scientiæ studia, São Paulo, v. 3, n. 4, p. 665-75, 2005

Albert Einstein

Geometria e experiência[2]

(1921)

Uma razão pela qual a matemática desfruta de uma estima especial dentre todas as outras ciências está em que suas proposições são absolutamente certas e inquestionáveis, enquanto as proposições de todas as outras ciências estão, em certa medida, sujeitas a discussão e sob risco constante de serem derrubadas por novos fatos recém-descobertos. Apesar disso, o pesquisador em outro campo da ciência não precisa invejar o matemático se as proposições da matemática referem-se aos objetos de nossa imaginação, e não aos objetos da realidade. Pois não nos deveria causar surpresa que pessoas diferentes, quando já estão de acordo quanto às proposições fundamentais (axiomas), bem como aos métodos pelos quais deduzem-se outras proposições a partir delas, devam chegar às mesmas conclusões lógicas. Porém há outra razão para o alto conceito de que goza a matemática, no sentido de que é a matemática que confere às ciências naturais um certo grau de certeza, o qual não seria atingido sem a matemática.

A esta altura coloca-se um enigma que, ao longo dos tempos, tem preocupado as mentes inquisitivas. Como pode ser que a matemática – que é, afinal de contas, um produto do pensamento humano independente da experiência – seja tão admiravelmente adequada aos objetos da realidade? Será então a razão humana capaz de perscrutar as propriedades das coisas reais sem a experiência, apenas valendo-se do pensamento?

Em minha opinião, a resposta a essa questão é, em síntese, a seguinte: na medida em que as proposições da matemática se referem à realidade, elas não são certas; na medida em que são certas, elas não se referem à realidade. Parece-me que uma completa clareza com relação a esta situação somente passou a ser de domínio público por meio daquela vertente da matemática que é conhecida pelo nome de "axiomática". O progresso alcançado pela axiomática consiste em ter separado claramente aquilo que é lógico-formal daquilo que constitui o seu conteúdo objetivo ou intuitivo; de acordo com a axiomática, somente o lógico-formal constitui o assunto da matemática, a qual não se preocupa com os conteúdos intuitivos ou de outro tipo associados com o lógico-formal.

Consideremos, por um momento, sob este ponto de vista um axioma qualquer da geometria, por exemplo, o seguinte: por dois pontos no espaço sempre passa uma e apenas uma linha reta. Como se deve interpretar este axioma no sentido antigo e no sentido mais moderno?

A interpretação antiga: todos sabem o que é uma linha reta e o que é um ponto. Não cabe ao matemático decidir se esse conhecimento provém de uma capacidade da mente humana, ou da experiência, ou de alguma cooperação entre as duas, ou ainda de alguma outra fonte. O matemático deixa essa questão para o filósofo. Estando baseado nesse conhecimento, que precede toda a matemática, o axioma acima é auto-evidente, como todos os outros axiomas, ou seja, é a expressão de uma parte desse conhecimento *a priori*.

A interpretação mais moderna: a geometria trata de objetos que são denotados pelas palavras "linha reta", "ponto" etc. Não se pressupõe nenhum conhecimento ou intuição desses objetos, mas tão-somente a validade dos axiomas, tais como o enunciado acima, os quais devem ser tomados num sentido puramente formal, i.e. como despidos de todo conteúdo de intuição ou de experiência. Esses axiomas são livres criações da mente humana. Todas as outras proposições da geometria são inferências lógicas a partir dos axiomas (que devem ser tomados apenas no sentido nominalista). Os axiomas *definem* os objetos dos quais trata a geometria. Assim Schlick, em seu livro de epistemologia,[3] caracterizou muito apropriadamente os axiomas como "definições implícitas".

Essa maneira de ver os axiomas, defendida pela axiomática moderna, purifica a matemática de todos os elementos estranhos a ela, dispersando assim a obscuridade mística que antes envolvia as bases da matemática. Porém uma exposição assim expurgada da matemática também torna evidente que a matemática, enquanto tal, não pode predicar nada acerca dos objetos da nossa intuição ou dos objetos reais. Na geometria axiomática as palavras "ponto", "linha reta" etc., figuram apenas como esquemas conceituais vazios. Aquilo que lhes dá conteúdo não é relevante para a matemática.

Por outro lado, no entanto, é certo que a matemática em geral, e a geometria em particular, devem a sua existência à necessidade que se sentiu de aprender algo acerca do comportamento dos objetos reais. A própria palavra "geometria", que, como se sabe, significa "medida da terra", prova isso. Pois a medida da terra tem a ver com as possibilidades de dispor certos objetos naturais uns com relação aos outros, a saber, com as partes da terra, trenas, réguas etc. É claro que o sistema de conceitos da geometria axiomática, por si só, não pode fazer quaisquer afirmações a respeito do comportamento de objetos reais desse tipo, os quais denominamos "corpos praticamente rígidos". Para ser capaz de fazer tais afirmações, a geometria precisa ser despida de seu caráter meramente lógico-formal, ao coordenar os objetos reais da experiência com os esquemas conceituais vazios da geometria axiomática. Para fazer isso, temos apenas que acrescentar a seguinte proposição: os corpos sólidos estão relacionados, no que diz respeito a sua possível disposição, do mesmo modo que os corpos da geometria euclidiana em três dimensões. Então as proposições de Euclides contêm afirmações acerca do comportamento dos corpos praticamente rígidos.

Complementada desse modo, a geometria é, evidentemente, uma ciência natural; podemos, na verdade, considerá-la como o ramo mais antigo da física. Suas afirmações baseiam-se essencialmente na indução a partir da experiência e não apenas nas inferências lógicas. Chamaremos essa geometria complementada de "geometria prática", e, na seqüência, distingui-la-emos da "geometria puramente axiomática". A questão de se a geometria prática do Universo é ou não euclidiana possui um significado claro, e a sua resposta somente pode ser fornecida pela experiência. Todas as medidas de comprimento na física constituem geometria prática nesse sentido, o mesmo valendo para as medições geodéticas e astronômicas de distâncias, quando se utiliza a lei empírica de que a luz se propaga em linha reta – com efeito, em uma linha reta no sentido da geometria prática.

Atribuo uma importância especial a essa concepção de geometria que acabei de expor, pois sem ela eu teria sido incapaz de formular a teoria da relatividade. Sem ela, a seguinte reflexão teria sido impossível: num sistema de referência em rotação relativamente a um sistema inercial, as leis concernentes à disposição de corpos rígidos não correspondem às regras da geometria euclidiana, por causa da contração de Lorentz; assim, se admitimos os sistemas não-inerciais como estando em pé de igualdade, devemos abandonar a geometria euclidiana. Sem a interpretação acima, o passo decisivo na transição para as equações com covariância geral certamente não teria sido dado. Se rejeitarmos a relação entre o corpo da geometria axiomática euclidiana e o corpo praticamente rígido da realidade,[4] chegaremos rapidamente à seguinte concepção, que foi defendida pelo pensador perspicaz e profundo que é H. Poincaré: a geometria euclidiana se distingue de todas as outras geometrias axiomáticas concebíveis por sua simplicidade. Ora, uma vez que a geometria axiomática, por si mesma, não contém afirmações relativas à realidade que pode ser experimentada, mas somente pode fazê-lo em combinação com leis físicas, deve ser possível e razoável preservar a geometria euclidiana, qualquer que seja a natureza da realidade. Pois, caso se manifestem contradições entre a teoria e a experiência, podemos[5] decidir modificar as leis físicas em vez de modificar a geometria axiomática euclidiana. Se rejeitarmos a relação entre o corpo praticamente rígido e a geometria, não nos libertaremos facilmente da convenção de que a geometria euclidiana deve ser preservada como sendo a mais simples.

Por que a equivalência entre o corpo praticamente rígido e o corpo da geometria – equivalência que se impõe tão prontamente – é rejeitada por Poincaré e por outros pesquisadores? Simplesmente porque, à luz de um exame mais detalhado, os corpos sólidos reais da natureza não são rígidos, pois o seu comportamento geométrico, isto é, as suas possibilidades de disposição relativa, dependem da temperatura, de forças externas etc. Assim, a relação original e imediata entre a geometria e a realidade física parece ter sido destruída, e nos sentimos compelidos rumo à seguinte concepção mais geral, que representa o ponto de vista de Poincaré. A geometria (G) não predica nada acerca do comportamento das coisas reais, mas somente a geometria juntamente com a totalidade das leis físicas (P) pode fazê-lo. Empregando símbolos, podemos dizer que somente a soma (G) + (P) está sujeita à verificação experimental. Assim, (G) pode ser escolhida arbitrariamente, bem como partes de (P); todas essas leis são convenções. Tudo que é necessário para evitar contradições é escolher o restante de (P) de tal modo que (G), juntamente com a totalidade de (P), estejam de acordo com a experiência. Vistas dessa maneira, a geometria axiomática e aquela parte da lei natural que recebeu um estatuto convencional apresentam-se como epistemologicamente equivalentes.

Em minha opinião, Poincaré está certo, *sub specie aeternitatis*.[6] A idéia de régua de medição e a idéia de um relógio coordenado com ela, na teoria da relatividade, não possuem correspondente exato no mundo real. Também é claro que o corpo sólido e o relógio não desempenham, no edifício conceitual da física, o papel de elementos irredutíveis, mas sim de estruturas compostas, que não devem desempenhar nenhum papel independente na física teórica. Porém, é minha convicção que, no estágio atual do desenvolvimento da física teórica, esses conceitos ainda devem ser empregados como conceitos independentes; pois ainda estamos longe de possuir um conhecimento tão seguro dos princípios teóricos da estrutura atômica que nos permita construir teoricamente os corpos sólidos e os relógios a partir de conceitos elementares.

Além do mais, com respeito à objeção de que não existem corpos realmente rígidos na natureza, e que portanto as propriedades predicadas dos corpos rígidos não se aplicam à realidade física – esta objeção não é, de modo algum, tão radical quanto poderia parecer com base em um exame apressado. Pois não é tarefa difícil determinar o estado físico de um corpo de medição de maneira tão precisa que seu comportamento em relação a outros corpos de medição esteja suficientemente livre de ambigüidade para permitir que ele substitua o corpo "rígido". É a corpos de medição desse tipo que devem se referir os enunciados a respeito de corpos rígidos.

Toda a geometria prática se baseia em um princípio que é acessível à experiência, o qual agora procuraremos entender. Suponhamos que foram feitas duas marcas sobre um corpo praticamente rígido. Chamaremos tal par de marcas de "guia".[7] Imaginemos dois corpos praticamente rígidos, cada um com uma guia marcada sobre ele.

Dizemos que essas duas guias são "iguais entre si" se for possível fazer com que as marcas de uma guia coincidam permanentemente com as marcas da outra. Supomos agora que:

Se se constata que duas guias são iguais em uma ocasião, em algum lugar, elas serão iguais sempre e em qualquer lugar.

Não somente a geometria prática de Euclides, mas também a sua generalização mais próxima, a geometria prática de Riemann, e com ela a teoria da relatividade geral, baseiam-se nessa suposição. Mencionarei apenas uma das razões experimentais que autorizam tal suposição. O fenômeno da propagação da luz no espaço vazio atribui uma guia, a saber, a trajetória apropriada da luz, a cada intervalo de tempo local, e vice-versa. Segue-se daí que a suposição acima a respeito das guias também deve valer para intervalos de tempo cronométricos[8] na teoria da relatividade. Conseqüentemente, ela pode ser formulada da seguinte maneira: se dois relógios ideais estão funcionando no mesmo ritmo em algum instante em algum lugar (quando estão na proximidade imediata um do outro), eles irão sempre funcionar no mesmo ritmo, não importa onde e quando eles forem novamente comparados entre si num mesmo local. Se essa lei não fosse válida para os relógios naturais, as freqüências características de átomos separados de um mesmo elemento químico não estariam em concordância tão exata como mostra a experiência. A existência de linhas espectrais nítidas é um prova experimental convincente do princípio acima mencionado da geometria prática. Em última análise, esta é a razão que nos permite falar de forma significativa a respeito de uma métrica riemanniana do contínuo espaço-temporal quadridimensional.

De acordo com o ponto de vista defendido aqui, a questão de se esse contínuo possui uma estrutura euclidiana, riemanniana ou qualquer outra é uma questão de física propriamente dita, que deve ser respondida pela experiência, e não uma questão de convenção a ser escolhida com base na mera conveniência. A geometria de Riemann valerá caso as leis acerca da disposição dos corpos praticamente rígidos se aproximem cada vez mais das leis da geometria euclidiana à medida que se considerarem regiões do espaço-tempo com dimensões cada vez menores.

É verdade que a interpretação física da geometria aqui proposta vem abaixo quando é aplicada imediatamente a espaços de ordem de grandeza submolecular. Não obstante, mesmo nas questões relativas à constituição das partículas elementares, ela conserva parte do seu significado. Pois mesmo quando a questão é descrever as partículas elétricas elementares que constituem a matéria, ainda se pode tentar atribuir significado físico aos conceitos de campo que foram fisicamente definidos com o propósito de descrever o comportamento geométrico de corpos que são grandes em comparação com a molécula. Somente o êxito pode decidir quanto à justificação dessa tentativa de postular uma realidade física para os princípios fundamentais da geometria de Riemann fora do domínio das suas definições físicas. Pode acontecer de essa extrapolação não ser mais autorizada do que a extrapolação do conceito de temperatura às partes de um corpo de ordem de grandeza molecular.

Parece menos problemático estender os conceitos da geometria prática a espaços de ordem de grandeza cósmica. Pode-se objetar, é claro, que uma construção composta de réguas rígidas se afasta tanto mais da rigidez ideal quanto maior for a sua extensão espacial. Porém não creio que se possa atribuir um significado fundamental a essa objeção. Portanto, a questão de se o universo é ou não espacialmente finito parece-me ser uma questão perfeitamente significativa, no sentido da geometria prática. Nem mesmo considero impossível que essa questão venha a ser respondida em breve pela astronomia. Recordemos o que a teoria da relatividade geral nos ensina a esse respeito. Ela nos coloca duas possibilidades:

1. O universo é espacialmente infinito. Isso somente é possível se a densidade espacial média de matéria no universo tende a zero, i.e. se a razão entre a massa total das estrelas e o volume de espaço no qual elas estão espalhadas se aproxima de zero à medida que se considera volumes cada vez maiores.

2. O universo é espacialmente finito. Esse deve ser o caso se existir no universo uma densidade média de matéria ponderável diferente de zero. Quanto menor essa densidade média, maior o volume do universo.

Não posso deixar de mencionar um argumento teórico que se pode aduzir em favor da hipótese de um universo finito. A teoria da relatividade geral ensina que a inércia de um dado corpo aumenta à medida que houver mais massas ponderáveis nas suas proximidades; parece então bastante natural reduzir a inércia total de um corpo à interação entre ele e os outros corpos no universo – como, de fato, desde o tempo de Newton se tem reduzido completamente a gravidade à interação entre corpos. Pode-se deduzir das equações da teoria da relatividade geral que essa redução total da inércia à interação entre massas – tal como requerido, por exemplo, por E. Mach – somente é possível se o universo for espacialmente finito.

Muitos físicos e astrônomos não se deixam impressionar por esse argumento. Em última análise, somente a experiência pode decidir qual das duas possibilidades se efetiva na natureza. Como a experiência pode fornecer uma resposta? À primeira vista, pode parecer possível determinar a densidade média de matéria observando-se aquela parte do universo que nos é acessível à observação. Tal esperança é ilusória. A distribuição das estrelas visíveis é extremamente irregular, de modo que não podemos, de modo algum, colocar a densidade média de matéria estelar como sendo igual, digamos, à densidade média da galáxia. De qualquer modo, por maior que seja o espaço examinado, não poderíamos ter certeza de que não há mais estrelas para além daquele espaço. Assim, parece impossível estimar a densidade média.

Há, porém, um outro caminho, que me parece mais exeqüível, embora também não esteja livre de grandes dificuldades. Se perguntarmos pelas discrepâncias entre as conseqüências da teoria da relatividade geral acessíveis à experiência e as conseqüências da teoria newtoniana, encontraremos, em primeiro lugar, uma discrepância que se manifesta nas proximidades da massa gravitante,[9] e que foi confirmada no caso do planeta Mercúrio. Porém, se o universo for espacialmente finito, há uma segunda discrepância com a teoria newtoniana, que pode ser expressa deste modo (na linguagem da teoria newtoniana): o campo gravitacional é tal como se ele fosse produzido não apenas pelas massas ponderáveis, mas também por uma densidade de massa de sinal negativo, uniformemente distribuída pelo espaço. Uma vez que essa densidade de massa fictícia teria que ser extremamente pequena, ela somente seria perceptível em sistemas gravitantes muito extensos.

Supondo que conheçamos, digamos, a distribuição estatística e as massas das estrelas na galáxia, então podemos calcular, pela lei de Newton, o campo gravitacional e as velocidades médias que as estrelas devem possuir, de modo que a galáxia não entre em colapso sob a atração mútua de suas estrelas, mas mantenha sua extensão atual. Ora, se as velocidades efetivas das estrelas (que podem ser medidas) fossem menores do que as velocidades calculadas, teríamos uma prova de que as atrações efetivas, a grandes distâncias, são menores do que previsto pela lei de Newton. A partir de tal discrepância se poderia provar indiretamente que o universo é finito. Seria possível até estimar as suas dimensões espaciais.

Podemos visualizar um universo tridimensional que seja finito porém ilimitado?

A resposta usual a essa pergunta é "não", mas não é a resposta certa. O propósito dos comentários a seguir é mostrar que a resposta deve ser "sim". Desejo mostrar que podemos, sem maiores dificuldades, ilustrar a teoria de um universo finito por meio de uma imagem mental à qual, com alguma prática, iremos logo nos acostumar.

Antes de mais nada, uma observação de caráter epistemológico. Uma teoria físico-geométrica, enquanto tal, é impossível de ser diretamente visualizada, uma vez que é meramente um sistema de conceitos. Porém esses conceitos servem ao propósito de colocar em conexão com a mente uma multiplicidade de experiências sensoriais, reais ou imaginárias. "Visualizar" uma teoria significa, portanto, colocar na mente aquela profusão de experiências sensíveis para as quais a teoria proporciona o arranjo esquemático. No caso presente, devemos nos perguntar como podemos representar aquele comportamento dos corpos sólidos, no que se refere a sua disposição mútua (contato), que corresponde à teoria de um universo finito. Não há, no que tenho a dizer a respeito, nada de realmente novo; porém o sem-número de perguntas que me são encaminhadas prova que a curiosidade daqueles que se interessam por esses assuntos ainda não foi plenamente satisfeita. Será que posso então contar com o perdão dos já iniciados, quanto a já ser sobejamente conhecida uma parte daquilo que vou dizer?

O que queremos expressar quando dizemos que nosso espaço é infinito? Simplesmente o seguinte: que podemos dispor lado a lado qualquer número de corpos de igual tamanho, sem nunca preencher o espaço. Suponha que dispomos de um grande número de caixas cúbicas, todas do mesmo tamanho. De acordo com a geometria euclidiana, podemos colocá-las acima, abaixo e ao lado umas das outras,[10] de modo a preencher uma parte arbitrariamente grande do espaço; porém essa construção nunca iria acabar; poderíamos continuar acrescentando mais e mais cubos sem nunca constatar que não há mais espaço. É isso que queremos expressar quando dizemos que o espaço é infinito. Seria melhor dizer que o espaço é infinito em relação aos corpos praticamente rígidos, supondo que as leis acerca da disposição desses corpos sejam dadas pela geometria euclidiana.

Outro exemplo de contínuo infinito é o plano. Podemos colocar quadrados de cartolina sobre uma superfície plana de modo que cada lado de qualquer quadrado seja adjacente a um lado de outro quadrado. Essa construção nunca termina; sempre podemos continuar colocando quadrados – se as suas leis de disposição corresponderem àquelas das figuras planas da geometria euclidiana. O plano, portanto, é infinito em relação aos quadrados de cartolina. Conseqüentemente, podemos dizer que o plano é um contínuo infinito de duas dimensões, e o espaço um contínuo infinito de três dimensões. Quanto ao número de dimensões, penso que posso supor que se saiba o que isso quer dizer.

Podemos agora passar a um exemplo de contínuo bidimensional que é finito porém ilimitado. Imaginemos a superfície de um grande globo e um grande número de discos de papel, todos do mesmo tamanho. Colocamos um dos discos em qualquer lugar da superfície do globo. Se movermos o disco para qualquer lugar que quisermos, sobre a superfície do globo, não encontraremos no caminho nenhuma fronteira. Dizemos, portanto, que a superfície esférica do globo é um contínuo ilimitado. Além disso, a superfície esférica é um contínuo finito. Pois, se colarmos os discos de papel sobre o globo, de tal modo que nenhum disco se superponha a outro, a superfície do globo acabará ficando tão cheia que não haverá lugar para mais nenhum disco. Isso significa, precisamente, que a superfície do globo é finita em relação aos discos de papel. Além do mais, a superfície esférica é um contínuo não-euclidiano de duas dimensões, isto é, as leis que regem a disposição das figuras rígidas sobre ela não concordam com aquelas do plano euclidiano. Pode-se mostrar isso da seguinte maneira. Tome um disco e cerque-o com mais seis discos em círculo, sendo cada um deles cercado, por sua vez, com seis discos, e assim por diante. Se essa construção for feita numa superfície plana, obteremos um arranjo sem interrupções no qual há seis discos tocando em cada disco,

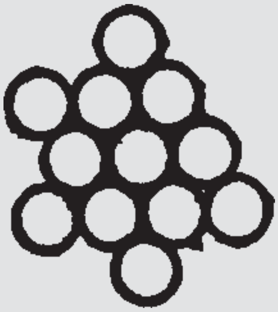

Figura 1

excetuando aqueles que estão na parte de fora. Sobre a superfície esférica, a construção também parece promissora no início, e quanto menor for o raio do disco em relação ao da esfera, mais promissora ela parece. Porém, à medida que a construção avança, fica cada vez mais claro que o arranjo dos discos da maneira indicada não é possível sem interrupção, como deveria ser possível com base na geometria euclidiana do plano. Desse modo, criaturas que não podem sair da superfície esférica, e nem podem espiar da superfície esférica para o espaço tridimensional, podem descobrir, apenas experimentando com discos, que o seu "espaço" bidimensional não é euclidiano, mas esférico.

Com base nos resultados mais recentes da teoria da relatividade, é provável que o nosso espaço tridimensional também seja aproximadamente esférico, isto é, as leis de disposição dos corpos rígidos que estão nele não são dadas pela geometria euclidiana, mas sim, aproximadamente, pela geometria esférica, bastando que consideremos partes suficientemente extensas do espaço. Ora, é neste ponto que a imaginação do leitor hesita. "Ninguém pode imaginar tal coisa", exclama ele, indignado. "Isso pode ser dito, mas não pode ser pensado. Posso imaginar sem problemas uma superfície esférica, mas nada análogo a ela em três dimensões".

Devemos tentar superar mentalmente essa barreira, e o leitor paciente irá ver que essa não é, em absoluto, uma tarefa particularmente difícil. Para esse fim iremos inicialmente dirigir a nossa atenção novamente para a geometria das superfícies esféricas bidimensionais. Na figura seguinte, seja K a superfície esférica, tocada em S por um plano E que, por uma questão de facilidade de exposição, aparece no desenho como uma superfície limitada. Seja L um disco sobre a superfície esférica. Imaginemos agora que no ponto N da superfície esférica, diametralmente oposto a S, existe um ponto luminoso que projeta uma sombra L' do disco L sobre o plano E. Cada ponto da esfera tem sua sombra sobre o plano. Quando se move o disco sobre a esfera K, a sua sombra L'

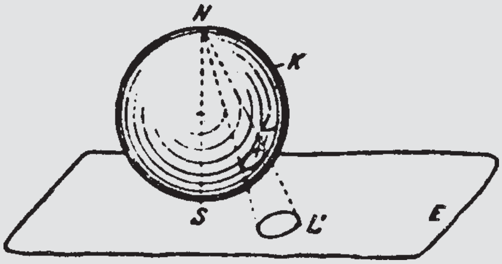

Figura 2

sobre o plano *E* também se move. Quando o disco *L* está em *S*, ele coincide quase exatamente com a sua sombra. Se ele se move para cima pela superfície esférica, afastando-se de *S*, a sombra *L'* do disco sobre o plano também se afasta de *S* ao longo do plano, para fora, ficando cada vez maior. À medida que o disco *L* se aproxima do ponto luminoso *N*, a sombra se afasta para o infinito, e se torna infinitamente grande.

Perguntamos agora: quais são as leis que regem a disposição das sombras *L'* do disco sobre o plano *E*? Evidentemente, são exatamente as mesmas que as leis de disposição dos discos *L* sobre a superfície esférica. Pois, para cada figura original sobre *K*, existe uma figura de sombra correspondente em *E*. Se dois discos em *K* estão em contato, as suas sombras em *E* também estão em contato. A geometria das sombras no plano concorda com a geometria dos discos na superfície. Se chamarmos as sombras dos discos de figuras rígidas, então a geometria esférica será válida no plano *E* em relação a essas figuras rígidas. Em particular, o plano é finito em relação às sombras dos discos, visto que apenas um número finito de sombras pode ser acomodado no plano.

A esta altura alguém dirá: "Isso não faz sentido. As sombras dos discos *não* são figuras rígidas. Temos apenas que caminhar sobre o plano *E* com passadas iguais[11] para nos convencermos de que as sombras aumentam constantemente de tamanho à medida que elas se afastam de *S* sobre o plano, rumo ao infinito". Mas e se a caminhada com passos iguais se comportasse no plano *E* do mesmo modo que as sombras dos discos *L'*? Seria então impossível mostrar que as sombras aumentam de tamanho à medida que se afastam de *S*; nesse caso, tal afirmação não faria mais nenhum sentido. Com efeito, a única afirmação objetiva que pode ser feita acerca das sombras dos discos é a seguinte: que elas estão relacionadas exatamente da mesma maneira que os discos rígidos sobre a superfície esférica, no sentido da geometria euclidiana.

Devemos tratar de ter em mente que nosso enunciado referente ao aumento das sombras dos discos, à medida que elas se afastam de *S* rumo ao infinito, não possui em si mesmo nenhum significado objetivo, na medida em que não formos capazes de comparar as sombras dos discos com corpos rígidos euclidianos que possam ser movimentados ao longo do plano *E*. Com relação às leis de disposição das sombras *L'*, o ponto *S* não é mais privilegiado no plano do que na superfície esférica.

A representação da geometria esférica sobre o plano dada acima é importante para nós na medida em que pode ser facilmente transportada para o caso tridimensional.

Imaginemos um ponto *S* do nosso espaço, e um grande número de pequenas esferas *L'* que podem ser feitas coincidir uma com a outra.[12] Porém essas esferas não devem ser rígidas no sentido da geometria euclidiana; o seu raio deve aumentar (no sentido da geometria euclidiana) quando elas se afastam de *S* rumo ao infinito; e deve aumentar segundo a mesma lei que os raios das sombras dos discos *L'* sobre o plano.

Após termos adquirido uma imagem mental vívida do comportamento geométrico das nossas esferas *L'*, vamos supor que no nosso espaço não há corpos rígidos no sentido da geometria euclidiana, mas somente corpos que têm o comportamento das nossas esferas *L'*. Então teremos uma imagem clara do espaço esférico tridimensional, ou melhor, da geometria esférica tridimensional. Aqui, as nossas esferas devem ser chamadas de esferas "rígidas". O seu aumento de tamanho à medida que elas se afastam de *S* não deve ser detectado por medidas com réguas, tal como no caso das sombras dos discos sobre *E*, pois os padrões de medição se comportam da mesma maneira que as esferas. O espaço é homogêneo, isto é, na vizinhança de qualquer ponto, são possíveis as mesmas configurações esféricas.* Nosso espaço é finito pois, em conseqüência do "crescimento" das esferas, somente um número finito delas pode ser acomodado no espaço.

Desse modo, usando como "muleta"[13] a prática de raciocínio e visualização que a geometria euclidiana nos proporciona, adquirimos uma imagem mental da geometria esférica. Podemos sem dificuldade dotar essas idéias de maior profundidade e vigor efetuando construções imaginárias especiais. Não seria difícil, tampouco, representar de maneira análoga o caso conhecido como geometria elíptica. Meu único objetivo, hoje, foi mostrar que a faculdade humana da visualização não está, de modo algum, fadada a ser derrotada pela geometria não-euclidiana.

Traduzido da versão inglesa por Valter Alnis Bezerra

* Isso pode ser entendido sem cálculos – porém somente no caso bidimensional – se voltarmos mais uma vez ao caso do disco sobre a superfície da esfera. (N. do A.)