ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXXVIII / 2006, s. 76–113*

Jerzy DADACZYŃSKI

METODA MATEMATYKI WEDŁUG B. BOLZANO

W książce *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*[1], napisanej przez młodego, dwudziestodziewięcioletniego B. Bolzano (1781–1848) i wydanej w Pradze w roku 1810, znajduje się rozdział poświęcony metodzie matematycznej. Celem niniejszego artykułu będzie przeanalizowanie Bolzanowskiej koncepcji metody matematyki i — gdzie to możliwe — pokazanie, że w wielu wypadkach antycypowała ona istotne rozstrzygnięcia w zakresie metody matematyki, poczynione znacznie później. Ważne będzie również wskazanie „zaplecza” filozoficznego Bolzanowskiej metodologii matematyki.

Przed przystąpieniem do prezentacji koncepcji metody matematyki B. Bolzano trzeba jednak poczynić kilka uwag dotyczących stanu refleksji metodologicznej nad matematyką na przełomie osiemnastego i dziewiętnastego wieku.

Od czasów opublikowania *Elementów* Euklidesa upłynęły właśnie dwa tysiąclecia. Geometria była nadal wykładana jak za czasów Euklidesa i odpowiednie fragmenty jego dzieła stanowiły nadal podstawowy podręcznik geometrii. Metoda zaproponowana przez Euklidesa w geometrii była metodą aksjomatyczno–dedukcyjną. W pozostałych dziedzinach matematyki oczywiście dedukowano twierdzenia, wychodząc z twierdzeń wcześniej zadomowionych w tych dyscyplinach. Ale refleksja nad podstawami tych dyscyplin była w tak wczesnym stadium rozwoju, że matematycy nie byli jeszcze w stanie podać dla nich list

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1]Reprint książki B. Bolzano opublikowany został w *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum. Czechoslovak Studies in the History of Science*, Prague 1981, Special Issue 12.

aksjomatów. Dotyczyło to wszystkich działów arytmetyki, rachunku różniczkowego i całkowego, rachunku prawdopodobieństwa. Tak więc metodą aksjomatyczno–dedukcyjną nie objęto do tego czasu jeszcze całej matematyki. W sposób ścisły stosowano ją wyłącznie w geometrii. Z drugiej strony, istniała niewątpliwie tendencja, aby metodę aksjomatyczno–dedukcyjną zastosować nie tylko w innych działach matematyki, ale również poza nią. Przykładem może być chociażby próba aksjomatyczno–dedukcyjnego wykładu filozofii przez B. Spinozę w jego *Etyce*. Należy też pamiętać, że metodę aksjomatyczno–dedukcyjną stosowano z powodzeniem od czasów Arystotelesa w tym fragmencie logiki predykatów, jakim jest sylogistyka zdań asertorycznych, oraz starano się ją zastosować w sylogistyce zdań modalnych.

Na początku analizowanego rozdziału B. Bolzano stawia w istocie dwa zasadnicze twierdzenia. Przede wszystkim mówi ogólnie o *methodus mathematicus*. Już stąd można wyciągnąć wniosek, że jest on zwolennikiem jednej metody, stosowanej do wszystkich działów matematyki. Poza tym stwierdza, że tę metodę matematyczną można stosować do wszystkich dziedzin nauki. Zatem i u niego dostrzegalne jest przekonanie o uniwersalnym, powszechnym charakterze metody matematycznej[2].

Dalej formułuje B. Bolzano epistemologiczno–ontologiczne założenia metody matematycznej. Zakłada istnienie pewnego „królestwa prawdy" (*Reich der Wahrheit*), tworzonego przez wszystkie sądy prawdziwe. Stwierdza, że w owym zbiorze wszystkich prawdziwych sądów istnieje pewien obiektywny porządek, niezależny od subiektywnych i przypadkowych przekonań podmiotów poznających[3]. Koncepcja obiektywnie istniejącego „królestwa prawdy" jest zbliżona do zaprezentowanej o wiele później koncepcji „trzeciego świata" K. Poppera. Nie ma jest to kwestią przypadku, bowiem filozof austriacki zaczerpnął ową ideę między innymi od B. Bolzano. Tyle że obiektywne „królestwo prawdy" B. Bolzano jest — jak się wydaje — odwieczne

[2]Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, Prag 1810, s. 38–39.

[3]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 39–40.

i atemporalne. Podmiot poznający jedynie „odkrywa” należące do niego odwieczne sądy.

Na czym polega obiektywny porządek w zbiorze sądów prawdziwych? Sprowadza się on do tego, że niektóre sądy są podstawą (*Grund*) innych sądów, te drugie zaś są konsekwencjami (*Folge*) pierwszych. B. Bolzano nie definiuje tych pojęć (podstawy i konsekwencji)[4]. Z jego dalszych rozważań wynika jednak, że sąd q jest konsekwencją sądu p, jeśli istnieje ciąg dowodów sądu q, w którym przynajmniej raz jako przesłanka występuje sąd p. Wówczas sąd p jest podstawą sądu q. Pojęcie dowodu również jest u B. Bolzano doprecyzowane, mianowicie przez odniesienie do odpowiednich reguł dowodowych, których dostarcza rozbudowana sylogistyka zdań asertorycznych Arystotelesa, sylogistyka zdań modalnych i przyjmowane *implicite* niektóre tezy klasycznego rachunku zdań (na przykład w dowodach apagogicznych)[5].

Zdaniem B. Bolzano, istotnym celem metody naukowej jest takie uporządkowanie sądów prawdziwych podmiotu poznającego, aby odzwierciedlały one ów obiektywny porządek panujący w „królestwie prawdy”[6]. Zatem celem działania naukowców nie jest nic innego, jak „odkrywanie” obiektywnie uporządkowanego „królestwa prawdy”. Praski filozof doprecyzowuje następnie, że pierwszym zadaniem metody naukowej jest znalezienie ostatecznych podstaw (*Gruende*) sądów naukowych, a następnym zadaniem wyprowadzenie konsekwencji z tych podstaw i równocześnie pewnego rodzaju ćwiczenie w poprawnym myśleniu, które powinno prowadzić do pewności wszystkich przekonań podmiotu poznającego[7].

Po zarysowaniu założeń epistemologiczno–ontologicznych i celów stosowania metody naukowej przeszedł B. Bolzano do relacjonowania szczegółów swej koncepcji metody matematyki. Rozpoczął od omówienia funkcji definicji (*Erklaerungen, definitio*), dlatego że do jego czasów uważano powszechnie, że wykład matematyki — i in-

[4]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 40.
[5]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 63–68, 122–125.
[6]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 40.
[7]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 41–42.

nych dyscyplin nauki — powinien się rozpoczynać od zdefiniowania stosownych pojęć. Należy wspomnieć, że tak właśnie postąpił również Euklides, który przed wprowadzeniem aksjomatów geometrii starał się zdefiniować pojęcia występujące w aksjomatach, czyli te pojęcia, które we współczesnych aksjomatykach nazywa się pojęciami pierwotnymi. B. Bolzano stwierdził, iż definicję (*Erklaerung, definitio*) pojęcia rozumie jako podanie dwu lub więcej następnych (*naechsten*) części składowych (*Bestandtheile*), z których jest złożone dane pojęcie. Następnie doprecyzował, że definicja pojęcia A posiada ogólną formę: „a, które jest α, jest A" albo „$(a \text{ z } \alpha) = A$"; gdzie a i α oznaczają również pojęcia. Z przyjęcia takiej ogólnej formy definicji pojęć wynika, zdaniem B. Bolzano, że „prawdziwe" (*wahre*) definicje posiadają wyłącznie pojęcia złożone (i dlatego też rozkładalne), i że te pojęcia posiadają zawsze definicje. Natomiast proste pojęcia, to znaczy takie, które nie dają się rozłożyć na różne od siebie i różne od rozkładanego pojęcia, nie mogą być zdefiniowane. Praski filozof podaje dwa argumenty mające, jego zdaniem, potwierdzać tezę, że istnieją pojęcia proste (to znaczy niedefiniowalne). Po pierwsze, ma o tym świadczyć subiektywna niemożliwość rozłożenia niektórych pojęć. Po wtóre, gdyby założyć, że nie istnieją pojęcia niedefiniowalne (proste), trzeba by przyjąć, że każde pojęcie można by rozkładać w nieskończoność, budując nieskończony łańcuch definicji[8].

Następnie B. Bolzano podaje dwie reguły, które mają ułatwić rozstrzygnięcie, czy dane pojęcie jest pojęciem prostym (niedefiniowalnym). Najpierw twierdzi, że jeśli w myśleniu podmiotu poznającego dany przedmiot pojawia się jako złożony, to pojęcie, pod które podpada ten przedmiot, nie może być pojęciem prostym (niedefiniowalnym). Zamysł praskiego filozofa można wyjaśnić na przykładzie. O trójkącie myśli się jako o przedmiocie złożonym. Składa się on bowiem z trzech boków. Zatem — według koncepcji B. Bolzano — pojęcie trójkąta jest również złożone i jako takie nie może być pojęciem prostym (niedefiniowalnym)[9]. Druga reguła stwierdza, że nie

[8]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 42–44.
[9]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 44–45.

każde pojęcie, dla którego istnieje pojęcie ogólniejsze, przestaje być pojęciem prostym (niedefiniowalnym). B. Bolzano wyjaśnia jeszcze raz w tym miejscu, że pojęcie przestaje być pojęciem prostym wtedy i tylko wtedy, kiedy jest ono rozkładalne. Zaś do rozłożenia pojęcia należy podanie co najmniej dwu części składowych (*Bestandtheilen*), z których każda jest "możliwa do pomyślenia" (*gedenkbar*). Może zaistnieć taka sytuacja, że nawet jeśli przyjmie się za część składową rozkładanego pojęcia istniejące pojęcie ogólniejsze, pod które to pierwsze podpada (*genus proximus*), to nie można znaleźć dla niej „możliwej do pomyślenia" drugiej części składowej (*differentia specifica*). Praski matematyk podaje w tym miejscu jako przykład próbę zdefiniowania pojęcia punktu. Jeśli w tej definicji przyjmie się jako *genus proximus* pojęcie przedmiotu przestrzennego, to nie sposób znaleźć *differentia specifica*, która dodana do pojęcia przedmiotu przestrzennego pozwoliłaby zdefiniować pojęcie punktu. Dlatego, jego zdaniem, pojęcie punktu jest pojęciem prostym, niedefiniowalnym[10].

Przy okazji B. Bolzano porusza kwestię, czy pojęcie definiowalne posiada jedną, czy też więcej definicji. Z jego tekstu wynika, że przyjmuje on jednoznaczność rozkładu każdego pojęcia na pojęcia proste. I w tym znaczeniu każde pojęcie posiada dokładnie jedną definicję. Owszem, można również definiować wiele pojęć złożonych, nie odwołując się do „fundamentalnych" pojęć prostych. Ale B. Bolzano zdaje się przyjmować, że właściwą definicją jest ta złożona z pojęć prostych i w tym znaczeniu każde pojęcie złożone (definiowalne) posiada dokładnie jedną definicję[11].

Z tego co praski filozof powiedział na temat pojęć prostych wyciąga on dalszy wniosek dotyczący tego, czy wykład matematyki — i jak należy się domyślać — innych nauk należy zaczynać od definicji. Otóż jego zdaniem u początku systemu matematyki stoją pojęcia proste, których nie sposób definiować, są one bowiem niedefiniowalne. Tak więc nie wolno — i w istocie ze względu na niedefiniowalność pojęć prostych nie można — rozpoczynać wykładu matematyki od de-

[10]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 47–48.
[11]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 49.

finicji. Ten postulat metodologiczny jest dokładnym przeciwieństwem tego, co zastał praski filozof w tradycji metodologicznej matematyki. Dlatego pozwolił on sobie wprost na krytykę wykładu geometrii przeprowadzonego w *Elementach* Euklidesa, gdzie najpierw zdefiniowano pojęcia, których pewne własności następnie opisano w aksjomatach[12].

Zatem postulat metodologiczny B. Bolzano należy traktować jako zerwanie z dotychczasową praktyką metodologiczną, trwającą od dwu tysięcy lat. Dlatego można tutaj nawet mówić o małej „rewolucji" w metodologii matematyki. Należy też wspomnieć, że współczesna matematyka postępuje w istocie dokładnie tak, jak zalecał B. Bolzano. Wprowadza najpierw do wykładu naukowego tak zwane pojęcia pierwotne, które nie są definiowane, i opisuje ich własności w aksjomatyce. Tak więc można stwierdzić, że to właśnie B. Bolzano jest pomysłodawcą tego tak ważnego postulatu w metodologii matematyki[13].

Z całego kontekstu pracy B. Bolzano wynika natomiast, że wszystkie inne pojęcia wprowadzane do matematyki, a więc pojęcia złożone (z definicji definiowalne), muszą otrzymać w wykładzie stosowną definicję.

Pozostał jednak istotny dla B. Bolzano problem, jak porozumieć się z czytelnikami podręcznika co do znaczeń — choć *explicite* terminu „znaczenie" (*Bedeutung*) nie używa — pojęć prostych, które zasadnie też można dalej nazywać pojęciami pierwotnymi.

Aby jednak zaprezentować rozwiązanie tego problemu przez B. Bolzano, trzeba pewnych zasadniczych wyjaśnień. We wstępie do analizowanego tekstu praski filozof przedstawił kilka założeń ontologiczno–epistemologicznych, którymi kierował się, budując swoją metodologię matematyki. Dotyczyły one istnienia obiektywnego i uporządkowanego „królestwa prawdy", zbioru obiektywnie istniejących sądów prawdziwych. Tą ledwo naszkicowaną koncepcję rozbudował B. Bolzano w swoich późniejszych dziełach, przede wszyst-

[12]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 53.

[13]B. Bolzano sam przyznaje, że pierwszym, który krytykował definiowanie przez Euklidesa pojęć pierwotnych był Ramus [por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 53].

kim w *Wissenschaftslehre*, pracy wydanej w roku 1837. Paralelnie do tej koncepcji zaprezentował on w monumentalnym dziele z roku 1837 swoją koncepcję pojęć. Podobnie jak w swej koncepcji sądów prawdziwych, rozwinął on tam teorię subiektywnych i obiektywnych pojęć. Pojęcia obiektywne są w istocie przedmiotami idealnymi (abstrakcyjnymi). Pojęciami subiektywnymi posługują się podmioty poznające. Dziedzina pojęć subiektywnych powinna — i to jest również jeden z istotnych celów metody naukowej — odwzorowywać wzajemnie jednoznacznie dziedzinę pojęć obiektywnych. Chociaż B. Bolzano nie zbudował *explicite* teorii znaczenia, to jednak wydaje się, że właśnie pojęcia obiektywne są znaczeniami pojęć subiektywnych i terminów, które oznaczają te pojęcia subiektywne w języku. Tym samym, jak się wydaje, postulował B. Bolzano *implicite* taką teorię znaczenia, w której znaczeniami terminów — i, w jego wypadku, również pojęć subiektywnych — są przedmioty idealne[14].

Wyjaśniając w swym tekście z roku 1810 problem, jak matematyk powinien porozumieć się z czytelnikami co do znaczeń pojęć pierwotnych zakładał B. Bolzano — jak można przypuszczać przez analogię do naszkicowanej już wtedy przez niego teorii obiektywnych sądów prawdziwych — przynajmniej *implicite* swoją teorię pojęć subiektywnych i obiektywnych. Dlatego można przypuszczać, że zdaniem praskiego matematyka, naukowiec starając się wprowadzić do nauki pojęcia proste (pierwotne), najpierw w jakiś — nie sprecyzowany na tym etapie badań przez B. Bolzano — sposób „odkrywał", pierwotne pojęcia obiektywne. „Odkrycie" to było zwieńczone „utworzeniem" w umyśle matematyka odpowiednich pierwotnych pojęć subiektywnych. Następnie matematyk był zobowiązany do wybrania lub „zbudowania" w języku dla pojęć prostych (pierwotnych) „właściwych" (*eigenthuemliche*) nazw. Użycie przez B. Bolzano terminu „właściwe" (*eigenthuemliche*) nazwy, zdaje się wskazywać, że jego zdaniem można było w zbiorze nazw języka naturalnego, albo raczej

[14]Dzisiaj coraz częściej podkreśla się, że znani twórcy teorii znaczenia, tacy jak G. Frege czy też E. Husserl, znajdowali inspirację do zbudowania swoich teorii właśnie w *Wissenschaftslehre* B. Bolzano.

w zbiorze nazw języka naturalnego powiększonym o pewne sztucznie stworzone nazwy, znaleźć podzbiór izomorficzny z dziedziną pojęć obiektywnych. To jest właśnie zbiór nazw „właściwych". W świetle tego, co stwierdzono wcześniej, znaczeniem nazw — oraz odpowiednich pojęć subiektywnych — były w istocie dla B. Bolzano stosowne pojęcia obiektywne rozumiane jako przedmioty idealne.

Po tym wprowadzeniu można pokazać, jak B. Bolzano rozwiązał postawiony problem, dotyczący porozumienia się z odbiorcami, co do znaczenia wprowadzanych do wykładu matematyki pojęć (subiektywnych) pierwotnych. Można to, zdaniem praskiego filozofa, uczynić na dwa sposoby. Pierwszy polega na tym, że po prostu czytelnicy podręcznika mogą posiadać już na oznaczenie wprowadzonego pojęcia (subiektywnego) pierwotnego pewne własne słowa lub „zwroty" (*Redensarten*), które odnosząc się do danego pojęcia (subiektywnego) pierwotnego wskazują też na odpowiednie znaczenie — czyli pojęcie obiektywne — jednoznacznie dla B. Bolzano związane z danym pojęciem subiektywnym. Wówczas wystarczy wskazać jedynie czytelnikowi na używane przez niego słowa lub zwroty oznaczające to właśnie pojęcie pierwotne[15].

Może jednak zaistnieć taka sytuacja, że czytelnicy podręcznika nie będą posiadali własnych słów czy też „zwrotów" (*Redensarten*), które oznaczałyby wprowadzone pojęcie pierwotne, a zatem nie będą zdolni w sposób przedstawiony wcześniej związać odpowiedniego znaczenia — pojęcia obiektywnego — z nazwą użytą przez matematyka na oznaczenie pojęcia pierwotnego. Wówczas znaczenie pojęcia pierwotnego można ustalić w następujący sposób: wypowiada się kilka zdań, w których występuje w różnych związkach nazwa — nieznana czytelnikowi — „właściwa" (*eigenthuemliche*) pojęcia (subiektywnego) pierwotnego, co do znaczenia którego — pojęcia obiektywnego —

[15]„Aber wie faengt er [der Mathematiker — J.D.] es an, sich ueber solche einfache Begriffe, und ueber das Wort, das er zu ihrer Bezeichnung waehlt, mit seinen Lesern zu verstaendigen? – Die Schwierigkeit ist eben nicht groß. Denn entweder besitzen seine Leser bereits gewisse Worte oder Redensarten, womit sie diesen Begriff bezeichnen; und dann braucht er sie nur auf jene hinzuweisen, [...]", B. Bolzano, dz. cyt, s. 54.

należy się porozumieć. Z porównania tych zdań czytelnik sam „abstrahuje" (*abstrahiret*) znaczenie nieznanego słowa, czyli to, jakie pojęcie obiektywne ono oznacza[16].

W tym miejscu B. Bolzano podaje stosowny przykład. Już wcześniej ustalił on, że pojęcie punktu jest pojęciem niedefiniowalnym, czyli prostym, pierwotnym. Jednak znaczenie nazwy „punkt", czyli pojęcie obiektywne, które związane jest z tą nazwą, może — jego zdaniem — każdy „wyabstrahować" z następującego zestawu zdań, w którym pojawia się ta nazwa: „punkt jest czymś prostym w przestrzeni", „punkt jest granicą linii i sam nie jest częścią linii", „punkt nie ma ani żadnej rozciągłości wzdłuż, ani wszerz, ani w głąb"[17].

Ponieważ pojęcia proste (pierwotne) są niedefiniowalne, dlatego żadne zdanie ze zbioru zdań, z którego można — według B. Bolzano — „wyabstrahować" znaczenie pojęcia pierwotnego, nie może być definicją (*Erklaerung*) takiego pojęcia. Praski filozof używa na określenie całego wspomnianego zbioru zdań terminu „opis" (*Umschreibung*). Podanie takiego opisu (opisów) powinno — jego zdaniem —

---

[16]„Oder sie [die Leser — J.D.] haben noch kein eigenes Zeichen fuer seinen mitzutheilenden Begriff; dann hilft er [der Mathematiker — J.D.] sich dadurch, daß er mehrere Saetze ausspricht, in welchen der zu verstaendigende Begriff, mit seinem eigenthuemlichen Worte bezeichnet, unter Verschiedenen Verbindungen erscheint. Aus der Vergleichung diese Saetze abstrahiret sich dann der Leser selbst, welchen bestimmten Begriff das unbekannte Wort bezeichne", B. Bolzano, dz. cyt, s. 54–55.

[17]„So kann z. B. aus den Saetzen: der Punct ist das einfache im Raume, er ist die Grenze der Linie, und selbst kein Theil der Linie, er hat weder eine Ausdehnung in die Laenge, noch in die Breite, noch in die Tiefe, u.s.w. ein jeder abnehmen, welchen Begriff man mit dem Worte Punct bezeichne", B. Bolzano dz. cyt, s. 55.

Warto jeszcze zwrócić w tym miejscu uwagę na następne zdanie napisane przez B. Bolzano: „Dieß Mittel ist bekanntlich dasjenige, durch welches wir jeder die ersten Wortbedeutungen in unserer Muttersprache kennen lernten", B. Bolzano dz. cyt, s. 55. Używa on w tym miejscu jeden jedyny raz terminu „znaczenie" (*Bedeutung*) w zbitce *Wortbedeutung*. Z całego kontekstu jednoznacznie wynika, że znaczeniem słowa jest dla niego pojęcie — można dodać: rozumiane obiektywnie. Dlatego słuszne było przyjęcie w budowaniu instrumentarium dla przeanalizowania tekstu B. Bolzano jego późniejszej, zarysowanej jedynie *implicite* w *Wissenschaftslehre*, teorii znaczenia, według której znaczeniem nazw i odpowiadających im pojęć subiektywnych są pojęcia obiektywne, rozumiane jako przedmioty idealne.

być pierwszą czynnością w każdym wykładzie teorii, która posługuje się pojęciami prostymi (pierwotnymi)[18].

Należy w tym miejscu poczynić kilka bardzo istotnych uwag. Na przełomie dziewiętnastego i dwudziestego wieku, prawie sto lat po napisaniu analizowanego tekstu przez B. Bolzano, zaczęto — między innymi na skutek odkrycia antynomii w podstawach matematyki — intensywnie aksjomatyzować wszystkie teorie matematyczne. Oczywiście nie definiowano już wtedy wprowadzanych do teorii pojęć pierwotnych. Wykład teorii rozpoczynano od wprowadzenia kilku zdań, w których występowały tylko terminy pierwotne. Ten zbiór zdań uważano — chociażby w szkole konwencjonalistycznej — za „definicję uwikłaną" pojęć pierwotnych danej teorii. Inni — na przykład niektórzy przedstawiciele szkoły formalistycznej — twierdzili, że ten zbiór zdań wyznacza znaczenia terminów oznaczających pojęcia pierwotne. Można bardzo łatwo zauważyć, że w zasadzie Bolzanowska koncepcja wyznaczenia znaczeń pojęć pierwotnych teorii, przez podanie „opisu" (*Umschreibung*), czyli zbioru kilku zdań na początku teorii, w których występują terminy oznaczające pojęcia proste (pierwotne), antycypuje ideę definicji uwikłanej terminów pierwotnych, wprowadzoną do matematyki prawie sto lat później. I w tym zakresie tekst B. Bolzano wyznacza zatem istotny przełom i postęp w metodologii matematyki. Istnieje jednak pewien szczegół, który może różnić nieco koncepcję Bolzanowską od koncepcji metodologicznych z początku dwudziestego wieku. Mianowicie B. Bolzano nie rozstrzyga *explicite*, czy wprowadzony na początku teorii „opis" (*Umschr eibung*) pojęć prostych (pierwotnych) jest tożsamy ze zbiorem aksjomatów danej teorii. Natomiast na początku dwudziestego wieku twierdzono, że „definicję uwikłaną" pojęć pierwotnych stanowi właśnie zbiór aksjomatów danej teorii. Mimo tego braku można jednak z całą pewnością zauważyć

[18]„Solche Verstaendigungen koennte man etwa zum Unterschiede von einer eigentlichen Erklaerung — Bezeichnungen oder Umschreibungen nennen. Auch sie gehoeren dann unter die Classe der willkuerlichen Saetze, in wie fern man durch sie nichts anders beabsichtigt, als einem gewissen Begriffe ein eigenes Zeichen zu verschaffen. Sie waeren zugleich das erste, womit ein jeder wissenschaftliche Vortrag anfangen muß, wofern er einfache Begriffe hat", B. Bolzano, dz. cyt, s. 56.

w tekście B. Bolzano zaląźki koncepcji „definicji uwikłanej” pojęć pierwotnych, czy też wyznaczenia ich znaczeń przez zbiór zdań (aksjomatykę teorii) — koncepcji wprowadzonych do matematyki dopiero sto lat później.

Swoje rozważania dotyczące funkcji pojęć prostych (pierwotnych) w teoriach matematycznych kończy B. Bolzano stwierdzeniem, że dla każdej dyscypliny matematycznej należy na samym początku jej wykładu podać pełną listę pojęć prostych (pierwotnych) danej teorii. Spełnienie tego postulatu uważa on za konieczny warunek zaprowadzenia „porządku” (*Ordnung*) w matematyce[19]. To również bardzo istotny postulat, który pełne zrozumienie znalazł dopiero na początku dwudziestego wieku, gdy w wyniku kryzysu podstaw matematyki zaczęto intensywnie dążyć do aksjomatyzacji wszystkich dyscyplin matematyki. Aksjomatyzacja wymagała klarownego ustalenia pełnej listy terminów pierwotnych danej dyscypliny matematycznej, a ściślej mówiąc — danej teorii. Tak czyni się i współcześnie w matematyce — przed przystąpieniem do zbudowania konkretnej teorii podaje się pełną listę jej pojęć pierwotnych. Początku tego wymogu należy się dopatrywać właśnie w koncepcji metodologii matematyki B. Bolzano. Trzeba dodać, że za jego czasów taki postulat nie był wcale oczywisty. Poza geometrią nie formułowano aksjomatyk innych dziedzin matematyki. Z tym wiązał się również fakt, że nie podawano i często nie uświadamiano sobie — poza geometrią — jakie pojęcia są pojęciami pierwotnymi danej dyscypliny matematycznej. Na tym tle

[19]„Man hat es der Mathematik schon oft nicht ganz mit Unrecht vorgeworfen, daß sie von Eintheilungen beynahe gar keinen Gebrauch mache, woher denn eben jene auffallende Unordnung, welche man in den mathematischen Disciplinen antrifft, ruehre. In der That ist aber nichts schwerer, als diese Unordnung zu heben, und eine — nicht bloß scheinbare, sondern wahre, naturgemaeße Ordnung einzufuehren. Hierzu gehoeret naehmlich, daß man zuvor mit allen einfachen Begriffen und Grundsaetzen dieser Disciplinen im Reinen sey, und bereits genau wisse, welcher der Vorsaetze ein jeder Grundsatz zu seinem logisch–richtigen Beweise beduerfe oder nicht beduerfe”, B. Bolzano, dz. cyt, s. 58.

Warto zauważyć, że z powyższego tekstu wynika, iż zdaniem B. Bolzano wszystkie dyscypliny matematyczne posiadają własne, specyficzne pojęcia proste (pierwotne).

można dopiero docenić dalekowzroczność Bolzanowskiego postulatu metodologicznego.

Wypada w tym miejscu podsumować tę część koncepcji metodologii matematyki B. Bolzano, która odnosi się do pojęć pierwotnych (prostych). W przeprowadzonych analizach zauważono w istocie cztery tezy B. Bolzano, które tę część jego koncepcji metodologii zbliżają bardzo istotnie do współczesnej metodologii matematyki. Po pierwsze, twierdzi on, że każda teoria matematyczna musi posługiwać się pojęciami prostymi (pierwotnymi). Po wtóre, na początku wykładu należy podać pełną listę pojęć prostych (pierwotnych). Dalej zauważa on, że pojęć prostych (pierwotnych) nie powinno się definiować w sposób klasyczny (*Erklaerung*). Wreszcie twierdzi, że znaczenie nazw pojęć pierwotnych wyznacza zbiór zdań, wprowadzony na początku teorii, w których te nazwy występują. Stanowi on jakby „definicję uwikłaną" pojęć pierwotnych.

Jednak mimo zauważonych uderzających zbieżności Bolzanowskiej koncepcji pojęć prostych (pierwotnych) teorii matematycznych ze współczesnymi ujęciami metodologii matematyki istnieją też pewne zasadnicze różnice, które odróżniają myśl praskiego filozofa od koncepcji współczesnych. Przede wszystkim B. Bolzano nie stwierdził wyraźnie, że „definicje uwikłane" (*Umschreibungen*) pojęć prostych (pierwotnych) to nic innego, jak aksjomatyka danej teorii, w której te pojęcia występują. Druga zasadnicza różnica wynika z przyjętych przez B. Bolzano założeń ontologiczno–epistemologicznych. Zdaniem praskiego matematyka, istnieje dziedzina pojęć obiektywnych, rozumianych jako przedmioty idealne. Ta dziedzina jest odwieczna, atemporalna. Zatem w tym obiektywnym porządku pojęć raz na zawsze określone jest, które pojęcia są pojęciami prostymi, pierwotnymi danej teorii. Są to pojęcia nie tylko nie definiowane w danej teorii, ale z definicji, obiektywnie niedefiniowalne. Zadaniem uczonego jest „odkrycie" — nie wiadomo dokładnie, w jaki sposób — które pojęcia są obiektywnie pojęciami pierwotnymi danej teorii, i wprowadzenie ich do niej na samym początku. Natomiast współcześnie uważa się zasadniczo, że w istocie każde pojęcie może pełnić funkcję pojęcia pierwotnego teorii. Trzeba tylko, by w taki sposób nałożono na te pojęcia odpowiednie warunki w aksjomatyce, by była ona niesprzeczna, a aksjomaty były niezależne. Generalnie jednak trzeba stwierdzić, że zauważone różnice nie odbierają Bolzanowskiej koncepcji pojęć prostych (pierwotnych) jej nowatorskiego charakteru.

Dalsze rozważania B. Bolzano, odnoszące się do metody matematyki, dotyczą aksjomatów (*Grundsaetzen*). Praski matematyka starał się sformułować definicję aksjomatu. Wyszedł od określeń aksjomatu, które były podawane we współczesnych mu podręcznikach matematyki i logiki. Skoncentrował się na dwu takich określeniach. Według pierwszego aksjomaty to takie zdania, które ze względu na swą jasność (*Anschauulichkeit*) czy też oczywistość (*Evidenz*) nie wymagają żadnego dowodu. W drugim określeniu stwierdza się, ze aksjomaty to takie zdania, których prawdziwość rozpoznaje się natychmiast, gdy tylko zrozumie się ich sens[20].

Praski matematyk podjął polemikę przede wszystkim z tym rozumieniem pojęcia aksjomatu, które opiera się na kategoriach jasności i oczywistości. Jego zdaniem, owe cechy niezbyt się nadają jako kryteria podziału wszystkich prawd na dwie klasy: aksjomatów i twierdzeń. Wymienia między innymi takie powody: po pierwsze, jasność jest cechą, która dopuszcza różnego rodzaju stopnie. Dlatego nigdy nie będzie można ustalić, jaki stopień jasności będzie musiało mieć dane zdanie, aby mogło być uznane za aksjomat. Po wtóre, ze względu na różne wykształcenie i różne doświadczenie stopień jasności danego zdania jest dla różnych ludzi różny. Tak więc jasność i – jak można się domyślać — oczywistość — są kategoriami subiektywnymi, przy pomocy których nie można obiektywnie orzekać, jakie zdanie jest aksjomatem[21]. Widać zatem, że B. Bolzano poszukiwał obiektywnych kryteriów, które pozwoliłyby odróżnić aksjomaty od twierdzeń. Poza tym sformułował on jeszcze jeden argument, który miał potwierdzać

[20]„Sie [die Grundsaetzen — J.D.] waeren Saetze die wegen ihrer Anschaulichkeit (Evidenz) keines Beweises beduerfen; oder deren Wahrheit man erkennt, so bald man nur ihren Sinn versteht”, B. Bolzano, dz. cyt, s. 59.

[21]Por. B. Bolzano, dz. cyt, s. 60.

słuszność jego tezy, że jasność i oczywistość zdań nie stanowią dobrego kryterium pozwalającego zdefiniować pojęcie aksjomatu. Praski matematyk stwierdził, że wielu wybitnych matematyków jasność i oczywistość niektórych zdań nie powstrzymywała przed podawaniem ich dowodu, z czego można wnioskować, że nie zaliczali ich do zbioru aksjomatów[22].

Poszukując własnego i zarazem obiektywnego kryterium, które pozwoliłoby zaklasyfikować pewne zdania jako aksjomaty, zwrócił

[22] „Eben deshalb ist endlich der Grad der Anschaulichkeit auch bey verschiedenen Menschen sehr verschieden; und was der eine oft ueberaus einleuchtend findet, koemmt einem andern dunkel vor. Doch alles dieses scheinen, wie schon anmerkten, die groeßten Mathematiker von jeher dunkel gefuehlt zu haben, indem sie auch selbst die einleuchtenden Wahrheiten, wenn sie nur anders einen Beweis fuer sie ausfindig zu machen wußten, unter die Classe der Lehrsaetze aufnahmen", B. Bolzano, dz. cyt, s. 60.

Warto w tym miejscu dopowiedzieć, że B. Bolzano występował ostro przeciwko przyjmowaniu zdań jasnych i oczywistych bez dowodu nie tylko na płaszczyźnie refleksji metodologicznej. Sam, w swej praktyce matematycznej, starał się zaopatrywać w dowody zdania jasne i oczywiste, które, jako takie, były przyjmowane bez dowodu. Wydaje się jasne i oczywiste, że jeśli pewna funkcja *f(x)* określona jest dla wszystkich liczb rzeczywistych pewnego przedziału obustronnie domkniętego i funkcja ta jest w całym przedziale ciągła oraz dla najmniejszej liczby przyjmuje ona wartość ujemną, a dla największej wartość dodatnią, to funkcja ta przynajmniej dla jednego argumentu rzeczywistego z tego przedziału przyjmuje wartość *0*. Jasność i oczywistość tego twierdzenia miała wynikać „wglądu" w jego reprezentację geometryczną. Wbrew zastanej tradycji B. Bolzano przeprowadził dowód tego twierdzenia. Zatem nie było ono dla niego aksjomatem. Tak więc i w praktyce matematycznej jasność i oczywistość nie stanowiła dla niego kryterium bycia aksjomatami dla zdań. Warto jeszcze zaznaczyć, że w dowodzie tego twierdzenia B. Bolzano podał jako pierwszy — jeszcze przed A. Cauchym — poprawne określenie granicy funkcji oraz jej ciągłości. Zbudował w ten sposób tak długo poszukiwane podstawy dla rachunku różniczkowego i całkowego, który do początku dziewiętnastego wieku opierał się na niejasnym pojęciu wielkości aktualnie nieskończenie małej [por. B. Bolzano, *Rein analyticher Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine Reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prag 1817].

Wydaje się, że w swych rozważaniach dotyczących koncepcji aksjomatów występuje B. Bolzano przeciwko tradycji zapoczątkowanej przez Arystotelesa. Właśnie dla Arystotelesa oczywistość zdań stanowiła kryterium przyjmowania ich jako aksjomatów, czyli bez dowodu.

B. Bolzano uwagę na najstarszy i jedyny w istocie funkcjonujący za jego czasów system aksjomatyczny w matematyce, a mianowicie na geometrię Euklidesa. Postawił pytanie, dlaczego słynny „piąty postulat” Euklidesa został zaliczony przez starożytnego matematyka do zbioru aksjomatów. Zdaniem B. Bolzano dlatego, że Euklides i jego poprzednicy nie wiedzieli, jak udowodnić to zdanie przy pomocy pozostałych aksjomatów jego geometrii[23]. Można stąd wyprowadzić wniosek, że dla Euklidesa aksjomatem było takie zdanie, którego po prostu nie był w stanie udowodnić. To jednak jest — jak zauważa B. Bolzano — definicja aksjomatu, która opiera się na pewnym subiektywnym kryterium. Umiejętność bowiem — lub nieumiejętność — udowodnienia danego zdania jest uzależniona od umiejętności naukowych danego człowieka. Natomiast B. Bolzano poszukiwał jakiegoś określenia aksjomatu, które opierałoby się na kryterium obiektywnym. Praski filozof stwierdza ostatecznie, że aksjomatem jest prawda[24], która jest obiektywnie niedowiedlna, a więc taka, której dowodu nie sposób przedstawić[25]. Dodaje też, że wyczerpująca (pełna) lista zdań (prawd) obiektywnie niedowiedlnych — czyli aksjomatów

[23]„Euklides und seine Vorgaenger erwiesen, was sie erwiesen konnten; und der beruechtige Satz von den Parallelen wurde nebst einigen andern Saetzen gewiß nur darum unter die so genannten $\chi\ o\ \iota\ \nu\ \alpha\ \xi\quad \epsilon\ \nu\nu\ o\ \iota\ \alpha\ \xi$ gestellt, weil się dieselben nicht zu beweisen wußten”, B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 61–62.

B. Bolzano należał do tej grupy matematyków, którzy uważali, że „piąty postulat” Euklidesa da się udowodnić w oparciu o pozostałe aksjomaty geometrii klasycznej. Swoją — oczywiście ze względu na niezależność „piątego postulatu” od pozostałych aksjomatów — nieudaną próbę przedstawił w pierwszym swym opublikowanym dziełku [por. B. Bolzano, *Betrachtungen ueber einige Gegenstaende der Elementargeometrie*, Prag 1804].

[24]Z całego kontekstu wynika, że B. Bolzano w analizowanym tekście używa zamiennie terminów „zdanie” (*Satz*) i „prawda” (*Wahrheit*). Oprócz tego zamiennie używa też często terminów „zdanie” (*Satz*) i „sąd” (*Urtheil*).

[25]„Soll also das Wort Grundsatz in einem objectiven Sinne genommen werden, so muessen wir darunter eine Wahrheit verstehen, die wir nicht nur zu erweisen wissen, sondern die an sich unerweislich ist”, B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 63.

— powinna się bezwzględnie znajdować na początku wykładu każdej teorii matematycznej[26].

Należy w tym miejscu — jak się wydaje — zastanowić się nad „zapleczem" ontologiczno–epistemologicznym takiego określenia aksjomatu przez B. Bolzano oraz nad tym, jak ta definicja i jej „zaplecze" filozoficzne przystaje do współczesnej koncepcji aksjomatu.

Na początku swojego wykładu o metodzie matematyki B. Bolzano wprowadził pojęcie „królestwa prawdy". To uporządkowany i obiektywnie istniejący zbiór wszystkich sądów prawdziwych danej dyscypliny naukowej. Wypada przypomnieć, że porządek w tej dziedzinie polegał między innymi na tym, że niektóre sądy prawdziwe stanowiły podstawę innych sądów, które były ich konsekwencjami. Ten związek określany był bliżej przy pomocy kategorii dowodu. Sąd prawdziwy, będący podstawą innego sądu prawdziwego (konsekwencji), to taki sąd, który był używany jako przesłanka w łańcuchu dowodowym prowadzącym do konsekwencji. Z tego, co B. Bolzano powiedział o aksjomatach — jako sądach (prawdach) niedowiedlnych — wynika, że w obiektywnym „królestwie prawdy" mogły one pełnić tylko funkcję podstaw sądów prawdziwych, nie były natomiast nigdy konsekwencjami innych sądów prawdziwych. Były one obiektywnie nie do dowiedzenia, a więc były niedowiedlne. Ponieważ naukowiec w jakiś sposób „odkrywał" porządek obiektywny panujący w "królestwie prawdy", właśnie te sądy, nie będące obiektywnie konsekwencjami innych prawd (obiektywnie niedowiedlne), musiały pełnić w jego wykładzie funkcję aksjomatów.

Tak określone "zaplecze" ontologiczno–epistemologiczne Bolzanowskiej koncepcji aksjomatów pozwala na dokonanie porównania ze współczesną koncepcją aksjomatów matematyki. Po pierwsze, należy zauważyć, że B. Bolzano uznaje aksjomaty za sądy (zdania) prawdziwe. Zalicza je bowiem do obiektywnie istniejącego "królestwa prawdy". Dzisiaj w istocie jako aksjomat może być wprowadzone dowolne zdanie — byle sensowne przy założeniu pewnego słownika oraz

[26]Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 58.

reguł językowych, i takie by zbiór aksjomatów był niesprzeczny oraz by każdy aksjomat był niezależny od zbioru pozostałych aksjomatów. Matematyk wprowadzający dane zdanie nie musi się w istocie zastanawiać, czy zdanie to jest spełnione w jakimś modelu (i w jakim), czyli czy zdanie to jest semantycznie prawdziwe. Oczywiście, dobrze jeśli aksjomatyka posiada jakiś model, ale to nie jest warunek konieczny jej poprawności. Po wtóre, według koncepcji Bolzanowskiej zbiór aksjomatów danej dyscypliny matematycznej jest raz na zawsze określony przez to, które sądy prawdziwe w obiektywnym „królestwie prawdy" są obiektywnie niedowiedlne. Natomiast współcześnie przyjmuje się, że w istocie dowolne zdanie może pełnić role aksjomatu, byle tylko były spełnione opisane wcześniej warunki, które dotyczą aksjomatów. Zatem współcześnie matematyk dysponuje bardzo dużym „marginesem dowolności" w wyborze zdań, które w jego teorii mają pełnić funkcje aksjomatów. Natomiast żadnej dowolności nie miał matematyk według koncepcji Bolzanowskiej. W istocie miał on za zadanie „odkrycie" obiektywnych aksjomatów i umieszczenie pełnej ich listy na początku swojego wykładu. Po trzecie wreszcie, w koncepcji B. Bolzano aksjomaty były definiowane jako sądy prawdziwe obiektywnie niedowiedlne. Współcześnie stawia się aksjomaty na początku danej teorii i po prostu ich się nie dowodzi. Są one o tyle niedowiedlne, że aksjomaty powinny być niezależne, a więc danego aksjomatu nie można udowodnić przy pomocy zbioru pozostałych aksjomatów i przyjętych reguł dowodowych. Natomiast bardzo łatwo można sobie wyobrazić sytuację, że tworzy się różne aksjomatyki danej dziedziny matematycznej. W jednej aksjomatyce dane zdanie może pełnić rolę aksjomatu i być niedowielne przy pomocy pozostałych aksjomatów i przyjętych reguł dowodzenia, natomiast w innej teorii, opisującej tę samą dziedzinę matematyczną i wychodzącej z innego zbioru aksjomatów to samo zdanie może być konsekwencją danej teorii, a więc być w nim dowiedlne. Według koncepcji Bolzanowskiej było natomiast raz na zawsze rozstrzygnięte, czy dana prawda jest niedowiedlna (i jest aksjomatem), czy jest dowiedlna (i jest twierdzeniem).

Widać zatem, że współcześnie akceptowana „filozofia aksjomatów" była zasadniczo odmienna od Bolzanowskiej. Niemniej należy zwrócić uwagę na te elementy metodologii B. Bolzano dotyczące aksjomatów, które i dzisiaj są akceptowane, a które były przez praskiego filozofa postulowane wbrew zastanej przez niego tradycji metodologicznej. B. Bolzano swe uwagi odnosił do całej matematyki. Można stąd wyciągnąć wniosek, że — jego zdaniem — na początku wykładu każdej dyscypliny matematycznej powinny znaleźć się jej aksjomaty. Trzeba przypomnieć, że do czasów B. Bolzano zaksjomatyzowana była w zasadzie tylko geometria. Poza tym praski filozof bardzo wyraźnie sformułował współcześnie również przestrzegany postulat, by na początku wykładu każdej teorii podać pełną listę jej aksjomatów.

Poza tym można dostrzec zawarte *implicite* w superpozycji definicji aksjomatu oraz „zaplecza" filozoficznego metodologii B. Bolzano pewne bardzo istotne twierdzenie metamatematyczne. Praski filozof rozpatruje obiektywnie istniejące „królestwo prawdy". Należą do niego między innymi wszystkie prawdy matematyczne. Te prawdy dzielą się na dwie klasy. Pierwsza to zbiór prawd niedowiedlnych, a więc aksjomatów. Drugi podzbiór prawd to — jak należy się domyślać — zbiór twierdzeń matematycznych. Można — na zasadzie przeciwieństwa do aksjomatów — podać Bolzanowską definicję twierdzeń — to prawdy dowiedlne. Zatem wszystkie prawdy matematyki nie będące aksjomatami są dowiedlne. Czyli matematyka jest zupełna w tym znaczeniu, że wszystkie jej prawdy nie będące aksjomatami są dowiedlne — i to z definicji. Przekonanie o zupełności matematycznych teorii jest przejawem optymizmu epistemologicznego B. Bolzano. Należy przy tej okazji przypomnieć, że swoje postulaty metodologiczne i „zaplecze" filozoficzne metodologii rozciągał on w zasadzie na wszystkie dyscypliny naukowe. Zatem ostatecznie można się w wywodach B. Bolzano dopatrywać poglądu, że wszystkie teorie naukowe są zupełne w podanym wyżej znaczeniu. Optymizm poznawczy praskiego filozofa został ostatecznie podważony dopiero przez dowód pierwszego twierdzenia K. Gödla z początku lat trzydziestych dwudziestego wieku.

Określiwszy aksjomaty jako prawdy obiektywnie niedowiedlne, musiał B. Bolzano dookreślić jeszcze pojęcie dowodu. Stwierdza on, że jako naukowy dowód pewnej prawdy rozumie przedstawienie (*Darstellung*) obiektywnej zależności tejże od innych prawd, to jest wyprowadzenie (*Herleitung*) tej prawdy z takich prawd, które muszą być traktowane nie przypadkowo, lecz w sobie (*an sich*) i koniecznie jako podstawa (*Grund*) tej prawdy, a ta z kolei jako ich konsekwencja (*Folge*)[27].

Praski myśliciel, po podaniu swego określenia dowodu, wyciąga natychmiast wniosek, że aksjomaty (*Grundsaetze*) są zdaniami, które w obiektywnym porządku mogą być traktowane (*betrachten*) wyłącznie jako podstawa (*Grund*), a nigdy jako konsekwencja (*Folge*) dowodu[28].

Współcześnie podkreśla się zdecydowanie, że pojęcie dowodu jest zrelatywizowane przez odniesienie do zbioru reguł dowodzenia (reguł dedukcyjnych). Na początku budowania danej teorii przyjmuje się na metapoziomie właśnie ów zbiór reguł dedukcyjnych. Oczywiście za

[27]„Wir muessen also das Wort in einer engeren Bedeutung nehmen, und unter dem wissenschaftlichen Beweise einer Wahrheit die Darstellung der objectiven Abhaengigkeit derselben von andern Wahrheiten verstehen, d. h. die Herleitung derselben aus solchen Wahrheiten, die nicht zufaelliger Weise, sondern an sich und nothwendig als Grund von ihr, und sie dagegen als ihre Folge betrachten werden muß", Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 64.

Warto zauważyć, że B. Bolzano nie zaznacza, że pojęcia podstawy (*Grund*) i konsekwencji (*Folge*) są pojęciami prostymi, czyli niedefiniowalnymi. W analizowanym tekście zwykł natomiast wyraźnie podkreślać, które pojęcia są pojęciami prostymi — dotyczy to chociażby pojęcia sądu (*Urtheil*). Dlatego można wnioskować, ze pojęcia podstawy i konsekwencji są dla B. Bolzano pojęciami definiowalnymi. Wydaje się jednak, że nie można ich zdefiniować inaczej, jak przez odniesienie do pojęcia dowodu. Tak uczyniono w niniejszym artykule. Dlatego też w koncepcji B. Bolzano można chyba dostrzec „błędne koło" w definiowaniu. W definicji dowodu używa się pojęć podstawy i konsekwencji, natomiast w swoich definicjach podstawy i konsekwencji musiałby B. Bolzano użyć — gdyby je *explicite* sformułował — pojęcia dowodu.

[28]„Grundsaetze sind daher Saetze, welche in objectiver Hinsicht nur immer als Grund, und nie als Folge betrachtet werden koennen", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 64.

czasów, kiedy pisany był przez B. Bolzano analizowany tekst, nie było jeszcze mowy o świadomym odróżnieniu poziomu teorii od poziomu metateoretycznego. Ale praski filozof doskonale sobie zdawał sprawę, że koncepcja dowodu, którą starał się zaprezentować, jest zależna od przyjmowanego zbioru reguł dowodzenia. Dlatego — tak jak to się czyni również współcześnie — starał się *explicite* wyliczyć przyjmowane przez siebie reguły dowodzenia. W istocie do reguł dowodzenia zaliczył on wszystkie twierdzenia — lekko zmodyfikowanej — sylogistyki zdań asertorycznych Arystotelesa. Zatem — ze współczesnego punktu widzenia — do reguł dowodowych należały tezy pewnego tylko fragmentu klasycznego rachunku predykatów. Poza tym B. Bolzano — w ramach przyjmowanych reguł dowodzenia — wyliczał niektóre twierdzenia, które można by zaliczyć do sylogistyki zdań modalnych Arystotelesa[29]. Oprócz tego — już nie wyraźnie, lecz *implicite* — przyjmował jako reguły dowodzenia niektóre tezy klasycznego rachunku zdań. Wynika to chociażby stąd, że akceptował on dowody nie wprost, które oparte są na tezach klasycznego rachunku zdań[30]. B. Bolzano nie poprzestał w swojej prezentacji metody matematyki na stwierdzeniu, że na początku każdej teorii matematycznej należy podać jej aksjomaty. Postawił on jeszcze dwa dodatkowe problemy: czy w ogóle istnieją aksjomaty oraz czy istnieją jakieś kryteria, które pozwoliłyby wyróżnić aksjomaty w zbiorze wszystkich prawd? Od razu stwierdził, że na obydwa pytania można udzielić pozytywnej odpowiedzi[31].

---

[29]B. Bolzano podaje figury sylogistyczne z następującymi przesłankami: „(*A* cum *B*) ist möglich" oraz „*A* kann enthalten *B*", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 66.

[30]Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Dar stellung der Mathematik*, s. 122–126.

Dowody nie wprost oparte są na regule formułowanej w metajęzyku, której podstawą jest następująca teza klasycznego rachunku zdań: $(\sim p \rightarrow (q \wedge \sim q)) \rightarrow p$.

[31]„Nunmehr entsteht die doppelte Frage, ob es auch ueberhaupt Wahrheiten gebe, die an sich unerweislich sind; und ob es ferner bestimmte Kennzeichen fuer diese Unerweislichkeit derselbel gebe? Beydes muß ich bejahend beantworten lassen, wenn es Gruendsaetze in der oben angegebenen Bedeutung des Wortes geben soll", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 68.

Argument — nie wprost — przemawiający za pozytywnym rozstrzygnięciem pierwszego problemu przedstawił B. Bolzano natychmiast. Aksjomaty to — zgodnie z wcześniej przyjętą przez niego definicją — sądy (prawdy) obiektywnie niedowiedlne. Każdy dowiedlny sąd jest konsekwencją (*Folge*), której podstawą (*Grund*) są dwa sądy użyte jako przesłanki w jego dowodzie (praski matematyk wyraźnie odwołał się tutaj do miejsca, gdzie jako reguły dowodowe matematyki podał sylogizmy logiki Arystotelesa). Jeśliby założyć, że wszystkie sądy są dowiedlne — to znaczy, że nie istnieją aksjomaty w sensie Bolzanowskim — wówczas konieczne byłoby przyjęcie ciągu konsekwencji, w którym nie byłoby żadnego pierwszego sądu, to znaczy ciągu, w którym nie byłoby żadnej takiej podstawy (*Grund*), która sama nie byłaby konsekwencją (*Folge*). To zaś byłoby, zdaniem B. Bolzano, niedorzecznością (*ungereimt*). Zatem założenie o nieistnieniu sądów niedowiedlnych jest fałszywe, czyli istnieją aksjomaty[32].

Warto zauważyć, że praski myśliciel w swym dowodzie o istnieniu aksjomatów ponownie założył istnienie obiektywnego, uporządkowanego „królestwa prawdy"[33]. Poza tym przyjęcie jako reguł dowodowych tez sylogistyki zdań asertorycznych oraz modalnych Arystotelesa zmusiło go do stwierdzenia, że istnieją przynajmniej dwa aksjomaty[34]. Było to konieczne, ponieważ sylogizmy wymagają dwu przesłanek dla

[32] „Ein jedes erweisliche Urtheil ist nach der gegebenen Erklaerung anzusehen als eine Folge, und seine Praemissen zusammen genommen als dessen Grund. Behaupten also, daß alle Urtheile erweislich sind, heißt eine Reihe von Folgen annehmen, in der kein erster, d. h. kein solcher Grund erscheint, der selbst nicht eine Folge ist. Dieses ist aber ungereimt", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 69.

[33] „Da es nun immer noch von einigen bezweifelt wird, ob es im Reiche der Wahrheit auch ueberall Urtheile gebe, welche sich schlechterdings nicht erweisen ließen; so scheint es mir der Muehe nicht unwerth, hier einen kurzen Beweis dieser Behauptung zu versuchen", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 68–69.

[34] „Im Gegentheile also muß nothwendig einige — zum wenigstens zwey Urtheile annehmen, die selbst nicht wieder gefolgerte, sondern Grundurtheile im strengsten Sinne des Wortes d. h. Grundsaetze sind", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 69.

otrzymania konkluzji. Trzeba było zatem przynajmniej dwu aksjomatów, aby otrzymać pierwsze twierdzenie danej teorii.

Pozostało praskiemu filozofowi pokazanie, czy istnieją — a jeśli tak, to jakie — kryteria, które wyróżniają aksjomaty w zbiorze wszystkich sądów (prawd). Stwierdził on jednak, że udzielenie pozytywnej odpowiedzi na to pytanie wymaga wcześniejszego przedstawienia istotnych uwag dotyczących sądów w ogóle. B. Bolzano rozpoczyna swe uwagi od refleksji nad pojęciem sądu (*Urtheil*). Krytykuje on definicję mówiącą, że sąd jest połączeniem dwu pojęć. Wykazuje, że jest to określenie zbyt szerokie. Wreszcie stwierdza on, że pojęcie sądu jest pojęciem niedefiniowalnym, pierwotnym[35].

Następnie praski filozof zajmuje się zagadnieniem form, które mogą przybierać sądy. Odcina się od zastanego twierdzenia, ze wszystkie sądy są sprowadzalne do postaci kanonicznej „*A* jest *B*", gdzie *A* i *B* oznaczają związane w tym sądzie pojęcia, natomiast słowo *jest* stanowi łącznik (*Copula*). Według B. Bolzano istnieje pięć różnych form kanonicznych sądów i każdy sąd jest sprowadzalny do dokładnie jednej z tych form. Wymienił on następujące postacie kanoniczne sądów: koniecznościowe (*Nothwendigkeitsurtheil*), wyrażające możliwość (*Moeglichkeitsurtheile*), wyrażające obowiązek (*Urtheile, die eine Pflicht ausdruecken*), spostrzeżeniowe (*empirische Wahrnehmungsurtheile*), oraz wyrażające prawdopodobieństwo (*Wahrscheinlichkeitsurtheile*)[36].

Z punktu widzenia Bolzanowskiej metodologii matematyki istotne są dwie formy kanoniczne sądów: koniecznościowe oraz wyrażające możliwość. Jak wynika z całego kontekstu dzieła opublikowanego w roku 1810, praski filozof był przekonany o możliwości sprowadzenia każdego sądu matematyki do jednej z tych dwu postaci kanonicznych[37]. Dlatego w tym miejscu zostaną zaprezentowane tylko te dwie

---

[35] Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 71–72.

[36] Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 73–76.

[37] Praski myśliciel zaliczał do matematyki rachunek prawdopodobieństwa. W swoim późniejszym monumentalnym dziele *Wissenschaftslehre* przedstawił kon-

formy sądów. Sądy koniecznościowe to te, które dają się sprowadzić do postaci „*S* jest pewnym rodzajem *P*”. B. Bolzano wymienia jeszcze dwie inne, równoważne jego zdaniem, postacie tej formy kanonicznej, mianowicie: „*S* zawiera pojęcie *P*” oraz „przedmiotowi *S* przysługuje pojęcie *P*”. Łącznikiem (*Verbindungsbegriff*) w formie kanonicznej sądów koniecznościowych jest pojęcie przysługiwania (*Begriff des Zukommens*) pewnej cechy albo — co w istocie jest tym samym — zawieranie się pewnej rzeczy jako indywiduum albo rodzaju (*Art*) w pewnym gatunku (*Gattung*)[38]. Natomiast wszystkie sądy wyrażające możliwość dają się sprowadzić do postaci kanonicznej: „*A* może być jakimś rodzajem *B* ”. Zdaniem B. Bolzano, łącznikiem w postaci kanonicznej jest pojęcie możliwości (*Begriff der Moeglichkeit*). Podaje on przykład matematycznego sądu, który — jego zdaniem — jest sądem możliwościowym: istnieją równoboczne trójkąty. Zdanie to, sprowadzone do formy kanonicznej, brzmi — według praskiego filozofa — następująco: pojęcie trójkąta (= *A*) może być rodzajem (*Art*) pojęcia równobocznej figury (= *B*)[39].

---

cepcję rachunku prawdopodobieństwa. Powstaje zatem pytanie, dlaczego nie zaliczył sądów wyrażających prawdopodobieństwo do sądów matematyki. Wynikało to zapewne stąd, że w roku 1810 B. Bolzano nie miał jeszcze własnej klarownej koncepcji rachunku prawdopodobieństwa oraz nie potrafił w istocie precyzyjniej określić jak wygląda forma kanoniczna sądów wyrażających prawdopodobieństwo. Pisał on: „Endlich bilden auch die Wahrscheinlichkeitsurtheile (wie mir daeucht) noch eine eigene Classe von Urtheilen, deren Verbindungsbegriff jener der Wahrscheinlichkeit ist. Doch bin ich ueber ihre eigentliche Natur noch nicht im Klaren”, B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 76.

[38]„Urtheile, welche sich auf die Form: *S* ist eine Art von *P*, oder, was gleich viel ist, *S* enthaelt den Begriff *P*. oder: dem Dinge *S* koemmt zu der Begriff *P*, zurueckfuehren lassen. Der Verbindungsbegriff in diesen Urtheilen ist: der Begriff des Zukommens einer gewissen Eigenschaft, oder was eben so viel ist, des Enthaltenseyns eines gewissen Dinges, als Individui oder Art, unter einer gewissen Gattung”, B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 74.

[39]„Urtheile, die eine Moeglichkeit aussagen, und unter der Form: *A* kann seyn eine Art von *B*, enthalten sind. Der Verbindungsbegriff ist der Begriff der Moeglichkeit, daher ich się eben Moeglichkeitsurtheile nenne. Ein Beyspiel sey der Satz: es gibt gleichseitige Dreyecke; denn er ist eigentlich so auszudruecken: Der Begriff eines Dreyecks (= *A*) — kann seyn eine Art — von dem Begriffe einer gleichseitigen Figur

Następnie B. Bolzano wyjaśnił, dlaczego przyjął więcej niż jedną tradycyjną formę kanoniczną sądów. Jego tok rozumowania ukazuje przy okazji, iż zakładał on — na co wskazano już wyżej — że sądy matematyki mogą być sądami koniecznościowymi albo sądami wyrażającymi możliwość (modalnymi). Według praskiego filozofa, sądy modalne starano się tradycyjnie sprowadzić do postaci kanonicznej „*A* jest *B*" w ten sposób, że zwroty wyrażające modalność umieszczano w podmiocie albo predykacie formy kanonicznej. Wtedy łącznikiem pozostawało samo słówko *jest*. Natomiast B. Bolzano umieścił w formie kanonicznej zwroty wyrażające modalność w łączniku — w ten sposób powstała inna niż tylko tradycyjna forma kanoniczna sądów. Umieszczenie w łączniku zwrotów modalnych stworzyło możliwość budowania sądów modalnych, w których zarówno podmiot, jak i predykat, są pojęciami prostymi. Gdyby bowiem zwrot modalny dodano do predykatu lub podmiotu — jak to tradycyjnie czyniono — wówczas predykat lub podmiot musiałyby być, według B. Bolzano, pojęciami złożonymi. Dlaczego tak ważne było istnienie sądów modalnych z prostymi pojęciami jako podmiotem i predykatem? Otóż B. Bolzano starał się — jak zostanie to dalej pokazane — sformułować twierdzenie, że aksjomatami są te i tylko te sądy, których zarówno podmiot, jak i predykat, są pojęciami prostymi (niedefiniowalnymi). Zakładał on też istnienie w matematyce sądów modalnych jako twierdzeń. Przyjmował jako reguły dowodowe twierdzenia sylogistyki zdań modalnych Arystotelesa. Dlatego musiał istnieć przynajmniej jeden aksjomat będący sądem modalnym. W innym wypadku nie można by bowiem przy pomocy sylogistyki zdań modalnych otrzymać twierdzeń będących sądami modalnymi. Skoro musiał istnieć w matematyce przynajmniej jeden aksjomat będący sądem modalnym, a aksjomaty miały jako podmiot i predykat wyłącznie pojęcia proste (niedefiniowalne), to — zgodnie z wcześniej sformułowanymi uwagami — musiał B. Bolzano zwroty wyrażające modalność przenieść do łącznika formy kanonicznej sądów i w konsekwencji został zmuszony do przyjęcia —

(= *B*)", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 75.

inaczej niż w zastanej logice — więcej niż jednej postaci kanonicznej sądów[40].

W tym miejscu, po przedstawieniu swojej koncepcji sądów, powrócił B. Bolzano do pytania, jakie kryteria wyróżniają ze zbioru wszystkich sądów aksjomaty, czyli sądy obiektywnie niedowiedlne. Starając się udzielić odpowiedzi, wskazał on najpierw na warunki wystarczające dowiedlności sądów. Zaznaczył, że ponieważ chodzi o sądy matematyki, to mowa jest dalej o sądach poznawalnych *a priori*. B. Bolzano sformułował twierdzenie, że wszystkie takie sądy, których podmiot jest pojęciem złożonym (nie jest pojęciem prostym, czyli nie-

[40]„Der wesentliche Umstand, in welchem ich bey dieser Aufzaehlung von andern abweiche, bestehet darin, daß ich gewisse Begriffe zur Copula des Urtheils ziehe, welche man sonst in das Praedicat oder Subject verlegt hat. Ich muß also noch im Kurzen anzeigen, was mich zu dieser Veraenderung veranlaßt habe. Es waren vornehmlich die Moeglichkeits– und Pflichtsurtheile. Ich glaube gefunden zu haben, daß alle Urtheile, deren Subject oder Praedicat zusammen gesetzte Begriffe sind, erweisliche Urtheile seyn mueßten. Drueckt man nun die Moeglichkeitsurtheile (nach der gewoehnlichen Methode) so aus, daß der Begriff der Moeglichkeit das Praedicat zu bilden scheint; so waere ihr Subject wesentlich ein zusammen gesetzter Begriff, indem es bekantlich ueberflueßig ist, die Moeglichkeit eines einfachen Begriffes zu behaupten. (*A* cum *B*) ist — moeglich waere dann die allgemeine Form aller Urtheile dieser Art, wo (*A* cum *B*) das Subject, moeglich das Praedicat vorstellen wuerde. Nach der nur eben angefuehrten Bemerkung also mueßten alle diese Urtheile erweislich seyn, gleichwohl sieht man leicht ein, daß es einige schlechterdings unerweisliche Urtheile der Art geben muesse, weil jedes Moeglichkeitsurtheil, wenn es erweisen werden soll, eine Praemisse, in welcher der Begriff der Moeglichkeit bereits vorhanden ist, d. h. ein anderes Moeglichkeitsurtheil voraussetzt. Ziehen wir aber den Begriff der Moeglichkeit in die Copula, so kann es Moeglichkeitsurtheile geben, deren Subject und Praedicat beide ganz einfache Begriffe sind, und die wir daher, ohne anzustossen, fuer unerweisliche Urtheile gelten lassen koennen", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 77–78.

Ostatecznie zatem B. Bolzano był zmuszony przyjąć w teoriach matematycznych przynajmniej trzy aksjomaty. Przyjęcie jako reguł dowodowych lekko zmodyfikowanej sylogistyki zdań asertorycznych Arystotelesa i przekonanie, że część twierdzeń matematyki to sądy koniecznościowe, prowadziło go do stwierdzenia, iż teorie matematyczne wymagają przynajmniej dwu aksjomatów, będących sądami koniecznościowymi. Stwierdzenie, że część sądów matematyki to sądy modalne, prowadzi do wniosku, iż w teoriach matematycznych musi być przyjęty dodatkowo przynajmniej jeden aksjomat będący sądem modalnym.

definiowalnym, pierwotnym), są zawsze sądami dowiedlnymi. Uzasadnił to w ten sposób, że jeśli podmiot sądu jest pojęciem złożonym, to wszystkie jego cechy, czyli wszystkie predykaty, które można z nim związać w jakimkolwiek sądzie, muszą być zależne od każdego prostego (niedefiniowalnego) pojęcia, z których złożone jest to pojęcie i od cech tych pojęć prostych, czyli w konsekwencji od sądów, które dadzą się tworzyć z owymi pojęciami prostymi jako podmiotami. Dlatego każdy sąd, którego podmiot jest pojęciem złożonym, jest zależny od tych sądów z pojęciami prostymi jako podmiotami i w konsekwencji jest on — zdaniem praskiego filozofa — jako poznawalny *a priori* — dowiedlny[41]. Dalej B. Bolzano sformułował twierdzenie, że wszystkie sądy (poznawalne *a priori*), których predykat jest pojęciem złożonym są również sądami dowiedlnymi. Zaprezentowany przez niego dowód tego twierdzenia przebiega analogicznie jak dowód twierdzenia wcześniejszego[42].

W sumie więc otrzymał B. Bolzano tezę, według której wszystkie sądy, których podmiot lub predykat są pojęciami złożonymi, są dowiedlne. Stąd, z definicji aksjomatu oraz z określenia pojęcia złożonego, wynika następujący warunek konieczny bycia aksjomatem: jeśli dany sąd jest aksjomatem, to zarówno jego podmiot, jak i predykat, są pojęciami prostymi (pierwotnymi, niedefiniowalnymi)[43].

[41]„Ist also irgend ein Subject ein zusammen gesetzter Begriff, so muessen die Eigenschaften desselben d. h. die Praedicate, welche man ihm beylegen kann, von jenen einzelnen Begriffen, aus welchen es zusammen gesetzt ist, und von den Eigenschaften derselben, d. h. von jenen Urtheilen, welche sich ueber diese einfachen Begriffe bilden lassen, abhaengig seyn. Mithin ist jeder Satz, dessen Subject ein zusammen gesetzter Begriff ist, ein von mehreren anderen Saetzen abhaengiger, mithin (in wie fern er *a priori* erkennbar ist) auch wirklich herleitbar d. h. erweislicher Satz, und kann sonach auf keine Weise fuer einen Grundsatz gelten", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 87.

[42]Por. B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 88.

[43]„Hieraus ergibt sich nun schon, daß die eigentlich unerweislichen Saetze, oder Grundsaetze unter der Classe bloß jener Urtheile zu suchen seyen, in welchen beydes, Subject und Praedicat ganz einfache Begriffe sind", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 88.

W istocie jednak dążył — jak się wydaje — B. Bolzano do stwierdzenia równoważności: dany sąd jest aksjomatem wtedy i tylko wtedy, gdy zarówno jego podmiot, jak i predykat, są pojęciami prostymi (pierwotnymi, niedefiniowalnymi). Jednak wydobycie tego twierdzenia z tekstu praskiego filozofa nie jest proste. Precyzyjny zazwyczaj B. Bolzano nie wyraził się bowiem w tej kwestii zbyt jasno. Tok jego wywodu jest następujący: dotąd wykazano, że każdy sąd, który jest aksjomatem, ma jako podmiot oraz predykat pojęcia proste (pierwotne, niedefiniowalne). Nie dowiedziono jednak w ten sposób jeszcze twierdzenia odwrotnego, to znaczy, że każdy sąd, którego podmiot i predykat są pojęciami prostymi, jest aksjomatem. Zatem aby wykazać, że dany sąd „*A* jest *B*" jest aksjomatem, nie wystarczy pokazać, że pojęcia *A* i *B* są pojęciami prostymi, należy jeszcze dodatkowo pokazać, że nie istnieją dwa sądy o postaci „*A* jest *X*" oraz „*X* jest *B*", z których można by wywieść dany sąd. I w tym miejscu B. Bolzano podkreśla, że w wielu wypadkach będzie to wymagało osobnego rozważenia (*Betrachtung*). Zaznacza, że nie jest to dowód aksjomatu — aksjomaty to bowiem dla niego sądy z definicji niedowiedlne — ale jego wyprowadzenie (*Herleitung*). Takie wyprowadzenia aksjomatów są istotnym elementem wykładu naukowego[44].

---

[44]„Wenn wir nun auch durch das Bisherige erwiesen haben, daß jedes Urtheil, welches ein Grundsatz seyn soll, aus lauter einfacher Begriffen bestehen muesse; so ist doch noch nicht umgekehrt erwiesen, daß jedes Urtheil, das aus einfachen Begriffen besteht, ein Grundsatz sey. Es ist also, um zu beweisen, daß ein vorhandener Satz "*A* ist *B*", ein Grundsatz sey, noch nicht genug zu zeigen, daß die Begriffe *A* und *B* beyde ganz einfach sind; sondern man muß noch ferner zeigen, es gebe auch keine zwey Saetze von der Form "*A* ist *X*", und "*X* ist *B*", aus welchen jener gefolgert werden koennte. Dieses wird in den meisten Faellen eine eigene Betrachtung erfordern, die sich zum Unterschiede von einem eigentlichen Beweise (oder einer Demonstration) mit dem bestimmten Nahmen einer Herleitung (oder Deduction) belege. Grundsaetze werden also zwar nicht bewiesen, wohl aber deduciert, und diese Deductionen sind ein wesentlicher Bestandtheil des wissenschaftlichen Vortrages, indem man ohne sie niemahls gewiß seyn koennte, ob jene Saetze, deren man sich als Grundsaetze bedienet, dieses auch wirklich sind", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 93.

Rozumowanie zaprezentowane przez praskiego filozofa prowadzi do następujacych wniosków: ogólnie nie da się udowodnić, iż każdy sąd, którego podmiot i predykat są pojęciami prostymi (pierwotnymi, niedefiniowalnymi), jest niedowiedlny, czyli że jest on aksjomatem. „W wielu wypadkach" trzeba takie rozumowanie uzasadniające przeprowadzić dla poszczególnego sądu. B. Bolzano jednak nie odpowiedział na pytanie, czy — jego zdaniem — za każdym razem da się w ten sposób pokazać, że dany sąd posiadający pojęcia proste jako podmiot i predykat jest aksjomatem. Pewne jednak dalsze stwierdzenie pozwala zrekonstruować jego przekonania. Pisze on, że „obszar aksjomatów rozciąga się tak daleko, jak daleko rozciągają się pojęcia proste"[45]. Wynika stąd, że był on przekonany — mimo niemożliwości przeprowadzenia ogólnego dowodu — że każdy sąd, którego podmiot i predykat są pojęciami prostymi (pierwotnymi, niedefiniowalnymi), jest aksjomatem. Jeśli to — w istocie nie udowodnione — twierdzenie zestawi się z tezą wcześniejszą, to otrzyma się — w konsekwencji również nie udowodnione przez B. Bolzano, ale w zawikłany sposób wypowiedziane przez niego — twierdzenie, że aksjomaty to te i tylko te sądy, których podmiot i predykat są pojęciami prostymi (pierwotnymi, niedefiniowalnymi). I w ten właśnie sposób określił on — choć w nieco skomplikowany sposób — kryterium konieczne i wystarczające, które musiał spełniać dany sąd, aby być aksjomatem, czyli sądem niedowiedlnym.

Jeszcze trzy istotne uwagi można sformułować odnośnie do wcześniej zaprezentowanego rozumowania praskiego filozofa. Pierwsza dotyczy „wyprowadzenia" (*Herleitung*). Z kontekstu wynika, że chodzi o jakiś typ rozumowania — nie wiadomo dokładnie, jaki — przy pomocy którego to ma się stwierdzić, czy nie istnieją dwa sądy, które mogłyby być przesłankami w dowodzie aksjomatu, przeprowadzonym przy pomocy reguł wyznaczonych przez sylogistykę Arysto-

[45] „daß Gebiet derselben (der wirklichen Grundsaetze — J.D.) erstreckt sich so weit, als die bloß einfachen Begriffe reichen; wo diese aufhoeren, und die Erklaerungen ihren Anfang nehmen, da hoeren auch die Grundsaetze auf, und es fangen die Lehrsaetze an", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 96.

telesa. B. Bolzano sugeruje, że takie „wyprowadzenie" (*Herleitung*) powinno być istotnym elementem wykładu naukowego. O co w istocie chodziło praskiemu filozofowi, kiedy stwierdzał potrzebę „wyprowadzenia" (*Herleitung*) aksjomatów? W istocie o jakieś — nie wiadomo dokładnie jakie — stwierdzenie niezależności aksjomatu od twierdzeń teorii. Te zaś twierdzenia teorii są wywiedlne — jako sądy dowiedlne — przy pomocy ciągu dowodowego z innych aksjomatów teorii. Zatem postulował B. Bolzano, aby do wykładu teorii matematycznej wprowadzić jakieś rozumowanie stwierdzające niezależność każdego aksjomatu teorii od zbioru wszystkich pozostałych aksjomatów. A więc w istocie chodziło mu o to, aby wykład każdej teorii matematycznej poprzedziło stwierdzenie niezależności aksjomatyki.

Warto w tym miejscu przypomnieć, że już od starożytności zdawano sobie doskonale sprawę z tego, że aksjomaty powinny być od siebie niezależne. Owa świadomość ujawniła się w trakcie zażartych dyskusji na temat statusu „piątego postulatu" Euklidesa. W tej dyskusji wziął też udział B. Bolzano, twierdząc, że postulat ten jest wywiedlny z pozostałych aksjomatów geometrii euklidesowej i dlatego należy go usunąć ze zbioru aksjomatów[46]. Jednak czym innym jest konkretna próba stwierdzenia niezależności (czy też zależności) aksjomatów geometrii, a czym innym generalny wymóg, aby odnośnie do każdej teorii matematycznej wprowadzić obowiązek jakiegoś — jeszcze raz trzeba podkreślić, że B. Bolzano nie uściślił, jakiego — ustalenia niezależności aksjomatyki. Wydaje się, że sformułowanie takiego postulatu świadczy o genialności autora i umiejętności wyznaczenia kierunków dalszych badań nad własnościami teorii matematycznych. Oczywiście, brak stosownych narzędzi logicznych uniemożliwiał zrealizowanie sformułowanego przez praskiego filozofa wymogu na początku dziewiętnastego wieku. Jednak ideę B. Bolzano podjęto — zapewne nieświadomie, ze względu na to, że przemyślenia praskiego filozofa były do niedawna zasadniczo nie znane — w ramach badań nad teoriami nauk formalnych w dwudziestym wieku.

[46]Por. B. Bolzano, *Betrachtungen ueber einige Gegenstaende der Elementargeometrie*, Prag 1804.

Druga uwaga odnośnie do przedstawionego wcześniej rozumowania B. Bolzano dotyczy pewnej jego niekonsekwencji. Mianowicie rozpatrywał on wyłącznie aksjomaty o postaci „*A* jest *B*", czyli aksjomaty będące według jego własnej terminologii sądami koniecznościowymi. Z drugiej strony twierdził on, że teorie matematyczne powinny posiadać przynajmniej jeden aksjomat będący sądem modalnym. Dlatego zawężenie przeprowadzonego rozumowania do sądów koniecznościowych wydaje się istotną niekonsekwencją praskiego myśliciela.

Po trzecie wreszcie, należy jeszcze raz nawiązać do twierdzenia B. Bolzano, że wszystkie sądy będące aksjomatami, czyli sądami niedowiedlnymi, posiadają jako orzeczenie i predykat wyłącznie pojęcia proste (pierwotne, niedefiniowalne). Oprócz pojęć pierwotnych aksjomaty są poza tym zbudowane ze stałych logicznych: funktora „jest" lub funktora modalnego. Ten pogląd B. Bolzano podtrzymywany jest również współcześnie[47]. I dziś aksjomaty powinny być budowane wyłącznie z pojęć pierwotnych oraz stałych logicznych. A zatem i w kwestii budowy aksjomatów antycypował praski filozof przekonania akceptowane również i dzisiaj.

Swoje uwagi dotyczące aksjomatów kończy B. Bolzano przedstawieniem krótkiego argumentu stwierdzającego istnienie aksjomatów specyficznych, właściwych dla matematyki. Przypomniał on, że wcześniej pokazał przykłady istnienia specyficznie matematycznych pojęć prostych (pierwotnych, niedefiniowalnych). Skoro istnieją takie pojęcia, to można, posługując się nimi, budować sądy. Istnieją zatem sądy specyficznie matematyczne, które mają jako podmiot i predykat właściwe dla matematyki pojęcia proste (pierwotne, niedefiniowalne). A zatem, zgodnie z przyjmowanym przez B. Bolzano twierdzeniem, istnieją aksjomaty typowo matematyczne[48].

---

[47]Dodatkowo mogą jeszcze występować w aksjomatyce pojęcia używane w teoriach, które zakłada się, budując daną teorię.

[48]„Hat das Bisherige seine Richtigkeit, so laest sich jetzo die Frage beantworten „ob auch die Mathematik ihre Grundsaetze habe?" Wenn naehmlich alle mathematische Begriffe erklaerbare Begriffe waeren, so koennte es auch keine Grundsaetze in den mathematischen Disciplinen geben. Da es aber einfache Begriffe gibt welche der Mathematik eigenthuemlich zukommen so muß man allerdings auch wirkliche

W zbiorze aksjomatów matematycznych wyróżnił praski filozof podzbiór postulatów. To takie aksjomaty matematyki, które są sądami modalnymi, czyli — wedle jego terminologii — sądami możliwościowymi (*Moeglichkeitsurtheile*). Już wcześniej starał się on uzasadnić, że przynajmniej jeden taki aksjomat, czyli postulat, musi istnieć. Wynikało to stąd, ze przyjmował on istnienie twierdzeń matematycznych będących sądami modalnymi. Aby takie twierdzenia otrzymać w teorii matematycznej, przy pomocy przyjmowanej przez niego w istocie sylogistyki zdań modalnych Arystotelesa, trzeba było przyjąć istnienie przynajmniej jednego postulatu matematyki, czyli aksjomatu będącego sądem modalnym[49].

W tym miejscu wypada sformułować jeszcze kilka uwag dotyczących logiki stosowanej według B. Bolzano w matematyce. Zdawał on sobie sprawę z tego — jak to już stwierdzono wcześniej — że pojęcie dowodu wymaga odniesienia do reguł dowodzenia (reguł dedukcyjnych). Zgodnie ze stanem logiki sobie współczesnej, twierdził on, że do reguł dowodowych należy zaliczyć wszystkie twierdzenia nieco zmodyfikowanej sylogistyki zdań asertorycznych Arystotelesa. Dzisiaj powiedziano by, że B. Bolzano postulował zaliczenie do logiki, którą posługuje się matematyka, pewnego fragmentu klasycznego rachunku predykatów, który w całości został stworzony dopiero przez G. Fregego. Przyjęcie istnienia sądów możliwościowych (modalnych) w matematyce zmusiło praskiego filozofa w konsekwencji do zaliczenia do reguł dowodowych matematyki sylogistyki zdań modalnych Arystotelesa. Ujawniono też, że *implicite* do reguł dowodowych zaliczał on niektóre tezy klasycznego rachunku zdań. To stanowi-

---

Grundsaetze in ihr anerkennen; und das Gebiet derselben erstreckt sich so weit, als die bloß einfachen Begriffe reichen; wo diese aufhoeren, und die Erklaerungen ihren Anfang nehmen, da hoeren auch die Grundsaetze auf, und es fangen die Lehrsaetze an", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 95–96.

[49]„Als eine besondere Art von Grundsaetzen pflegen die Mathematiker noch die Postulate anzufuehren, unter welchen sie solche Grundsaetze verstehen, welche die Moeglichkeit eines gewissen Gegenstandes behaupten. Nach Par. 16. gibt es und muß es Postulate (unerweisliche Moeglichkeitsurtheile) geben", B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, s. 96–97.

sko B. Bolzano, odnośnie do akceptowanej w matematyce logiki, jest zasadniczo odmienne od stanowiska reprezentowanego współcześnie. Owa odmienność jest spowodowana dwiema przyczynami: rozwojem logiki oraz odmiennym statusem zdań akceptowanych na gruncie matematyki. Dopiero po śmierci praskiego filozofa zbudowano klasyczny rachunek predykatów i odkryto ponownie znany stoikom klasyczny rachunek zdań. Od czasów fregowskich twierdzi się, że matematyce wystarczą reguły dowodowe oparte na klasycznym rachunku predykatów pierwszego rzędu, który nabudowany jest na klasycznym rachunku zdań. W tym sensie logika stosowana w matematyce współczesnej jest „bogatsza" od przyjmowanej przez B. Bolzano[50]. Z drugiej strony, akceptuje się we współczesnej matematyce jedynie sądy asertoryczne i nie stosuje się sądów modalnych. Dlatego nie jest konieczny dla wykazywania twierdzeń matematyki jakikolwiek fragment logiki modalnej, wystarcza klasyczny rachunek predykatów. I w tym znaczeniu logika konieczna do zbudowania teorii matematycznych jest „uboższa" od proponowanej przez praskiego matematyka[51].

Należy podsumować główne wątki Bolzanowskiej metodologii matematyki. W części dotyczącej pojęć pierwotnych dostrzeżono kilka twierdzeń, które istotnie upodabniają jego koncepcję do współczesnej metodologii matematyki. Po pierwsze, twierdzi on, że każda teoria matematyczna musi posługiwać się pojęciami prostymi (pierwotnymi). Po wtóre, na początku wykładu należy podać pełną listę pojęć pro-

[50]Wydaje się, że należy poddać szczegółowym badaniom logicznym matematyczne teksty B. Bolzano. To on właśnie jako pierwszy, w roku 1817, jeszcze przed A. Cauchym, podał definicję granicy funkcji i ciągłości funkcji, które uważa się za poprawne. We współczesnym zapisie tych definicji stosuje się kwantyfikatory. Być może w swym sformułowaniu wspomnianych pojęć B. Bolzano zastosował już *implicite* „język kwantyfikatorów", za którego twórcę uchodzi G. Frege.

[51]Porównano w tym miejscu środki dowodowe matematyki Bolzanowskiej i tej matematyki współczesnej, którą można by nazwać klasyczną. Na początku dwudziestego wieku w szkole intuicjonistów zakwestionowano zasady logiki stosowane w matematyce. W konsekwencji powstał pewien rodzaj logiki nieklasycznej, nazywanej intuicjonistyczną, którą wbrew założeniom twórców zaksjomatyzował A. Heyting. Zgodnie z założeniami filozoficznymi, reprezentowanymi przez przedstawicieli szkoły intuicjonistycznej, ten właśnie typ logiki należy stosować w matematyce.

stych (pierwotnych). Dalej zauważa on, że pojęć prostych (pierwotnych) nie powinno się i nie da się definiować w sposób klasyczny (*Erklaerung*). Wreszcie twierdzi, że znaczenie nazw pojęć pierwotnych wyznacza zbiór zdań, wprowadzony na początku teorii, w których te nazwy występują. Jest on jakby „definicją uwikłaną" pojęć pierwotnych. Trzeba jednak zaznaczyć, że nie wiadomo, czy według B. Bolzano ową „definicję uwikłaną" pojęć pierwotnych stanowi aksjomatyka, czy jakiś inny zbiór zdań. Poza tym matematyk nie miał możliwości wyboru we wprowadzaniu pojęć pierwotnych do swej teorii, zbiór pojęć pierwotnych był raz na zawsze ustalony w obiektywnie istniejącym porządku pojęć.

W części dotyczącej aksjomatów B. Bolzano odrzucił tradycyjną arystotelesowsko–kartezjańską koncepcję, według której aksjomatami są zdania jasne, oczywiste. Jego zdaniem, aksjomaty to sądy obiektywnie niedowiedlne. Był on przekonany, że dla każdej dyscypliny matematycznej można podać aksjomatykę, co było bardzo mocnym twierdzeniem w czasach, kiedy funkcjonowała w zasadzie tylko aksjomatyka geometrii. Silnie podkreślał, by na początku wykładu każdej teorii matematycznej podać pełną listę aksjomatów. Odmiennie niż to czyni się współcześnie, twierdził praski filozof, że dla danej dyscypliny matematycznej istnieje wyłącznie jedna aksjomatyka. Było to związane z jego przekonaniem o istnieniu jednego, obiektywnego „królestwa prawdy", uporządkowanego zbioru obiektywnych sądów prawdziwych, które były „odkrywane" przez matematyków. W trakcie przeprowadzanych analiz pokazano, że B. Bolzano był przekonany o zupełności teorii matematycznych. Postulował on też — w bliżej przez siebie nieokreślony sposób — wykazywanie niezależności aksjomatyk. Był przekonany, że aksjomatami są te, i tylko te, sądy matematyki, które posiadały zarówno jako podmiot, jak i jako predykat pojęcia pierwotne (proste, niedefiniowalne). W konsekwencji zmuszony był przyjąć, że aksjomaty budowane są wyłącznie z pojęć pierwotnych oraz stałych logicznych, co zgodne jest z twierdzeniem współczesnej metodologii matematyki. B. Bolzano był również świadom konieczności precyzyjnego określenia zbioru reguł dowodowych stosowanych w matematyce.

Generalnie można stwierdzić, iż praski matematyk w wielu elementach refleksji metodologicznej wyprzedził znacznie swoją epokę i sygnalizował pewne rozwiązania, które w metodologii matematyki zadomowiły się na dobre dopiero sto lat po napisaniu przez niego analizowanej książki.

Warto też zwrócić uwagę, że w tekście B. Bolzano znajdują się stwierdzenia, które każą traktować prezentowaną przez niego metodę nie tylko jako metodę matematyki, ale wszystkich dyscyplin naukowych, w tym także filozofii. Zatem w istocie postulował praski myśliciel uprawianie filozofii tak jak nauki ścisłej, z wyraźnymi listami pojęć pierwotnych i aksjomatów, z jasno określonymi metodami dowodowymi, z precyzyjnymi definicjami wprowadzanych do filozofii terminów. Trzeba zdać sobie sprawę z faktu, że swe postulaty „ścisłej filozofii" stawiał B. Bolzano wtedy, gdy na niemieckim obszarze językowym panowała filozofia idealistyczna G.F. Hegla, o – delikatnie mówiąc — „mętnej" metodzie. Być może była to reakcja na rozluźnienie rygorów metody stosowanej w owej dobie w filozofii. W każdym razie postulat „ścisłej filozofii" pozwala słusznie widzieć w B. Bolzano prekursora filozofii analitycznej.

Bibliografia

B. Bolzano, *Betrachtungen ueber einige Gegenstaende der Elementargeometrie*, Prag 1804.

B. Bolzano, *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik*, Prag 1810, [w:] *Acta historiae rerum naturalium nec non technicarum. Czechoslovak Studies in the History of Science*, Prague 1981, Special Issue 12 [reprint].

B. Bolzano, *Rein analyticher Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewaehren, wenigstens eine Reelle Wurzel der Gleichung liege*, Prag 1817.

SUMMARY

Bernard Bolzano's conception of the mathematical method

The matter under discussion is the methodology of mathematics presented by Bernard Bolzano (1782–1848) in his early pamphlet *Beytraege zu einer begruendeteren Darstellung der Mathematik* (Prague 1810). Bolzano built, with success, the classical axiomatic–deductive method of nonspacial and atemporal concepts (*Begriffe*). He abandoned the traditional custom of formulating primitive concepts of deductive theories. Bolzano opposed the traditional conviction that the axioms of mathematical theories should be clear and distinct sentences. He divided the domain of nonspacial and atemporal sentences into the subdomains of objectively provable and objectively nonprovable sentences. In his view, the axioms of mathematical (deductive) theories are only the objectively nonprovable sentences, and each of the objective nonprovable sentences is an axiom of a certain deductive theory. He postulated, at the time when only the (Euclidean) geometry was axiomatized, the axiomatization of all mathematical theories.