ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXVIII-XXIX / 2001, s. 84–99*

Jerzy DADACZYŃSKI

Wydział Filozoficzny PAT
Kraków

FILOZOFIA MATEMATYKI KANTA W OCZACH MŁODEGO BOLZANO

B. Bolzano (1781-1848) uchodził za jednego z najzagorzalszych przeciwników filozofii matematyki I. Kanta. W swoim monumentalnym dziele *Wissenschaftslehre* (1837) odrzucił on fundamentalny pogląd filozofa z Królewca, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori* i wprowadziwszy własną koncepcję analityczności (*resp*. syntetyczności) twierdził, że sądy matematyki są zasadniczo analityczne. Aby jednak takie przekonanie wyrazić, musiał przejść B. Bolzano długą drogę ewolucji, by wyzwolić się z cienia tak bardzo rozpowszechnionych za jego życia wpływów I. Kanta.

Niniejszy artykuł prezentuje, jak do filozofii matematyki I. Kanta ustosunkował się młody, zaledwie dwudziestodziewięcioletni B. Bolzano. Będzie zasadniczo chodziło o ujawnienie tego, że młody B. Bolzano nie przyjął bezkrytycznie poglądów filozofa z Królewca i starał się do jego myśli wprowadzić istotne poprawki, które później zaowocowały przejściem do opozycji wobec I. Kanta.

Pewne elementy filozofii matematyki młodego B. Bolzano zawarte są w jego książce opublikowanej w Pradze w roku 1810 *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*[1]. Zawiera ona do-

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Reprint książki B. Bolzano zawarty jest w *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum. Czechoslovak Studies in the History of Science*, Prague 1981, Special Issue 12.

datek poświęcony niektórym aspektom filozofii matematyki I. Kanta, zatytułowany *Anhang über die Kantische Lehre von der Construction der Begriffe durch Anschauungen*[2].

Swój dodatek dotyczący filozofii matematyki I. Kanta rozpoczyna B. Bolzano od stwierdzenia, że zwrócenie uwagi na różnice pomiędzy analityczną i syntetyczną częścią wiedzy pozostaje wyłączną zasługą filozofa z Królewca. Od razu jednak wspomina, że nie wszystko, co I. Kant twierdził na temat wewnętrznej natury sądów syntetycznych, może być podtrzymane[3].

B. Bolzano, relacjonując dalej dokonania I. Kanta, zgodził się, że prawdziwość sądów analitycznych ma zupełnie inną podstawę aniżeli prawdziwość sądów syntetycznych. Źródłem prawdziwości sądów analitycznych jest zdanie „ A z B jest rodzajem A ”. To zdanie B. Bolzano nazywa zasadą sprzeczności (*Satz des Widerspruches*) . Inaczej jest z sądami syntetycznymi. Te nie dają się wyprowadzić z zasady sprzeczności. Wobec tego powstaje pytanie, jaka jest podstawa, dla której rozum dołącza do podmiotu predykat, który nie jest zawarty w pojęciu podmiotu. B. Bolzano stwierdza, że zdaniem I. Kanta ową podstawą jest wyobrażenie (*Anschauung*) , które rozum łączy z pojęciem podmiotu i które równocześnie zawiera predykat. Tak więc w konsekwencji według teorii I. Kanta wszystkim pojęciom, o których można zbudować sądy syntetyczne, muszą odpowiadać stosowne wyobrażenia (*Anschauungen*) . Jeśli wspomniane wyobrażenia (*Anschauungen*) są empiryczne, to również empiryczne są odpowiednie

---

[2]Por. B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, Prag 1810, s. 135-152 [przypisy odnoszą się do paginacji reprintu].

[3]Por. B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, s. 135. Należy zwrócić uwagę, że B. Bolzano w roku 1810 przyjął definicje sądów analitycznych i syntetycznych od I. Kanta. Sądy analityczne to te, których predykat zawiera się w podmiocie. Wszystkie inne sądy są sądami syntetycznymi. Według I. Kanta wszystkie sądy można przedstawić w postaci „ A jest B ” . Według B. Bolzano oprócz sądów o tej postaci mogą jeszcze występować inne sądy, niesprowadzalne do wspomnianej postaci kanonicznej. W dalszej części artykułu będzie mowa o charakterystycznej budowie sądów empirycznych w koncepcji B. Bolzano.

Ponad dwadzieścia lat później, kiedy B. Bolzano pisał *Wissenschaftslehre*, przyjął on inną od Kantowskiej definicję analityczności i syntetyczności sądów.

sądy syntetyczne. B. Bolzano podtrzymuje dalej jako oczywisty pogląd I. Kanta, że sądy matematyki i czystego przyrodoznawstwa są syntetyczne *a priori*. Jeśli tak, to jednak muszą być przyjęte konsekwentnie w teorii I. Kanta odpowiednie wyobrażenia (*Anschauungen*) *a priori*. Aby zapewnić odpowiedni charakter sądów matematyki i czystego przyrodoznawstwa, musiał zatem I. Kant przyjąć, że owymi wyobrażeniami (*Anschauungen*) *a priori* są czas i przestrzeń[4].

Prezentacja poglądów I. Kanta przez B. Bolzano prowadzi do wniosku, że ten ostatni przyjął w roku 1810 jako własne trzy stwierdzenia I. Kanta: podział sądów na syntetyczne i analityczne, definicje tychże oraz przekonanie, że sądy matematyki i czystego przyrodoznawstwa są równocześnie syntetyczne i aprioryczne. Z drugiej strony B. Bolzano zasygnalizował, że nie zgadza się w pełni z I. Kantem co do wewnętrznej natury sądów syntetycznych. A zatem — jak można przypuszczać — jego zastrzeżenia będą dotyczyły konstrukcji sądów syntetycznych przez odpowiednie wyobrażenia (*Anschauungen*) skonfederowane z pojęciami podmiotów tych sądów, a w konsekwencji także istnienia wyobrażeń (*Anschauungen*) *a priori*, takich jak czas i przestrzeń, niezbędnych dla budowania — w teorii I. Kanta — sądów syntetycznych *a priori* matematyki i czystego przyrodoznawstwa. Wobec tego od razu też rodzi się pytanie, jaką podstawę znalazł B. Bolzano dla syntetycznego i równocześnie apriorycznego charakteru sądów matematyki.

Po prezentacji poglądów I. Kanta przystąpił B. Bolzano do uzasadnienia swoich wątpliwości. Pierwszym jego krokiem było uściślenie stosownej terminologii. Najpierw odwołując się do wielu miejsc w pismach I. Kanta, określił podział przedstawień (*Vorstellungen*) . Przedstawienia są albo wyobrażeniami (*Anschauungen*) , to jest przedstawieniami czegoś indywidualnego, albo pojęciami (*Begriffe*) , to znaczy przedstawieniami czegoś ogólnego. Następnie postawił B. Bolzano pytanie, czym miałyby być wyobrażenia (*Anschauungen*) aprioryczne. Tu już udzielił własnej odpowiedzi, nie odwołując się do tekstów I. Kanta.

---

[4]Por. B. Bolzano, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, s. 136-137.

Jego zdaniem, jedynym możliwym określeniem wyobrażeń (*Anschauungen*) apriorycznych byłoby określenie ich jako wyobrażeń (*Anschauungen*) , które związane są ze świadomością konieczności, że muszą one być takie a nie inne. Bowiem tylko wtedy, kiedy w wyobrażeniu (*Anschauung*) zawarta jest świadomość tej konieczności, może świadomość konieczności być zawarta w zapośredniczonym (*vermittelten*) przez nie (przez wyobrażenie) związku pomiędzy podmiotem a predykatem, to znaczy w sądzie[5].

Po wprowadzeniu stosownych definicji B. Bolzano ponownie powrócił do zaprezentowania jądra swoich wątpliwości co do wewnętrznej natury sądów syntetycznych. Stwierdził jeszcze raz, że sądy syntetyczne muszą mieć zupełnie inną podstawę aniżeli zasada sprzeczności (*Satz des Widerspruches*) . Jednak nie jest dla niego zrozumiałe, dlaczego miałyby tę podstawę stanowić wyobrażenia (*Anschauungen*) , a dla sądów syntetycznych *a priori* czyste (*reine*) , czyli aprioryczne wyobrażenia (*Anschauungen*) . Widać zatem, że istota Bolzanowskiej krytyki koncepcji Kantowskiej zwraca się przeciwko wyobrażeniom (*Anschauungen*) *a priori*[6].

Już w tym miejscu zdaje się B. Bolzano sugerować, że wyobrażenia (*Anschauungen*) *a priori* zostały do koncepcji I. Kanta wprowadzone bezpodstawnie. Stwierdza bowiem, że I. Kant nie dość dokładnie rozróżnił to, co empiryczne, od tego, co aprioryczne. Owszem, zauważa on, że *Krytyka czystego rozumu* rozpoczyna się od tego rozróżnienia, ale I. Kant nie daje precyzyjnego określenia tego, co empiryczne, i tego, co aprioryczne[7].

Te lukę B. Bolzano starał się zapełnić. Jego zdaniem, podział na to, co empiryczne, i to, co aprioryczne, dotyczy pierwotnie sądów. Rozróżnienie sądów empirycznych i apriorycznych zostanie później przeniesione na przedstawienia (*Vorstellungen*) . Jego zdaniem, sądy empiryczne mają formę „ja spostrzegam (*ich nehme wahr*) *X* ”. Zaś

[5]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 138. Trzeba wyjaśnić, że według I. Kanta wszystkie sądy aprioryczne miały być sądami koniecznymi.

[6]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 138-139.

[7]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 139.

X nazywa wyobrażeniem (*Anschauung*) albo, zamiennie, empirycznym przedstawieniem (*Vorstellung*)[8]. Wszystkie inne sądy są według B. Bolzano aprioryczne, a jako podmiot i predykat zawierają one pojęcia (*Begriffe*) .

Trzeba w tym miejscu wyciągnąć dwa wnioski. Po pierwsze, B. Bolzano daje nową definicję wyobrażeń (*Anschauungen*) , odmienną od tej, którą wydobył z tekstów I. Kanta. Po wtóre, utożsamia on w istocie przedstawienia (*Vorstellungen*) empiryczne z wyobrażeniami (*Anschauungen*) . Według tego, co pisze B. Bolzano, wyobrażenia (*Anschauungen*) nie są niczym innym, jak tylko empirycznymi przedstawieniami (*Vorstellungen*) . Zatem wszystkie wyobrażenia (*Anschauungen*) , zdaniem B. Bolzano, posiadają charakter empiryczny. Innymi słowy, już tutaj można wyciągnąć wniosek, że nie istnieją — jego zdaniem — wyobrażenia (*Anschauungen)* aprioryczne. Zatem B. Bolzano idzie jeszcze dalej niż stwierdzenie, że wyobrażenia (*Anschauungen*) *a priori* nie uczestniczą w budowaniu przez umysł sądów syntetycznych *a priori*, a więc również sądów matematyki. B. Bolzano zdaje się już w tym miejscu po prostu negować istnienie wyobrażeń (*Anschauungen*) *a priori*, stwierdzając w istocie, że wszys-tkie wyobrażenia (*Anschauungen*) posiadają charakter empiryczny.

Nasuwają się wobec tego dwa pytania: jak, na jakiej podstawie budowane są — według B. Bolzano — sądy syntetyczne *a priori*, a więc sądy matematyki i czystego przyrodoznawstwa, oraz czym są w jego ujęciu czas i przestrzeń? Nie mogą być one wyobrażeniami (*Anschauungen*) *a priori*, jak u I. Kanta, bowiem takowe, zdaniem praskiego filozofa, nie istnieją. Pozostały mu tylko dwa rozwiązania, przy założeniu, że B. Bolzano akceptował słabszą tezę I. Kanta, iż są one przedstawieniami (*Vorstellungen*) : albo czas i przestrzeń są przedstawieniami (*Vorstellungen*) empirycznymi, czyli wyobrażeniami (*Anschauungen*) , albo są one przedstawieniami (*Vorstellungen*) *a priori*, czyli pojęciami (*Begriffe*) .

---

[8] „...und jenes *X* in ihnen [in Urtheilen — J.D.] heisse ich eine Anschauung, oder, wenn man will, eine empirische Vorstellung"., B. Bolzano, dz. cyt., s. 140.

Rozróżniwszy sądy empiryczne i aposterioryczne, pyta B. Bolzano, jaka jest podstawa takich sądów. Stwierdza najpierw ogólnie, że sądy empiryczne mają zupełnie inną podstawę aniżeli sądy aprioryczne. Te pierwsze zdają się posiadać, zdaniem praskiego filozofa, podwójną podstawę. Po części stanowią ją władze spostrzeżeniowe (*Wahrnehmungsvermoegen*) podmiotu poznającego, po części tkwi ona w samych rzeczach, które działają na władze spostrzeżeniowe podmiotu poznającego[9].

Można zatem stwierdzić, iż młody B. Bolzano przejął w dużej mierze od I. Kanta koncepcję genezy sądów empirycznych. Są one wypadkową oddziaływania rzeczy samych w sobie na podmiot poznający oraz, najogólniej mówiąc, władz spostrzeżeniowych podmiotu poznającego. Z góry należy jednak zaznaczyć, że Bolzanowska koncepcja genezy sądów empirycznych musi się nieco różnić od zaprezentowanej przez I. Kanta, ponieważ z wcześniejszych rozważań wynika, iż praski filozof, na razie *implicite*, odrzucił przekonanie, że czas i przestrzeń są wyobrażeniami (*Anschauungen*) *a priori.* Te zaś pełniły u I. Kanta również ważną rolę również w budowie sądów empirycznych. Według niego podmiot poznający „nakładał" na materiał empiryczny, czyli na wrażenia (*Empfindungen*) , czas i przestrzeń, a więc wyobrażenia (*Anschauungen*) *a priori*[10].

Natomiast podstawę sądów apriorycznych, dla której do podmiotu dodaje się stosowny predykat, widzi B. Bolzano wyłącznie w samym podmiocie sądu oraz we właściwościach (*Beschaffenheit*) predykatu. Jak wspomniano wcześniej, zarówno pomiot, jak i predykat sądu apriorycznego są, według praskiego filozofa, pojęciami (*Begriffe*) . Zatem wyobrażenia *(Anschauungen*) nie grają żadnej roli w konstrukcji sądów apriorycznych. Konsekwentnie więc — jak można wnioskować — żadne wyobrażenia (*Anschauungen*) nie odgrywają roli w budowaniu sądów syntetycznych *a priori*, czyli sądów matematyki i czystego przyrodoznawstwa[11] .

---

[9]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 141-142.

[10]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 142.

[11]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 142-143.

Następnym krokiem B. Bolzano było odwołanie się do przykładów, które w ramach swojej filozofii matematyki prezentowanej w *Kritik der Reinen Vernunft* wprowadził I. Kant. Wszystkie one miały według filozofa z Królewca uzasadniać przekonanie, że sądy matematyki, jako syntetyczne *a priori*, budowane są przez odwołanie się do wyobrażeń (*Anschauungen*) *a priori.* Powołując się na takie same przykłady, B. Bolzano starał się wykazać własną — przeciwną do Kantowskiej — tezę, że wyobrażenia (*Anschauungen*) nie odgrywają żadnej roli w budowaniu sądów apriorycznych, czyli również sądów matematyki.

B. Bolzano najpierw parafrazuje myśl I. Kanta: „kiedy połączę ogólne pojęcie punktu, albo kierunku, albo odległości z wyobrażeniem, to znaczy przedstawię sobie pojedynczy punkt, pojedynczy kierunek albo pojedynczą odległość, to znajduję w tych pojedynczych przedmiotach, że przysługuje im ten czy inny predykat i czuję równocześnie, że to samo zachodzi przy wszystkich innych przedmiotach, które podpadają pod stosowne pojęcia”[12]. Następnie zaś praski filozof stawia pytanie, jak wyobrażenie (*Anschauung*) pojedynczego przedmiotu może prowadzić do poczucia (*Gefuele*) , że to, co w tym wyobrażeniu się stwierdza, przysługuje również każdemu innemu przedmiotowi, podpadającemu pod stosowne pojęcie (np. punktu). I odpowiada, że do takiego uogólnionego wniosku dochodzi się jedynie przez to, co ogólne, a nie indywidualne w danym przedmiocie. Tu nawiązuje on do wprowadzonego wcześniej Kantowskiego rozróżnienia w ramach przedstawień (*Vorstellungen*) , które mówiło, że dzielą się one na przedstawienia czegoś indywidualnego, czyli wyobrażenia (*Anschauungen*) , oraz przedstawienia czegoś ogólnego, czyli pojęcia *(Begriffe*) , i stwierdza ostatecznie, że podstawą sądów apriorycznych,

[12]„Wenn ich den allgemeinen Begriff z. B. von einem Puncte, oder von einer Richtung oder Entfernung mit einer Anschauung verbinde, d. h. mir einen einzelnen Punct, eine einzelne Richtung oder Entfernung vorstelleö so finde ich an diesen einzelnen gegenstaenden, daß ihnen dieß oder jenes Praedicat zukommeö und fuelle zugleich, daß dieses bey allen anderen Gegenstaenden, die unter diesen Begriff gehoeren, gleichfalls so sey.”, B. Bolzano, dz. cyt., s. 144-145.

a więc również sądów matematyki, muszą być pojęcia (*Begriffe*) , a nie wyobrażenia (*Anschauungen*)[13] .

Przytoczony przykład (grupa przykładów) z geometrii miała świadczyć zatem, zdaniem B. Bolzano, że w budowaniu sądów apriorycznych podmiot poznający nie odwołuje się do żadnych wyobrażeń (*Anschauungen*) , lecz opiera się wyłącznie na pojęciach. Można wnioskować, że to samo przekonanie odniósłby on do sądów syntetycznych *a priori*, właśnie ze względu na ich aprioryczny charakter. Zresztą posłużył się za I. Kantem przykładami z zakresu geometrii, której sądy także, jego zdaniem, miały charakter aprioryczny i syntetyczny.

Następnie praski filozof odwołał się ponownie do klasycznych przykładów I. Kanta, by potwierdzić swoją wcześniej wypowiedzianą tezę, że w budowaniu sądów syntetycznych podmiot poznający nie posługuje się żadnymi wyobrażeniami (*Anschauungen*) . Ponieważ kolejne przykłady pochodzą z zakresu arytmetyki i geometrii, dlatego można stwierdzić, że i one mają potwierdzić wcześniejszą tezę B. Bolzano, iż wyobrażenia (*Anschauungen*) nie odgrywają żadnej roli w konstruowaniu sądów syntetycznych *a priori*.

B. Bolzano, ponownie zgadzając się z I. Kantem, że większość sądów arytmetyki ma charakter syntetyczny, chciał podważyć jednak Kantowskie przekonanie, że podstawą syntetycznych sądów arytmetyki jest wyobrażenie (*Anschauung*) czasu. I. Kant, uzasadniając swoje przekonanie, odwołał się do słynnego przykładu, pokazującego, jak wyobrażenie (*Anschauung*) aprioryczne czasu konieczne jest do udowodnienia sądu, że „ $7 = 5 = 12$ ”. B. Bolzano dla lepszej przejrzystości zdecydował się na przykład „ $7 + 2 = 9$ ”. Stwierdził, że dowód takiego twierdzenia nie przedstawia żadnej trudności, jeśli założy się, że $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jego zdaniem, ta ogólna teza wskazuje, że suma arytmetyczna jest zależna wyłącznie od liczby składników, natomiast nie zależy od ich porządku. Ponieważ według B. Bolzano pojęcie porządku jest pojęciem szerszym od pojęcia następstwa czasowego, dlatego wprowadzona teza ogólna zamiast zakładać pojęcie czasu — jak chciałby zapewne I. Kant — wykluczała to pojęcie. Dalej

[13] B. Bolzano, dz. cyt., s. 145-146.

można było prowadzić dowód twierdzenia, wyglądał on następująco: *1 + 1 = 2*, *7 + 1 =8*, *8 + 1 = 9*, to definicje, *7 + 2 = 7 + (1 + 1)* (z definicji) = *(7 + 1) + 1* (na podstawie wprowadzonej tezy ogólnej) = *8 + 1* (z definicji) = *9* (z definicji). Tak więc, zdaniem praskiego matematyka, można było — wbrew I. Kantowi — przeprowadzić dowód tego i innych twierdzeń arytmetycznych, nie zakładając w żaden sposób wyobrażenia (*Anschauung*) czasu[14]. Zatem sądy syntetyczne, a konkretniej: sądy syntetyczne *a priori*, nie wymagają jako podstawy żadnych wyobrażeń (*Anschauungen*) .

Następnie B. Bolzano jeszcze raz odwołał się do przykładów wziętych z geometrii, by pokazać, że w budowaniu sądów syntetycznych *a priori* podmiot poznający nie posługuje się żadnymi wyobrażeniami (*Anschauungen*) . Jest tak, jego zdaniem, z dwu powodów.

Po pierwsze, różne podmioty poznające posługują się różnymi wyobrażeniami (*Anschauungen*) przedmiotów geometrycznych. I tak na przykład można sobie wyobrażać odcinek jako sztabę albo jako łańcuch. Po wtóre, podmiot poznający w wypadku budowania wielu sądów dotyczących pewnych obiektów geometrycznych nie posiada absolutnie żadnych stosownych wyobrażeń (*Anschauungen*) . Tak jest na przykład, gdy konstruuje się sądy dotyczące linii prostej, która jest przecież nieskończona, oraz skomplikowanych obiektów stereometrycznych. Ani nieskończonej linii prostej, ani też skomplikowanych obiektów stereometrycznych nie jest w stanie — zdaniem B. Bolzano — podmiot poznający sobie wyobrazić[15]. W tym miejscu też B. Bolzano dodaje jedno z niewielu zdań, które pozwalają przynajmniej po części ustalić, jak on sam widzi kwestię dochodzenia do sądów syntetycznych *a priori*. Według niego, brak stosownych wyobrażeń (*Anschauungen*) nie wyklucza możliwości budowania sądów syntetycznych *a priori*, bowiem: „mimo tego (braku — J.D.) my rachujemy na naszych pojęciach dalej i znajdujemy prawdę”[16]. Zatem do sądów syn-

[14]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 146-148.

[15]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 148-150.

[16]„... wir rechnen aber nichts desto weniger mit unsern Begriffen fort, und finden Wahrheit”., B. Bolzano, dz. cyt., s. 150.

tetycznych *a priori* dochodzi się wyłącznie na podstawie „obliczeń" dokonywanych na pojęciach (*Begriffe*) , bez żadnego odwoływania się do wyobrażeń (*Anschauungen*) stosownych przedmiotów.

Dalej stawia B. Bolzano pytanie, skąd bierze się tak wielka pewność i oczywistość matematyki, w porównaniu z innymi dziedzinami nauki. Jego zdaniem wynika to stąd, że rezultaty matematyki można w wielu wypadkach bardzo łatwo sprawdzić przy pomocy wyobrażeń (*Anschauungen*)[17] i doświadczeń (*Erfahrungen*) . I tak każdy może „sprawdzić", że odcinek jest najkrótszą linią łączącą dwa punkty, zanim jeszcze na drodze wnioskowania dowiedzie tego faktu. Jednak, ostrzega B. Bolzano, że nie zawsze twierdzenia matematyki są oczywiste, łatwe do sprawdzenia na drodze doświadczenia. Tak jest na przykład — jego zdaniem — w wypadku aksjomatów, które posiadają o wiele mniejszą „poglądowość" (*Anschauunlichkeit*) od twierdzeń z nich wyprowadzonych[18].

Na końcu swojego tekstu zajmuje się B. Bolzano sprawą statusu czasu i przestrzeni, które w koncepcji I. Kanta były wyobrażeniami (*Anschauungen*) *a priori*, pozwalającymi budować sądy syntetyczne *a priori* matematyki. Już analiza wcześniejszych fragmentów tekstu praskiego filozofa pokazała, iż *implicite* wykluczył on istnienie wyobrażeń (*Anschauungen*) *a priori* i że pozostały mu tylko dwa rozwiązania: albo czas i przestrzeń są przedstawieniami (*Vorstellungen*) empirycznymi, czyli wyobrażeniami (*Anschauungen*) , albo są one przedstawieniami (*Vorstellungen*) a *priori*, czyli pojęciami (*Begriffe*) . I rzeczywiście B. Bolzano stwierdza, że czas i przestrzeń są apriorycznymi formami „umiejscowionymi" w podmiocie poznającym, który nakłada je na wrażenia pochodzące z rzeczy „samych w sobie". To całkowicie zgadza się z nauką I. Kanta. Jednak z tekstu B. Bolzano wynika, że czas i przestrzeń nie są dla niego wyobrażeniami (*Anschauungen*) , ale pojęciami (*Begriffe*) . Dodaje też od razu, że są to pojęcia (*Begriffe*)

[17]Jak zaznaczono wcześniej, wszystkie wyobrażenia (*Anschauungen*) , według B. Bolzano, miały charakter empiryczny, a nie aprioryczny.

[18]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 150-151.

aprioryczne, bowiem wszystkie pojęcia mają charakter aprioryczny[19]. Potwierdza się zatem wcześniejsze spostrzeżenie, że B. Bolzano podzielił — inaczej niż I. Kant — przedstawienia (*Vorstellungen*) na empiryczne, czyli wyobrażenia (*Anschauungen*) , oraz aprioryczne, czyli pojęcia (*Begriffe*) . Tak więc czas i przestrzeń nie są rzeczami „obiektywnie" istniejącymi poza podmiotem poznającym, lecz są apriorycznymi formami wbudowanymi we władze spostrzeżeniowe podmiotu poznającego. Tu zgadza się B. Bolzano z I. Kantem. Ale neguje to, że są one wyobrażeniami (*Anschauungen*) . Jako aprioryczne muszą być one, według koncepcji B. Bolzano, pojęciami (*Begriffe*) . Wrócił więc w zasadzie praski filozof do Kantowskiego przedkrytycznego rozumienia statusu czasu i przestrzeni jako pojęć poznającego podmiotu.

Wypada w tym miejscu podsumować dokonania w zakresie filozofii matematyki młodego B. Bolzano. Przejął on i podtrzymywał Kantowską tezę, że sądy matematyki są sądami syntetycznymi *a priori*, ale odrzucił zdecydowanie twierdzenie filozofa z Królewca, że sądy matematyki buduje podmiot poznający przez odwołanie się do wyobrażeń (*Anschauungen*) *a priori*. B. Bolzano zaprezentował pogląd, że takie wyobrażenia (*Anschauungen*) *a priori* po prostu nie istnieją. Według niego wszystkie wyobrażenia (*Anschauungen*) posiadają charakter empiryczny. A jeśli tak, to podtrzymywanie poglądu, że w konstruowaniu

---

[19] „So waere denn also durchaus kein Unterschied zwischen denjenigen Anschauungen, welche Kant apriorische genannt hat, und den empirischen zuzulassen? Eine Gestalt muessen doch alle Gegenstaende haben; Farbe, Geruch, dgl. muessen sie nicht besitzen. – Ich antworte: nicht alle Gegenstaende, die uns erscheinen sollen, muessen eine Gestalt besitzen, sondern nur diejenigen, welche uns eben als außer uns d. h. im Raume erscheinen sollen. Aber eben diese muessen sodann auch etwas haben, was diese Gestalt erfuellt, und dieses kann, nach der eigenthuemlichen Beschaffenheit unsers Wahrnehmungsvermoegens nur eines von folgenden fuenf Dingen seyn, entweder eine Farbe, oder ein Geruch u. s. w. Also sind Farbe, Geruch u. s. w. auch apriorische Formen in eben dem Sinne des Wortes, wie Raum und die Zeit es sind, nur daß die Sphaere, worauf sich jene erstrecken, enger als die der letztern ist; gerade wie auch die Form des Raumes schon eine engere Sphaere hat, als die Zeit. Unter den Begriffen gibt es naehmlich — so lautet unser Endurtheil, keinen zu rechtfertigenden Unterschied, nach welchem sie, wie in empirische und apriorische abgetheilt werden koennten; sondern sie alle sind apriorisch". B. Bolzano, dz. cyt., s. 151-152.

sądów matematyki podmiot poznający odwołuje się wyobrażeń (*Anschauungen*) , musiałoby w konsekwencji prowadzić do twierdzenia, że sądy matematyki są empiryczne. To zaś było nie do przyjęcia dla apriorysty, jakim był B. Bolzano.

Pozostaje jednak pytanie, które kilkakrotnie przewijało się przez niniejsze analizy: jak wyobrażał sobie praski filozof dochodzenie do zdań matematyki, które miały równocześnie syntetyczny i aprioryczny charakter? Wypada podkreślić, że ujawnia się w tym miejscu maniera B. Bolzano. W sposób pedantyczny przeprowadza on krytykę poglądów swoich poprzedników. Natomiast swoje własne przekonania uzasadnia niejednokrotnie nadzwyczaj oszczędnie, ograniczając się do jednego czy dwu lapidarnych zdań. W tym konkretnym przypadku stwierdza on, że do sądów matematyki, które są syntetyczne *a priori*, dochodzi się na drodze „rachunku" prowadzonego na pojęciach (*Begriffe*) . We wcześniejszym rozdziale analizowanej książki, zatytułowanym *Ueber die mathematische methode*[20], B. Bolzano prezentuje, jak rozumie ów „rachunek" na pojęciach, który prowadzi do twierdzeń matematyki. Jego wykład jest w wielu aspektach na wskroś nowoczesną prezentacją metody aksjomatyczno-dedukcyjnej w matematyce. Przyjmuje on istnienie aksjomatów, zdań niedowiedlnych. Do zdań pochodnych dochodzi się na drodze przekształceń aksjomatów i zdań już udowodnionych, przy zastosowaniu pewnych reguł, które wyznaczają rozbudowana sylogistyka arystotelesowska oraz niektóre tezy rachunku zdań. Trzeba zauważyć, że przy takim sposobie dowodzenia twierdzeń matematyki nie „rozszerza" się jej zakresu. Zdania pochodne matematyki są wyłącznie konsekwencjami aksjomatów. Cała wiedza matematyczna zawarta jest w aksjomatach. Twierdzenia pochodne nie dodają już nic nowego do tej wiedzy, która jest zawarta w aksjomatach, i stanowią wyłącznie ich logiczne następstwa. Jak do tej koncepcji „rachunku" na pojęciach ma się uporczywe twierdzenie B. Bolzano, że sądy matematyki są syntetyczne? Sądy syntetyczne — czyli takie, których predykat nie jest zawarty w podmiocie — powinny zgodnie z koncepcją Kantowską wnosić coś istotnie nowego

[20] *Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 38-133.*

do wiedzy, „rozszerzać" ją. Tymczasem „rachunek" na pojęciach, tak jak go widzi w matematyce B. Bolzano, nie „rozszerza" wiedzy „potencjalnie" zawartej w aksjomatach, a jedynie ją eksplikuje. Poza tym w koncepcji praskiego filozofa dochodzenie do zdań analitycznych polega również wyłącznie na „rachunku" na pojęciach. Nie widać zatem istotnej różnicy w sposobie budowania sądów syntetycznych i sądów analitycznych i nie widać przyczyny, dla której B. Bolzano twierdził, że sądy matematyki są syntetyczne.

Być może B. Bolzano w roku 1810 nie uświadamiał sobie jeszcze całkowicie tych konsekwencji rezygnacji z Kantowskiego twierdzenia, że do sądów syntetycznych *a priori,* czyli również do sądów matematyki, dochodzi się przez odwołanie do wyobrażeń (*Anschauungen*) *a priori* stosownego przedmiotu. Wydaje się jednak, że naszkicowana sytuacja problemowa doprowadziła go w końcu do rezygnacji z przekonania, że sądy matematyki mają charakter syntetyczny, i w rezultacie do przyjęcia antykantowskiej tezy, stwierdzającej, że sądy matematyki są analityczne. Takie w każdym razie stanowisko zajął praski filozof — jak już wcześniej wspominano — w swym najdojrzalszym dziele — *Wissenschaftslehre* – z roku 1837. Najprawdopodobniej zatem genezy późniejszego antykantyzmu w filozofii matematyki B. Bolzano należy doszukiwać się już w czasach pracy nad *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik*, wydanych w roku 1810.

Warto jeszcze zwrócić uwagę, że zrezygnowanie przez B. Bolzano z odwołania się do wyobrażeń (*Anschauungen*) w procesie dochodzenia do sądów matematyki i twierdzenie, iż dochodzi się do nich wyłącznie na drodze „rachunku" na pojęciach spowodowało, że w jego ujęciu matematyka nie wymagała żadnej „naoczności". Nie trzeba się było w dowodzeniu twierdzeń odwoływać do żadnych obrazów rysowanych w jakimkolwiek medium, nie trzeba było wyobrażać sobie przedmiotu, którego własności miało opisywać dane twierdzenie. Matematyka była wyłącznie nauką pojęciową. Owa rezygnacja z „naoczności" przedmiotów matematyki to też konsekwencja odejścia od nauki I. Kanta.

Z tekstu B. Bolzano wynika również, że podmiot poznający nie musiał konstruować w wyobraźni (*Einbildungskraft*) stosownych obiektów (na przykład geometrycznych), aby wykorzystywać ich wyobrażenia (*Anschauungen*) jako podstawy w budowaniu sądów matematyki. Co więcej, z tekstu praskiego filozofa można wywnioskować, że niektórych obiektów geometrii nie można w ten sposób w ogóle skonstruować, na przykład nieskończonej linii prostej czy też skomplikowanych obiektów stereometrycznych[21]. Z drugiej zaś strony, I. Kant twierdził, że właściwym istnieniem obiektów matematyki jest ich istnienie jako skonstruowanych przez podmiot poznający. Według filozofa z Królewca obiekty matematyki są konstruktami podmiotu poznającego. Widać zatem, że i w tym zakresie B. Bolzano odszedł od nauki swojego poprzednika. Właściwe istnienie obiektów matematyki musi być wobec tego w koncepcji B. Bolzano innym istnieniem niż istnienie konstruktów podmiotu poznającego (wyobraźni). Warto jeszcze wskazać, że według I. Kanta warunkiem wystarczającym i koniecznym istnienia obiektów matematyki była koniunkcja dwu warunków: niesprzeczności odpowiednich przedmiotów oraz ich konstruowalności. Natomiast w koncepcji B. Bolzano konstruowalność w wyobraźni przedmiotów matematycznych nie mogła stanowić warunku koniecznego istnienia, zatem wydaje się, że skłaniał się on do klasycznego przekonania, że niesprzecznośc jest zarówno koniecznym, jak i wystarczającym warunkiem istnienia przedmiotów matematycznych. Trzeba też było dla nich znaleźć inne „miejsce" niż wyobraźnia (*Einbildungskraft*) podmiotu poznającego.

Można zatem generalnie stwierdzić, ze już w swym dziele z 1810 roku *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* młody B. Bolzano zaczął się wyzwalać z koncepcji matematyki zaprezentowanej przez I. Kanta. Owszem, na pierwszy rzut oka przyjmuje on pewne zasadnicze twierdzenia myśliciela z Królewca, ale przy głębszej analizie okazuje się, że w węzłowych punktach zajmuje on stanowisko antykantowskie. Przede wszystkim zaś analizowany artykuł zaprezentował sytuację problemową, w jakiej znalazł się B. Bolzano

[21]Por. B. Bolzano, dz. cyt., s. 149-150.

i z powodu której później — jak się wydaje — zaczął twierdzić, że sądy matematyki są zasadniczo analityczne.

Warto zwrócić uwagę, że przekonanie o analitycznym charakterze sądów matematyki było pierwszym filozoficznym wnioskiem, który wyciągnął G. Frege po wykonaniu programu logicyzmu[22]. Zbieżność myśli dojrzałego B. Bolzano z poglądami G. Fregego nie wydaje się przypadkowa. Aby logik z Jeny mógł wyciągnąć swój wniosek, trzeba było najpierw zbudować zręby teorii mnogości, w jej kategoriach zdefiniować liczby naturalne, w sposób ścisły wprowadzić liczby rzeczywiste (niewymierności), zarytmetyzować, przy pomocy pojęcia granicy, podstawy rachunku różniczkowego i całkowego. Gdy studiuje się dorobek B. Bolzano, to okazuje się, że w kilku wspomnianych punktach (definicja liczb naturalnych, pojęcie granicy) to on właśnie — przed G. Fregem i A. Cauchym — wykonał jako pierwszy wspomniane zadania, w pozostałych (zręby teorii mnogości, konstrukcja liczb rzeczywistych) również próbując znaleźć własne rozwiązania. Zatem zasadne — jak się wydaje — jest dalsze badanie kwestii, czy B. Bolzono nie antycypował realizacji programu logicyzmu.

[22]Koncepcja G. Fregego była “obciążona” w swych podstawach antynomiami teoriomnogościowymi; starali się je usunąć B. Russell oraz A.N. Whitehead.