Conceptus, XVIII (1984), Nr.44/42-49

# POPPERS ZWEI DEFINITIONSVARIANTEN VON 'FALSIFIZIERBAR' EINE LOGISCHE NOTIZ ZU EINER KLASSISCHEN STELLE AUS DER "LOGIK DER FORSCHUNG"

von Georg J.W. Dorn, Salzburg

*Zusammenfassung*

Popper definiert auf Seite 53 seiner *Logik der Forschung* die Ausdrücke 'empirische Theorie' bzw. 'falsifizierbare Theorie' in Form zweier scheinbar sinngleicher Varianten, von denen die kürzere allgemein verbreitet ist: Eine Theorie ist falsifizierbar, wenn (und nur wenn) die Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten nicht leer ist. Es wird nachgewiesen, daß beide Varianten zusammen zu Widersprüchen führen, da jede Theorie, die inkonsistent ist, bzw. jede Hypothese, die unerfüllbar ist, nach der einen Variante nicht falsifizierbar, nach der anderen jedoch falsifizierbar ist. Für diesen Nachweis wird unterstellt, daß die betrachteten Theorien bzw. Hypothesen in einer prädikatenlogischen Sprache mit normaler Semantik formuliert sind. Zum Schluß werden im Licht dieses Ergebnisses einige Stellen aus Poppers Untersuchung der Falsifizierbarkeit im I., IV. und VI. Kapitel seiner *Logik der Forschung* betrachtet.

* * *

*Summary*

In paragraph 21 of his *Logic of Scientific Discovery*, Popper characterizes with the help of two seemingly synonymous definitions the falsifiability of a theory as a logical relation between the theory itself and its basic statements. It is shown that his definitions lead to contradictions, and this result is applied to the problem of the falsifiability of contradictions, to the difference between falsifiable and empirical statements, and to the demarcation criterion.

* * * * *

## 1 *Poppers Definitionsvarianten des Begriffs der Falsifizierbarkeit*

Im Paragraphen 21 seiner *Logik der Forschung*, betitelt: "Logische Untersuchung der Falsifizierbarkeit", versucht Popper, die Falsifizierbarkeit einer Theorie als eine logische Beziehung zwischen ihr und den Basissätzen zu kennzeichnen. Er legt fest (1982, 53):

> Eine Theorie heißt "empirisch" bzw. "falsifizierbar", wenn sie die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze eindeutig in zwei nichtleere Teilklassen zerlegt: in die Klasse jener, mit denen sie in Widerspruch steht, die sie "verbietet" - wir

nennen sie die Klasse der *Falsifikationsmöglichkeiten* der Theorie - und die Klasse jener, mit denen sie nicht in Widerspruch steht, die sie "erlaubt". Oder kürzer: Eine Theorie ist falsifizierbar, wenn die Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten nicht leer ist.

Es sei nun Poppers logische Untersuchung der Falsifizierbarkeit dadurch weitergetrieben, daß aus seinen beiden im obigen Zitat gegebenen Definitionsvarianten von 'falsifizierbar' einige logische Konsequenzen gezogen werden.

## 2 *Zu Poppers erster Variante der Definition von 'falsifizierbar'*

Eine Reformulierung der ersten Variante unter Auslassung erläuternden Beiwerks und Betonung des definitorischen Charakters der Variante lautet:

Reformulierung 1:

Eine Theorie ist definitionsgemäß falsifizierbar gdw sie die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze eindeutig in zwei nichtleere Teilklassen zerlegt: in die Klasse jener, mit denen sie in Widerspruch steht, und die Klasse jener, mit denen sie nicht in Widerspruch steht.

Falsifizierbarkeit ist hier von Theorien ausgesagt. Das Wort 'Theorie' wird von Popper zur Bezeichnung gewisser Allsätze, nämlich Hypothesen und Gesetzen, verwendet sowie zur Bezeichnung von theoretischen Systemen, das sind bezüglich der Folgerungsrelation abgeschlossene Satzmengen, in denen Hypothesen und Gesetze auftreten (vgl. das III. Kapitel "Theorien" in der *Logik der Forschung*). Es genügt festzuhalten, daß es sich das eine Mal um (deskriptive) Sätze, das andere Mal um (unendliche) Satzmengen handelt. Der einfachere Fall einer Theorie als eines Satzes sei zuerst behandelt, dann der Fall einer Theorie als einer Satzmenge.

### 2.1 *Zur Falsifizierbarkeit eines Satzes nach Variante 1*

Reformulierung 2:

Ein Satz ist definitionsgemäß falsifizierbar gdw S die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze eindeutig in zwei nichtleere Teilklassen zerlegt: in die Klasse jener, mit denen S in Widerspruch steht, und die Klasse jener, mit denen S nicht im Widerspruch steht.

Als unbedenklich vorausgesetzt, daß jeder Basissatz ein Satz ist und daß jede nichtleere Teilklasse von Basissätzen mindestens einen Basissatz umfaßt, folgt logisch aus Reformulierung 2:

Behauptung 1:

Für alle S: Wenn S falsifizierbar ist, dann gibt es mindestens einen Satz S', so daß gilt: S widerspricht S' nicht.

Zur genaueren Charakterisierung der Beziehung des Einander-Widersprechens wird nun allerdings ein Wechsel von den natürlichsprachigen Sätzen zu ihren künstlichsprachigen Repräsentanten, den Formeln, nötig.

Es seien A und B Formeln eines klassischen prädikatenlogischen Systems PL und $\varphi$ sei eine Interpretation von PL. Dann gelte wie üblich:

Definition 1:

A ist unerfüllbar gdw für alle $\varphi$ gilt: $\varphi(A) = F$.

Definition 2:

A widerspricht$_1$ B gdw $(A \wedge B)$ unerfüllbar ist.

Behauptung 1 kann nun reformuliert werden für Formeln aus PL als

Behauptung 2:

Für alle A: Wenn A falsifizierbar ist, dann gibt es mindestens ein B, so daß gilt: A widerspricht$_1$ B nicht.

Nun gilt[1]

Behauptung 3:

Für alle A: Wenn A unerfüllbar ist, dann gibt es kein einziges B, so daß gilt: A widerspricht$_1$ B nicht.[2]

so daß aus den Behauptungen 3 und 2 logisch folgt

Behauptung 4

Für alle A: Wenn A unerfüllbar ist, dann ist A nicht falsifizierbar.

Nach Variante 1 der Popperschen Definition der Falsifizierbarkeit gibt es also keine einzige Formel, die sowohl unerfüllbar als auch falsifizierbar ist. Ähnliches wird sich für inkonsistente Formelmengen herausstellen.

---

[1] Begründung: Angenommen, es gelte die Negation von Behauptung 3. Dann gibt es ein A, das unerfüllbar ist und ein B, dem A nicht widerspricht. Es sei D ein solches A und E ein solches B. Dann: $\varphi(D) = F$ für jedes $\varphi$, aber $\varphi(D \wedge E) = F$ nicht für jedes $\varphi$; also $\varphi(D \wedge E) = W$ für mindestens ein $\varphi$; daher gibt es ein $\varphi$, so daß $\varphi(D) = W$ und $\varphi(E) = W$; folglich $\varphi(D) = W$ für ein $\varphi$; somit $\varphi(D) = F$ nicht für jedes $\varphi$; Widerspruch.

[2] Dem tut keinen Abbruch, daß ebenfalls gilt: Jede unerfüllbare Formel impliziert logisch jede Formel. Denn die intuitiv vielleicht als plausibel erscheinende Behauptung, jede von einer Formel A logisch implizierte Formel widerspreche A nicht (sei mit A vereinbar), gilt nur, wenn A erfüllbar ist; ist A unerfüllbar, dann wird B von A logisch impliziert, ohne mit A vereinbar zu sein.

Reformulierung 3:

Eine Satzmenge T ist definitionsgemäß falsifizierbar gdw T die Klasse aller überhaupt möglichen Basissätze eindeutig in zwei nichtleere Teilklassen zerlegt: in die Klasse jener, mit denen T in Widerspruch steht, und die Klasse jener, mit denen T nicht in Widerspruch steht.

Wieder als unbedenklich vorausgesetzt, daß jeder Basissatz ein Satz ist und daß jede nichtleere Teilklasse von Basissätzen mindestens einen Basissatz umfaßt, folgt logisch aus Reformulierung 3:

Behauptung 5:

Für alle T: Wenn T falsifizierbar ist, dann gibt es mindestens einen Satz S, so daß gilt: T widerspricht S nicht.

Es sei T eine in PL formulierte Theorie. Dann gelte wie üblich:

Definition 3:

A ist eine These von T gdw A in T herleitbar ist.

Definition 4:

T ist inkonsistent gdw es zu jeder Interpretation $\varphi$ von T mindestens eine Formel A aus der Sprache von T gibt, so daß gilt:
A ist eine These von T und $\varphi(A) = F$.

Definition 5:

T widerspricht$_2$ A gdw $T \cup \{A\}$ inkonsistent ist.

Behauptung 5 läßt sich nun reformulieren für in PL formulierte Theorien als

Behauptung 6:

Für alle T: Wenn T falsifizierbar ist, dann gibt es mindestens ein A, so daß gilt: T widerspricht$_2$ A nicht.

Nun gilt[3]

Behauptung 7:

Für alle T: Wenn T inkonsistent ist, dann gibt es kein einziges A, so daß gilt: T widerspricht$_2$ A nicht.

so daß aus den Behauptungen 7 und 6 logisch folgt

Behauptung 8:

Für alle T: Wenn T inkonsistent ist, dann ist T nicht falsifizierbar.

---

[3] Begründung: Ist T selbst schon inkonsistent, dann auch jede Obermenge von T, insbesondere $T \cup \{A\}$.

### *3 Zu Poppers zweiter Variante der Definition von 'falsifizierbar'*

Eine Reformulierung der zweiten Variante unter Vermeidung des Terminus 'Falsifikationsmöglichkeiten' und Betonung des definitorischen Charakters der Variante lautet:

Reformulierung 4:

Eine Theorie ist definitionsgemäß falsifizierbar gdw die Klasse der Basissätze, mit denen sie in Widerspruch steht, nicht leer ist.

Aus Reformulierung 4 folgt logisch unter Berücksichtigung der üblichen Definition für 'ist leer':

Behauptung 9:

Wenn eine Theorie mindestens einem Basissatz widerspricht, dann ist sie falsifizierbar.

Es sei unter 'Theorie' wieder zunächst eine Formel A aus PL, dann eine in PL formulierte Theorie T verstanden. Es ergeben sich zu Behauptung 9 die Analoga

Behauptung 10:

Für alle A: Wenn A mindestens einer Formel B, die eine Basisformel ist, widerspricht$_1$, dann ist A falsifizierbar.

und

Behauptung 11:

Für alle T: Wenn T mindestens einer Formel B, die eine Basisformel ist, widerspricht$_2$, dann ist T falsifizierbar.

Da nun gilt (vgl. Behauptung 3), daß jede unerfüllbare Formel jeder Formel widerspricht$_1$ und da als selbstverständlich angenommen werden kann, daß jede Basisformel eine Formel ist, gilt auch, daß jede unerfüllbare Formel jeder Basisformel widerspricht$_1$ und damit auch mindestens einer, so daß aus diesem und der Behauptung 10 logisch folgt

Behauptung 12:

Für alle A: Wenn A unerfüllbar ist, dann ist A falsifizierbar.

Da weiters gilt (vgl. Behauptung 7), daß jede inkonsistente Theorie jeder Formel widerspricht$_2$, also auch mindestens einer Basisformel, folgt aus diesem und der Behauptung 11 logisch die

Behauptung 13:

Für alle T: Wenn T inkonsistent ist, dann ist T falsifizierbar.

Und da es schließlich unerfüllbare Formeln und inkonsistente Theorien gibt, folgt aus Behauptung 12 die Negation von Behauptung 4 und aus Behauptung 13 die Negation von Behauptung 8: Die beiden Varianten von Poppers Definition der Falsifizierbarkeit haben einander widersprechende Konsequenzen, sie definieren zwei verschiedene Begriffe.

## 4 Anwendungen dieses Ergebnisses

### 4.1 Falsifizierbarkeit von Tautologien und Kontradiktionen

Es gilt also, daß nicht jede Formel, die falsifizierbar gemäß Variante 2 ist, auch falsifizierbar gemäß Variante 1 ist; tatsächlich gibt es unendlich viele Formeln - die unerfüllbaren -, die zwar gemäß Variante 2, aber nicht gemäß Variante 1 falsifizierbar sind.

Popper selbst scheint sich, worauf die folgenden Bemerkungen hinweisen, in der *Logik der Forschung* nicht bewußt geworden zu sein, daß die Variante 2 die Variante 1 nicht logisch impliziert. Sein 'falsifizierbar' wird meistens wohl als 'falsifizierbar gemäß Variante 2' zu lesen sein. So findet man 5 Seiten, nachdem er die Ausdrücke 'empirisch' bzw. 'falsifizierbar' definitorisch eingeführt hat, folgende Stelle aus seiner logischen Untersuchung der Falsifizierbarkeit (Popper 1982, 58):

> Eine Bemerkung über die Kontradiktion: Während Tautologien, die universellen Es-gibt-Sätze und andere nichtfalsifizierbare Sätze sozusagen "zu wenig" über die Klasse der möglichen Basissätze behaupten, behauptet die Kontradiktion "zu viel". Da aus jeder Kontradiktion jeder beliebige Satz, also auch jeder Basissatz folgt, kann man sagen, daß die Klasse ihrer Falsifikationsmöglichkeiten mit der aller überhaupt möglichen Basissätze identisch ist; sie wird durch jeden beliebigen Basissatz falsifiziert. (Man könnte sagen, daß sich hier ein Vorzug unserer Betrachtung der "Falsifikationsmöglichkeiten" vor einer Betrachtung der "Verifikationsmöglichkeiten" zeigt: wäre es möglich, einen Satz durch Verifikation seiner Folgesätze zu verifizieren oder auch nur wahrscheinlich zu machen, so würde die Kontradiktion durch Anerkennung jedes beliebigen Basissatzes erhärtet, verifiziert oder wahrscheinlich werden.)

Die Bemerkung zur Nichtfalsifizierbarkeit der Tautologien ist gemäß beiden Varianten zutreffend. Keine Tautologie (genauer: allgemeingültige Formel[4]) widerspricht$_1$ irgendeinem Basissatz, da jeder Satz, der einer Tautologie widerspricht$_1$, unerfüllbar ist und alle Basissätze kraft Definition erfüllbar sind. So ist die Klasse der einer Tautologie widersprechenden Basissätze leer und insofern behaupten Tautologien über die Klasse der möglichen Basissätze "zu wenig". Was im nicht geklammerten Teil dieses Zitates über die Falsifizierbarkeit von Kontradiktionen ausgesagt wird, ist richtig, wenn Falsifizierbarkeit gemäß Variante 2, falsch, wenn Falsifizierbarkeit gemäß Variante 1 gemeint ist. Falsch insofern, als Poppers Argumentation den Satz nahelegt: Kontradiktionen sind (im höchsten Ausmaß) falsifizierbar. Richtig stellt Popper fest, daß eine Kontradiktion jedem Basissatz

---

[4] Im weiteren wird einfachheitshalber statt 'Formel' Poppers 'Satz', statt 'allgemeingültige Formel' Poppers 'Tautologie' und statt 'unerfüllbare Formel' Poppers 'Kontradiktion' gebraucht.

widerspricht. Aber damit ist die Menge der Basissätze, denen eine Kontradiktion nicht widerspricht, leer und somit nach Variante 1 eine Kontradiktion nicht falsifizierbar (geschweige denn im größten Ausmaß).

Jener im Zitat angesprochene Vorzug der Betrachtung der Falsifikationsmöglichkeiten vor einer Betrachtung der Verifikationsmöglichkeiten zeigt sich am Beispiel der Kontradiktionen hingegen nur dann, wenn man - wie Popper - zwar hervorhebt, daß aus einer Kontradiktion logisch jeder Basissatz folgt, aber nicht ausdrücklich hinzufügt, daß jeder Basissatz der Kontradiktion, aus der er folgt, widerspricht$_1$, mit ihr unvereinbar ist. Denn selbst der extremste Verifikationist würde verlangen, daß Sätze, von denen der eine den anderen "verifiziert", zumindest miteinander vereinbar sind. Er würde somit Popper keineswegs zustimmen, daß jeder wahre Basissatz jede Kontradiktion "verifiziert". Logische Implikation garantiert ja Vereinbarkeit nicht, sonst wäre die Klasse der Falsifikationsmöglichkeiten einer Kontradiktion identisch mit der leeren Klasse.

### 4.2 *Falsifizierbare und empirische Sätze*

Wenig später schreibt Popper (1982, 59), daß empirische Sätze neben der Bedingung der Widerspruchslosigkeit noch der Bedingung der Falsifizierbarkeit genügen müßten. Auch hier kann nur Falsifizierbarkeit gemäß Variante 2 gemeint sein, denn Sätze, die gemäß Variante 1 falsifizierbar sind, sind stets auch widerspruchslos (erfüllbar). Obwohl 'empirisch' als synonym mit 'falsifizierbar' auf Seite 53 der *Logik der Forschung* definitorisch eingeführt worden ist, erfolgt auf Seite 80 schließlich die endgültige terminologische Unterscheidung zwischen empirischen und falsifizierbaren Sätzen sinngemäß so[5]: Ein Satz ist empirisch gdw die Klasse der Basissätze, denen er widerspricht, weder leer noch identisch mit der Klasse aller Basissätze ist. Ein Satz ist falsifizierbar gdw die Klasse der Basissätze, denen er widerspricht, nicht leer ist.[6] Offensichtlich gilt: die empirischen Sätze sind genau die gemäß Variante 1 falsifizierbaren Sätze; die falsifizierbaren Sätze sind genau die gemäß Variante 2 falsifizierbaren Sätze. - Mit der Variante 1 war also schon erreicht, was später mit der Definition des empirischen Satzes angestrebt wurde.

### 4.3 *Falsifizierbarkeit als Abgrenzungskriterium*

Variante 2 hat sich jedoch gegen Variante 1 allgemein durchgesetzt, und dies führt bezüglich des Abgrenzungskriteriums zu merkwürdigen (wenn auch gewöhnlich übersehenen) Konsequenzen. Das Abgrenzungskriterium läßt sich in Anlehnung an Popper (1982, 15) folgendermaßen formulieren: Eine Theorie ist genau dann empirisch-wissenschaftlich, wenn sie falsifizierbar ist. Da 'falsifizierbar' üblicherweise im Sinne von 'falsifizierbar gemäß

---

[5] In Wirklichkeit geht Popper (1982, 80-81) über den Weg der Normierung des Falsifizierbarkeitsgrades eines Satzes vor.

[6] Statt 'Satz' könnte auch jedes Mal 'Theorie' stehen.

Variante 2' verstanden wird und da jede inkonsistente Theorie falsifizierbar in diesem zweiten Sinne ist, ergibt sich logisch aus dem Abgrenzungskriterium, daß jede inkonsistente Theorie empirisch-wissenschaftlich ist, daß also z.B. Freges Arithmetik eine empirisch-wissenschaftliche Theorie ist. Moral: Wer heute Wissenschaftstheorie lehrt und Falsifizierbarkeit wie üblich als Falsifizierbarkeit gemäß Variante 2 beibringt, sollte über eine gute Antwort auf die Frage nachdenken, wie es zu rechtfertigen ist, daß dann jede Theorie, sofern sie nur inkonsistent ist, als empirisch-wissenschaftliche imponiert.

## *Literatur*

Karl Raimund Popper: *Logik der Forschung*, Tübingen (Mohr) 1982.