Note sur l'ordre de IF : Hintikka a-t-il véritablement découvert la véritable logique élémentaire ? [1]

Philippe de Rouilhan
CNRS, Université Paris I, ENS

Résumé : La logique IF est-elle la *véritable* logique élémentaire, comme le prétend Hintikka ? Mais, d'abord, est-elle véritablement *élémentaire*, c'est-à-dire du *premier* ordre ? Il est tentant de répondre *non*, en arguant du pouvoir extraordinaire de cette logique par rapport à la logique du premier ordre ordinaire. Mais, pour impressionnante que puisse être l'objection, elle n'atteint pas son but. Il faut une réfutation directe, fondée sur l'analyse de la notion d'ordre.

Abstract: Is IF logic the *true* elementary logic, as Hintikka claims ? Moreover is it truly *elementary*, viz. *first*-order, in the first place ? One is tempted to answer *no*, because of the extraordinary power of this logic in comparison with ordinary first-order logic. However impressive this objection may be, it misses its aim. A direct refutation is needed, grounded on an analysis of the notion of order.

[1]This paper was presented at the International Symposium - PILM 2002 on *Philosophical Insights into Logic and Mathematics : The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax* September 30 - October 4, 2002, Nancy, France

Philosophia Scientiæ, 9 (1), 2005, 141–150.

1 Introduction

L'ambition du dernier livre de Hintikka, *The Principles of Mathematics Revisited* (1996), n'est pas moins révolutionnaire que celle qu'affichent deux articles à peu près contemporains et aux titres formidables : “A Revolution in Logic ?” (avec Gabriel Sandu, 1996) et “A Revolution in the Foundation of Mathematics ?” (1997). (1) S'agissant de *logique*, l'idée est de contester à la fameuse “logique élémentaire”- ou “logique du premier ordre”- ordinaire la signification indue que lui prêtent la plupart des logiciens, et à promouvoir à sa place une logique plus puissante, capable d'exprimer l'indépendance d'une quantification existentielle ou d'une disjonction à l'égard d'une ou plusieurs quantifications universelles antécédentes (“independence friendly logic”[IF]), et présentée par Hintikka comme la véritable “logique élémentaire”, la seule véritablement digne de ce nom. (2) S'agissant de *fondements des mathématiques*, l'idée est de revendiquer pour IF, ou plus précisément pour une certaine extension de IF (“IF étendue”), le privilège indûment accordé à la théorie des ensembles en tant que cadre dans lequel devrait s'inscrire le développement “modèle-théorétique” des théories mathématiques. (3) S'agissant de *métaphysique*, enfin, puisque l'ambition de Hintikka va jusque-là, on ferait ainsi l'économie des ensembles et autres entités d'ordre supérieur, et l'on réaliserait, d'une certaine manière, le vieil idéal nominaliste.

La réalisation de ce programme grandiose se heurte à plusieurs difficultés que Hintikka semble avoir sous-estimées, touchant en particulier au point (2) et à la possibilité d' “exorciser la malédiction de Tarski” (selon les mots de Hintikka), comme l'ont montré par ailleurs Serge Bozon et l'auteur de ces lignes dans leur contribution commune au volume Schilpp (à paraître) consacré à l'œuvre de Hintikka. Je poserai maintenant une question relative au point (1) : la logique IF est-elle la *véritable* logique élémentaire, comme le prétend Hintikka, par opposition à la logique du premier ordre ordinaire, qui n'en constituerait qu'une partie ? Et, d'abord, est-elle véritablement *élémentaire*, c'est-à-dire du *premier* ordre ? Ma réponse sera *non*. Si bien que, même si, *per impossibile*, le point (2) était réalisé, le point (3) ne le serait pas pour autant. Mais pourquoi *non* ? Il est tentant d'arguer du pouvoir extraordinaire de la logique IF par rapport à la logique du premier ordre ordinaire, comme par exemple celui de décider de l'hypothèse du continu (au sens où il existe un énoncé logique IF dont la validité équivaut à la vérité [resp. à la fausseté] de HC). Mais, pour impressionnante que puisse être l'objection, on pourrait aussi bien y trouver matière à s'émerveiller candidement, avec Hintikka, des prodiges de la nouvelle logique élémentaire. La réfutation rigoureuse du caractère élémentaire de la logique IF doit passer par un argument direct, fondé sur l'analyse de la notion d'ordre. Le but de cette note est de fournir un tel argument.

2 La logique IF semble être du premier ordre

2.1. Rappelons qu'un langage-IF s'obtient à partir d'un langage du premier ordre ordinaire par adjonction d'un nouveau signe logique, le *slash* ('/'), destiné à exprimer l'indépendance d'un quantificateur existentiel ou d'une disjonction à l'égard d'une ou plusieurs quantifications universelles antécédentes. La logique IF interprète ce nouveau genre de langage en reprenant les idées de la *game-theoretical semantics* (GTS) déjà bien éprouvées dans le cas des langages du premier ordre ordinaire. En particulier, *un énoncé s est vrai (resp. faux) dans une certaine structure si, et seulement si, il existe une stratégie gagnante pour Moi – le vérificateur initial – (resp. la Nature – le falsificateur initial –) dans le jeu G(s) joué sur cette structure.*

Les jeux sémantiques liés aux énoncés des langages *slash-free* étaient des jeux à information parfaite ; la présence du slash conduit simplement à considérer maintenant des jeux à information imparfaite. Une conséquence remarquable est l'apparition de *truth-value gaps*, d'énoncés qui ne sont ni vrais ni faux. La pleine compréhension de ces énoncés supposerait en toute rigueur non seulement la connaissance de leurs conditions de vérité, mais aussi celle de leurs conditions de fausseté. Cependant, Hintikka s'intéresse essentiellement aux conditions de vérité, et la seule "définition [Tarski aurait précisé : *partielle*] de la vérité" pour un énoncé s suffit à déterminer ce qu'il appelle la *"traduction"* s^* de cet énoncé dans le langage du second ordre ordinaire correspondant.

Exemple paradigmatique, en représentant naturellement les stratégies par des fonctions de Skolem : les conditions de vérité (resp. fausseté) de l'énoncé (1), avec F atomique, sont déterminées par l'énoncé $(1)^*$ [resp. $(1)^\#$].

$$(\forall x)(\forall z)(\exists y/\forall z)(\exists u/\forall x)F[x,y,z,u] \tag{1}$$

$$(\exists f)(\exists g)(\forall x)(\forall z)F[x,f(x),z,g(z)] \tag*{$(1)^*$}$$

$$(\exists x)(\exists z)(\forall y)(\forall u) \sim F[x,y,z,u] \tag*{$(1)^\#$}$$

2.2. *Un langage-IF ne contient pas d'autres variables que celles du langage du premier ordre ordinaire correspondant (obtenu à partir de lui en effaçant le slash)* : des variables d'une seule catégorie, parcourant un certain domaine d'objets (ou d' "individus" comme on dit souvent). A s'en tenir aux apparences, à la surface des choses, la tentation est grande de dire avec Hintikka qu'un tel langage est lui aussi "du premier ordre".

Certes, à côté des propriétés importantes qu'elle partage avec la logique du premier ordre ordinaire (comme la compacité [du moins en un certain sens faible], le théorème de Löwenheim-Skolem descendant, le théorème de séparation, ou le théorème de Beth), la logique IF possède certaines propriétés qui la rapprochent plutôt de la logique du second ordre (comme l'incomplétude, ou la puissance expressive). Hintikka lui-même a pu parler à son sujet d'ordre 2-ϵ. Dans la version publiée en 1997, dans le volume 2 des *Selected Papers*, d'un mémoire datant de 1991 sur le concept de vérité, "Defining Truth, the Whole Truth, and Nothing but the Truth", il écrivait ceci (p. 82) :

> [O]n peut montrer que [la logique IF étendue] a le même pouvoir expressif que la logique du second ordre tout entière [. . .]. Cela signifie qu'elle a un pouvoir expressif extrêmement grand, car il est bien connu que vous pouvez, par exemple, exprimer la plupart des grands problèmes mathématiques non résolus (l'hypothèse du continu, la conjecture de Souslin, la plupart des grands problèmes non résolus de théorie des nombres, etc.) comme questions concernant la validité de certains énoncés du second ordre. / Le sens dans lequel la logique IF étendue est aussi riche que la logique du second ordre tout entière est le suivant : pour tout énoncé S de la logique du second ordre, vous pouvez trouver un énoncé S* de la logique du premier ordre IF étendue qui est satisfaisable si et seulement si S l'est ; et de même pour la validité. / Cela peut être montré dans la ligne de Hintikka (1955) [article intitulé "Reductions in the Theory of Types"].

Et ce qu'il affirmait ainsi à propos de la logique IF étendue, il aurait pu le dire aussi bien de la logique IF elle-même, s'il s'en était tenu, dans l'avant-dernière phrase, à la validité, à l'exclusion de la satisfaisabilité (voir la contribution de Serge Bozon à ce colloque).

Il n'empêche : la nouvelle logique semble bien mériter le qualificatif d' "élémentaire", *puisqu'elle ne reconnaît pas d'autres variables que les variables du premier ordre de l'ancienne logique.*

2.3. *Excursus* sur la vérité dans la logique IF. Parmi les propriétés remarquables de la logique IF, il y en a une qui est extraordinaire, et qui sépare la logique IF non seulement de la logique du premier ordre ordinaire, mais encore de toutes les logiques par ailleurs bien connues :

un langage-IF contenant sa propre syntaxe élémentaire (et un foncteur *couple* [*paire ordonnée*]) contient non seulement un *prédicat* de vérité pour lui-même (comme on sait, depuis Kripke [1975] notamment, que certains langages le font), mais encore une *définition adéquate* d'un tel prédicat.

Hintikka a cru pouvoir affirmer, dans la foulée, qu'un tel langage contenait sa propre théorie des modèles, et qu'ainsi, la "malédiction" de Tarski était enfin "exorcisée". Dans l'article déjà mentionné, cosigné avec Serge Bozon, nous montrons qu'il n'en est rien, et que cette limitation de la logique IF limite en retour la signification de la propriété extraordinaire en question. Un langage-IF du genre considéré contient bien une définition adéquate d'un prédicat de vérité pour lui-même, mais il ne contient pas l'expression du critère attendu d'adéquation pour cette définition. Notre conclusion est qu'en matière de vérité même, *"le fantôme de la hiérarchie de Tarski"* (pour parler comme Kripke) *est encore et toujours avec nous.*

3 La logique IF est en réalité du second ordre

3.1. On trouve dans la littérature logique plusieurs notions d'ordre, qui ne sont pas toujours suffisamment distinguées. A la lecture attentive du Post-scriptum au *Wahrheitsbegriff* de Tarski, par exemple, on peut en discerner au moins trois. Selon la notion en jeu, le langage de ZFC, par exemple, sera du premier ordre ou d'ordre indéterminé ou encore d'ordre le premier cardinal inaccessible (toutes précisions dans mon article de 1998). La notion d'ordre la plus courante, celle qui s'est imposée dans les manuels, est encore différente. Elle relève de l'ainsi-nommée théorie des modèles, c'est-à-dire de la sémantique de la référence pour des langages-objets d'un certain genre classique considérés dans le cadre d'une théorie des ensembles du genre ZF. Elle est liée aux valeurs possibles des variables de ces langages-objets.

Dans un langage du *premier ordre* à n sortes de variables ($n \geq 1$), les variables de la sorte i ($1 \leq i \leq n$) prennent leurs valeurs dans un ensemble non vide ("domaine d'individus") D_i. Dans un langage du *second ordre* (ou, plus généralement, d'*ordre supérieur*) apparaissent en outre des variables d'un nouveau genre, parcourant tel ou tel échelon approprié de l'échelle d'ensembles ayant pour base le multi-domaine $\langle D_1, \cdots D_n \rangle$.

Un langage du second ordre ne doit pas être confondu avec un langage du premier ordre à plusieurs sortes de variables. Ce qui fait la différence, c'est que les variables du second ordre doivent impérativement parcourir l'échelon qui leur correspond, et le parcourir *en totalité*. Cette exigence est cruciale pour la notion de conséquence logique propre à la logique du second ordre.

3.2. A l'intérieur d'un langage du second ordre, on distingue naturellement les formules du premier ordre de celles du second ordre. Certains énoncés du second ordre sont réductibles au premier ordre au sens où ils sont logiquement équivalents à un énoncé du premier ordre relativement au même multi-domaine de base (la notion d'équivalence logique ici en jeu étant évidemment la notion propre au second ordre). Certains énoncés du second ordre, au contraire, sont *irréductibles*.

L'irréductibilité en question suppose *le multi-domaine de base inchangé*. Elle n'exclut pas que l'énoncé du second ordre considéré soit cependant logiquement équivalent à un énoncé du premier ordre *relativement à un autre multi-domaine de base*. Pas plus qu'elle n'exclut qu'il puisse être traduit dans le métalangage ensembliste, donc, *en un certain sens non modèle-théorétique auquel il a été fait allusion plus haut*, en un énoncé "du premier ordre".

Une méthode classique de preuve d'irréductibilité (mise en œuvre notamment par David Kaplan à propos du fameux énoncé de Geach, "Some critics admire only one another") consiste à réinterpréter l'énoncé en question comme un énoncé arithmétique du second ordre et à montrer qu'il sépare le modèle standard des modèles non-standards, ce qu'on sait qu'aucun énoncé arithmétique du premier ordre n'est capable de faire.

3.3. Lorsque Hintikka affirme que les langages-IF sont des langages du premier ordre, et en tire les conséquences métaphysiques que j'ai dites, il n'a rien d'autre en tête que ceci, dans la droite ligne de la notion d'ordre qui vient d'être rappelée : les langages-IF n'ont pas d'autres variables que des variables du premier ordre, ils n'impliquent aucun engagement ontologique supplémentaire par rapport aux langages du premier ordre ordinaire correspondants. A s'en tenir aux apparences "grammaticales", Hintikka a raison, mais, une fois de plus, les apparences "grammaticales" sont *logiquement* trompeuses. C'est la thèse que je veux soutenir dans ce qui suit.

L'ordre d'un langage dépend de son *interprétation* - soit dit au sens le plus général et le plus informel, et qui ne se confond nullement avec celui de *traduction*. Maintenant, en quoi devrait consister l'interprétation d'un langage, quel qu'il soit ? Réponse : elle devrait consister en une certaine forme de détermination systématique de ce que les énoncés de ce langage veulent dire. Davidson affirme plus précisément qu'elle devrait consister en la détermination des conditions de vérité de ses énoncés sous la forme d'une "théorie récursive de la vérité à la Tarski". Dans la sémantique GTS, la référence à Tarski est supprimée, les conditions de vérité doivent être données en termes de théorie des jeux. Mais l'essentiel demeure, à savoir la détermination récursive d'un schème d'*interpétation* et corrélativement celle d'un schème de *traduction* du langage-objet dans le métalangage, associant à tout énoncé du langage-objet en question l'expression métalinguistique *canonique*, lisible à travers le schème d'interprétation, de ses conditions de vérité.

C'est ainsi que procède Hintikka pour nous faire comprendre ce que veulent dire les énoncés d'un langage-IF : il nous donne, sur un mode systématique, plus précisément récursif, les conditions de vérité des énoncés de ce langage en termes de théorie des jeux – et donc aussi, par surcroît, le schème de traduction canoniquement associé à ce schème d'interprétation. Voir, par exemple, l'énoncé (1) et sa traduction $(1)^*$. Maintenant, il suffit de regarder l'énoncé $(1)^*$ pour voir qu'il est du second ordre. Quant à l'énoncé (1), qui ne veut rien dire d'autre que sa traduction $(1)^*$, il est donc lui-même aussi du second ordre (relativement au domaine de base parcouru par ses variables manifestes, explicites). Ainsi, outre ses énoncés du premier ordre, un langage-IF contient (et contient seulement) des énoncés du second ordre. C'est, en *ce* sens, un langage du second ordre, et la logique IF, une logique du second ordre.

(Dans tout cela, la prise en compte des conditions de fausseté, négligées par Hintikka, ne ferait que compliquer les choses, et aggraver le cas de la thèse d'élémentarité.)

4 Objections et réponses

4.1-Objection 1. *L'argument avancé en faveur de la thèse que la logique IF est en réalité du second ordre prouverait que la logique du premier ordre ordinaire elle-même est en réalité du second ordre, ce qui est absurde.*

Réponse. Non, ce n'est pas absurde. Je suis prêt à soutenir que l'ordre d'un langage du premier ordre ordinaire réinterprété selon GTS est en effet le second, l'ordre 2, et que cela n'a rien d'absurde. L'ordre d'un langage est relatif à son interprétation, il varie selon cette interprétation, il peut bien être le premier selon une interprétation (à la Tarski [ou, plus exactement, à la Carnap-Davidson], par exemple) et le second selon une autre (GTS). Et l'équivalence démontrée par ailleurs par Hintikka de ces deux interprétations pour les langages du premier ordre ordinaire n'y change rien. C'est que la notion d'ordre en cause n'est pas invariante pour ce genre d'équivalence.

4.2.-Objection 2. *Mais l'ambition de Hintikka n'était pas de proposer quelque réinterprétation deviante des langages du premier ordre ordinaire déjà normalement interprétés, elle était plutôt de jeter une lumière nouvelle sur notre ancienne façon de comprendre les langages en question.*

Réponse. C'est vrai, mais, justement, je crois que la sémantique GTS, pour intéressante qu'elle soit, ne réalise pas *cette* ambition. Pour ce qui est des langages du premier ordre ordinaire, en fait, Hintikka s'est contenté de faire valoir une nouvelle interprétation contre l'ancienne. Et ce qui le montre, c'est précisément le fait que le schème de traduction canoniquement associé au nouveau schème d'interprétation GTS ne soit pas le schème de traduction identique ("homophonique", ou mieux "homographique"). Certes, sous réserve de l'axiome du choix, les deux traductions sont équivalentes, mais cela ne suffit pas.

4.3-*Excursus* sur GTS et AC. Je saisirai ici l'occasion de l'objection 2 pour épingler certaines déclarations fracassantes que fait Hintikka à propos de l'axiome de choix dans son dernier livre. Considérons l'énoncé du premier ordre ordinaire, avec F atomique :

$$(\forall x)(\exists y)F[x,y] \tag{2}$$

La traduction canonique de cet énoncé selon GTS est l'énoncé du second ordre :

$$(\exists f)(\forall x)F[x,f(x)] \tag*{(2)*}$$

L'équivalence logique de ces deux énoncés, remarque Hintikka, est une forme de l'axiome du choix. Mais comme le second ne fait qu'expliciter le sens du premier selon GTS, c'est-à-dire, d'après l'inventeur de la nouvelle sémantique, le sens dans lequel nous l'avons en vérité toujours compris, l'axiome du choix, ainsi présupposé dans la compréhension d'énoncés aussi simples que (2), se voit crédité d'une évidence aussi radicale qu'inattendue, qui n'aurait rien à envier à celle de '$2+2=4$'. Grâce à GTS, le rêve de Hilbert serait devenu réalité. (Cf. *op. cit.*, p. 40.)

Réfutation. De deux choses l'une. *Ou bien* l'énoncé (2) est compris, de même que l'énoncé $(2)^*$, de façon ordinaire, disons dans la ligne de la sémantique tarskienne (ou, plus exactement, carnapienne-davidsonienne), et alors l'équivalence des deux est bien une forme de l'axiome du choix, mais celui-ci n'a pas plus d'évidence qu'il n'en avait avant l'arrivée de GTS sur le marché. *Ou bien* l'énoncé (2) est entendu selon GTS, c'est-à-dire comme voulant dire la même chose que l'énoncé $(2)^*$, entendu, lui, de façon ordinaire, et alors l'équivalence des deux est bien triviale, mais ce *n*'est *plus* une forme de l'axiome du choix, et, derechef, celui-ci n'a pas plus d'évidence qu'il n'en avait avant l'arrivée de GTS sur le marché.

4.4-Objection 3. *Pour en revenir à la logique IF, la thèse de son caractère non élémentaire est essentiellement liée au choix de la traduction* canonique *des énoncés d'un langage-IF dans un langage ordinaire* (slash-free) *du second ordre, par opposition à d'autres traductions compatibles avec le même schème d'interprétation. Elle est aussi fragile que les justifications de ce choix.*

Réponse. Non, la thèse ne dépend pas du privilège accordé à la traduction canonique. Pour certains énoncés, la traduction canonique du second ordre sera réductible au premier ordre, mais pour d'autres, elle ne le sera pas, et, dans ce cas, *toute* traduction résultant d'un schème de traduction compatible avec le schème d'interprétation sera aussi du second ordre. Le langage-IF, contenant des énoncés du second ordre, devra être reconnu comme étant du second ordre.

4.5-Objection 4. *Une fois un langage (du premier ordre ordinaire ou -IF) compris comme il doit l'être selon GTS, ne pourrait-on imaginer, pour reprendre la métaphore wittgensteinienne, de "repousser l'échelle" de la traduction pour se mettre à parler ce langage comme le feraient des indigènes, des "natifs" ? Le langage en question n'apparaîtrait-il pas alors, comme le veut Hintikka, comme un langage du premier ordre ?*

Réponse. Il ne faut pas jouer sur les mots. S'il était possible de parler un tel langage comme une langue maternelle, peut-être une certaine notion d'"ordre", définie dans ce langage même ou dans un autre langage du même genre (car on se souvient des difficultés évoquées au paragraphe 2.3), s'imposerait-elle, pour laquelle le langage en question, indépendamment de ses particularités, serait "du premier ordre". Peut-être même une certaine notion d' "engagement ontologique" se dégagerait-elle naturellement, dans les mêmes conditions, pour laquelle lesdits langages "du premier ordre" n'impliqueraient aucun "engagement" au delà des valeurs de leurs variables d'individus. Peut-être, finalement, un certain "nominalisme" pourrait-il prétendre à être autre chose qu'un vœu pieux. Mais c'est sur Hintikka que pèse ici la charge de la preuve. Et notez la réserve irréductible des guillemets pour de grands mots à entendre en un sens inédit, bien différent de celui auquel nous sommes habitués. Sur la route du vieil idéal *nominaliste*, même entendu au sens faible, relatif, où le champion de l'esprit modèle-théorétique l'entend, serions-nous plus avancés pour autant ?

Références

Bozon, Serge

2002 Vices et vertus d'une déclaration d'indépendance, ou la logique IF peut-elle prendre soin d'elle-même ?, exposé au colloque, *Philosophical Insights into Logic and Mathematics : The History and Outcome of Alternative Semantics and Syntax*, Nancy, 2002.

Hintikka, Jaakko

1955 Reductions in the Theory of Types, *Acta Philosophica Fennica*, **8** (1955) : 61–115.

1991 Defining Truth, the Whole Truth and Nothing but the Truth, *Reports from the Department of Philosophy of the University of Helsinki*, **2**, reprinted in revised form in Hintikka (1997), 48–103.

1996 *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge : Cambridge University Press, 1996.

1997a A Revolution in the Foundations of Mathematics ?, *Synthese*, **111** (1997) : 155–170.

1997b *Selected Papers, vol. 2, Lingua Universalis vs. Calculus Ratiocinator : an Ultimate Presupposition of Twentieth-Century Philosophy*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London : Kluwer, 1997.

Hintikka, Jaakko, et Gabriel Sandu

1996 A Revolution in Logic ?, *Nordic Journal of Philosophical Logic*, **1** (1996) : 169-183.

Kripke, Saul

1975 Outline of a Theory of Truth, *The Journal of Philosophy*, **72** (1975) : 690–716.

Rouilhan, Philippe de

1998 Tarski et l'universalité de la logique. Remarques sur le post-scriptum au "Wahrheitsbegriff", in *Le formalisme en question. Le tournant des années trente* (dir. F. Nef et D. Vernant), Paris : Librairie Vrin, 1998, 85–102.

Rouilhan, Philippe de, et Serge Bozon

2005 The Truth of IF : Has Hintikka Really Exorcized Tarski's Curse ?, *The Philosophy of Jaakko Hintikka* Hahn L. E. & P. A. Schilpp (eds.), 2005, à paraître.