O PROIECTARE SISTEMICĂ A SILOGISTICII CU AJUTORUL FUNCŢIEI DE CARDINALITATE

Una dintre cele mai interesante probleme din teoria mulţimilor priveşte compararea claselor sub aspectul mărimii, adică sub raportul cantităţii de elemente conţinute. Conceptul "cheie" utilizat în acest context - cardinalitatea (puterea)[1] unei mulţimi - se explică intuitiv în următoarea propoziţie condiţională: dacă 'A' stă pentru o mulţime oarecare, atunci 'cardinalitatea mulţimii A' - în expresie formalizată: 'card (A)'[2] - desemnează numărul elementelor pe care le conţine mulţimea A[3]. Cu alte cuvinte, funcţia de cardinalitate se defineşte pe clasa tuturor mulţimilor şi ia valori în mulţimea numerelor naturale.

Alături de această explicaţie intuitivă, logicienii de inspiraţie matematică aduc în atenţie şi o definiţie riguroasă, care se înscrie pe făgaşul teoretic marcat de G. Frege şi B. Russell. Mai întîi, ar fi de definit operaţia de instituire a relaţiei de "echivalenţă" / echipotenţă / echipolenţă / biunivocitate dintre două mulţimi[4]. Astfel, se poate spune că două mulţimi - A şi B - sînt echivalente (mai exact: echinumerice), dacă şi numai dacă fiecărui element din A îi corespunde exact un element din B şi reciproc: fiecărui element din B îi corespunde exact un element din A. Dacă se notează cu '$\cong$' şi 'X' operaţiile de stabilire a relaţiei de echipolenţă, respectiv a unei relaţii oarecare (şi dacă se ţine cont de regulile de semnificare din simbolistica "uzuală"), definiţia de mai sus revine la propoziţia de identitate (D1):

(D1) $(A \cong B) = (\exists X)\ ((\forall x)\ ((x \in A) \to (\exists y)\ ((y \in B) \wedge X\,(x, y))) \wedge$
$\wedge\ (\forall y)\ ((x \in B) \to (\exists x)\ ((x \in A) \wedge X\,(x, y))) \wedge (\forall x)\ (\forall y)\ (\forall z)\ (((X\,(x, z) \wedge$
$\wedge\ X\,(y, z) \to (x = y)) \wedge (X\,(x, y) \wedge X\,(x, z) \to (y = z))))$

O dată explicitată operaţia de stabilire a relaţiei de biunivocitate, se poate redefini riguros funcţia de cardinalitate după cum urmează: cardinalitatea unei clase A este clasa tuturor claselor echivalente cu ea. Utilizînd litera 'm' ca variabilă clasială, putem exprima consideraţia de mai sus în schema formală (D2):

(D2) card $(A) = (\iota m)\ (m \cong A)$.

În cele ce urmează nu vom intra în meandrele teoriei matematice a numerelor cardinale, ci vom încerca să relevăm virtuţile operatorii ale funcţiei de cardinalitate, în speţă: disponibilitatea acestei operaţii de a sluji la conturarea unei instanţe "complete" a metodei supoziţiilor.

Ar fi de notat, pentru început, posibilitatea reconstruirii sistemice a silogisticii tradiţionale. Astfel, dacă se coroborează explicaţiile de mai sus cu definiţiile (D3) - (D6):

(D3) A a B = (card $(A \cap \neg B) = 0$),
(D4) A e B = (card $(A \cap B) = 0$),
(D5) A i B = (card $(A \cap B) > 0$) şi
(D6) A o B = (card $(A \cap \neg B) > 0$),

cu regulile de derivare ($R \cup 1$ - 4) şi ($R \cap 1$),

($R \cup 1$) card (A) = 0; card (B) = 0 $\therefore$ card $(A \cup B) = 0$
(dacă două clase sînt de cardinalitate zero, atunci, în mod necesar, şi reuniunea lor este de cardinalitate zero),

($R \cup 2$) card $(A \cup B) = 0$ $\therefore$ card (A) = 0
(dacă reuniunea a două clase are zero elemente, atunci, în mod necesar, fiecare dintre cele două clase are zero elemente),

($R \cup 3$) card $(A \cup B) > 0$; card (A) = 0 $\therefore$ card (B) > 0
(dacă reuniunea a două clase are numărul cardinal mai mare decît zero, iar una dintre respectivele clase are numărul cardinal zero, atunci, în mod necesar, cealaltă clasă are numărul cardinal mai mare decît zero),

---

[1] Sinonimia expresiilor 'cardinalitate' şi 'putere' este asumată, spre exemplu, în: J. Slupecki şi L. Borkowski, *Elements of Mathematical Logic and Set Theory*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1967, pp. 202-4; M.D. Potter, *Sets: An Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 1990, p. 99.

[2] Dintre notaţiile alternative, pot fi reţinute cel puţin două: '# A' şi 'A'. Cf. G. Seymour, *The Mathematical Theory of Context Free Languages*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1966, p. 2; [1a: *ibidem*].

[3] Cf. H. Engesser (ed.), *Informatik*. Ein Sachlexikon für Studium und Praxis, 2. Aufl., Dudenverlag, Mannheim, 1993, p. 400; F.M. Mc Neil şi Ellen Thro, *Fuzzy Logic*. A Practical Approach, AP Professional, Boston, San Diego, New Iork, 1994, p. 42; [1a: *ibidem*]; [2: *ibidem*].

[4] Consideraţiile care urmează au fost preluate cu unele mici diferenţe terminologice şi notaţionale din: Gh. Enescu, *Dicţionar de logică*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985, pp. 100-1; 261.

(R∪4) card (A) > 0 ∴ card (A ∪ B) > 0
(dacă o mulţime are cel puţin un element, atunci şi reuniunea ei cu o altă mulţime (oricare ar fi ea) are, de asemenea, cel puţin un element) şi
(R∩1) card (A ∩ B) > 0 ∴ card (A) > 0
(dacă intersecţia a două clase are cel puţin un element, atunci, în mod necesar, fiecare dintre aceste clase are cel puţin un element),
precum şi cu asumpţiile (A1) - (A3),
(A1) card (A ∩ B) = card (B ∩ A)
(cardinalul reuniunii a două clase este egal cu cardinalul reuniunii acelorași clase aflate în ordine inversă),
(A2) card (A ∪ B) = card (B ∪ A)
(ordinea în care sînt dispuse argumentele operaţiei de intersectare nu determină (în nici un fel) cardinalitatea clasei rezultate) şi
(A3) card (A) = card ((A ∩ B) ∪ (A ∩ ¬ B))
(cardinalul oricărei clase este identic cu cardinalul expandării acelei clase),
se obţine un analogon al sistemului LOC, datorat lui P. Botezatu[5].

Fie, spre exemplificare, raţionamentul reprezentat în următorul text: "Cei care sînt iubitori ai păcii sînt demni de laudă. Unii politicieni sînt iubitori ai păcii. Deci, unii politicieni sînt demni de laudă". Dacă se asumă corespondenţele (F1) - (F3),
(F1) cei care sînt iubitori ai păcii = A,
(F2) cei care sînt demni de laudă = B şi
(F3) cei care sînt politicieni = C,
atunci raţionamentul dat poate fi identificat cu inferenţa formală: (i) A a B; C i A ∴ C i B. Or, pentru a dovedi că raţionamentul în atenţie este valid, este suficient să demonstrăm prin metoda supoziţiilor, *id est* cu ajutorul definiţiilor şi regulilor introduse pînă acum, că C i B decurge din A a B şi C i A. În acest sens, ar fi de parcurs derivarea de mai jos.

1. A a B	ipoteză
2. C i A	ipoteză
3. card (A ∩ ¬ B) = 0	1: (D3)
4. card (C ∩ A) > 0	2: (D5)
5. card ((A ∩ ¬ B ∩ C) ∪ (A ∩ ¬ B ∩ ¬ C)) = 0	3: (A3)
6. card ((A ∩ B ∩ C) ∪ (A ∩ ¬ B ∩ C)) > 0	4: (A3), (A1)
7. card (A ∩ ¬ B ∩ C) = 0	5: (R∪2)
8. card (A ∩ B ∩ C) > 0	6+7: (R∪3), (A1)
9. card (C ∩ B) > 0	8: (R∩1), (A1)
10. C i B	9: (D5)

Dacă la definiţiile, regulile şi axiomele care permit ordonarea sistemică a deducţiilor valide din silogistica tradiţională se adaugă definiţiile (D7 - 8),
(D7) A u B = (card (A ∩ B) > card (A ∩ ¬ B)) şi
(D8) A w B = (card (A ∩ ¬ B) > card (A ∩ B)),
precum şi regulile (R ∪ 5 - 7), respectiv (R ∩ 2),
(R∪5) card (A ∪ B) > card (C); card (A) = 0 ∴ card (B) > card (C)
(dacă reuniunea a două clase are numărul cardinal mai mare decît cel al unei a treia clase şi dacă una dintre clasele care intră în alcătuirea reuniunii este de cardinalitate zero, atunci, în mod necesar, cardinalitatea celeilalte clase din componenţa reuniunii este mai mare decît cardinalitatea celei de-a treia clase),
(R∪6) card (A) > card (B ∪ C) ∴ card (A) > card (B)
(dacă o clasă este de cardinalitate mai mare decît reuniunea a altor două clase, atunci, în mod necesar, cardinalitatea acesteia este mai mare decît cardinalitatea fiecărei clase din alcătuirea reuniunii),
(R∪7) card (A) > card (B); card (C) = 0 ∴ card (A) > card (B ∪ C)
(dacă o clasă are numărul cardinal mai mare decît cel al unei alte clase, atunci, în mod necesar, relaţia de inegalitate se păstrează după reunirea celei de-a doua clase cu o mulţime de cardinalitate zero) şi
(R∩2) card (A ∩ B) > card (C) ∴ card (A) > card (C)

[5] Petre Botezatu, *Schiţă a unei logici naturale*. Logică operatorie, cap. 6: *Sistemul LOC*, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1969, pp. 162-169.

(dacă intersecţia a două clase are mai multe elemente decît o altă clasă, atunci, în mod necesar, fiecare clasă din alcătuirea intersecţiei are mai multe elemente decît respectiva clasă), se parvine la un sistem formal în care pot fi demonstrate toate silogismele plurative valide ce conţin pe lîngă propoziţiile silogistice clasice doar propoziţii universale plurative (fie afirmative, fie negative). Am avea astfel, de-a face cu o alternativă elegantă şi, în plus, mult mai intuitivă la metoda diagramatică propusă de N. Rescher[6].

Să testăm în cele ce urmează eficacitatea bazei axiomatice propuse luînd drept exemplu raţionamentul pe care îl exprimă următorul text: "Românii sînt europeni. Mai puţin de jumătate dintre musulmani sînt europeni. Aşadar, mai puţin de jumătate dintre musulmani sînt români". Dacă se acceptă corespondenţele (F4) - (F6),

(F4) cei care sînt români = A,
(F5) cei care sînt europeni = B şi
(F6) cei care sînt musulmani = C,

atunci raţionamentul dat poate fi redus la inferenţa formală: (ii) A a B; C w B ∴ C w A. Mai departe, valabilitatea (universală) a deducţiei date este confirmată de faptul că putem construi în sistemul deducţiei naturale o derivare care purcede din premisele raţionamentului şi care se încheie cu concluzia acestuia.

1. A a B	ipoteză
2. C w B	ipoteză
3. $\text{card}(A \cap \neg B) = 0$	1: (D3)
4. $\text{card}(C \cap \neg B) > \text{card}(C \cap B)$	2: (D8)
5. $\text{card}((A \cap \neg B \cap C) \cup (A \cap \neg B \cap \neg C)) = 0$	3: (A3)
6. $\text{card}((A \cap \neg B \cap C) \cup (\neg A \cap \neg B \cap C)) > \text{card}((A \cap B \cap C) \cup$ $\cup (\neg A \cap B \cap C))$	4: (A3), (A1)
7. $\text{card}(A \cap \neg B \cap C) = 0$	5: (R∪2)
8. $\text{card}(\neg A \cap \neg B \cap C) > \text{card}((A \cap B \cap C) \cup (\neg A \cap B \cap C))$	6: (R∪5)
9. $\text{card}(\neg A \cap \neg B \cap C) > \text{card}(A \cap B \cap C)$	8: (R∪6)
10. $\text{card}(\neg A \cap \neg B \cap C) > \text{card}((A \cap B \cap C) \cup (A \cap \neg B \cap C))$	9: (R∪7)
11. $\text{card}(\neg A \cap \neg B \cap C) > \text{card}(A \cap C)$	10: (A3), (A1)
12. $\text{card}(C \cap \neg A) > \text{card}(C \cap A)$	11:(R∩2.2),(A1)
13. C w A	12: (D8)

Este de remarcat faptul că recuperarea întregii silogistici plurative (inclusiv a inferenţelor valide cu propoziţii de particularitate plurative) necesită adăugarea definiţiilor (D9 - 10),

(D9) $A\ w'\ B = (\text{card}(A \cap B) \geq \text{card}(A \cap \neg B))$ şi
(D10) $A\ u'\ B = (\text{card}(A \cap \neg B) \geq \text{card}(A \cap B))$,

precum şi o banală dublare a regulilor (R∪5) - (R∩2), prin înlocuirea predicatorului ">" cu varianta atenuată a acestuia, ≥.

(R'∪5) $\text{card}(A \cup B) \geq \text{card}(C); \text{card}(A) = 0 \ \therefore\ \text{card}(B) \geq \text{card}(C)$
(R'∪6) $\text{card}(A) \geq \text{card}(B \cup C) \ \therefore\ \text{card}(A) \geq \text{card}(B)$
(R'∪7) $\text{card}(A) \geq \text{card}(B); \text{card}(C) = 0 \ \therefore\ \text{card}(A) \geq \text{card}(B \cup C)$
(R'∩2) $\text{card}(A \cap B) \geq \text{card}(C) \ \therefore\ \text{card}(A) \geq \text{card}(C)$

Fie, spre ilustrare, inferenţa formală: (iii) A a B; C w' A ∴ C w' B. Inabordabilă cu ajutorul metodei diagramatice propuse de N. Rescher, respectiva deducţie se demonstrează cu uşurinţă, construind o derivare elegantă în stilul deducţiei naturale.

1. A a B	ipoteză
2. C w' A	ipoteză
3. $\text{card}(A \cap \neg B) = 0$	1: (D3)
4. $\text{card}(C \cap A) \geq \text{card}(C \cap \neg A)$	2: (D9)
5. $\text{card}((C \cap \neg B \cap A) \cup (\neg C \cap \neg B \cap A)) = 0$	3: (A3), (A1)

[6] N. Rescher, *Venn Diagrams for Plurative Syllogisms*, în: N. Rescher, *Topics in Philosophical Logic*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland, 1968, pp. 126-33. O aplicare cvasi-exhaustivă a metodei avansate de N. Rescher la silogistica plurativă este de găsit în: C. Sălăvăstru, *Antinomiile receptivităţii. Încercare de pragmatică logică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1997, pp. 235-52.

6. $card\,((C \cap B \cap A) \cup (C \cap \neg B \cap A)) \geq card\,((C \cap B \cap \neg A) \cup$
$\cup (C \cap \neg B \cap \neg A))$ — 4: (A3), (A1)
7. $card\,(C \cap \neg B \cap A) = 0$ — 5: (R'$\cap$2)
8. $card\,(C \cap B \cap A) \geq card\,((C \cap B \cap \neg A) \cup (C \cap \neg B \cap \neg A))$ — 6+7: (R'$\cup$5), (A1)
9. $card\,(C \cap B \cap A) \geq card\,(C \cap \neg B \cap \neg A)$ — 8: (R'$\cup$6), (A1)
10. $card\,(C \cap B \cap A) \geq card\,((C \cap \neg B \cap \neg A) \cup (C \cap \neg B \cap A))$ — 7+9: (R'$\cap$7)
11. $card\,(C \cap B \cap A) \geq card\,(C \cap \neg B)$ — 10: (A3), (A1)
12. $card\,(C \cap B) \geq card\,(C \cap \neg B)$ — 11: (R'$\cap$2)
13. C w' B — 12: (D9)

Din cele prezentate pînă acum rezultă că depăşirea logicii clasiale "standard" (de ordinul întîi) - o dată cu antrenarea în formalisme a funcţiei de cardinalitate - permite construirea unui sistem formal puternic, în cuprinsul căruia se regăsesc toate deducţiile valide din silogistica tradiţională (cu excepţia silogismelor "slabe" şi, în general, a inferenţelor silogistice valide care presupun asumarea condiţiei de "existenţă şi netotalitate") şi din silogistica plurativă. (Dacă se optează pentru amenajarea unui cadru ontologic "tare", *id est* pentru introducerea în sistem a axiomei de existenţă şi netotalitate - (EnT) $(\forall m)\,((m \neq \varnothing) \wedge (\neg\, m \neq \varnothing))$ -, se rezolvă pe deplin problema completitudinii sistemului, rămînînd, însă, de determinat şi implicaţiile metafizice ale acestei alegeri.)

Eine Projektion der Syllogistik vermittels des Kardinalitätfunktion
- Zusammenfassung -

Im Rahmen dieses Aufsatzes haben wir ein formales System umrissen, in dem sich die "Klassischen" und die plurativen Syllogismen befinden: Die Definitionen und die Ableitungsregeln des Systems wurden anhand des Kardinalitätsfunktion konstruiert.