwzględniane, zgadzamy się całkowicie z filozofami, w szczególności z Kantem. Już on uczył — i stanowi to integralną część jego nauki — że matematyka posiada treść pewną i niezależną od jakiejkolwiek logiki i że w związku z tym nigdy nie może zostać ugruntowana w oparciu o samą tylko logikę. Dlatego też próby Fregego i Dedekinda nie doprowadziły do niczego. Jako warunek wstępny stosowania wnioskowań logicznych i wykonywania operacji logicznych dane już jest coś w przedstawieniu (*in der Vorstellung*): [mianowicie] pewne pozalogiczne konkretne obiekty, które jawią się jako doświadczane bezpośrednio przed wszelkim myśleniem. Jeżeli wnioskowanie logiczne ma być pewne, to obiekty te muszą się dawać całkowicie ogarnąć jednym spojrzeniem we wszystkich ich częściach; ich własności, różnice pomiędzy nimi, to że następują jedne po drugich lub są zestawione jedne obok drugich, jest bezpośrednio poglądowo dane wraz z tymi obiektami jako coś, co ani nie da się zredukować do czegoś innego, ani nie potrzebuje takiej redukcji. To są podstawowe założenia filozoficzne, które uważam za niezbędne zarówno dla matematyki, jak i w ogóle dla jakiegokolwiek naukowego myślenia, rozumienia i komunikowania się".

Dalej D. Hilbert wyjaśnia, że owe przedlogiczne, dane przed wszelkim myśleniem, obiekty to liczby naturalne: „1, 11, 111, 1111". Wydaje się, że według niemieckiego matematyka są one konstruktami ludzkiego umysłu, danymi *a priori*. Zdania matematyki finistycznej wyrażają sądy o owych obiektach. Muszą to więc być sądy *a priori*. Zdania te nie wyrażają — jak twierdzi D. Hilbert — sądów logicznych, według terminologii I. Kanta analitycznych. Zatem twierdzenia matematyki finistycznej są sądami syntetycznymi *a priori*, nieredukowalnymi do zdań logiki.

Można więc stwierdzić, że odnośnie do ontologii i epistemologii matematyki finistycznej, D. Hilbert zgadzał się zasadniczo z I. Kantem. Obiekty matematyki finistycznej są konstruktami ludzkiego umysłu, sądy matematyki finistycznej są sądami syntetycznymi *a priori*, nie są one wywiedlne z logiki. Nie jest zatem prawdą, że Hilbert zajmował w ontologii matematyki stanowisko (wyłącznie) nominalistyczne. Matematyka finistyczna posiada pewną treść. Dopiero w ramach programu formalizacji i budowy teorii dowodu (metamatematyki) zajął stanowisko, które można nazwać nominalizmem metodologicznym: formuły matematyki (finistycznej i infinistycznej) należy traktować tak, jakby nie posiadały one żadnych znaczeń. Zaś w zakresie ontologii i epistemologii matematyki finistycznej zajął stanowisko kantowskie.

W jednym jeszcze — doniosłym — punkcie swej koncepcji D. Hilbert nawiązał do filozofii I. Kanta. Myśliciel z Królewca akceptował istnienie nieskończoności aktualnej, twierdząc, że jest ona jedną z idei rozumu, dla których nie sposób znaleźć rzeczowej podstawy w świecie zjawiskowym. Tę myśl podjął D. Hilbert, dostosowując ją do stanu matematyki i fizyki początku dwudziestego wieku. Za powstanie antynomii teoriomnogościowych niektórzy matematycy, związani głównie z kierunkiem intuicjonistycznym, winili stosowanie w matematyce zbiorów aktualnie nieskończonych. Wprawdzie kryzys został przezwyciężony, dzięki zbudowaniu aksjomatycznych teorii mnogości oraz teorii typów logicznych, ale to wcale nie gwarantowało jeszcze tego, że w matematyce, w której nadal posługiwano się zbiorami nieskończonymi, nie wystąpią inne, dotychczas nieznane antynomie. D. Hilbert postanowił bronić matematyki z nieskończonością aktualną. Owszem, nauka dostarczała stosownej wiedzy, że w rzeczywistości fizycznej nie istnieją wielkości nieskończenie małe. Kosmologia einsteinowska potwierdzała, że nawet największy obiekt, wszechświat, nie jest nieskończenie wielki. Ale to zdaniem Hilberta nie stanowiło jeszcze stosownej podstawy, by eliminować nieskończoność aktualną z matematyki. Jest ona bowiem właśnie ideą rozumu w sensie kantowskim, pojęciem, dla którego nie sposób znaleźć rzeczowej podstawy. Matematyka i tak od dawna posługuje się elementami idealnymi. Jako przykład D. Hilbert podawał wprowadzenie liczb urojonych (np. $i = \sqrt{-1}$), które — jak pisał — w rzeczywistości nie istnieją. Twierdzenia idealne wprowadzano, aby uprościć twierdzenia o istnieniu i liczbie pierwiastków. Tak samo dla zachowania prostych reguł formalnych logiki arystotelesowskiej trzeba dodać do twierdzeń finistycznych stwierdzenia idealne, dotyczące nieskończoności aktualnej[17].

D. Hilbert nie przejął jednak do końca kantowskiej koncepcji nieskończoności aktualnej jako idei rozumu. I. Kant twierdził, że idea nieskończoności jest niesprzeczna, natomiast Hilbert uważał, że wprowadzenie tej idei oraz opisujących ją twierdzeń idealnych do matematyki wymaga jeszcze dodatkowo dowodu niesprzeczności tak zbudowanego systemu. Uważał, że taki dowód można przeprowadzić w ramach proponowanej przez niego teorii dowodu (metamatematyki)[18].

Przeprowadzone badania wykazały, że dorobek I. Kanta w zakresie filozofii matematyki, stanowił bardzo ważny element dziedzictwa myśli w tym zakresie. Do tego stopnia opanował on sposób rozumienia matematyki w XIX wieku, że powstające u początku wieku XX koncepcje podstaw matematyki musiały zmagać się z dziedzictwem I. Kanta, nie mogąc przejść obok niego obojętnie. Kantyzm stanowił dla filozofii stowarzyszonych z poszczególnymi kierunkami badań podstaw matematyki istotny, jeśli nie najważniejszy punkt odniesienia. I tak twórcy logicyzmu włożyli wiele wysiłku w próbę podważenia tezy Kanta, że twierdzenia matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*. Intuicjonizm w istocie przejął myśl kantowską i zaadaptował ją do stanu matematyki z początku dwudziestego wieku. Nawet twórca formalizmu, D. Hilbert, swą koncepcję ontologii i epistemologii matematyki finistycznej oraz koncepcję nieskończoności jako idei rozumu przejął od I. Kanta.

[17]Por. tamże, s. 299–300. D. Hilbert wspomniał w swej wypowiedzi o krytyce zasad logiki arystotelesowskiej, stosowanej w matematyce, którą przeprowadził L. Kronecker. Uważał, że należy jednak rozciągnąć zasady tejże logiki na nieskończonne obiekty (zbiory, liczby) i tak budowane twierdzenia wprowadzić jako idealne do matematyki.

[18]Drugie twierdzenie Gödla pokazało, że zbudowanie takiego dowodu dla arytmetyki liczb naturalnych, przy pomocy środków dostępnych w tej teońi, jest niemożliwe. Pierwsze twierdzenie G dla podważyło inne przekonanie D. Hilberta, o zupełności (niesprzecznej) matematyki.