CLÁSICOS DEL PENSAMIENTO

BERNHARD RIEMANN

RIEMANNIANA SELECTA

Edición y estudio introductorio de José Ferreirós

CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

La multi-dimensional obra de Riemann: estudio introductorio

Para aquellos interesados en las personalidades que impulsaron el conocimiento científico y matemático, la Luna constituye un magnífico lugar donde comenzar. Ello se debe probablemente a que la Luna ha venido siendo, ante todo, un objeto para la imaginación: para la imaginación poética y literaria, pero también para la científica.[1] Y es que la imaginación no es sólo el terreno en el que crece la literatura, sino la principal matriz de las ideas científicas. El caso es que los cráteres lunares han recibido nombres de un gran número de científicos notables, incluyendo unos 300 matemáticos; y entre ellos figura, por supuesto, el nombre de Bernhard Riemann. El cráter Riemann, situado en la cara oculta de la Luna, es de hecho uno de los más grandes, comparable en tamaño al Ptolemeo (que, eso sí, está en la cara visible).

El matemático de Gotinga se cuenta entre los pocos que han contribuido, no sólo a demostrar grandes resultados, sino a abrir *nuevas vías* a la investigación matemática: en análisis de variable real y compleja, en topología, en geometría. Este hecho se ve reflejado en lo habitual que resulta encontrar su nombre asociado a nociones matemáticas clave,[2] lo que puede resultar sorprendente si se considera que apenas vivió 40 años, los cuatro últimos seriamente impedido por la enfermedad pulmonar que acabaría con él. La obra de Riemann en geometría y topología fue decisiva para el surgimiento de una de las ramas más características de la matemática moderna, pero además suministró un preparativo esencial para la descripción del universo que daría el mítico Einstein en su relatividad general.

Una buena indicación del carácter y la profundidad de la obra de Riemann se encuentra en las siguientes palabras del medallista Fields y especialista en teoría de funciones Lars Ahlfors, escritas en 1953:

> Los escritos de Riemann están llenos de mensajes crípticos para el futuro. … El espíritu de Riemann moverá a las generaciones futuras como nos ha movido a nosotros.

Hoy, el nombre de nuestro autor es especialmente notable por estar ligado a lo que muchos consideran como el principal problema abierto en matemática pura, la célebre *Conjetura de Riemann* sobre la distribución de los números primos. Estamos hablando, pues, de uno de los mayores matemáticos de todos los tiempos, comparable a personalidades de la talla de Arquímedes, Leibniz, Newton, Euler, Gauss, Hilbert o Poincaré.

Pero lo más notable del caso es que Riemann no constituye sólo un hito en el desarrollo de la matemática, sino que también por otras razones merece un puesto en la historia del pensamiento humano, como pensador de primer orden que fue. El matemático e historiador Freudenthal ha escrito que, si hubiera vivido más tiempo, Riemann habría sido conocido como uno de los grandes filósofos del siglo XIX. Su obra combinó de una manera verdaderamente genial e intrigante problemas y planteamientos surgidos de la matemática pura, de la física y de la filosofía. En el campo de la filosofía se vio influido por el anti-idealista Herbart, en el de la física por Wilhelm Weber y por Gauss; de todos ellos tendremos ocasión de hablar en estas páginas. La combinación de física, filosofía y matemática es evidente en la famosa conferencia

---

[1] Por suerte o por desgracia, esto puede cambiar en un futuro próximo con la construcción de estaciones lunares. O tempora!

[2] Ecuaciones de Cauchy–Riemann, integral de Riemann, lema de Riemann–Lebesgue, superficies de Riemann, teorema de Riemann–Roch, geometría riemanniana, curvatura de Riemann, función zeta de Riemann, conjetura de Riemann. Por la frecuencia de aparición de su nombre, seguramente Riemann sólo es comparable a Cauchy.

inaugural *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*, primero de los textos que traducimos, y un verdadero jalón en la historia del pensamiento científico.

En realidad, no sólo esa, sino todas sus contribuciones revelan, con mayor o menor claridad, la imbricación de aquellas tres fuentes del conocimiento. Como muestra de lo que venimos diciendo, valga el siguiente texto, que debió escribir hacia 1852/53:

> Los trabajos que en este momento me ocupan preferentemente, son:
>
> 1. De modo similar a como ya ha sucedido, con tanto éxito, con las funciones algebraicas, las funciones exponenciales o circulares, las funciones elípticas y abelianas, introducir lo imaginario en la teoría de otras funciones trascendentes. Para ello he establecido los prerrequisitos generales más necesarios en mi disertación inaugural. (Cfr. dicha disertación, artículo 20.)
> 2. En conexión con ello surgen nuevos métodos para la integración de ecuaciones diferenciales parciales, que ya he aplicado con éxito a múltiples temas de física.
> 3. Mi ocupación principal concierne a una concepción nueva de las conocidas leyes naturales —expresión de las mismas mediante otros conceptos básicos—, con lo que se hace posible emplear los datos experimentales sobre la interacción entre calor, luz, magnetismo y electricidad, para investigar su interrelación. A ello me condujo fundamentalmente el estudio de las obras de Newton, de Euler y —por otro lado— de Herbart. En lo tocante al último, he podido adherirme casi en su totalidad a las investigaciones más antiguas de Herbart, cuyos resultados están expresados en sus tesis de promoción y habilitación (del 22 y 23 de octubre de 1802), pero he tenido que apartarme del camino posterior de su especulación en un punto esencial, lo que conlleva diferencias con respecto a su filosofía natural y a aquellas proposiciones de la psicología relativas a su conexión con la filosofía natural.

La contribución de Riemann a la teoría de las funciones de una variable compleja, a la que se refiere el punto 1., constituye una obra de primera magnitud y fue la base de la gran fama que alcanzó en vida. Su trabajo sobre ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (2.) dio lugar a métodos originales y también a libros de texto que manejaron varias generaciones de físicos. Lo notable es que, frente a todo ello, el propio Riemann nos diga que su "ocupación principal" era una nueva concepción de los fenómenos físicos, una teoría unificada de las fuerzas fundamentales, inspirada no sólo en las obras de grandes físicos matemáticos, sino también en la de Herbart.

El cráter Riemann, de 163 kilómetros de diámetro.

cráter Riemann, de 163 km. de diámetro.

Así pues, si en la historia de la humanidad ha habido *cráneos privilegiados*, como decía Valle-Inclán, no hay duda de que Riemann se encuentra entre ellos. Es este Riemann complejo y polihédrico, en movimiento continuo de la matemática a la física, pasando por la filosofía, el que pretendemos mostrar al lector a través de la selección de textos que tiene en sus manos y de la introducción que sigue.

En lo tocante a la selección, hay que reconocer que la tarea de elegir un pequeño grupo de textos de Riemann tiene mucho de arriesgada. Pese a ser breve, su obra tiene tanto alcance y profundidad que resulta imposible para un solo autor comentarla adecuadamente, no digamos ya seleccionar con tino. En todo caso, el objetivo de este volumen no es servir a intereses técnicos o especializados: para ello disponemos, afortunadamente, de las ediciones alemana y francesa de sus obras. La selección que aquí ofrecemos se ha guiado por la finalidad antes mencionada de mostrar a Riemann en sus muchas dimensiones, y ha estado condicionada por el requisito de que los textos fueran de interés relativamente general.

En cuanto al estudio introductorio, comenzaremos hablando del hombre y de su formación en Berlín y Gotinga, en contacto con grandes especialistas de las tres disciplinas que gustó de cultivar. Luego consideraremos las especulaciones filosóficas que le ocuparon desde joven, y que guiaron en momentos clave sus contribuciones científicas; sé que comenzar por el Riemann filósofo parecerá raro y exagerado, pero el lector observará que esta ordenación tiene sus ventajas, y además me permitiré recordar que (a menudo) el orden de factores no altera el producto. En la sección siguiente consideraremos sus propuestas en cuestiones propiamente físicas, que le ocuparon también desde muy joven, en colaboración con grandes especialistas de su momento; hablaremos ante todo de física teórica, pero también daremos indicaciones acerca de su aportación a la física matemática. Por fin, abordaremos lo que sin duda es la parte más importante de su obra para la posteridad, pasando revista a las ideas de Riemann sobre los fundamentos de la matemática, y sobre temas de investigación avanzados en esa disciplina.

Conviene indicar aquí mismo que se ha realizado un esfuerzo especial por hacer accesible el famosísimo trabajo de Riemann 'Sobre las hipótesis en que se funda la geometría'. Se trata de un escrito difícil por su tema, pero también por su presentación: el autor logró hacer sus ideas más accesibles al público no matemático de su época, a costa de eliminar el empleo de fórmulas y contentarse con una descripción intuitiva de los pasos a seguir. Esto, añadido a la distancia que nos separa del contexto intelectual (no sólo matemático, sino también filosófico) de Riemann, hace que la famosa lección resulte poco accesible tanto para los matemáticos actuales como para los no matemáticos. Confío en que ese efecto se anule gracias al esfuerzo de aclaración y divulgación que he realizado en la introducción, el cual se complementa con los magníficos comentarios técnicos, tomados de Weyl, que el lector puede encontrar tras la lección. Se recomienda a quienes deseen centrarse en el escrito sobre geometría que dirijan su atención a las secciones 2.2, 3, 4 y 5 de la introducción.

1. La formación matemática y científica de Riemann.

> La timidez … nunca le abandonaría totalmente; a menudo le impulsó a entregarse a la soledad y a su propio universo mental, en el que desarrolló la mayor osadía y carencia de prejuicios.[3]

1.1. Primeros pasos. Bernhard Riemann fue el segundo de los seis hijos de un pastor luterano, instalado en un pequeño pueblo cercano al Elba, en el reino de Hannover. La familia era bastante pobre, lo que probablemente fue causa remota de la brevedad de su vida, al igual que las de sus hermanos. Recibió sus primeras letras (y cifras) en casa, guiado por su padre. Desde muy pronto, los cálculos numéricos se convirtieron en su afición: nada le gustaba tanto como inventar ejemplos difíciles y proponerlos a sus hermanos. Su buen amigo y biógrafo Dedekind sugirió que esos primeros pasos por el mundo en un ambiente cerrado fueron el origen del carácter muy tímido y reservado de Riemann. Pero todo tiene sus pros y sus contras, como leemos en el texto antes citado, ya que Dedekind consideraba la gran independencia de pensamiento, característica de su genial amigo, como la otra cara de su intensa timidez.

Ya he indicado que Bernhard mostró aptitudes para la matemática desde pequeño. Durante el bachillerato tuvo la fortuna de que el director del *Gymnasium* al que asistió le tomara a su cargo y le diera acceso a múltiples obras matemáticas, sobre todo los clásicos griegos y obras sobre geometría, así como algunos escritos de Newton, Descartes y Legendre. Por su gran interés, transcribo al completo la carta en la que dicho director y profesor de matemáticas, C. Schmalfuss, escribe sus reminiscencias del superdotado alumno:

> Riemann estudió Secunda en el Johanneum de Lüneburg, después de haber asistido al Liceo de [Hannover] durante unos años. De [Hannover], donde sus compañeros ya le tenían por bastante buen matemático, sólo he podido averiguar una anécdota (un *ex ungue leonem*). Riemann, siendo un muchacho de 11 a 12 años, está hablando con sus compañeros sobre los regalos que harán a sus padres por Navidad; como han aprendido a trabajar el cartón [¿], quieren dar pruebas de la habilidad adquirida. Uno preparará esto, el otro aquello. Yo, dice Riemann, he ideado un calendario perpetuo. Se ríen de él, pero lleva a cabo su obra para asombro no sólo de sus pequeños amigos, sino de adultos más capaces de juzgar. Según me dicen, no se trataba de una imitación mecánica, sino de un trabajo surgido de reflexiones propias. Mi informante es uno de aquellos pequeños amigos, el hoy asesor gubernamental Busse.

[3] Dedekind, 'Riemann's Lebenslauf' [1876], 542. Este artículo es la principal fuente para la biografía de Riemann, junto con el de E. Schering, 'Zum Gedächtniss an B. Riemann' [1866]. Aparte de diversos artículos firmados por E. Neuenschwander, el más importante trabajo reciente sobre el tema es el libro de D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866. Turning points in the conception of mathematics* (Basel, Birkhäuser, 1999).

Su capacidad de comprensión en temas matemáticos se me hizo manifiesta inmediatamente; con Riemann bastaba la insinuación de una ley matemática, para verla llevada a una forma clara y fija, junto con todas sus consecuencias y en el grado máximo de generalidad. Por razones pedagógicas o psicológicas, sólo le ocupé con la matemática elemental, para que no tomase la forma por lo esencial, al verse introducido demasiado pronto en asuntos trascendentes; mas quizá en su caso este tipo de prevención no hubiera sido necesaria. Leyó todo lo que poseo sobre cuestiones euclideas, desde los comentarios de Joannes Hernagius y del jesuita Clavius hasta Pfleiderer y Camerer y Hauber; lo que poseía de la literatura sobre Arquímedes, Apolonio de Perga, etc., todo esto lo leyó, y tras leerlo se había convertido en su segura propiedad. La *Arithmetica universalis* de Newton y la *Geometría* de Descartes no le interesaron menos; aunque noté que Riemann, si no he errado en mis observaciones, mostraba menor interés por la llamada geometría de cálculo. (El método mecánico no le decía mucho.) Lo que era distintivo suyo, un don casi increíble de intuición, de fantasía constructiva, y a la vez de generalización abstractiva, esto era lo que le atraía en los estudios. Poco después de pasar a Prima, había estudiado con sus propios medios todo lo que contiene la colección Meyer–Hirsch, y sólo indicó una ley, ya no sé cuál, que no le había resultado clara.[4] En las primeras horas en que aprendió trigonometría plana, resolvió por sí mismo, sin ayuda, todos los problemas trigonométricos (de manera sistemática).

Nunca perdió una hora de matemáticas, a no ser que estuviera enfermo; pero naturalmente no le pedía que se limitara a seguir a sus compañeros, él que podía volar por delante de todos ellos; antes bien, me preocupé de ofrecerle en cada clase algo adecuado para sus fuerzas, y siempre iba más allá de la frontera que yo consideraba como su límite, así como el mío, trayendo con regularidad una plétora de resultados que yo no había esperado en tal medida. Nunca fue dispensado de las lecciones de matemáticas. En el primer año que estuvo en Prima (si no me equivoco, era Pentecostés) me pidió alguna lectura matemática, "y si no fuera muy fácil, añadió con su tono de modestia, ¡me agradaría mucho!" Le indiqué mi estantería. Volvió con la teoría de números de Legendre. Intente ver, le respondí, lo que es capaz de entender. Esto era un viernes por la tarde. El jueves siguiente trajo de nuevo el libro. ¿Hasta dónde ha llegado? "Es un libro maravilloso; ¡me lo sé de memoria!" — En el examen final, momento hasta el cual no había vuelto a tener esa obra ante sus ojos, demostró que le era *familiar* todo aquello que yo había preparado como examinador, no sin dificultades, a fin de plantearle problemas apropiados siguiendo a Legendre; como si se hubiera preparado especialmente para este tema de examen. — La teoría de números le atraía especialmente.

Yo había acordado con mi librero que, en tanto fuera posible, me mostrara todas las obras matemáticas que se publicaran en Alemania. Sucedía entonces con frecuencia que él conocía lo nuevo, cosa característica y en su caso comprensible. No es preciso que mencione especialmente que conoció y trabajó cosas como la *Geometría* de Legendre y una enorme cantidad de problemas geométricos de mi biblioteca. Sólo en el último año, dado que no entregaba a tiempo composiciones en latín y alemán, y viéndome comprometido yo como director y a él mismo como mi favorito, hube de cumplir, para mi propio dolor, la amenaza de no preocuparme durante un tiempo bastante largo de sus estudios matemáticos. En el comité examinador que debía votar la _ de Riemann, puede declarar con motivo, cuando hube de expresar mi juicio acerca de sus resultados en matemáticas, que tenía muchísimo más que agradecerle a Riemann, que él a mí. En el último año, como trabajo secundario y entre otras cosas, inventó por sí mismo toda la esférica, en cierto modo; pues casualmente no conocía en absoluto las obras de Pohl y Schultze, etc., y al igual que el primero había partido de transferir la geometría plana, en tanto fuera posible, al círculo. Lamento profundamente el no ser capaz de recordar nada de la sensatez y simplicidad de sus demostraciones y desarrollos formales. Ya entonces era todo un matemático, que con sus capacidades hacía que el maestro se sintiera indigente. — Sus abstracciones sobre las dimensiones espaciales no corresponden a los tiempos de escolar, sino al primer año como universitario.[5]

Habiéndolo conocido en persona, sabe usted bien lo difícil que le resultaba desarrollar sus pensamientos en una exposición oral fluida. A ello se añadía el que ninguna expresión le parecía suficiente si no abarcaba todo lo que él quería significar, y que sentía un temor extraordinario de considerar correcta una exposición que no fuera de una precisión irreprochable, como una fórmula general que abarca todos los casos particulares. Por ello escribía, tanto en alemán como en latín, con grandes sufrimientos lógicos y con constantes impedimentos, rechazando lo que acababa de encontrar tras pensarlo rigurosamente, etc. Así, le resultaba muy difícil redactar. Nunca escribió mal, pero tampoco nunca con rapidez ni facilidad. Poseía suficientes conocimientos gramaticales y lingüísticos para la comprensión de los clásicos; al traducir le faltaba una mayor fluidez y soltura, pero en los fragmentos difíciles era igual de los más inteligentes, y no dejaba nada sin comprender, justamente por ser difícil. En

---

[4] Se trata de una *Colección de ejemplos, fórmulas y problemas de cálculo literal y álgebra*, editada en Berlín (8ª edn. 1853).

[5] En esos primeros años de carrera, Riemann leyó las obras de Euler, al tiempo que dedicaba sus esfuerzos a los tratados de Gauss (Dedekind, *op. cit.* [1876], 543).

su tiempo me contaron en Lüneburg que sus compañeros, cuando no habían sido capaces de comprender un paso en Sófocles, Tucídides o Platón, recurrían a él pidiéndole consejo; pero uno de sus compañeros, que está aquí y al que he preguntado acerca de este punto, no puede confirmarlo. — Yo por mi parte siempre he considerado una gran suerte el haber tenido un alumno como Riemann, y aun hoy sigo estando, y estaré toda mi vida, agradecido a él por los muchos estímulos que me ha dado, y por la alegría que he sentido con su maravilloso talento y su desarrollo.

Riemann tenía pues grandes dificultades con la redacción, hasta el punto de que surgieron dudas de si estaba en condiciones de finalizar sus estudios. Otro profesor, que lo alojó en su casa, tuvo que encargarse personalmente de que entregara a tiempo las composiciones escritas, y cuenta que siempre se quedaba atascado, a veces por dudas acerca de lo escrito, a veces por nuevos pensamientos que le venían y que —en su opinión— era necesario insertar, o que incluso motivaban cambios en la disposición original del escrito. Así que el buen profesor tenía que acompañarle hasta entrada la noche y, tras haberse hecho contar el desarrollo que tendría el escrito, acababa *exigiéndole* que acabara la composición de una manera más o menos improvisada, y sin atender a la resistencia que oponía. La puntillosidad extrema y el rigor lógico de Riemann, así como los aspectos oscuros de su personalidad, hacen que uno piense en figuras del tipo de Kurt Gödel.

Como es natural en el hijo de un clérigo, Bernhard recibió una esmerada educación religiosa, y, a su manera, permaneció fiel a ella toda su vida. Consideró siempre "el auto-examen diario ante la mirada de Dios" como un acto religioso fundamental, aunque abandonó la ortodoxia familiar.[6] También aquí, por lo que parece, se aplica lo de su independencia de pensamiento y carencia de prejuicios, como puede verse en los fragmentos filosóficos 'Sobre psicología y almas'. Siendo ya *Privatdozent*, le contó a uno de sus antiguos profesores que estaba trabajando en una obra filosófica en la que, partiendo de alguna base matemática (y, con toda probabilidad, física) llegaba a demostrar la corrección de la historia bíblica de la creación y de otras doctrinas fundamentales del cristianismo. Un eco de estas ideas se encuentra todavía en los escritos filosóficos que el lector encontrará traducidos aquí.

FIG. 2. Bernhard Riemann a mediados de los años 1850. [Ver primera página.]

El carácter y la personalidad de Riemann merecen mención especial, y aquí hay que decir que nuestra perspectiva sobre el tema se enriqueció sustancialmente hace un par de décadas, con la publicación de ciertas cartas de Dedekind. Su otro biógrafo contemporáneo, Schering,[7] consideraba especialmente representativa la descripción que le dio un antiguo profesor de Riemann, quien lo elogiaba como hombre taciturno, modesto y carente de pretensiones. También decía aquel profesor –aunque Schering lo silenció– que Bernhard era muy retraído en el trato con las damas; seguramente no es casualidad que se casara con la amiga de una de sus hermanas. Pero las cartas que hoy conocemos van más allá de las descripciones un tanto estereotipadas que se hacían en escritos de ocasión como los de Dedekind y Schering. En el verano de 1857, Riemann trabajó muy intensamente para completar la redacción de la 'Teoría de las funciones abelianas', y a consecuencia de ello sufrió un auténtico colapso. Dedekind arregló las cosas para que fuera a su casa, en las montañas del Harz, y pudiera recuperarse física y psicológicamente. En las cartas que escribió a su familia con tal motivo, para aclararles la situación y darles instrucciones, se expresa así:

Riemann …, de quien tanto os he contado, es ahora mismo muy infeliz; ha pasado todo el verano, hasta hace poco, en Bremen, para preparar allí la publicación de ciertos trabajos verdaderamente notables; pero su vida solitaria y ciertos problemas físicos le han vuelto hipocondríaco y desconfiado en grado sumo frente a los otros y frente a sí mismo, por más que externamente parezca muy amigable. … Hay que hacer todo lo posible para arrancar a un hombre tan excelente y científicamente tan importante como Riemann de su estado actual, realmente infeliz; pero no debe percibir dicho objetivo con claridad; siempre ha sido difícil hacerle un favor, y sólo es posible conseguir que acepte

[6] Dedekind *op. cit.* [1876], 558.
[7] *Op. cit.* [1866], 369.

alguna amabilidad cuando consigue uno convencerle de que lo hace tanto en interés propio como en el suyo; odia causar molestias a otras personas. Aquí [en Gotinga] ha hecho las cosas más increíbles, simplemente por razones como creer que nadie le puede soportar, etc. Así que no necesito pediros otra vez que os preocupéis por él muy seriamente.

En otras ocasiones, Dedekind habla de su "peculiar conducta", o de sus "infortunadas vacilaciones y titubeos". Los problemas físicos, la timidez y el exceso de aislamiento podían llevar a Riemann a estados depresivos o hipocondríacos, e incluso hacerle comportarse como un misántropo. Estas tendencias parecen haberse suavizado más tarde, en la época de su matrimonio y de sus largas estancias en Italia, que le resultó muy agradable por el clima, los paisajes, y en especial las gratas compañías que disfrutó.[8]

1.2. Estudios en Gotinga y Berlín. Fue como estudiante de Teología y Filología que Riemann se matriculó a los diecinueve años (abril de 1846) en la Universidad de Gotinga. La perspectiva de convertirse en pastor le garantizaba rápido acceso a una profesión y el dejar de constituir una carga para su familia, pero en su caso la vocación pudo más. Tras asistir a algunos cursos universitarios de matemáticas, reconoció que su inclinación hacia esa disciplina era muy grande, y al año siguiente había obtenido el permiso paterno para dedicarse íntegramente al tema. El increíble talento natural y las lecturas que Riemann había asimilado gracias a Schmalfuss hicieron que, al ingresar en la Universidad, su nivel fuera muy superior al habitual. Esto contrastaba con el carácter elemental de los cursos universitarios, lo que debió ser la razón de que Riemann decidiera pasar unos semestres en Berlín.

Puede resultarnos extraño que el nivel de los cursos de matemática en Gotinga no fuera atractivo. Desde luego, Gotinga era (y es) una pequeña ciudad provinciana perdida en el norte alemán, pero siempre ha habido partidarios de que las ciencias se cultiven en jardines retirados. El nombre de la ciudad estaba unido al del mismísimo Gauss, *princeps mathematicorum*, el mejor matemático alemán y uno de los grandes de todos los tiempos, y siguió ligado a la matemática del más alto nivel, especialmente en la época de Hilbert, de 1895 en adelante. De hecho, Gotinga era la principal universidad de Hannover, y desde su creación (por el elector de Hannover, luego Jorge II de Inglaterra, entrado el siglo XVIII) se había contado entre las mejores y más avanzadas de todos los estados alemanes. Su biblioteca, por ejemplo, era la admiración de los alemanes ya en tiempos de Goethe, e incluso los revolucionarios oficiales de Napoleón, tan dados a la abolición de instituciones del antiguo régimen, expresaron su admiración ante la cohorte de sabios que se reunían en Gotinga.

La solución de esta paradoja está en el proceso de modernización de las universidades alemanas, y, por implicación, de las europeas. La educación superior experimentó un enorme cambio a raíz de las nuevas ideas representadas por la Ilustración y la Revolución francesa. La invasión napoleónica catalizó procesos de reforma en los estados alemanes, donde se optó por renovar en profundidad las tradicionales universidades. Fue así como la apolillada y gremial institución universitaria comenzó una revitalización, que justamente estaba en marcha en el momento de nacer Riemann. El proceso afectó de modo desigual a distintas Universidades, y a las distintas especialidades en cada una de ellas, de modo que no se completó hasta pasado 1850.

Así, no debe extrañarnos que Gauss fuera un profesor al viejo estilo, nada interesado en enseñar matemáticas, porque ello significaba aburrirse explicando las ideas más elementales del álgebra y los rudimentos del cálculo. De hecho, estaba acostumbrado a no discutir sus ideas matemáticas, seguramente porque en sus años jóvenes no había nadie disponible que pudiera seguirlas. De la figura de Carl F. Gauss, cuya sombra se proyecta sobre todos los trabajos abordados por Riemann, apenas será necesario recordar algunos datos. El genial y precoz matemático se reveló como una gran estrella a los 24 años, en 1801, con la publicación del

[8] Acerca de este y otros datos sobre la vida y circunstancias de Riemann, remitimos al lector a la tabla cronológica que encontrará en la sección 8.

primer gran tratado de teoría de números, *Disquisitiones arithmeticae*,[9] y con el cálculo de la trayectoria del asteroide Ceres sobre la base de sólo tres observaciones previas. Contribuyó ideas originales a múltiples campos de la matemática y la ciencia: teoría de funciones, álgebra, geometría no euclidea y geometría diferencial, teoría de números, astronomía, geodesia, magnetismo, etc. No descuidó tampoco el cultivo de la experimentación de precisión, como en sus trabajos con Weber sobre el magnetismo terrestre, a los que no sólo aportó nuevas ideas teóricas y métodos matemáticos (la teoría del potencial), sino también importantísimos refinamientos instrumentales. Ahora bien, el *princeps mathematicorum* nunca fue profesor de matemática, sino catedrático de astronomía y encargado del Observatorio; de vez en cuando impartía cursos sobre el método de mínimos cuadrados o sobre geodesia, pero esto era todo.

FIG. 3. El gran tándem científico de Gotinga: Gauss (1777–1855) y W. Weber (1804–1891). Nótense las divisas: "el dios aritmetiza", "el fin corona la obra" y "quienes portan las antorchas, las pasarán a otros".

Por la misma época en que Riemann comenzó sus estudios, las cosas tenían un aspecto bien distinto en la enseñanza impartida en la capital de Prusia. La Universidad de Berlín estaba magníficamente dotada, contando con varios catedráticos en cada especialidad, lo que entonces era un verdadero lujo. A fines de los años 1840 enseñaban allí Dirichlet y Jacobi, además de Steiner y otros profesores; esto quiere decir que, salvo Gauss, los mejores matemáticos alemanes se encontraban en Berlín. Además, Dirichlet y Jacobi fueron claros representantes de las nuevas tendencias de la Universidad reformada: no enseñaban temas elementales, sino que sus clases trataban asuntos relacionados con investigaciones en curso; ofrecían además

[9] Hay una traducción al español editada por la Academia de Ciencias de Colombia.

seminarios de investigación para estudiantes avanzados.[10] Los estudiantes alemanes tenían la costumbre de moverse de una Universidad a otra, y las noticias sobre la oferta en cada una de ellas circulaban con facilidad. Todo esto nos ayuda a comprender por qué se mudó Riemann.

En Berlín, Bernhard asistió a las clases de Dirichlet sobre integrales definidas, ecuaciones diferenciales y teoría de números, a las de Jacobi sobre álgebra y mecánica analítica, y a las del *Privatdozent* Eisenstein sobre funciones elípticas. (Hasta donde sabemos, no escuchó los cursos del famoso geómetra sintético Steiner.) El impulsivo y romántico Jacobi, aficionado a la filología y la historia, gozaba de una enorme fama como matemático, habiendo destacado en todos los campos de la disciplina, pero especialmente en análisis durante su competición con Abel en torno al tema, entonces muy en boga, de las funciones elípticas (véase § 6.2). Dirichlet era un gran maestro en cuestiones de análisis y de teoría de números; uniendo ambos campos, inauguró el estudio de la teoría analítica de números (§ 6.3).

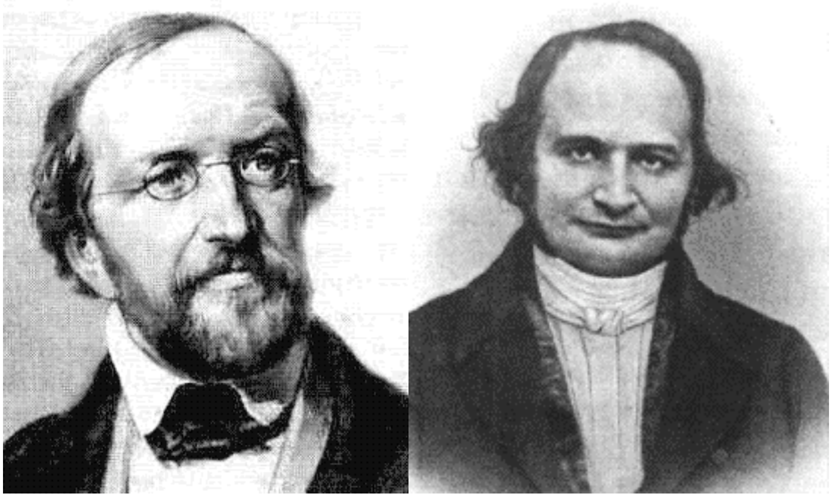

FIG. 4. Dirichlet (1805–1859) y Jacobi (1804–1851), maestros de la matemática berlinesa hacia 1850.

Dada la importancia de Dirichlet para diversos aspectos de la obra de Riemann, conviene detenerse unos momentos en su poco conocida figura. Al nacer Riemann, en 1826, Gustav Lejeune Dirichlet estaba a punto de acabar sus cuatro años de estancia en París, estudiando matemáticas en el centro de la investigación europea. Su padre, funcionario de correos, provenía de franceses emigrados y conservaba todavía lazos con París; el hijo, aficionado a la historia y admirador de la Revolución, tomó la sabia decisión de aprovechar esos contactos familiares y evitar el paso por una universidad alemana, que en aquél entonces no podía ofrecer nada similar a la constelación de matemáticos y científicos reunida en París. Mientras estaba allí tuvo un gran éxito con su primer artículo, sobre ecuaciones indeterminadas de grado 5, enviado a la Academia de Ciencias en 1825, e impreso –como correspondía a las memorias premiadas– en el *Recueil des Mémoires des Savans étrangers*.[11] Esto le dio a conocer en los cerrados círculos científicos de la ciudad y le permitió entrar en contacto, sobre todo, con el grupo de Fourier, entonces "secretario perpetuo" de la Academia. Asimismo, condujo a que estableciera contacto con Alexander von Humboldt, quien promovió la carrera de Dirichlet en Prusia.

Instalado en Berlín desde finales de los años 1820, Dirichlet se encargó de dar clases en la Academia militar y en la Universidad, hasta que en 1855, a la muerte de Gauss, aceptó una cátedra de matemática en Gotinga. En 1829, Dirichlet publicó un artículo clave en la historia del análisis, demostrando con pleno rigor que las series de Fourier son aptas para representar una

---

[10] Jacobi creó, junto con Franz Neumann, el Seminario físico-matemático de Königsberg (Prusia), primer gran seminario dedicado a las ciencias exactas. Conviene recordar que la institución del seminario fue inaugurada por filólogos e historiadores hacia 1800, y que los científicos imitaron esa práctica.

[11] Legendre, que actuó como recensor del artículo, pudo emplear los resultados de Dirichlet para demostrar la Conjetura de Fermat (a veces llamada "último teorema") para el exponente 5.

clase bastante amplia de funciones reales (§ 6.1). Con esto se convertía en el principal continuador de la obra de Fourier y Cauchy en terreno alemán, y a la edad de 27 años era ya miembro de la Academia de Ciencias berlinesa. En general, Dirichlet fue una figura clave en la transmisión de la tradición francesa del análisis y la física matemática a los países germánicos, y en impulsar nuevos estándares de demostración. Su brillante carrera continuó con diversos trabajos, entre los que destacan los dedicados a teoría de números: formas cuadráticas, enteros algebraicos, números primos en progresiones aritméticas, etc. Dirichlet fue el primero en dar clases sobre teoría de números en universidades alemanas, y también, según se ha dicho, el primero en comprender y divulgar algunas de las ideas más complicadas de la gran obra de juventud de Gauss, las *Disquisitiones arithmeticae*.

Un último aspecto que conviene resaltar tiene que ver con características metodológicas de los escritos y las clases de Dirichlet. Ante todo, está el tema del rigor; Jacobi llegó a decir:

> Sólo él, no yo, ni Cauchy, ni Gauss, sabe lo que es una demostración plenamente rigurosa; nosotros sólo lo aprendemos de él. Si Gauss dice que ha demostrado algo, lo considero muy verosímil, si lo dice Cauchy, se puede apostar tanto a favor como en contra, si lo dice Dirichlet, es seguro; yo prefiero no entrar en esas sutilezas. … D[irichlet] ha preferido dedicarse fundamentalmente a temas que ofrecen las mayores dificultades; por eso sus trabajos no se han situado en el camino principal de la ciencia, y, aun habiendo recibido mucho reconocimiento, no han tenido todo el que se merecen.

En acuerdo con esto, el reticente Gauss escribió a Humboldt que los trabajos de Dirichlet "son joyas, y las joyas no se pesan con balanza de tendero". Otro aspecto metodológico muy importante es que esas 'joyas' inician el camino hacia la matemática abstracta, un camino en el que su discípulo Riemann representará un punto de inflexión. En su elogio de Jacobi, Dirichlet decía que la tendencia más moderna en el análisis era la de *sustituir los cálculos por pensamientos*, y en esto radica justamente el aspecto contemporáneo de su estilo matemático. Como escribió Minkowski, "poseía el arte de doblegar los problemas con un mínimo de cálculos ciegos y un máximo de pensamientos penetrantes". Este arte, que Dirichlet desarrollaba de una manera clásica y serena, fue llevado por Riemann, como veremos, a una dimensión superior, radicalmente moderna y abstracta.

Pero volvamos a la estancia de Bernhard Riemann en Berlín. Ésta ofreció también intensas experiencias personales, ya que Riemann vivió allí los turbulentos sucesos de la Revolución de Marzo de 1848, durante la cual colaboró en la guardia del Palacio Real como miembro del cuerpo estudiantil, con la misión de proteger al Rey. Ello le ha asegurado fama de conservador, probablemente merecida. Su situación contrasta con la de Jacobi, que se ganó una buena cantidad de dificultades por su apoyo a la fracasada revolución. Desde luego, Riemann no se distinguió por actividades de carácter político, y hay motivos para decir que el único campo en el que se movió con verdadera libertad fue el del pensamiento.

A la vuelta a Gotinga, en 1849, Bernhard se encontró con un cambio significativo, que afectó profundamente al desarrollo de su obra. Wilhelm Weber, profesor de física, había vuelto a ser admitido en la Universidad, de la que le habían alejado problemas políticos en 1837.[12] Las clases de Weber sobre física experimental ofrecían la combinación entre enseñanza e investigación que se convirtió en la divisa de los profesores alemanes. Además, en 1850 fundó un Seminario Físico-Matemático junto con otros tres profesores; el Seminario se destinaba a formar futuros profesores de bachillerato, y en la práctica se convirtió en un foro para temas avanzados y trabajos de laboratorio. Riemann entró en dicho Seminario en 1850, realizando prácticas de laboratorio, y estableció un estrecho contacto con Weber, de quien se convirtió en ayudante entre 1853 y 1854. Así pues, la figura de Weber nos ofrece una clave para los intereses físicos de Riemann, y conviene detenerse un poco en ella.

Tras una formación más bien autodidacta en física, y una serie de trabajos experimentales sobre ondas y sobre acústica, Weber entró en contacto con personajes de renombre y se

[12] Fue uno de los "siete de Gotinga", profesores expulsados por mantener su fidelidad a la constitución de Hannover, rehusando hacer el nuevo juramento de fidelidad al Rey, con el que se sellaba una restauración monárquica.

convirtió, en 1831, en colaborador de Gauss. Juntos trabajaron en el Observatorio del magnetismo terrestre fundado en Gotinga, que fue el centro de una importante colaboración internacional auspiciada por Humboldt. Subproducto del trabajo de aquellos años fue el famoso telégrafo que Gauss y Weber instalaron sobre los tejados de la ciudad, para comunicar el Observatorio magnético y el astronómico. Más tarde, Weber se centró en investigaciones sobre electromagnetismo: introdujo nuevos estándares de precisión en la experimentación eléctrica, creó instrumentos nuevos, introdujo unidades absolutas; y, no contento con ello, realizó una importante contribución teórica unificando electrostática, electrodinámica e inducción. La teoría de Weber, basada en fuerzas de acción a distancia, ha quedado olvidada, como suele pasar con las sendas abandonadas en la historia de la ciencia, pero fue un hito importante en el camino hacia la moderna teoría electromagnética.[13] Es interesante ver cómo describe Dedekind los cursos de Weber:

> me causó la más profunda impresión el gran curso impartido por Weber, a lo largo de dos semestres, sobre física experimental; la separación rigurosa entre los hechos descubiertos gracias a las experiencias más simples, y las hipótesis ligadas a ellos por el entendimiento humano, ofrecía un modelo inigualable de la verdadera investigación científica, como no lo había conocido yo nunca hasta entonces; especialmente, la construcción de la teoría eléctrica tenía un efecto enormemente fascinante, que naturalmente se transformaba entre los oyentes en una reverente admiración del magnífico aunque modesto profesor.[14]

La metodología hipotético-deductiva aquí descrita, que superaba ideas ingenuas de corte inductivista o positivista, parece coincidir muy bien con las declaraciones metodológicas que hace el propio Riemann en varios de sus escritos. Más adelante (§ 2.2) volveremos a este punto.

1.3. Doctorado y habilitación. Desde 1850 a 1854, las cuestiones de física ocuparon mucho a Riemann, hasta el punto de que a menudo retrasaron los trabajos necesarios para doctorarse y luego habilitarse como profesor. Ya en 1850 no sólo hacía prácticas de física, sino que esta ocupación iba acompañada de especulaciones sobre el modo de dar un tratamiento unificado de las distintas fuerzas físicas, basado en leyes de acción por contacto. Tres años después, como asistente de Weber, se encargó de dirigir las prácticas de los nuevos alumnos del Seminario físico-matemático y también de dar algunas clases teóricas. A finales de 1853 creía tener tan avanzado su trabajo en física que podría publicarlo inmediatamente, y al año siguiente realizó intentos de desarrollar sus ideas teóricas en casos particulares: la carga residual de la botella de Leyden, y el fenómeno de los anillos coloreados de Nobili, sobre el que efectivamente llegó a publicar.[15] Como vemos, la ocupación con cuestiones de física era realmente seria en su caso.

Entretanto, Riemann iba cumpliendo con los requisitos de la carrera docente. Desde un principio dio muestras de verdadera madurez en la elección y tratamiento de sus temas de investigación. La tesis doctoral que presentó a finales de 1851 ofrecía un tratamiento muy novedoso y original del análisis de variable compleja, y contenía ya todos los ingredientes básicos de su planteamiento. A continuación decidió enfrentarse a uno de los principales problemas abiertos en análisis real, llevando la teoría de las series trigonométricas más allá del punto en que la había dejado Dirichlet. La dificultad de los temas elegidos, el esfuerzo que le costaba conseguir una redacción definitiva, y la ocupación con otros temas, hicieron que Riemann avanzara lentamente: sólo en Junio de 1854 se habilitó por fin como *Privatdozent* (docente privado, una especie de profesor ayudante sin sueldo). La habilitación consistía no sólo en presentar una segunda tesis, sino también requería una lección inagural, que en el caso de Riemann trató de los axiomas de la geometría.

---

[13] Pueden encontrarse referencias al respecto en los *Escritos científicos* de Maxwell, editados por J. M. Sánchez Ron en esta misma colección, y también en H. Herz, *Las ondas electromagnéticas* (ed. M. García Doncel, Barcelona, UAB).

[14] Carta citada en W. Lorey, *Das Studium der Mathematik an den Deutschen Universitäten* (Leipzig, Teubner, 1916), 82.

[15] Dedekind *op. cit.*[1876], 547–50.

A continuación reproduzco la famosa descripción que hizo Dedekind de las circunstancias en que se desarrolló la habilitación.[16] Conviene resaltar que Dedekind tenía también un contacto estrecho con Weber, de modo que su relato puede considerarse de primera mano:

> Riemann complicó de un modo esencial la preparación de su lección sobre las hipótesis de la geometría, debido a su esfuerzo por resultar tan fácil de comprender como fuera posible a todos, incluyendo los miembros de la Facultad no versados en matemáticas; con ello, empero, el tratado se convirtió en una admirable obra maestra también en lo tocante a exposición, pues, sin comunicar la investigación analítica, indica con tanta precisión el camino seguido por la misma, que es posible rehacerla completamente siguiendo dichas prescripciones. Contra la costumbre habitual, Gauss no había elegido el primero de los tres temas propuestos, sino el tercero, ya que estaba deseando escuchar cómo un hombre tan joven podría tratar un tema tan difícil; la lección, que superó todas sus expectativas, le dejó completamente asombrado, y a la vuelta de la sesión de Facultad le habló a Wilhelm Weber de la profundidad de los pensamientos expuestos por Riemann con el mayor reconocimiento y con una excitación rara en él.

Como escribió Riemann a su hermano, los dos primeros temas que Riemann había propuesto estaban ya listos, pero al tener que preparar el tercero Bernhard se vio de nuevo "en apuros".[17] Tras acabar la tesis sobre series trigonométricas, se había enfrascado tanto en sus investigaciones sobre la interrelación entre las leyes básicas de la física, que no fue capaz de abandonar el tema para dedicarse a la lección de geometría. Aún le dio tiempo a escribir su artículo inédito sobre la carga residual en botellas de Leyden, antes de redactar la famosa conferencia, lo que le llevó unas 5 semanas. Es notable que el tratamiento riemanniano de la geometría está cargado de implicaciones físicas, y de hecho viene orientado por cuestiones acerca de cómo reconcebir las leyes físicas. Los dos temas que obsesionaban a Riemann, a comienzos de 1854, se ligaron de manera inextricable en sus reflexiones. Esto explica, en cierta medida, la gran repercusión que tuvo su lección inaugural sobre el desarrollo posterior de la física teórica.

Con la habilitación, Riemann obtenía al fin la *venia legendi*, aunque sin recibir a cambio de sus clases más que el importe de la matrícula pagada por los pocos alumnos que asistían a ellas. La publicación, en 1857, de 'Teoría de las funciones abelianas' le lanzó a la fama y condujo a su nombramiento como profesor extraordinario, lo que por fin le aseguraba un pequeño salario (tenía ya 31 años). Finalmente, en 1859 se convirtió en el sucesor de Gauss y Dirichlet, reemplazando al segundo en la cátedra tras su muerte. Las universidades alemanas no tenían especial tendencia a la endogamia, antes al contrario, pero en el proceso de selección se consideró desde el principio a Riemann como candidato prioritario, lo que da idea del reconocimiento y la fama que había logrado alcanzar. En opinión de los responsables, sólo dos figuras en Alemania podían considerarse comparables a él: Kummer, el inventor de los 'números ideales', de 49 años, y el famoso analista Weierstrass, de 44; el segundo era, como escribió Weber, "un meteoro que apareció hace 5 o 6 años, totalmente inesperado, en el horizonte de la ciencia superior".[18] Con Gauss, Dirichlet y Riemann, Gotinga se convirtió —según escribió a su muerte el mismo Weber— en "la plantación de la orientación más profundamente filosófica en la investigación matemática".[19]

[16] *Op. cit.* [1876], 549.

[17] *Op. cit.* [1876], 547. Esos dos primeros problemas eran: 1) la historia de la cuestión de la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica, y 2) la resolución de dos ecuaciones de segundo grado con dos cantidades indeterminadas (Riemann, *Nachträge*, 112).

[18] P. Dugac *Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris, Vrin, 1976), 180 y 182. Pese a la opinión de Weber y otros, Weierstrass no fue invitado a ocupar la plaza ya que se opuso el correspondiente asesor gubernamental (*op. cit.*, 168). Así que Riemann fue nombrado directamente, aun temiendo que esto causaría problemas con otros colegas suyos de igual rango que todavía esperaban un nombramiento (o incluso de mayor edad, como Moritz Stern, un buen matemático a quien su origen judío dificultó su carrera).

[19] Dugac, *op. cit.*, 166.

2. Riemann filósofo.

> Aquella filosofía que nos ocupa no se encuentra en absoluto *fuera* de los restantes saberes, sino que se forma *con* y *en* ellos, como una parte inseparable de ellos; tiene con ellos una relación totalmente *inmanente*.[20]

Dirigiremos ahora nuestra atención a cuestiones que pueden calificarse de propiamente filosóficas. La filosofía no es (ni debería ser) ajena a planteamientos y dificultades conceptuales que surgen con naturalidad en otras esferas, de manera que resultaría arbitrario el proponer una línea divisoria tajante entre lo filosófico y lo científico, o lo matemático. Sin pretender esto, podemos sin embargo tratar de manera conexa varios problemas en los que la reflexión filosófica desempeña un papel importante.

El de Riemann parece ser uno de esos casos, quizá frecuentes, en los que las ideas más originales y características de un pensador aparecen pronto. A los 25 años (hacia 1852) ya encontramos en él lo esencial de su nueva orientación en análisis, incluyendo el inicio de sus cruciales estudios sobre funciones abelianas, pero también las directrices que guiarán sus esfuerzos en la teoría física (§ 3), y una evidente concentración en temas filosóficos. Tras volver a Gotinga en 1849 dedicó aún tres semestres a seguir cursos, no sólo sobre asuntos científicos como los de Weber, sino también sobre filosofía. Incluso después de su doctorado, Riemann fue constante en dedicar una parte muy notable de su tiempo a las lecturas y reflexiones filosóficas. Al poco, había encontrado un autor de referencia cuyas obras se convirtieron en auténtica lectura de cabecera: se trataba del anterior catedrático de Gotinga, J. F. Herbart, un filósofo muy interesante aunque poco estimado por los profesionales de la historia de la filosofía.

En 1853 encontramos a Riemann consultando obras de Fries y de Herbart, que tienen en común el ser filósofos no idealistas, cercanos a la ciencia del momento; evidentemente, la obra del kantiano Fries le interesó menos que la de Herbart, cuyos escritos adquirió la costumbre de consultar todos los años.[21] Ya hemos citado, al comienzo mismo, un texto donde Riemann registra su deuda para con Herbart. Otro fragmento manuscrito de Riemann, rescatado ya por los editores de sus obras completas, es explícito al respecto:

> El autor es herbartiano en epistemología y psicología (Metodología y Eidología), aunque en general no puede asumir la filosofía natural de Herbart ni las disciplinas metafísicas ligadas a ella (Ontología y Sinecología).

Como ha resaltado el historiador de la matemática Erhard Scholz, la parte de la filosofía de Herbart a la que Riemann dice adherirse constituye más bien una teoría del conocimiento.[22] De hecho sus fragmentos filosóficos incluyen un ensayo sobre psicología y otro sobre epistemología que responden claramente a planteamientos herbartianos. Dedicaremos espacio, pues, a una discusión de las ideas principales de Herbart, en la medida en que resultan iluminadoras para entender las opiniones filosóficas, científicas o matemáticas de Riemann.

2.1. Riemann y la filosofía de Herbart. Lo primero que conviene decir es que, hacia 1850, en Alemania se vivía el declive de la tradición idealista, frente a una creciente difusión del positivismo y, sobre todo, a la época dorada del mecanicismo. Pero cuando se habla de idealismo, sucede como con tantos otros conceptos filosóficos: resulta bastante ambiguo, dada la diversidad de posiciones que han sido calificadas con ese término. Normalmente identificamos el "idealismo alemán" con nombres como los de Hegel, Fichte y Schelling, con el postulado de unidad de lo real y lo racional en el Espíritu absoluto, y también con el postulado

---

[20] Herbart, *Über philosophisches Studium* [1807], en *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vol.1, 230. Texto transcrito por el propio Riemann.

[21] Datos tomados del *Ausleihregister* [Registro de préstamos] de la biblioteca universitaria de Göttingen. A partir de 1853 extrae las obras de Herbart todos los años, junto con las de otros autores herbartianos, entre los que puede destacarse a Moritz Wilhelm Drobisch, matemático de Leipzig y autor de obras de lógica y psicología.

[22] E. Scholz, 'Herbart's Influence on B. Riemann', *Historia Mathematica* **9** (1982), 413–40.

de un despliegue dialéctico de los fenómenos. Ideas que tuvieron mucho auge en los países de habla alemana en el primer tercio del XIX, con un reflejo importante incluso entre los científicos,[23] pero que pronto fueron cayendo en desgracia. Ahora bien, "idealismo crítico" es el nombre que tradicionalmente se aplica a las doctrinas de Kant, doctrinas que conviene diferenciar con claridad de las anteriores, entre otras cosas porque (estas sí) han gozado a menudo del favor de los científicos.

Johann Friedrich Herbart fue alumno del filósofo idealista Fichte, pero ya al final de sus estudios había desarrollado una crítica a su maestro. En respuesta a la tendencia idealista de la filosofía alemana del momento, tuvo a gala definirse siempre como *realista*. Su rechazo de Fichte supuso una vuelta a Kant, que va a ser un estímulo constante para él, si bien de una manera esencialmente crítica. Herbart fue quien ocupó, en 1809, la cátedra de Königsberg que Kant había dejado vacante a su muerte; en 1833 se trasladó a Gotinga, donde profesó hasta su muerte en 1841. Ahora bien, este autor negó radicalmente la existencia de cualquier fuente de conocimiento *a priori*, y por tanto la concepción kantiana de las categorías del entendimiento y de las formas de la intuición. A propósito de las categorías, decía:

> la *multitud* de errores cometidos acerca de las sustancias y las fuerzas demuestra fácticamente que *los correspondientes conceptos no están fijos y determinados en el espíritu humano, que no son en absoluto categorías o conceptos innatos, sino productos mudables de una reflexión estimulada por la experiencia y alterada por todo tipo de opiniones.*[24]

Sobre las famosas formas del espacio y el tiempo, escribió palabras tan duras como las siguientes:

> añadir un par de recipientes vacíos infinitos en los que los sentidos deben verter sus sensaciones, sin ninguna razón de la configuración y ordenación, fue una hipótesis completamente superficial, carente de contenido e inapropiada.[25]

En línea con su realismo y anti-apriorismo, Herbart trató de encontrar una nueva e interesante teoría del conocimiento: quizá por vez primera en un filósofo, aparece una orientación coherente con el enfoque experimental e hipotético-deductivo de las ciencias naturales, en consonancia con la metodología que empezaba a consolidarse en la conciencia de los científicos.

De hecho, las ideas epistemológicas de Herbart se desarrollaron bajo la influencia de un buen conocimiento de la ciencia del momento, que le marcó profundamente. Al comienzo de su carrera, época en la que expresa puntos de vista más convincentes para Riemann, realizó un estudio detallado del cálculo infinitesimal y la mecánica. En su obra más importante y original, de la que hemos tomado las citas anteriores: *Die Psychologie als Wissenschaft, neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik* [1825, 1826],[26] Herbart elaboró una psicología matemática según el modelo de la física newtoniana: una 'mecánica del alma' dividida en 'estática' y 'dinámica'. Dicho trabajo se considera como un precedente inmediato e influyente de la psicología científica, y los motivos que sugiere resultan, por lo demás, bastante kantianos. Conviene decir que Herbart también es recordado especialmente en historia de la educación, siendo considerado por muchos como el padre de la pedagogía.

Por otro lado, las propuestas filosóficas de Herbart parecen deber muchas sugerencias de contenido a Leibniz, lo que me parece importante ya que de esta manera se convirtió en un puente entre las especulaciones leibnizianas y las de Riemann. Podría decirse que, si Kant es una referencia constante pero a menudo un "polo negativo", Leibniz le ofrece sugerencias puntuales pero se convierte en un "polo positivo". La influencia leibniziana se deja ver, ante todo, en la ontología: Herbart defendió una versión de la monadología, aunque sus mónadas "tienen

---

[23] Uno de los casos más famosos es el de Oersted, descubridor del efecto electromagnético producido por una corriente eléctrica sobre una aguja imantada (1821).

[24] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 2 (1826), 198

[25] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 1 (1825), 428

[26] *La psicología como ciencia, fundada en la experiencia, la metafísica y la matemática*, en Herbart, *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vols.5 y 6.

ventanas", esto es, se interrelacionan.[27] Pero la presencia de Leibniz se deja sentir también en la concepción herbartiana del espacio, en sus importantes teorías psicológicas, etc. También Riemann consultó con frecuencia las obras de Leibniz y su correspondencia, que en esta época comenzaban a estar bien editadas, y entre sus manuscritos se encuentran varias páginas con extractos de Leibniz. Como veremos, no es difícil encontrar importantes paralelismos entre los dos autores.

Para Herbart, todo conocimiento se origina en la *experiencia*, y no hay ninguna fuente de saber *a priori*; pero su posición no es empirista. La experiencia no ofrece sólo datos sensoriales brutos, sino también una multiplicidad de *relaciones* entre los elementos sensoriales, relaciones que son tan objetivas y dadas como las simples sensaciones. Así, puede decirse que en la experiencia se nos ofrece tanto una materia como unas formas, y éstas no tienen nada de subjetivo; he aquí uno de los motivos profundos de la citada crítica a la teoría kantiana de las formas espacial y temporal.

FIG. 5. Herbart (1776–1841), filósofo, pedagogo y psicólogo admirado por Riemann.

Todavía más lejos del empirismo está la idea de que poseemos una capacidad específica de *reflexión*, que es fundamental y se encamina a proponer conceptos adecuados de la realidad. Donde Herbart dice "reflexión" [Nachdenken] podría ponerse también "meditación", o incluso teorización: literalmente, es un pensamiento que viene "tras" [nach] la experiencia, que elabora sobre ella, la reorganiza y la interpreta. El fruto de la reflexión son conceptos que van más allá de lo dado, de modo que el entendimiento humano tiene un papel claramente activo y creativo en el conocimiento. Esto, sin implicar apriorismo, nos sitúa lejos del empirismo. Puede decirse que experiencia y reflexión equivalen a los dos aspectos fundamentales de la metodología hipotético-deductiva.

La reflexión es puesta en marcha por las contradicciones de la experiencia, y es que, en opinión de Herbart, la experiencia tal como se nos aparece está cargada de contradicciones; el esfuerzo de reflexión tiende a eliminarlas, ya que la realidad no puede ser contradictoria. Una cosa con sus propiedades resulta algo contradictorio, porque la cosa no es más que la suma de las propiedades, pero la cosa es unidad mientras las propiedades son múltiples. La noción del yo es todavía más paradójica: la unidad de la conciencia se da en la multiplicidad de las representaciones, pero el efecto se potencia por el hecho de que entre éstas está la representación del yo (representación de

[27] En esto se aleja de Leibniz, cuyas mónadas no interactúan, "no tienen ventanas", sino que desarrollan su actividad de acuerdo con un principio interno, y sólo se despliegan en coordinación debido a la armonía preestablecida [Leibniz 1714, § 7]. La diferencia entre ambos autores tiene justamente el efecto de evitar el racionalismo leibniziano.

un representar que remite a otras representaciones, y así hasta el infinito). Muchas otras nociones, como las de espacio, tiempo, causalidad y cambio, dan lugar a múltiples contradicciones y aporías, exigiendo un tratamiento propiamente filosófico o, como dice Herbart, metafísico.

Herbart había mostrado satisfactoriamente —según Riemann— que las nociones más básicas de nuestro conocimiento del mundo, empezando por la propia idea de *objeto* con existencia autónoma, no son sino conceptos a los que nos vemos llevados naturalmente al reflexionar sobre las contradicciones de la experiencia:

> Herbart ha suministrado la prueba de que también *aquellos* conceptos que sirven a la concepción del mundo, y cuya formación no podemos seguir ni en la historia ni en nuestro propio desarrollo, ya que nos son transmitidos inadvertidamente con el lenguaje, todos ellos, en la medida en que son algo más que puras formas de conexión de las representaciones sensoriales simples, pueden ser deducidos de esa fuente; y por tanto no requieren ser deducidos de una constitución especial del alma humana, anterior a toda experiencia (como las categorías según Kant).

El matemático intentó mostrar que lo mismo sucede con nociones capitales como la de causalidad, o la de continuidad. Pero continuemos con Herbart, con lo que él llama *metafísica*, una verdadera ciencia a cuyas partes Herbart da nombres bastantes pintorescos: Metodología, Ontología, Sinecología y Eidología; estos nombres son los que usó Riemann para especificar dónde se adhería al filósofo, y dónde no.

La *Metodología* enseña cómo se deben modificar los conceptos tomados de la experiencia para reducir las dificultades. Entre los principios de la Metodología está el de "integración de los conceptos": ante el problema de poner un elemento que no puede simplemente ser puesto, ni tampoco suprimido, aquél ha de ponerse en forma de multiplicidad o variedad [Mannigfaltigkeit]. Esto es, cuando hayas de añadir un elemento que entra en contradicción con los anteriores, divide y vencerás. En esta línea, la identidad con contradicción de dos cosas se supera considerando que cada una está compuesta de elementos más simples. Dicho camino, que Herbart considera inevitable, conduce en su opinión a los elementos últimos de la realidad: la multiplicidad de "los reales" [Realen], que son la especie de mónadas de su *Ontología*. Estos entes no deben identificarse con átomos materiales, sino en todo caso deben pensarse como átomos metafísicos: al igual que las mónadas de Leibniz, son inmateriales y esencialmente activos. En todo caso, las contradicciones aparentes se resuelven en *relaciones entre seres simples*.

Ahora bien, Riemann indicó con claridad que repudiaba las ideas ontológicas de Herbart, y en efecto no se encuentra en sus fragmentos filosóficos ninguna referencia a los "reales" ni a las mónadas. En uno de los fragmentos titulados 'Sobre epistemología' apunta de hecho una crítica central a la ontología de Herbart, al decir que si un agente tiende a su autopreservación, entonces no puede ser un ente, sino un estado o una relación. Un ente, como tal, no admite variaciones de grado, no admite alteraciones frente a las cuáles pudiera reaccionar preservándose; para que sean posibles desviaciones, se debe tratar de un estado o de una relación. Pero si esto es correcto, entonces el carácter sustantivo de los "reales" de Herbart queda contradicho por los atributos centrales que el mismo autor les asigna. En todo caso, como veremos más adelante, quedan residuos leibnizianos y herbartianos en las especulaciones de Riemann acerca de psicología y acerca de la Naturaleza física. Riemann mantuvo la noción de ciertos "agentes" que tienden a su autopreservación, que están detrás de los fenómenos de causalidad, y que además entiende como estados. Estados de alguna cosa, claro, pero en la pregunta metafísica capital de cuál sea este (o estos) ente(s), cuyos estados son los "agentes", sus fragmentos filosóficos no dan respuesta.

Volviendo a Herbart, la llamada *Sinecología* es, ni más ni menos, una teoría del continuo, que tenía por objeto aclarar y justificar las nociones que involucran la idea de continuidad: espacio, tiempo, número y materia. En opinión de Herbart, el concepto de continuidad exige un tratamiento metafísico porque es contradictorio: la continuidad supone la existencia de partes infinitesimales unidas y separadas a la vez. A este respecto, hay que recordar las confusas discusiones sobre la "metafísica del cálculo", que eran habituales a principios del siglo XIX, y a las que todavía contribuye Gauss con ideas muy interesantes (y quizá un tanto herbartianas, véase § 6.2). Vale la pena apuntar también que la noción de continuidad es central para la especulación filosófica leibniziana, y que el propio Kant había puesto de manifiesto las dificultades y contradicciones relacionadas con los conceptos de espacio, tiempo y materia.[28] No es casualidad que Riemann elaborara su propia lista de 'Antinomias', donde figura de nuevo la contraposición entre continuo y discreto.

Herbart consideraba que los conceptos que involucran la idea de continuidad han de entenderse en el contexto de una teoría general sobre la construcción de 'formas seriales continuas' [continuierliche Reihenformen], de la que da una explicación que puede llamarse psicológica. Como puede deducirse del texto citado más arriba, Riemann rechazó los detalles de la teoría herbartiana de la continuidad. Sin embargo, parece que recogió algunas características muy generales del enfoque herbartiano, lo que está en consonancia con la opinión de varios autores, según los cuales la Sinecología de Herbart habría influido en sus teorías geométricas.[29] Volveremos a este tema más adelante.

Finalmente, llegamos a la *Eidología*, base metafísica de las teorías psicológicas de Herbart, que incluye una elaborada teoría del yo. El concepto del yo no es en absoluto simple, sino uno de los conceptos más ricos y, en apariencia, contradictorios de todo el conocimiento humano; esto basta, en su opinión, para hacer ridícula la pretensión de Fichte de tomarlo como punto de partida absoluto para la metafísica. Por otro lado, los "reales" de Herbart son interactivos, actúan unos sobre otros modificando su estado y dando lugar a reacciones de autopreservación; estas reacciones de autopreservación son precisamente el origen de sus percepciones o representaciones;[30] y es que, al igual que las mónadas, los reales son esencialmente perceptivos o representativos. La psicología toma de la metafísica la idea de que el alma es un real: un ente rigurosamente simple, que inicialmente no tiene representaciones, pero cuyas autopreservaciones frente a las múltiples perturbaciones causadas por otros entes producen actos representacionales. El alma en su cualidad simple nos es desconocida, ya que no puede ser ni sujeto ni objeto de la conciencia; sólo en relación con todas sus representaciones, es el alma sujeto de la conciencia, unidad indivisa pero sumamente activa. Con esto resulta claro que no hay nada de contradictorio en la multitud de representaciones que tiene el yo.

Herbart afirma que, cuando diversas representaciones se presentan a un tiempo, necesariamente entran en relaciones. Si sólo se presentase una, permanecería ilimitadamente, ya que cada una tiende a perpetuarse (una especie de ley de inercia); al presentarse varias, entran en lucha y en un complicado juego de relaciones. La psicología de Herbart estudia estas relaciones entre las representaciones, cómo se oponen entre sí o se "complican" unas con otras, cómo incluso pueden "fundirse" entre sí. Presta atención cuidadosa a las circunstancias de esas interrelaciones y a la posibilidad de registrarlas por medio de leyes matemáticas, no en vano Herbart (como Kant) concedía gran importancia a la elaboración matemática de las hipótesis científicas. Es a partir de aquí, y no en la fundamentación ontológica, donde Riemann se adhiere a sus tesis. Según Herbart, las representaciones más intensas pueden hacer desaparecer a otras bajo el umbral de la conciencia, aunque esto no las elimina, sino que pueden resurgir (sobre todo si viene a la conciencia alguna otra representación relacionada con ellas). Es la primera vez que un estudioso serio de estas cuestiones desarrolla en detalle la idea de un psiquismo subconsciente.[31]

En todo lo dicho hasta aquí, hemos hablado a menudo de *relaciones*. Lo que hay, tanto en la realidad última postulada por la metafísica, como en nuestros contenidos mentales, son sobre todo relaciones y productos de relaciones. Herbart llega a decir que el conocimiento es ante todo conocimiento de relaciones, y se le atribuye la frase: "Vivimos entre relaciones, y no necesitamos nada más". Sólo esta concepción sería ya bastante para acreditar la originalidad y 'modernidad' del filósofo. Igualmente novedosa es, en su psicología, la oposición frontal a la vieja distinción de las "facultades" del entendimiento o del alma, que todavía está tan presente en Kant. Con esto, como

[28] 'La antinomia de la razón pura' [Kant 1787, 432-595], especialmente [454-489].

[29] Por ejemplo, Russell, *An essay on the foundations of geometry* (1897, reimpreso en New York: Dover, 1956), y Torretti, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré* (Dordrecht, Reidel, 1984), 107–108.

[30] Herbart, *Psychologie als Wissenschaft*, vol. 2 (1826), 295. Ver también vol. 1 (1825), 190.

[31] Idea que sin embargo había sido planteada con toda claridad por Leibniz en su *Monadología* [1714], § 6, etc..

con muchas otras de sus contribuciones, Herbart despeja el camino para el surgimiento de una psicología científica.

Como se habrá visto en lo anterior, la concepción que Herbart tiene de la filosofía no es la de un saber ultraterreno, alejado de las ciencias, ni tampoco la de una simple sierva de las ciencias. La relación entre los distintos saberes es mucho más rica, íntima e interactiva, como puede leerse en uno de sus primeros libros, que Riemann estudió con atención:

> Aquella filosofía que nos ocupa no se encuentra en absoluto *fuera* de los restantes saberes, sino que se forma *con* y *en* ellos, como una parte inseparable de ellos; tiene con ellos una relación totalmente *inmanente*.

No menos interesante es que, en su opinión, la ciencia más próxima a la filosofía es la matemática:

> la característica de nuestra ciencia [filosofía] es que toma los *conceptos* como sus *objetos*. Por el contrario, las restantes disciplinas están absortas en la concepción de aquello que o bien está dado, o pudiera estarlo. Incluso la matemática (pues del saber histórico no es necesario hablar), tal como se ha venido tratando, imagina sus fórmulas abstractas siempre como fórmulas de casos posibles, y con gusto simboliza sus funciones mediante el comportamiento de curvas, que sólo el espacio hace posible, a fin de volver con medios más ricos para dominarlas. A este respecto formal —y solo a este respecto— puede ser separada de la filosofía. Tratada filosóficamente se convierte ella misma en una parte de la filosofía que, para sus propias necesidades, debería crear una teoría de magnitudes si no existiera ya alguna. [Herbart 1807, 275]

En este texto se apoya Scholz para defender que uno de los efectos que Herbart tuvo sobre Riemann fue precisamente impulsarle a algo así como un tratamiento 'filosófico' de la matemática, estimulando su enfoque conceptual y abstracto del tema.[32] Herbart recomendaba que toda disciplina madura se edificara lógicamente en torno a un concepto básico y central; Riemann se dedicó, en efecto, a la búsqueda de conceptos básicos □como por ejemplo el de variedad□ en función de los cuales fuera posible reestructurar y reorganizar su disciplina.

2.2. Teoría del conocimiento. La teoría del conocimiento defendida por Riemann es un desarrollo de la Metodología herbartiana, que según vimos enseñaba cómo la reflexión modifica los conceptos a fin de adecuarlos a una explicación sin contradicciones de lo dado en la experiencia. Las ideas de Riemann al respecto quedan registradas en varios fragmentos: el primero es un texto a propósito de la obra de Fechner *Zend-Avesta*, que debe haber sido escrito hacia 1852, y refleja un punto de vista aún no maduro, pues plantea una concepción inductivista. Más tarde, Riemann se hizo partidario declarado del método hipotético-deductivo, enfatizando constantemente los elementos hipotéticos o conjeturales en nuestras teorías. Esto se encuentra tanto en los fragmentos titulados 'Sobre epistemología', como en su último escrito (1866) conteniendo reflexiones metodológicas a propósito de la fisiología.[33] Nos centraremos aquí en los fragmentos sobre epistemología, que se encuentran entre los más interesantes de su obra filosófica y que, en particular, resultan muy importantes para comprender adecuadamente su famosa lección sobre geometría. Pero la teoría del conocimiento de Riemann también incluye elementos de resonancia kantiana, como es el caso de su lista de cuatro 'Antinomias', que comentaremos al final de este apartado.

La ciencia natural, nos dice Riemann, es el intento de concebir la naturaleza mediante *conceptos* precisos. Las teorías científicas son "sistemas conceptuales", entramados de conceptos. Dichos sistemas no son meros registros de datos de observación: Riemann está muy lejos del positivismo clásico, tan en boga en aquellos días, con su tendencia a aceptar una metodología inductivista. Todo nuestro conocimiento comienza en la experiencia, pero ésta –siguiendo a Herbart– no ofrece sólo *datos* brutos, sino también *formas* en las que esos datos se

---

[32] 'Herbart's Influence on B. Riemann', *op. cit.* [1982], 428.

[33] En este texto, 'Sobre los métodos a emplear en la fisiología de los órganos sensoriales más finos', encontrará el lector ulteriores precisiones sobre el método hipotético-deductivo, críticas a las consideraciones teleológicas y analógicas que eran frecuentes entonces y a las que no había sido ajeno el propio Riemann en su juventud (véase § 2.3 y 2.4), y una interesante elaboración de los clásicos métodos de *análisis* y *síntesis*.

estructuran y *relaciones* entre lo dado. Además, la mente humana no se limita a un papel pasivo de receptora, de *tabula rasa*, sino que es de carácter esencialmente activo, tal como expresa la idea herbartiana de reflexión. Así, escribe Riemann corrigiendo a Kant:

> Ciertamente debemos tomar las relaciones causales de la experiencia; pero no debemos renunciar por ello a corregir y complementar nuestra concepción de estos hechos de experiencia mediante la reflexión.

Por tanto, todos los conceptos que empleamos han surgido de la experiencia y la reflexión, sin que haya ninguna idea innata, ningún elemento *a priori*. En particular, ni el espacio ni el tiempo son anteriores a lo dado, ni tampoco las "categorías" (conceptos del entendimiento) kantianas.

Dicho de otro modo, los sistemas teóricos de la ciencia contienen siempre *hipótesis*, entendiendo esta palabra no en el sentido newtoniano (el célebre "Hypotheses non fingo" que Riemann cita), sino en el sentido moderno. Hipótesis es "todo lo que el pensamiento añade a los fenómenos" o, en términos herbartianos, lo que no viene inmediatamente dado en la experiencia, sino que es añadido por la reflexión. Como se ve, el enfoque metodológico preferido por Riemann es *hipotético-deductivo*, coherentemente con las enseñanzas de Herbart y también de Weber. Juzgamos la corrección de una teoría considerando lo que la misma predice como necesario o al menos como probable; estas predicciones son comparadas con lo observado, y a menudo sucede algún fenómeno que contradice las predicciones o que al menos resulta improbable a la luz de la teoría. Todos los cambios teóricos en la historia de la ciencia, dice Riemann, son un resultado de este tipo de inadecuaciones, que motivan la búsqueda de una nueva teoría más correcta.

Una peculiaridad del planteamiento riemanniano, muy propia de su tiempo, es que la mejora o el refinamiento de los sistemas conceptuales se guía siempre por un *principio de economía*, un principio del *mínimo*. Intentamos siempre que la nueva teoría se mantenga tan próxima como sea posible de la anterior, introduciendo el menor número de cambios posible, con el menor alcance. No debe extrañarnos que Riemann no sea un popperiano, no sólo en el aspecto recién mencionado, sino también en la idea implícita de que las sucesivas correcciones teóricas progresan hacia un sistema conceptual que podrá llamarse verdadero de pleno derecho.[34] La diferencia –en todo caso no tan grande– entre Riemann y Popper nos da un claro indicio del enorme impacto que en nuestra imagen del conocimiento han tenido las grandes revoluciones conceptuales de la física a comienzos del siglo XX. Y es que cambios como los que han llevado al concepto de espacio-tiempo, a una alteración de doctrinas básicas acerca de la mecánica y la gravitación, o a abandonar las clásicas ideas de determinismo y causalidad al nivel cuántico, no encajan demasiado bien con un planteamiento tan gradualista como el esbozado por Riemann. De todos modos, al considerar (§ 3 y 5) las propuestas de este autor en física veremos que seguramente fue el pensador decimonónico más abierto al tipo de innovaciones que luego se impondrían.

Buena parte de los fragmentos sobre epistemología de Riemann se dedica a analizar el origen de dos conceptos verdaderamente fundamentales de la ciencia de su tiempo: continuidad y causalidad. Hemos citado ya la crítica de Riemann a la idea de Kant, de postular el esquema causa–efecto como una "categoría" o concepto del entendimiento. La doctrina kantiana de las categorías garantiza, ciertamente, que dichos conceptos tienen aplicación *necesaria* en nuestro conocimiento empírico, pero lo hace a un precio muy elevado, ya que *nada* nos dicen de cómo son las cosas en sí mismas. Las categorías sólo son objetivas en el sentido débil de intersubjetivas: se imponen necesariamente a todo sujeto con una constitución como la nuestra, pero no hay ninguna garantía de que sean válidas con respecto a las cosas en sí mismas. Por el contrario, la doctrina de Riemann y Herbart pretende garantizar una *objetividad* mucho mayor: hay una conexión directa entre los datos, formas y relaciones que nos vienen dadas en la experiencia, y los conceptos que empleamos.

---

[34] Popper enfatiza el carácter puramente *conjetural* del conocimiento científico hasta un punto que otros filósofos consideran exagerado.

Herbart habría demostrado que el concepto de “cosa con existencia autónoma” (es decir, de ente u objeto permanente) surge por reflexión sobre lo dado, sobre la notable regularidad y constancia en nuestras percepciones. Según Riemann, esto tiene la mayor importancia:

Esta prueba de su origen en la concepción de lo dado a través de la observación sensorial es importante para nosotros, *porque sólo a través de ella puede ser constatada su significación de una manera suficiente para la ciencia natural.*

Siguiendo esa misma línea, Riemann se propone mostrar cómo “los conceptos básicos de la matemática y la física” surgen también por refinamiento y mejora gradual de las ideas más simples que dan cuenta de lo dado. Es interesante advertir que esos conceptos básicos son (aparte del de objeto autónomo) los de variación continua y causalidad. Sin duda, Riemann está sugiriendo que el concepto de *continuidad* es la base del conocimiento matemático, y el de *causalidad* la base de la teoría física. La matemática se estaría viendo más bien en relación con geometría, topología y análisis, que como una simple ciencia de los números; y la concepción riemanniana de la física sería típicamente “clásica”, previa a la gran revolución cuántica del siglo XX (como no podía ser menos).

¿Cómo surgen esos conceptos básicos? Una vez adoptado el concepto de objeto, chocamos con la experiencia del cambio, pues éste contradice la idea de existencia autónoma. Buscando mantener la idea de objeto inalterada en lo posible, nuestra reflexión nos lleva a entender los cambios como variaciones continuas. Pero el objeto habría permanecido inmutable si no hubiera sobrevenido alguna otra cosa, y aquí se encuentra el origen de la idea de causa. No entraremos en detalles acerca de los demás comentarios que Riemann hace en torno a la causalidad, aunque hay que llamar la atención del lector sobre el hecho de que se piensa en las causas como ligadas siempre a algún agente. Esto parece una reminiscencia de la concepción leibniziana de las mónadas, o la herbartiana de los “reales”, aunque –según hemos visto– Riemann rechaza esta última. En realidad, Riemann deja cautamente en el misterio cuáles puedan ser los componentes últimos del mundo, los elementos sustantivos más simples cuyas relaciones despliegan todos los fenómenos encontrados en la superficie de las apariencias.

Como en otros casos, por ejemplo el del mismo Popper, la metodología hipotético-deductiva de Riemann se apoya en la noción de *verdad*. Esta es entendida en la clásica versión de correspondencia con los hechos que ya planteara Aristóteles:

I. ¿Cuándo es verdadera nuestra concepción del mundo?
“Cuando la conexión entre nuestras representaciones se corresponde con la conexión entre las cosas.” …
II. ¿De qué modo se debe establecer la conexión entre las cosas?
“A partir de las conexiones entre las apariencias.”

Pero incluso a este nivel Riemann consigue introducir reflexiones innovadoras que no han dejado de tener sus correspondencias en el siglo XX. Concretamente, en vena herbartiana, el matemático indica que la correspondencia interesante no se da entre elementos simples de nuestros sistemas conceptuales y elementos simples de la realidad, sino entre las respectivas *relaciones*. Las relaciones entre los elementos de nuestra representación del mundo deben reflejar fielmente las relaciones entre las cosas. Las explicaciones de Riemann a este respecto recuerdan enormemente la famosa “teoría figurativa” del pensamiento y el lenguaje propuesta por Wittgenstein al comienzo de su *Tractatus*. Las similitudes incluyen la terminología muy riemanniana (véase § 6.2) de ‘Bild’ y ‘Abbildung’, y las reflexiones acerca del grado de “finura” de la representación (dicho sea de paso, esta última palabra ofrece una buena traducción castellana de ‘Bild’, y no sólo de ‘Vorstellung’). Sería muy interesante saber si Wittgenstein, además de estar influido por el físico Hertz, leyó también con cuidado las obras de Riemann.

La reflexión sobre la noción de verdad, y sobre el papel que tienen las relaciones o conexiones entre las apariencias como criterio clave de verdad, conduce a Riemann a intentar una justificación del papel privilegiado que tienen las relaciones *cuantitativas* en la ciencia. Con Demócrito y los pensadores del XVII, comenzando por Galileo, Riemann traza la distinción entre cualidades sensoriales –color, timbre y tono, olor, sabor– y relaciones cuantitativas (lo que en el XVII se llamaba 'cualidades primarias'). Las primeras no existen como tales fuera de nosotros, aunque sí existen correlatos de las diferencias de intensidad o de cualidad, y de las relaciones cuantitativas. De ahí que las relaciones cuantitativas tengan una relevancia especial como fundamento último de los criterios que aplicamos para juzgar la verdad de las teorías:

De la reflexión sobre la conexión observada entre estas relaciones cuantitativas debe resultar el conocimiento de la conexión entre las cosas.

Queda claro que el papel de la matemática en la ciencia es, según Riemann, esencial.

Lo que llevamos dicho de las teorías de Riemann acerca del conocimiento humano podría dar la imagen de una concepción hondamente optimista, que se imaginaría un desarrollo gradual de la ciencia hacia la plena verdad. Esta idea queda inmediatamente corregida cuando se considera su fragmento titulado 'Antinomias', que pasamos a comentar. Para empezar, es sumamente llamativo que Riemann haya escrito este texto, cuyo referente no puede ser otro que las famosas contradicciones o "conflictos dialécticos" de la razón pura que Kant planteó y analizó a lo largo de 100 páginas de su *Crítica de la razón pura*.[35] Dice mucho de su confianza y su atrevimiento como pensador que Riemann tuviera el ánimo de enmendar la plana a una de las secciones más uniformemente admiradas y respetadas de la magna obra kantiana.

Una *antinomia* no es otra cosa que una antítesis inevitable, un par de proposiciones contradictorias tales que cada una de ellas es deducible a partir de principios de la razón. Así pues, Riemann piensa que en los conceptos que empleamos para enfrentarnos a la experiencia (tanto la del mundo externo como la de nuestros fenómenos internos, mentales) subyacen antítesis y contraposiciones inevitables. Por eso decíamos que el fragmento en cuestión muestra que su concepción no es absolutamente optimista. Ahora bien, el detalle de estas antinomias no coincide con las planteadas por Kant, como tampoco coinciden ambos autores en su manera de entender las relaciones entre tesis y antítesis de cada antinomia. Tan significativas como la similitud externa en el trabajo de ambos, son las desviaciones que introduce Riemann frente al filósofo de Königsberg.

La primera antinomia de Kant tiene que ver con las nociones de espacio y tiempo: a la tesis de que el mundo tiene un límite espacial y un inicio temporal, se contrapone la antítesis de que el mundo es *infinito* en los dos sentidos. La contraposición entre finitud e infinitud aparece en la tabla riemanniana, pero no como una antinomia particular, sino en el encabezamiento mismo: todas las tesis de Riemann tendrían que ver con lo finito, y todas las antítesis con lo infinito (en la práctica, en algún caso es difícil entender en qué consiste esa relación, como sucede sobre todo con la antítesis de II, y quizá con la de IV). El encabezamiento de la tabla de Riemann, y sus comentarios acerca de la relación general entre tesis y antítesis, resultan especialmente interesantes como fuente para conocer algunas de sus opiniones sobre los fundamentos de la matemática. Ya hemos dicho que las tesis designan siempre algo "finito, representable", mientras las antítesis presentan algo "infinito, sistemas conceptuales que se sitúan en las fronteras de lo representable". Más concretamente,

Los sistemas conceptuales de la antítesis son precisamente conceptos determinados mediante predicados negativos, pero no son representables positivamente.

Esto es algo que la tradición teológica había dicho siempre del concepto de Dios como ser absoluto y providente; pero Riemann está diciendo que tampoco podemos representarnos de modo positivo los conceptos, centrales en matemática, del infinito y del continuo (ni, por lo demás, las ideas del alma y de la determinación voluntaria del futuro).

A diferencia de lo que sucede en Kant, tesis y antítesis de cada antinomia riemanniana guardan entre sí una relación interna, casi diríamos que orgánica. El modelo de esta relación

[35] Concretamente, en el capítulo II del Libro I, Segunda Parte, División Segunda; la referencia que acabamos de dar es significativa del estilo exageradamente sistematizante de Kant, que se refleja tantas veces en los contenidos de su filosofía.

viene dado por el método de *límites* que se emplea para fundamentar el análisis infinitesimal, y que Riemann asocia, no ya con Cauchy o con d'Alembert, sino con el mismo Newton. Aunque los conceptos de la antítesis no son representables como tales, están bien determinados, y para cada uno de ellos es posible construir un sistema conceptual finito que, "por pura variación de las relaciones de magnitud", nos da en el límite el sistema de la antítesis. Esto establece la aceptabilidad de los conceptos manejados en la antítesis, pero no elimina la antinomia: el mundo puede ser, o bien discreto, o continuo; o bien Dios es intemporal, u obra en el tiempo; y así en los demás casos. Si ahora nos preguntamos si Riemann se decanta por alguna de las alternativas, en mi opinión la situación es la contraria: las antinomias se presentan con toda seriedad, y Riemann se nos aparece (como veremos, y con todos los respetos) como el asno de Buridán.

No podemos entrar en los detalles de las antinomias, porque una discusión pormenorizada nos llevaría demasiado lejos, pero conviene al menos citarlas y cotejarlas con las de Kant. La primera antinomia de Riemann es la contraposición entre la tesis de que espacio y tiempo son discretos, y la antítesis de que ambos son continuos. Esto podría corresponderse, en cierto modo, con la segunda antinomia de Kant, aunque los matices diferenciales son importantes.[36] Pero lo más interesante es que esa primera antinomia de Riemann tiene un reflejo directo en la famosa lección sobre geometría: en ella se mantiene hasta el final la duda acerca de si la realidad subyacente a nuestras representaciones espaciales es discreta o continua (§ 5).

En una lectura superficial, la segunda antinomia de Riemann se asemeja a la tercera de Kant (ambas tiene que ver con el concepto de libertad), y la tercera de Riemann a la cuarta de Kant (las dos se refieren al concepto de Dios). Pero cuando las analizamos con atención vemos que la correspondencia no se mantiene: el famoso filósofo entiende por libertad la facultad de iniciar un estado en sentido absoluto, mientras Riemann aclara que por libertad entiende, no el concepto kantiano, sino el más aristotélico poder de decidir entre dos o más posibilidades dadas. Esto le parece una idea perfectamente representable, "finita", ya que "la libertad es fácilmente compatible con la legalidad rigurosa del curso de la naturaleza". Mientras tanto, el concepto de determinismo (y en concreto, la determinación del futuro a través de nuestras acciones) le parece estar en el límite de lo representable. En cuanto a la antinomia de Dios, Kant contrapone la afirmación y la negación de un ser necesario, mientras Riemann contrapone la idea de un Dios que obra en el tiempo gobernando el mundo (a modo de alma suya), con la de un Dios intemporal y providente.

La última antinomia de Riemann no tiene correlato en Kant. Aquí se considera representable o "finita" la idea de inmortalidad, cuya antítesis es el concepto del alma entendida como una cosa en sí inteligible que es la base de nuestra apariencia temporal. Este planteamiento no es tan paradójico como nos parece a primera vista a quienes nos hemos educado en una cultura marcada por el cristianismo. Es de destacar que, en los escritos sobre psicología, Riemann habla constantemente de almas, pero aclara también que la dinámica de las representaciones hace superfluo el supuesto de un alma como substancia o cosa en sí.

2.3. Psicología, alma y materia. Al pasar a comentar las ideas de Riemann sobre cuestiones de psicología y de teleología (§ 2.4), vamos a encontrarnos con los aspectos de su pensamiento que resultan más ajenos a un hombre de nuestra generación. Sus tesis pueden parecernos trasnochadas, pero creo que no está de más repensarlas, en tanto resulten útiles para aclarar los términos de estos problemas y las presuposiciones del tipo de enfoques que hoy son comunes. Haremos un esfuerzo por comentarlas con seriedad y presentarlas como algo tan coherente y admisible como nos resulte posible, en la creencia de que esta actitud es mucho más interesante y constructiva que la de limitarse a pensar que Riemann era un excéntrico. Por otro lado, el lector debe tener en cuenta que sus ideas parecen haber evolucionado desde 1850 hasta

[36] La segunda antinomia de Kant consiste en la afirmación y la negación de que el mundo está compuesto por elementos o sustancias simples; esto va más allá de simples enunciados acerca de espacio y tiempo, salvo que tengamos una concepción muy sofisticada de estos últimos, como parece haber sido el caso de Riemann.

su muerte, momento en que se manifestaba muy crítico hacia consideraciones de analogía y teleología como las que vamos a discutir en estos dos apartados.[37]

Una reflexión filosófica en torno a la psicología plantea, como es natural, el clásico problema de las relaciones entre mente o alma y cuerpo; la posición adoptada por Riemann es sintomática de su tiempo, y a la vez determinante para una parte de su teorización acerca del mundo físico. Un buena número de científicos del siglo XX han sido partidarios de un enfoque marcadamente reduccionista con respecto a los fenómenos mentales. Dichos fenómenos son, de acuerdo con esta doctrina, completamente explicables en términos de leyes o teorías de carácter físico y químico. Como suele decirse, los fenómenos mentales no son sino *epifenómenos* de procesos físico-químicos, a los que son reducibles. Naturalmente, el contenido preciso de esta doctrina variará según lo hagan las teorías físicas y químicas; en tiempos de Riemann, se concretaba en el *reduccionismo mecanicista*, ya que los procesos físicos y químicos se consideraban explicables en términos de átomos en movimiento bajo la acción de fuerzas centrales.

Se trataba de una posición de principio, que en la práctica exigía un *fiat*: la norma práctica era dejar de lado las cuestiones relativas a lo que tienen de específico los fenómenos mentales (por ejemplo, su carácter intencional, o la especificidad de las representaciones), concentrarse en aquellos procesos que pueden ser objeto de un análisis físico-químico (por ejemplo, la transmisión nerviosa de señales eléctricas), y confiar en que el avance en este último terreno acabe abriendo camino a progresos importantes en el terreno de explicar lo específicamente mental. En buena medida, todavía hoy estamos en esta situación de *fiat*.

FIG. 6. G. W. Leibniz (1646–1716), referencia constante en la obra de Riemann.

Las posiciones respecto al problema mente/cuerpo han variado mucho a lo largo de la historia, incluyendo por ejemplo dualismos radicales, como sucede en Descartes. Más interesante es la posición de Leibniz, un autor que tuvo su influencia en Riemann: en su opinión, la doctrina correcta es la contrapartida absoluta del reduccionismo mecanicista, pues Leibniz viene a defender que los fenómenos materiales no son más que epifenómenos de procesos mentales. Las sustancias simples de que está hecho el mundo son las mónadas, caracterizadas por actividades de tipo mental (percepción y apetición); las llamadas cualidades primarias no son menos "falsas" o aparentes que las secundarias: espacio, tiempo y movimiento no tienen mayor existencia real que colores y sabores. Riemann y los autores que en él influyeron, sin ser estrictamente leibnizianos, tienen bastante de herederos de esta tradición heterodoxa.

Leibniz planteó además una dificultad de principio frente a las normas prácticas de investigación del reduccionismo mecanicista. Hay que confesar, escribió,

> que la *percepción* y lo que de ella depende *es inexplicable por razones mecánicas*, es decir, por medio de figuras y de movimientos. Pues, si imaginamos que existe una máquina cuya estructura la haga pensar, sentir y tener percepción, se la podrá concebir agrandada, incluso con las mismas proporciones, de tal manera que se pueda entrar en ella como en un molino. Concedido esto, al visitarla por dentro no se encontrarán sino piezas que se empujan unas a otras, pero jamás algo con que explicar una percepción. Por tanto esto hay que buscarlo en la sustancia simple y no en lo compuesto o en la máquina.[38]

Claro está que la objeción se dirige contra el mecanicismo del XVII, y como tal no es aplicable sin más a un mecanicismo 'newtoniano' (de fuerzas) como era el del siglo XIX. En todo caso, la objeción de Leibniz presenta de modo claro una sospecha: que los fenómenos mentales deben ser objeto de investigación desde un principio, y no remitidos a una fase posterior de la indagación, a riesgo de no poder explicarlos nunca. Cuando menos, o que nos sugiere es que será imposible lograr una *reducción* estricta de las representaciones mentales a leyes físico-químicas simples. Esta idea ya resulta mucho más actual, porque hoy está bastante aceptado que

[37] Véase el fragmento 'Sobre los métodos a emplear en la fisiología de los órganos sensoriales' (1866).
[38] Leibniz, *Monadología* [1714], § 17.

el reduccionismo estricto es utópico, y que la explicación de fenómenos a niveles de organización más complejos exige el recurso a nuevas leyes y teorías.

Con lo dicho, nos hemos situado en una posición adecuada para comprender los planteamientos de Riemann y de quienes en él influyeron (junto a Herbart, otro autor que dejó una importante huella en él, y a quien encontramos citado en sus fragmentos, es el conocido científico y filósofo Fechner). En su teoría psicológica, Riemann trató de perfeccionar las ideas de Herbart sobre la manera en que las representaciones se asocian entre sí para dar lugar a nuestros fenómenos mentales, incluyendo nuestra imagen del mundo. Como ya dijimos (§ 2.1), la influencia de Herbart sobre Riemann se da al nivel de teorías psicológicas particulares, y no al de sus explicaciones últimas, metafísicas, acerca del alma y la realidad. Los procesos mentales tienen por base las interrelaciones o interconexiones entre representaciones: éstas pueden oponerse, o fundirse, o en general relacionarse en varios grados y formas.

Hay indicios de que el texto sobre psicología que el lector encontrará traducido debería datarse a comienzos de los años 1850. El fragmento comienza proponiendo algunas mejoras sobre las ideas de Herbart relativas a la dinámica (*sic*) de las representaciones mentales. Una primera novedad es que Riemann prefiere no hablar, estrictamente, de 'representaciones', sino emplear un término más general (ya sabemos que se sentía siempre insatisfecho si las expresiones utilizadas no gozaban de suficiente generalidad). Esto puede deberse a que el término 'representar' sugiere la presencia de un original y de una imagen, cuando no todos los fenómenos mentales involucran la copia de algo externo. Riemann nos dice que con cada acto mental simple, algo se nos presenta "como una unidad, pero parece contener (en tanto expresa o envuelve una extensión espacial y temporal) una variedad interna". Este algo es lo que llama una "*masa mental*" [Geistesmasse]; todo pensar es formación de nuevas masas mentales.[39] Este párrafo resulta llamativo es la presencia en él de la palabra "variedad" [Mannigfaltigkeit] en relación con algo que involucra una multitud de elementos ligados en una unidad, y que expresa una extensión espacial y temporal. La noción de variedad es clave en las teorías geométricas y topológicas de Riemann (§ 5), y veremos que se presenta incluso como concepto fundamental para la matemática (§ 4).

En otras ocasiones, Riemann conecta la presencia de una variedad con lo que técnicamente se llamaba (en lógica) extensiones de conceptos: la clase de los elementos asociados a un concepto general. Es llamativo que la idea matemática más fundamental, a juicio de Riemann, tenga conexiones tan explícitas con los elementos clave de su filosofía de la ciencia y su psicología. Tanto el análisis lógico de los *conceptos* —piezas básicas, según vimos, en la construcción de teorías— como el de toda la actividad mental, y en particular de las *percepciones* —base de toda corroboración o refutación experimental—, conducen a poner de relieve el papel central de las variedades en el conocimiento. Por tanto, la psicología y la epistemología de Riemann conducen a asignar una posición central a las variedades en su imagen del conocimiento científico y matemático (confirmada luego con su filosofía de la matemática).

Riemann piensa que las 'masas mentales' son permanentes, imperecederas, y que además subsisten sin necesidad de un soporte material. El hecho, señalado por Leibniz y enfatizado por Herbart, de la existencia de un amplísimo ámbito de vida mental subconsciente, desempeña también un importante papel en las especulaciones de Riemann. De ahí que afirme que las representaciones no tienen ningún efecto duradero sobre el mundo fenómenico: la inmensa cantidad de recuerdos, ideas y conocimientos que subsisten en mi mente, a nivel inconsciente, no parece tener ningún efecto sobre aquello de lo que soy consciente (el mundo fenoménico).

La forma más simple de actividad de las 'masas mentales' es su tendencia a reproducirse, a producir otra masa igual. Por otro lado, las masas mentales entran en relaciones mutuas, estimulándose o inhibiéndose según su afinidad o disimilitud (que sólo depende de sus condiciones internas o cualidades). Esto lleva a Riemann a analizar algo así como la formación de

[39] En la *Monadología* de Leibniz se encuentran ideas similares, a propósito de lo que llama en general 'percepción': "El estado pasajero que envuelve y representa una multitud en la unidad o en la sustancia simple no es otra cosa sino eso que se llama *percepción*, que se debe distinguir de la apercepción o de la conciencia, …" Leibniz [1714], §14; también § 16.

redes de representaciones: cada representación estimula a todas aquellas relacionadas con ella, y por tanto activa toda la red de representaciones ligadas tanto directa como indirectamente.[40] Dicho enfoque le induce a considerar el alma como

una masa mental compacta, ligada consigo misma de la manera más íntima y variada.

Ahora bien, esos mecanismos bastan para explicar la estrecha conexión y compenetración entre todas nuestras representaciones, y parecen hacer superfluo el supuesto adicional del alma como portador unitario de las representaciones. Ideas que podrían muy bien ser lo que está detrás de la cuarta antinomia de Riemann: la inmortalidad de la vida mental (o de la masa mental más inclusiva) le parece natural y fácil de explicar, aún sin asumir la existencia del alma como substancia o cosa en sí.

Puede parecer que la tesis de la permanencia de lo mental, subsistiendo sin necesidad de un soporte material, es fuertemente espiritualista; pero hay indicios de que no es exactamente ésta la situación en Riemann. Aunque las 'masas mentales' subsisten sin soporte material,

toda entrada o nacimiento, toda formación de una nueva masa mental, y toda reunión de las mismas, requiere un soporte material. Todo pensar sucede pues en un cierto lugar.

Este supuesto se hace necesario, según Riemann, a la vista de los hechos fisiológicos conocidos ya en aquel tiempo, en particular el papel del "sistema cerebro-espinal" y los procesos físico-químicos en el pensamiento. Además, según él, explica experiencias cotidianas, como por ejemplo las relaciones que se establecen (en la memoria) entre una representación y las formadas inmediatamente antes. Por último, explica los efectos materiales del pensamiento: como toda representación tiende a reproducirse, tiende también a restablecer aquella forma de movimiento de la materia en la que fue constituida.

Vemos pues esbozada la posición de Riemann sobre las relaciones entre alma o vida mental y materia, unas relaciones que podrían llamarse de dependencia dinámica pero independencia sustancial.[41] Las ideas de Riemann acerca de la relación entre los procesos materiales y los mentales fueron muy importantes en sus especulaciones físicas, al menos en un primer momento, como veremos al comentar un texto suyo sobre física de 1853. Más adelante, Riemann establecería nuevos desarrollos de sus tesis, a los que nos referiremos después, dejado en segundo plano la interrelación alma/materia. Esto nos recuerda un problema que está siempre presente al hablar de sus escritos filosóficos, y es que no resulta posible discriminar hasta qué punto pudo abandonar esas ideas en sus últimos años (véase § 2.4 y § 3).

Los fragmentos reunidos por los editores de las obras de Riemann, Dedekind y Weber, pasan a continuación a un tema sorprendente: la hipótesis del alma de la Tierra. Nuestro autor no se plantea este tema de una manera literaria, o como una especulación ligera, sino que se toma esa hipótesis con toda seriedad, tratando de someterla a un riguroso análisis de carácter estrictamente científico. Su discusión sobre la asignación de un alma al conjunto de los procesos que acontecen en (como diríamos hoy) la biosfera terrestre, se basa en parte en sus doctrinas psicológicas ya vistas, y en parte en argumentos relativos a la finalidad de los procesos biológicos. Por este motivo, la trataremos en el apartado siguiente.

2.4. Finalidad. A comienzos de los años 1850, cuando sin duda escribió estos textos, Riemann no ponía en duda la existencia de claros indicios de finalidad o teleología en el mundo orgánico. Nadie negará, escribe, que sobre la Tierra "se observa una intencionalidad": se refiere a la existencia de seres vivos y al "desarrollo histórico del mundo orgánico". Estos textos fragmentos dejan claro que Riemann estaba bastante al día en temas biológicos, y resulta

[40] Leídas anacrónicamente, estas ideas tienen mucha actualidad ahora que, junto al modelo computacional clásico, han surgido con fuerza los modelos de redes neurales.

[41] Incluso esto tiene su contrapartida en la *Monadología*, ya que Leibniz niega la existencia de almas completamente separadas de un cuerpo, cosa que considera un prejuicio escolástico ([1714], § 72).

probable que haya visitado cursos en Gotinga, quizá de Henle, un importante fisiólogo de la época. Así, no hay duda de que Riemann está planteándose la explicación de pruebas históricas de la evolución, como la existencia de fósiles. La evolución se entiende aquí en un sentido típicamente romántico, como un desarrollo progresivo y guiado por fines: en el transcurso de la vida orgánica sobre la Tierra, "surgen organismos siempre nuevos y más perfectos", progresando "hacia niveles superiores". Pero conviene recordar que, en su último escrito,[42] Riemann se manifiesta muy escéptico con respecto a los argumentos teleológicos y analógicos; como veremos, quizá haya que ver sus especulaciones sobre el alma de la Tierra como un trabajo de juventud.

La argumentación de Riemann es clara. Le parece "absurdo" suponer que lo orgánico puede haber surgido de lo inorgánico, sin que intervenga un "principio de organización" especial. Esta idea era un lugar común en su tiempo, y muchos recurrían a postular una fuerza más de la naturaleza, la *fuerza vital*, como explicación.[43] Es interesante ver que Riemann evita esa proliferación de fuerzas, cosa que es coherente con su interés duradero en la unificación. Una actuación según fines a los que se tiende, y con medios adecuadamente elegidos, sólo es posible si hay una capacidad representacional, una facultad que permita representarse los fines deseados y los medios posibles. Así, dice Riemann, la presencia de una intencionalidad bien ordenada sólo puede deberse a un "proceso de pensamiento" que constituye su causa; si el mundo orgánico manifiesta una finalidad, la única explicación se encontrará en un proceso unitario de pensamiento, un alma. A lo largo de la vida de la Tierra, "las experiencias reunidas previamente sirven de base a las creaciones posteriores", para la aparición de organismos nuevos y más perfectos. Se trata pues de un proceso de pensamiento que tiende a la perfección, "progresa hacia niveles superiores", y con ello explica la evolución progresiva.

Ahora bien, Riemann está convencido de que sólo podemos buscar el sustrato de la actividad mental "en la materia ponderable". Por desgracia, sus manuscritos no han dejado constancia de las razones en que apoyaba esta tesis. El alma o proceso de pensamiento de la Tierra requiere pues una localización. Dado que los hechos geológicos de la corteza terrestre parecen explicables según causas mecánicas, hay que suponer que ese alma se localiza en el interior de la Tierra. A continuación, Riemann trata de mostrar que las condiciones del interior terrestre son adecuadas para el desarrollo de un proceso mental, basándose en múltiples datos biológicos y fisiológicos. Es notable lo detallado que es su desarrollo de esta parte y los conocimientos de fisiología que presupone. Probablemente Riemann manejaba el *Manual de anatomía humana* de Henle, citado también en su escrito de 1866 sobre el oído. En todo caso, dejamos al lector los detalles del tratamiento "científico" que da a la hipótesis del alma de la Tierra, que juzga perfectamente adecuada "desde el punto de vista de la ciencia natural exacta".

Vale la pena recordar que la idea del alma de la Tierra tenía una larguísima tradición. Puede remontarse al Alma del Mundo que postulaba el filósofo neoplatónico Plotino (en el siglo III), siendo importante posteriormente en la tradición hermética, y por tanto en el Renacimiento. Es una idea perfectamente compatible con el espíritu de la *Monadología* de Leibniz, quien no en vano tenía fuertes influencias renacentistas,[44] y desempeña un papel central en Fechner, autor citado extensamente por Riemann. Por si fuera poco, se encuentra en una obra tan central de la cultura alemana como el *Fausto* de Goethe: en la primera escena de la obra, Fausto consigue atraer al Espíritu de la Tierra, absorviéndolo "lejos de su esfera" con la ayuda de un libro misterioso de Nostradamus. Antes de desaparecer de la vista del aterrado Fausto, el Alma dice:

---

[42] 'Mecánica del oído', cuyo primer apartado sobre metodología encontrará traducido el lector.

[43] Es el caso, por ejemplo, del famoso químico Liebig.

[44] Leibniz, *Monadología* [1714], § 70: "Según esto, vemos que cada cuerpo viviente tiene una entelequia [o mónada] dominante, que en el animal es el alma; pero los miembros de ese cuerpo vivo están llenos de otros vivientes, plantas, animales, cada uno de los cuales tiene también su entelequia o alma dominante." Parecería incoherente no pensar que, inversamente, nuestros cuerpos y almas no son sólo partes de otros cuerpos y almas más incluyentes.

En las mareas de la vida, en la tempestad de la acción, subo y bajo en oleadas, me agito de un lado para otro. El nacimiento y la sepultura son un mar eterno, una trama cambiante, una vida candente que voy tejiendo en el veloz telar del tiempo, para hacerle a la divinidad su manto viviente.[45]

Pero dejemos al literato-científico Goethe y volvamos al contexto inmediato del trabajo de Riemann.

El contexto histórico de esas páginas manuscritas del matemático es la polémica sobre idealismo y materialismo que se estaba desarrollando en Alemania. Tras caer el idealismo absoluto de Schelling y Hegel, el segundo tercio del siglo fue testigo de un rápido auge del positivismo de origen francés, acompañado de ideas materialistas o al menos mecanicistas. Pero las tendencias románticas no desaparecieron de golpe, y surgieron intentos más o menos logrados de armonizar las ideas científicas habituales con una concepción teleológica del mundo. Aunque este tipo de ideas son ajenas a Herbart, se encuentran en autores influidos por él como el filósofo de Gotinga Hermann Lotze, y también en el filósofo y científico Fechner, uno de cuyos libros va a glosar Riemann. Además, estos intentos cuentan con el precedente notable de Leibniz, que en su *Monadología* escribía:[46]

Las almas actúan según las leyes de las causas finales, … Los cuerpos actúan según las leyes de las causas eficientes, … Y los dos reinos, el de las causas eficientes y el de las causas finales, son armónicos entre sí.

Esta es la idea esencial que van a tratar de actualizar y desarrollar Lotze y Fechner.

La doctrina mecanicista defendía que todos los fenómenos del mundo natural pueden explicarse haciendo uso de modelos mecánicos. En esta época, por supuesto, hablar de "mecánica" era hablar de newtonianismo, de manera que por "modelo mecánico" hay que entender un modelo diseñado según principios generales similares a los que están en juego en la física de Newton. De modo muy simplificado, puede decirse pues que se trata de modelos integrados por cuerpos en movimiento bajo la acción de fuerzas; o con algo más de detalle, los ingredientes a emplear serían espacio y tiempo, átomos materiales, y fuerzas centrales de acción a distancia.[47] Se pensaba que esto era suficiente para explicar todos los fenómenos de la física, aunque naturalmente un autor tan poco doctrinario como Riemann no podía estar de acuerdo con esa concepción (véase el § 3). Y no sólo los fenómenos físicos: hacia 1840 surgió una poderosa corriente en fisiología que proclamaba que las funciones vitales no son más que la expresión de leyes físicas y químicas generales.

Este enfoque está ligado a grandes nombres como los de Helmholtz o du Bois-Reymond, cuyas obras fueron clave para la renovación de la fisiología. Sin embargo, el primer gran proponente del mecanicismo fisiológico no fue otro que Lotze, doctor en medicina y filosofía por Leipzig, y luego profesor de filosofía en Gotinga. Tanto en su manual de patología general publicado en 1842, como en un famoso artículo sobre 'Fuerza vital' de 1843, Lotze defendió de manera radical el mecanicismo. Afirmaba el "dominio universal del punto de vista mecánico", y decía que la vida es la suma de procesos no vitales, el conjunto de los procesos que produce el cuerpo entero.[48] Diversos autores, como Vogt y Büchner, se apoyaron en este tipo de ideas para proclamar las doctrinas del materialismo; fueron los defensores de lo que Marx dio en llamar materialismo vulgar. Todo ello causó una intensa polémica que se desarrollaría ante todo en los años 1850, y que calentó el ambiente para la recepción de las doctrinas de Darwin. Por ejemplo, en la reunión de la Asociación Alemana de científicos y médicos que tuvo lugar en Gotinga en 1854, y en la que participó Riemann, hubo una sonada discusión en torno a las ideas de Vogt. El ilustre fisiólogo Rudolf Wagner, que había planteado una teoría del alma bastante más peregrina que la de Riemann, habló 'Sobre la creación del hombre y la substancia del alma'. En los meses

[45] Goethe, *Fausto* [1808] (Madrid, Espasa Calpe, 1998), 67; trad. Miguel Salmerón.
[46] Leibniz *op. cit.* [1714, § 79].
[47] Según el gran fisiólogo Emil du Bois-Reymond, comprender la naturaleza sólo puede significar el referir todos los cambios en el mundo corpóreo a la mecánica de los átomos ('Über die Grenzen des Naturerkennens', 1872). Citado por Heidelberger, 'The Unity of Nature and Mind: G. T. Fechner's non-reductive materialism', 215.
[48] Véase K. Caneva, *Robert Mayer and the Conservation of Energy* (Princeton University Press, 1993), 119–25.

siguientes, el asunto siguió discutiéndose en círculos cada vez más amplios, con Vogt criticando los planteamientos de Lotze y Wagner, y con la intervención de muchos otros autores.[49]

Los representantes de la ciencia académica estuvieron en general lejos de apoyar el materialismo radical, y el propio Lotze, ya en su papel de filósofo, se encargó de idear un sistema que establecía una "mediación" entre el mecanicismo científico y cierta forma de idealismo filosófico. Afirmando que el mecanicismo desempeña un papel esencial en la estructura del mundo, y que su presencia es universal, estipulaba a la vez que su significación es estrictamente subordinada. Los objetos y los métodos de la ciencia exigen una aproximación mecánica, causal y determinista, pero el mecanicismo está al servicio de algo superior, hacia lo que tiende, que lo envuelve y le da fundamento. Esto lo había afirmado explícitamente ya en su mencionado artículo sobre la 'Fuerza vital', al decir que las objeciones religiosas al mecanicismo son infundadas:

> Se olvidan de que este mecanismo no ha surgido por su propia virtud, sino que la sabiduría de Dios lo creó, y lo ha encargado, como al más fiel sirviente que nunca se abandona a su propio placer, de realizar las ideas de la Naturaleza.[50]

Los productos de las leyes mecánicas de la Naturaleza son estrictamente dependientes de la ordenación y organización de las masas individuales, o, como diríamos hoy, de las condiciones iniciales de su aplicación. Aquí es precisamente donde interviene la creación divina. Además, nuestra experiencia de la actividad del alma es la manifestación más clara de la espiritualidad y finalidad en el mundo. La doctrina de Lotze (llamada, quizá impropiamente, "idealismo teleológico" o incluso teísta, pero también espiritualismo) culminaba en la afirmación de una esencia espiritual del mundo, raíz de la finalidad última de todas las cosas.[51] Aunque carecemos de datos ciertos respecto a las lecciones de filosofía que siguió Riemann hacia 1850, hay que suponer que serían precisamente las de Lotze, que no en vano fue el principal filósofo de Gotinga en vida de Bernhard y hasta 1881. En todo caso, sus doctrinas nos ofrecen un buen punto de partida para comprender las especulaciones de Riemann, que fue un hombre de su tiempo, como no podía ser menos.

Pero el autor que, según nos consta, influyó en él durante su juventud fue Gustav Theodor Fechner (1801–1887), quien había realizado trabajos de importancia en física experimental y fue profesor de esa disciplina en Leipzig, antes de orientarse hacia la filosofía, la psicología y la antropología. El nombre de Fechner está ligado también a los de Weber y Lotze. Fechner y los hermanos Weber fueron buenos amigos, ya antes de que (en los años 1840) Weber le sustituyera como profesor de física en Leipzig; en cuanto a Lotze, fue alumno de Fechner y recibió su influencia. El caso es que Fechner elaboró doctrinas muy originales que son una expresión característica del romanticismo (no idealista) alemán y de los intentos de armonización que estamos describiendo. Quiso conciliar el "más puro materialismo" con la idea de que hay una "animación superior" en el universo.[52] Para ello, desarrolló la sugerencia de Leibniz (véase más arriba) estipulando que ni lo mental se reduce a lo material, ni tampoco lo material a lo mental, sino que ambos son aspectos complementarios –percibidos desde distintos puntos de vista– de una unidad. Lo que en un campo se nos manifiesta de manera causal y determinista, en el otro resulta ser la expresión de una intencionalidad. Además, no hay fenómenos mentales sin cambios físicos, ni tampoco fenómenos materiales sin un aspecto psíquico asociado; es lo que él llamaba "paralelismo psicofísico", aunque podría ser mejor el nombre de *dualidad* psicofísica.

---

[49] Sobre este tema puede verse el libro de F. Gregory, *Scientific Materialism in Nineteenth Century Germany* (Dordrecht, Reidel, 1977).

[50] En Caneva, *op. cit.* [1993], 121.

[51] Todavía en 1851, Lotze publicó una *Fisiología general de la vida corporal*, y en 1853 la *Psicología médica o fisiología del alma*; estos fueron sus últimos libros no estrictamente filosóficos.

[52] Heidelberger, *op. cit.* [1994], 216.

Trabajando en esa dirección, Fechner realizó investigaciones empíricas en psicología y estableció la famosa “ley psicofísica” de Weber y Fechner.[53]

La dualidad alma-materia se defiende en su libro *Nanna, o acerca de la vida anímica de las plantas* (1848), donde afirma que no sólo los hombres y los animales, sino también las plantas tienen alma; y se desarrolla en *Zend-Avesta, o sobre las cosas del cielo y del más allá* (1851), considerado su obra filosófica cumbre. Para justificar sus tesis, Fechner estableció extensos catálogos de síntomas que indican la existencia de una actividad anímica, de una *Selbstercheinung* (auto-apariencia, o apariencia interna). Así, cuando en *Zend-Avesta* afirma que los astros y el propio universo tienen alma, lo basa en que estos entes presentan características físicas y fenoménicas que son claros síntomas de ello (como ser sistemas unitarios, relativamente cerrados, con características individuales, preservar su integridad, o provocar una variedad de efectos parcialmente impredecibles). No deja de ser llamativo y significativo que Riemann comenzara a escribir una especie de recensión de *Zend-Avesta*, probablemente el mismo año en que presentaba su tesis doctoral. Pero es significativo también que, en esta recensión, se limita a discutir la idea del alma de la Tierra (considerando las otras muy especulativas) y abandona el método analógico de Fechner, en favor de una metodología científica usual.

De todos modos, las ideas metodológicas que plantea Riemann en esa recensión no encajan bien con sus textos posteriores, porque son de corte inductivista. Habla de una abstracción de leyes naturales por inducción, y una posterior comprobación de las mismas en la explicación natural. Frente a esto, ya desde 1853 (véase § 3) sus escritos adoptaron un punto de vista marcadamente hipotético-deductivo, con las características que vimos en una sección anterior. Y el fragmento de 1866 sobre metodología en el campo de la fisiología es explícito a este respecto, incluyendo varias referencias críticas a la arbitrariedad que inevitablemente afecta a los argumentos de analogía y teleología.

3. Riemann físico.

> Cuando oses algo nuevo, sé tan preciso como puedas; mas ten también
> Plena certeza de que lo mirarán de reojo y te interpretarán mal.
> Pues estás incurriendo en la terrible falta de la novedad,
> Y no se ha hecho aún la horma a la que aquello se ajuste.[54]

En 1850, Riemann no sólo entró en el Seminario físico-matemático del que ya hemos hablado, sino también era miembro de un Seminario pedagógico que existía en la Universidad. En Noviembre de ese año escribió para este seminario un trabajo titulado ‘Sobre la extensión, ordenación y método de la enseñanza científica en los *Gymnasia*’. Aquí se encuentra una frase críptica, pero sumamente característica, sobre la que llamó la atención Dedekind:

> Así, por ejemplo, es posible establecer una teoría matemática completa y cerrada en sí misma, que progrese desde las leyes elementales válidas para puntos aislados hasta los procesos que se dan en el espacio o pleno continuo que nos viene dado en la realidad, sin distinguir si se trata de fuerzas gravitatorias, o de electricidad, o de magnetismo, o del equilibrio calorífico.

Tenemos ahí una clara expresión del principio que guiaría toda su especulación física: la búsqueda de una teoría unificada de las distintas fuerzas, sobre el supuesto de un pleno espacial continuo en el que sólo se dan acciones por contacto. Riemann niega toda acción a distancia, y por tanto intenta explicar los fenómenos perceptibles como el resultado de leyes elementales de

---

[53] Se trata aquí de Ernst H. Weber, hermano mayor del físico Wilhelm, con quien escribió un libro sobre la mecánica del aparato locomotor humano (1836).

[54] Klopstock, epigrama 67, anotado por Riemann, *Werke. Nachträge*, 113.

carácter local. Como diría más tarde, en sus primeras lecciones universitarias sobre ecuaciones en derivadas parciales (1854/55):

> Las leyes verdaderamente elementales sólo pueden ocurrir en lo infinitamente pequeño, sólo para puntos del espacio y el tiempo.[55]

Estas ideas constituyen un auténtico *leit-motiv* en la obra de Riemann. El esfuerzo por analizar los fenómenos globales desde el punto de vista local no sólo caracteriza su especulación física: es típico de su aproximación a la teoría de funciones complejas, diseñada en la tesis doctoral de 1851, es central en el enfoque geométrico que esbozó en la famosa lección inaugural de 1854, y se expresa en las ideas metafísicas y psicológicas que defendió.

Las cuestiones de física le ocuparon mucho durante los años 1850, retrasando sus trabajos de doctorado y habilitación; de hecho, da la sensación de que en los comienzos de su carrera científica apostó más de una vez por un futuro como físico, o al menos como físico matemático, con buenas dosis de teórico. Un claro indicio de la atención que dedicó a estas cuestiones se encuentra consultando la lista de tesis que al parecer propuso para su *disputatio* doctoral en 1851. Se trata de una prueba que perduró durante mucho tiempo en Alemania, y en la que, a la manera medieval, el doctorando proponía y defendía frente a varios oponentes una serie de ideas clave. Las tesis, tal como se recogen en un borrador encontrado entre sus papeles, eran éstas:[56]

1) No existen fluidos magnéticos.
2) La "inducción en líneas curvas" de Faraday es insostenible.
3) Se puede anteponer el cálculo diferencial al análisis, sin perdida de generalidad.
4) El péndulo de reversión no es el medio más idóneo para determinar la longitud de un péndulo.
5) La doctrina de la conservación de la fuerza no está suficientemente contrastada desde el punto de vista experimental.
6) El concepto de tensión no se ha concebido todavía con la precisión requerida en la teoría eléctrica.

Resulta muy notable que el gran matemático sólo propusiera una tesis correspondiente a su disciplina; las cuestiones tratadas muestran que estaba al día en física, y revelan además que se interesaba tanto por cuestiones teóricas como experimentales. Vale la pena comentar algunas, siquiera brevemente.

FIG. 7. Weber (1804–1891), maestro de Riemann en física.

---

[55] Citado en Archibald, 'Riemann and the Theory of Nobili's Rings', *Centaurus* **34** (1991), 269.
[56] Riemann *Werke. Nachträge*, 112.

El viejo postulado de los fluidos magnéticos se mantenía todavía en las teorías de Poisson, mientras que la tesis 1) está en línea con las ideas de Ampère o de Weber, apuntando a la unificación electromagnética. La tesis 2) resulta muy interesante: daría la sensación de que, en línea con autores alemanes como Fechner y Weber, Riemann considera que imposible elaborar una teoría que elabore matemáticamente, en forma directa, las nociones introducidas por Faraday; apuesta pues por una reinterpretación en términos de acciones en dirección central (como Ampère y Weber, que emplean fuerzas centrales). Retrospectivamente, se encuentra aquí el mayor *handicap* de los teóricos alemanes del electromagnetismo: la relativa desconfianza frente a las especulaciones teóricas de Faraday, y el estar demasiado directamente en la tradición física newtoniana y francesa. Por otro lado, la tesis 6) apunta ya, posiblemente, a temas característicos de la filosofía natural de Riemann, desarrollados en un trabajo de 1854 que se publicó póstumamente (ver [Riemann 1892, 370–71]). Finalmente, la mención en 4) de la doctrina de la conservación de la energía (o "fuerza", como se decía aún) es interesante por varios motivos. Se trataba de una contribución teórica de primera magnitud, pero muchos físicos (Maxwell inclusive) se mostraban reticentes igual que Riemann; fue sobre todo en el último tercio del siglo cuando el principio de conservación de la energía pasó a dominar el panorama de la teoría física; por otro lado, Helmholtz había planteado dificultades para la ley electrodinámica fundamental de Weber, no del todo justificadas. (En cualquier caso, cuando menos en lecciones de 1861 Riemann empleaba ya como base de sus desarrollos teóricos el principio de conservación.)

Antes de seguir adelante, conviene indicar que la coexistencia, en el doctorado de Riemann, de problemas de teoría de funciones y cuestiones de física matemática puede ser mucho más que una simple coincidencia, apuntando a una conexión orgánica. Ya Felix Klein, en 1882, señaló que puede encontrarse una conexión directa entre los trabajos eléctricos de Riemann y su teoría de funciones, en especial el artículo sobre las funciones abelianas (1857). La versión particular de esta tesis que dio Klein ha sido disputada por otros autores, pero la idea general no parece sino confirmarse. Parece ser que Riemann aseguró a sus amigos italianos que "había sido llevado a su teoría analítica y su modo de pensar [en teoría de funciones] tras tratar con cuestiones y problemas de física".[57] Al respecto hay puntos claros como la conexión que estableció entre teoría del potencial y teoría de funciones, la influencia de la obra de George Green sobre los métodos empleados en el trabajo de 1857, o los orígenes de la idea de 'corte transversal' (véase § 6.2). En un artículo reciente se señala asimismo que una obra de 1854 sobre los anillos de Nobili, de la que luego hablaremos, presenta métodos característicos de la teoría de funciones de Riemann:[58] la determinación de las funciones por su comportamiento en singularidades, los principios empleados para establecer la continuación analítica de la función en el resto del dominio, y el tratamiento de problemas de valores frontera al estilo de Dirichlet. Volveremos a estas cuestiones en la sección 6.

Según Dedekind, a comienzos de 1853 Riemann se concentró de manera casi exclusiva en temas de "filosofía natural", de modo que sus ideas alcanzaron una forma madura. A fin de año escribía a su hermano Wilhelm que, en dichas investigaciones, había "llegado tan lejos, que sin dudar podría publicarlas en esta forma" [Dedekind 1876, 547]. En breve comentaremos las ideas centrales de la reelaboración de la física que planeaba. De momento, nos interesa continuar señalando algunos datos sobre su actividad. En 1854 conoció a Rudolf Kohlrausch cuando éste pasó un par de semanas en Gotinga, realizando experimentos eléctricos con Weber. Riemann participó en dichos experimentos, y le comunicaba a su hermano lo siguiente:

> Kohlrausch había realizado y publicado algún tiempo antes mediciones muy precisas de un fenómeno hasta entonces inexplorado (la carga eléctrica residual en la botella de Leyden) y yo encontré la explicación del mismo a través de mis investigaciones generales sobre las interrelaciones entre electricidad, luz y magnetismo. Hablé con K. sobre ello y esta fue el motivo de que desarrollara para él la teoría de este fenómeno y se la enviara. Kohlrausch me ha

---

[57] Bottazzini & Tazzioli, 'Naturphilosophie and its role in Riemann's mathematics', *Revue d'histoire des mathématiques* **1** (1995), 10.

[58] Archibald *op. cit.* [1991], 260.

respondido muy amablemente y me ha ofrecido enviar mi trabajo a Poggendorff, el editor de los *Annalen der Physik und Chemie*, para su publicación, invitándome a visitarle en las vacaciones de otoño para proseguir la cuestión. La cuestión es importante para mí porque es la primera vez que puedo aplicar mis trabajos a un fenómeno no conocido previamente, y espero que la publicación de este trabajo contribuirá a procurarle una buena acogida a mi trabajo mayor.[59]

Todo indica que el "trabajo mayor" son las ideas que se recogen en los fragmentos que publicamos bajo el título de 'Filosofía natural'; de hecho, los fragmentos escritos en 1853 están redactados al modo de un artículo preparado para la imprenta.

Todavía en 1854, Riemann presentó una comunicación en la reunión de la Sociedad Alemana de Investigadores de la Naturaleza, sobre la propagación eléctrica en cuerpos no conductores. Un aspecto interesante de estos trabajos es que Riemann abandona la hipótesis dualista para la carga eléctrica, defendida por Weber, por la hipótesis unitaria de Franklin, según la cual sólo hay un tipo de electricidad (negativa). Además, Riemann trata de explicar los fenómenos eléctricos suponiendo una tendencia de los cuerpos a persistir en su estado eléctrico, idea íntimamente relacionada con sus especulaciones sobre el éter, de las que luego hablaremos.[60] Pero, aunque su relación con Kohlrausch continuó, el artículo antes mencionado no llegó a publicarse, al parecer porque Riemann no quiso aceptar algunas modificaciones que se le habían propuesto. Aún así, los *Annalen der Physik und Chemie* fueron la primera revista importante en la que publicó un artículo original, 'Sobre la teoría de los anillos de Nobili' (1855).

Los anillos coloreados de Nobili son un fenómeno electroquímico descubierto por el científico italiano en 1825, que a mediados de siglo atrajo la atención de diversos especialistas. Empleando un electrodo plano, se producen depósitos electrolíticos en forma de bandas concéntricas coloreadas; el caso es de interés ya que permite analizar con precisión la forma en que la corriente eléctrica se propaga a través del electrolito, es decir, la propagación de la electricidad a través de un conductor que no es filiforme, sino extenso. El tratamiento dado por Riemann a la cuestión era de un gran refinamiento matemático, buscando evitar la introducción de supuestos simplificadores, para así poder contrastar con todo rigor las ecuaciones diferenciales básicas, de carácter local o infinitesimal. Inicialmente, la teoría del fenómeno se había tratado de una manera muy cruda, hasta que el gran fisiólogo Emil du Bois-Reymond logró, en 1847, proponer un modelo matemático más sofisticado y fiable, aunque aproximado. Ahora bien,

El procedimiento de Riemann es muy distinto de los anteriores. Aquí las matemáticas son de interés primario, y de hecho se requería una gran cantidad de conocimiento especializado para entender los detalles del tratamiento de Riemann, no digamos ya para producirlo. La obra de Riemann sigue claramente los pasos de Dirichlet; como en otros autores influidos por Dirichlet (entre ellos Kirchhoff, Lipschitz, y muchos otros), el enfoque de Riemann es a través de ecuaciones diferenciales parciales y problemas de valores frontera.[61]

De hecho, un colaborador de du Bois-Reymond admitió, tras analizar el asunto, que el modelo matemático de Riemann daba un ajuste tan grande con las mediciones, que hacía innecesaria la búsqueda de circunstancias adicionales para la explicación del asunto [op.cit. 267].

Pero, antes de seguir adelante, es hora de que presentemos las ideas de Riemann respecto al tratamiento de las fuerzas físicas fundamentales, contenidas principalmente en los fragmentos sobre 'Filosofía natural'. Lo que Riemann pretendía aquí, queda claramente expresado en el ambicioso título de su escrito de 1853: elaborar unos *Nuevos principios matemáticos de la filosofía natural*, reformular la física yendo más allá de Newton. Como dijo en la lección sobre geometría de 1854, la tarea era:

---

[59] Dedekind *op. cit.* [1876]. 548–49.
[60] Véase Riemann, *Werke*, 370–71.
[61] Archibald *op. cit.* [1991], 268.

abandonar la anterior concepción de los fenómenos cuya base estableció Newton, bien contrastada en la experiencia, y reformarla gradualmente merced a los hechos que no permite explicar.

Una vez más queda claro el atrevimiento de Riemann como pensador y científico, la osadía y carencia de prejuicios que –como escribió Dedekind– había llegado a desarrollar.

Es habitual decir que Riemann pretendía una formulación matemática unificada de las leyes de todos los fenómenos físicos principales que se conocían en su tiempo. Esto es cierto, pero no debemos olvidar que sus escritos constituyen una auténtica especulación teórica, guiada no sólo por la matemática, sino también por consideraciones físicas y filosóficas. Si, por ejemplo, revisamos el apartado que más arriba dedicamos a la epistemología de Riemann (§ 2.2), veremos que aquí encuentran plena aplicación aquellas ideas. Las teorías científicas son sistemas conceptuales que se derivan de la experiencia, pero en las que siempre hay elementos añadidos por el pensamiento: hipótesis. Esos sistemas deben ser refinados y mejorados gradualmente, proceso en el que nos guían aquellas predicciones que, a la vista de los hechos de experiencia, resultan inaceptables o al menos improbables. Al final del fragmento 'Sobre epistemología' se señala que los propios axiomas o leyes del movimiento de Newton son hipótesis:

No me parece admisible la distinción que hace Newton entre leyes del movimiento, o axiomas, e hipótesis. La ley de inercia es la hipótesis: si un punto material se encontrara sólo en el mundo y se moviera en el espacio con una cierta velocidad, mantendría continuamente esa velocidad.

Entre los elementos que el pensamiento ha añadido a lo dado, en el sistema conceptual newtoniano, hay algunos muy poco satisfactorios. Es el caso, sobre todo, de la idea de fuerza a distancia: como dice Riemann, el empleo generalizado de dicha idea no se debe a una evidencia inmediata ni a una especial simplicidad (salvo en casos particulares), sino más bien a la costumbre y a la autoridad de Newton. La ley de atracción newtoniana se ha tenido durante mucho tiempo por algo que no admite explicación ulterior, contra la propia opinión de su descubridor. Y aquí, Riemann cita con evidente satisfacción la carta a Bentley donde Newton declara absurda la idea de que la gravedad sea innata, inherente y esencial a la materia.

Riemann pretendía, pues, dar una nueva explicación de la gravitación, más satisfactoria desde el punto de vista físico y filosófico; le guiaban, según veremos, las reflexiones previas de Newton y del gran matemático Euler. Como ha dicho el eminente historiador de la física Norton Wise,

Siempre buscó unificar la naturaleza sobre la base de un sistema, concebido geométricamente, de procesos dinámicos continuos en el éter, fundamentando su descripción en ecuaciones diferenciales que describían los procesos de relación que se podían percibir directamente, esto es, las fuerzas y las interconversiones de fuerzas. Su proyecto fue probablemente el primer intento de una teoría del campo unificada sobre una base matemática, muy en el espíritu de los intentos posteriores de Einstein, y le asignó mayor importancia incluso que a sus esfuerzos en matemática pura, hoy famosos.[62]

Riemann busca la explicación de la gravedad en el movimiento de "una sustancia extendida continuamente por todo el espacio infinito", que "puede imaginarse como un espacio físico, cuyos puntos se mueven en el geométrico". Frases notables, que avanzan en una dirección claramente moderna: a Riemann se le puede aplicar lo que Maxwell dijo de Faraday, que vio un medio en donde los anteriores sólo veían distancia, y acciones reales propagadas por el medio donde aquéllos postulaban fuerzas de atracción instantáneas.[63] Por otro lado, Riemann intentaba desarrollar en esta misma dirección los trabajos de su maestro Weber en el campo del electromagnetismo.

---

[62] Norton Wise, 'German concepts of force, energy, and the electromagnetic ether: 1845–1880', en Cantor y Hodge, eds., *Conceptions of ether* (Cambridge University Press, 1981), 267–307; cita en p. 289.

[63] Citado por José Manuel Sánchez Ron en Maxwell, *Escritos científicos* (Madrid, CSIC, 1998), xxxix–xl. Riemann conocía los escritos de Faraday, prontamente traducidos al alemán, pero su teoría se desvía de propuestas clave del inglés.

Comentemos pues el fragmento de 1853, *Nuevos principios matemáticos de la filosofía natural*. La idea básica de explicar la gravitación en términos del movimiento de un éter que llena el espacio había sido avanzada por Newton y por Euler. Ya en el propio 'Escolio General' a sus *Principia*, Newton sugería el recurso a "cierto espíritu sutilísimo" como principio explicativo, pero renunciaba a ello por su dificultad y la falta de base experimental; la idea del medio etéreo resurgía con fuerza en la Cuestión 21 de su *Óptica*.[64] Euler desarrolló esta sugerencia en detalle, si bien entendiendo el éter no al modo de Newton, sino en el sentido cartesiano de un pleno continuo. Encontró que, suponiendo que el éter es un fluido ideal, el cual soporta una enorme presión (de unos 20 millones de atmósferas), no opondrá resistencia al paso de los cuerpos y sólo podrá afectarles a través de la presión que ejerce. De hecho, Euler calculaba que, si la presión del éter en torno al Sol decrece en proporción a $-\frac{1}{r}$, la fuerza ejercida sobre un cuerpo es proporcional a la gravitación en magnitud y dirección.[65]

FIG. 8. Isaac Newton (1642–1727) y Leonhard Euler (1707–1783).

La idea del éter alcanzó una gran fortuna, aunque fue empleada de manera oportunista, postulándose múltiples éteres independientes (eléctrico, magnético, calórico, etc.) para explicar las diversas acciones físicas. Sólo comenzó un tratamiento teórico más serio, buscando la unificación, hacia 1840, estimulado particularmente por la teoría ondulatoria de la luz y las incipientes ideas acerca de la interconversión de las fuerzas y la conservación de la energía. La obra de Riemann se inscribe en este contexto, y constituye el primer intento de una gran unificación basada en la noción de un único *campo de éter*. Hay que aclarar que otros autores, como Faraday y Mayer, elaboraban la idea –que nos parece más contemporánea– de un campo de fuerzas; pero este concepto fue rechazado con especial determinación por los autores de habla alemana, dado que recordaba las denostadas especulaciones de la *Naturphilosophie* idealista.[66] En todo caso, el concepto del éter siguió teniendo un papel central en la física hasta 1900, como queda claro en la obra de Maxwell y tantos otros.

Cierto es que Riemann no habla de 'éter' en los fragmentos traducidos, y conviene detenerse en estos detalles terminológicos, ya que nuestro autor los consideraba con especial cuidado. Cuando habla del "espacio físico" o pleno continuo, usa la palabra "sustancia" [Stoff]; ahora bien, en sus lecciones de 1861, que desarrollan similares ideas, Riemann se decantó por el empleo del término "éter". Tiene interés considerar que nunca se refirió a él con el término "materia" [Materie], ni tampoco el término filosófico 'Substanz'.[67] La palabra sustancia [Stoff] sugiere algo ciertamente físico, no algún principio metafísico, pero yendo más allá de las connotaciones de 'materia'. Estos detalles resultan interesantes, porque permiten interpretar lo que postula Riemann como algo próximo, en un sentido, a los modernos conceptos físico-geométricos de campo. Pero, a la vez, otros supuestos de Riemann hacen que su propuesta se aleje de esa noción moderna.

El pleno sustancial de Riemann se concibe como un fluido homogéneo e incompresible, sin inercia. Riemann supone además que la dirección de movimiento de la sustancia que forma el pleno es igual a la dirección de la fuerza que debe explicar, y que su velocidad es proporcional a la magnitud de la fuerza. Aquí vemos en acción el principio de economía aplicado a los cambios teóricos: se abandonan las acciones a distancia de Newton, Laplace, Ampère y Weber, pero manteniendo el supuesto de las direcciones centrales. Vimos que en su *disputatio* doctoral Riemann declaraba insostenible el concepto de inducción en líneas curvas propuesto por Faraday. Esto apunta a una de las diferencias clave respecto a los británicos: en un tiempo en que, empleando herramientas matemáticas muy similares a las de Riemann, Maxwell se

[64] Véase I. Newton, *Principios matemáticos de la filosofía natural* (Madrid, Alianza, 1987), vol. 2, 785; *Óptica* (Madrid, Alfaguara, 1977), 304–07, así como los comentarios de Carlos Solís en 417–21.

[65] A. Speiser, 'Naturphilosophische Untersuchungen von Euler und Riemann', *Jour. F. Reine und angew. Math.* **157** (1927), 105–14, en p. 106.

[66] Véase Norton Wise, *op. cit.* [1981].

[67] Que he traducido por "substancia" con *b*.

dedicaba a replantear matemáticamente el concepto de *línea de fuerza* de Faraday, el matemático de Gotinga se mantenía fuera de este "camino real", apegado a una línea de trabajo más tradicional.

Riemann elaboró un modelo matemático del comportamiento del éter a escala infinitesimal –esto es, de una partícula de éter– a través de consideraciones relacionadas con la teoría clásica de la elasticidad (véanse en particular las "dilataciones principales" que introduce). Una deformación elástica producirá variaciones en el volumen de la partícula infinitesimal, y Riemann supone que ésta opone resistencia a tales deformaciones, tendiendo a preservar la forma que presentaba en momentos anteriores. Tras introducir algunos supuestos simplificadores, obtiene una expresión para el "momento de fuerzas" que expresa el modo en que tiende a modificarse la partícula etérea. Considerando dicha expresión como resultante de fuerzas que alteran la longitud de los elementos de línea, Riemann llega a una "ley de acción" que es la suma de dos componentes independientes entre sí:

$$a\frac{dV - dV'}{dV} + b\frac{ds - ds'}{ds},$$

donde dV es el volumen de la partícula en el tiempo t, ds' la expresión para un elemento de línea en el tiempo t', y a, b son constantes. En conexión con dicha ley de acción, el manuscrito termina planteando una cuestión abierta sobre la forma que deben adoptar ciertas funciones ψ y φ.

En todo caso, los resultados de 1853 se resumen diciendo que tanto las acciones físicas que se rigen por fuerzas de atracción y repulsión inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia, como la luz y calor radiante, pueden ser explicadas sobre el supuesto de un pleno de sustancia homogénea o éter, en el que cada partícula sustancial sólo actúa inmediatamente sobre su entorno. La correspondiente ley matemática se descompone en 1) la resistencia que opone una partícula sustancial a una variación de volumen, y 2) la resistencia que opone un elemento de línea físico a una variación de longitud. La primera parte explicará la gravitación y la atracción y repulsión electrostáticas (que resultan ser formas de movimiento del éter), mientras que la segunda explica la propagación de luz y calor, así como la atracción y repulsión electrodinámicas o magnéticas. De los supuestos que Riemann establecía para el pleno etéreo se seguía, en efecto, "necesariamente" que esa sustancia puede propagar luz y calor, lo que le conducía a proponer que todas las interacciones de los cuerpos a través del espacio dependen del éter. Como puede verse, las fuerzas electromagnéticas tendrán el efecto de alterar la expresión para el elemento de línea físico, idea que indudablemente guarda relación con la famosa lección sobre geometría del año siguiente (§ 5).

Ahora bien, el lector atento se habrá preguntando cómo pretende Riemann explicar la siguiente dificultad, con la que ya había tropezado Euler. Según su teoría de la gravedad, la sustancia etérea se mueve en la dirección de dicha fuerza con velocidad proporcional a la magnitud de la misma; así, los átomos materiales actuarán como una especie de sumideros de sustancia, que entra en movimiento acelerado. ¿Puede esta concepción desarrollarse de una manera admisible? La respuesta del pensador de Gotinga es que sí, aunque los detalles de su posición parecen haber variado en el tiempo. En los *Nuevos principios* de 1853, la solución consiste en una hipótesis elaborada sobre la base de una atrevida analogía entre los fenómenos físicos y nuestros fenómenos mentales (aquí es donde la obra de Herbart sobre psicología resulta relevante). Riemann plantea que la explicación última de los fenómenos físicos debe encontrarse en el "estado interno" de los cuerpos, y que debemos inferir las características de ese estado interno por analogía con nuestra propia observación interna, es decir, por analogía con los fenómenos psicológicos. Cuando el éter llega a los átomos, parece dejar de influir sobre el mundo fenoménico. Esto recuerda lo que sucede con nuestras percepciones: en cada acto psíquico entra en nuestra alma algo permanente, que a continuación desaparece del mundo fenoménico (hacia la región de la memoria). Ambas hipótesis, física y psicológica, se pueden reunir de forma muy satisfactoria en una sola, y éste habría sido el gran descubrimiento de 1853. La hipótesis final es que la sustancia del pleno, el éter que continuamente afluye hacia los átomos ponderables, desaparece allí del mundo corpóreo porque entra en el mundo espiritual, formando “masas mentales” (§ 2.3). Sin duda es una hipótesis arriesgada, que se enfrenta de cabeza con los prejuicios habituales; nótese que choca también con el dualismo imperante en la época de Newton y Euler.

Los pocos datos de que disponemos indican que Riemann abandonó esa hipótesis posteriormente; de hecho, ya en el escrito sobre ‘Gravitación y luz’ se evita recurrir a esa atrevida idea. Aquí encontramos un nuevo intento, más sofisticado, de elaborar las ideas de los *Nuevos principios*; Heinrich Weber sugiere que el texto sería de finales de 1853, pero no parece haber razones para negar que pudiera ser posterior. Riemann exige una “causa” para todos los movimientos de la materia, y no sólo para los debidos a fuerzas aceleradoras (como la gravedad), sino también para el movimiento inercial. Supone a continuación, enlazando con las conclusiones de 1853, que el movimiento real v del éter se compone de dos movimientos v y w, responsables respectivamente de la gravitación y la luz. La fuerza gravitacional u viene determinada por una función potencial V (u = grad V), que debe satisfacer las condiciones de ser una forma cerrada y de la ecuación $\Delta V = -4\pi\rho$. En cuanto a la función w que determina la propagación de la luz, debe satisfacer una ecuación de continuidad div $w = 0$, así como la ecuación de ondas para oscilaciones transversales

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2{}^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_3{}^2},$$

siendo c la velocidad de la luz. Como se ve, el aparato matemático empleado aquí es muy similar al de un Maxwell. Riemann pasaba a comprobar que los dos movimientos podían combinarse dando lugar a una función velocidad admisible, lo que confirmaba la posibilidad de una explicación unificada para ambos procesos.[68] Para terminar, el matemático buscaba deducir las leyes del movimiento del éter partiendo de un principio variacional.

En sus esfuerzos, Riemann intentó también incorporar los efectos electromagnéticos, yendo más allá de su maestro Weber, aunque aquí encontró dificultades. Según vimos, Weber había elaborado una unificación de los principios fundamentales del electromagnetismo en su artículo ‘Electrodynamische Maassbestimmungen’ (parte I, 1846). Por vez primera, la electrodinámica de Ampère se unía con la electrostática de Coulomb y con una explicación de los fenómenos de inducción descubiertos por Faraday. Para lograrlo, Weber introdujo una nueva *ley electrodinámica fundamental*, con la peculiaridad de postular una fuerza de acción al estilo newtoniano, pero que no dependía sólo de la distancia sino, a la vez, de la velocidad y de la aceleración relativa de las partículas.[69] Considerado en abstracto, este paso no tenía nada de objetable, pero, al introducir una dependencia implícita de la fuerza respecto al tiempo, la ley de Weber pareció inaceptable a algunos (como es el caso de Helmholtz; lo inadmisible era una acción a distancia que no fuera instantánea). Si algo tardaba un tiempo en propagarse, debía en el *interim* concretarse en algún tipo de sustancia física. Con estos desarrollos se estimulaba, en la práctica, la aparición de teorías de campo, muchas de las cuales elaboraban la idea de un campo de éter, y el primer intento serio en esta dirección se dio bajo la mirada del propio Weber, en las especulaciones de Riemann.

En sus clases de 1861, Riemann planteó la posibilidad de que las variaciones de densidad en el éter fueran la clave para los fenómenos electromagnéticos. Siendo V el potencial electrostático y $\mathbf{u}$ un potencial electrodinámico, se podría determinar el último conforme a la ecuación

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \operatorname{div} \mathbf{u},$$

[68] Norton Wise, *op. cit.* [1981], 290.

[69] Según Weber, dos partículas eléctricas e y e' (que pueden ser positivas o negativas, según la hipótesis dualista todavía vigente) se atraen con una fuerza $F = \frac{ee'}{r^2}\left(1 - \frac{1}{c^2}v^2 + \frac{2r}{c^2}a\right)$, siendo v su velocidad relativa, a su aceleración relativa, y c una constante fundamental cuya magnitud fijaron Weber y Kohlrausch en un valor próximo a la velocidad de la luz.

en cuyo caso V podría interpretarse como la densidad y **u** como el flujo del éter. A la fuerza electrostática le correspondería un gradiente de densidad estable, y a los efectos electrodinámicos le corresponderían cambios de la densidad en el tiempo, y flujos asociados. Además, Riemann creía que este enfoque dejaba posibilidades abiertas para la incorporación de efectos gravitacionales. Con todo, sus diversos intentos quedaron sin publicar, ya que no hubo tiempo de conseguir una integración plenamente satisfactoria de las diversas fuerzas físicas.

Lo que sí llegó a presentar Riemann para su publicación fue un intrigante artículo entregado en Febrero de 1858 a la Sociedad Real de Ciencias de Gotinga, bajo el título 'Una contribución a la electrodinámica' (sin embargo, la nota no llegó a publicarse por haberla retirado el propio Riemann, y apareció a su muerte). Volvamos por un momento al trabajo de Weber y Kohlrausch en 1854/55; se trataba precisamente de los experimentos en los que se midió la constante c de la ley fundamental de Weber –esto es, la relación entre las unidades electrodinámica y electrostática de carga–, encontrándose un valor próximo al de la velocidad de la luz. Estos resultados fueron publicados por Weber en 1857, mencionando esa coincidencia de valores pero enfatizando la diferencia entre la constante c, que en su opinión expresaba una velocidad de masas eléctricas, y la velocidad de la luz, que no era sino un movimiento ondulatorio. Más tarde, Maxwell utilizaría el dato como una pieza clave para la justificación de su concepción electrodinámica de la luz.[70]

Esa misma conexión constituía un elemento central del artículo riemanniano de 1858, como muestra con toda claridad su primer párrafo:

> Me permito comunicar a la Sociedad Real una consideración, en la que la teoría de la electricidad y el magnetismo se pone en estrecha conexión con la de la luz y el calor radiante. He encontrado que los efectos electrodinámicos de las corrientes galvánicas se pueden explicar si se supone que la acción de una masa eléctrica sobre las demás no acontece instantáneamente, sino que se propaga hacia ellas con una velocidad constante (igual a la velocidad de la luz dentro de los límites del error observacional). La ecuación diferencial para la propagación de la fuerza eléctrica resulta, bajo este supuesto, la misma que para la propagación de la luz y del calor radiante.[71]

El trabajo es notable por tratarse de la primera aparición de un potencial retardado, lo que una vez más hace aparecer a Riemann como un precursor de Maxwell. Un potencial de esas características debía obedecer una ecuación de ondas, no una ecuación de continuidad, y aquí estaba la mencionada analogía. De hecho, Riemann planteaba de una forma muy directa y concisa la ecuación de ondas inhomogénea para un potencial U:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 4\pi\rho\,,$$

y como solución suya, para una carga puntual total $-f(t)$, el potencial retardado

$$\frac{f(t - {}^{r}\!/_{\alpha})}{r}.$$

Partiendo de ahí, ofrecía una prueba según la cual dicho potencial retardado predecía, para la acción entre dos conductores a lo largo de un cierto tiempo, una expresión que se corresponde exactamente con el potencial para la ley de Weber. Sin embargo, había una inconsistencia matemática en esta última derivación (una inversión errónea del orden de integración), como señaló Clausius nada más aparecer el artículo, en los *Annalen der Physik und Chemie*, tras la muerte de su autor.

Una peculiaridad de esta publicación es que Riemann eligió, contra sus preferencias teóricas, seguir la vía de Weber y elaborar una teoría matemática sobre el supuesto de la acción a distancia. Esto es una muestra de su amplitud de miras a la hora de teorizar, pero a la vez ha

[70] En un artículo de 1861/62, Maxwell había visto la posibilidad de ondas electromagnéticas que se propagan a la velocidad de la luz, basándose en un peculiar y famoso modelo mecánico a base de vórtices engranados (Maxwell, *op. cit.* [1998], xlvii–xlix). Más tarde, en 'Una teoría dinámica del campo electromagnético' (1865, ver *op.cit.*, 159–60), dedujo ese resultado matemáticamente, sobre la base de las ecuaciones del campo electromagnético.

[71] Riemann *Werke*, 288.

tenido el efecto de difundir la idea errónea de que Riemann fue partidario declarado de la acción a distancia de Ampère y Weber. El intermediario en esta difusión parece haber sido Maxwell con su famoso *Treatise* de 1873; allí mencionaba el intento de Riemann, pero criticaba a este "hombre eminente" diciendo, entre otras cosas, que si algo se transmite en el tiempo de una partícula a otra, ¿cuál es su condición o estado durante ese período?[72] Maxwell estaba pidiendo alguna explicación en términos de campos, como la que Riemann ofrecía en sus trabajos inéditos, que sólo se conocieron en 1876.

¿Por qué Riemann no llegó a publicar su artículo? Es natural conjeturar, como lo hacían Clausius y los editores de sus obras, que el propio autor había advertido el error de cálculo cometido, retirando el trabajo. Por otro lado, su amigo Betti creía que no era ésta la explicación, sino que Riemann se encontraba a disgusto con un artículo que contradecía sus opiniones teóricas, no sólo en el tema de la acción a distancia, sino también al seguir la hipótesis dualista sobre la electricidad. Por fin, Schering ofrece una explicación algo distinta, al decir que prefirió retrasar la publicación "pues entretanto había encontrado un desarrollo de su ley gracias al cual satisfacía ciertos principios generales como las restantes leyes fundamentales de las fuerzas".[73] Sea como fuere, el artículo de Riemann fue muy comentado tras publicarse. Vale la pena mencionar que el gran Gauss había considerado ideas similares, como sabían ya entonces por una famosa carta a Weber escrita en 1845. Gauss trabajó sobre electrodinámica en la época de su colaboración más estrecha con Weber (años 1830), hasta dar con una ley fundamental para la acción electrostática y electrodinámica. Sin embargo, no publicó nada porque consideraba que faltaba la piedra angular de su teoría: según le comunicó a Weber, faltaba derivar las fuerzas electrodinámicas "*a partir de la acción, que no es instantánea*, sino que (de manera similar a la luz) se propaga en el tiempo".[74] La conexión entre estas ideas y los planteamientos desarrollados independientemente por Riemann es muy notable.

Los últimos datos de que disponemos acerca de las especulaciones físicas de Riemann nos vienen de Ernst Schering, que fue alumno suyo y luego colega en Gotinga. Aquí se nos presenta una nueva versión de la hipótesis del pleno continuo o "espacio físico", ligada ahora a las ideas de la conferencia inaugural sobre geometría. Schering afirma en su discurso necrológico que Riemann le comunicó los resultados de su especulación física, y los describe como sigue:

> Primero elimina de todas las leyes de las interacciones aquellas determinaciones ligadas con acciones a distancia, pues éstas son siempre dependientes de la condición del espacio circundante, y por ello una ley así expresada involucra ya la inexpresada construcción del espacio. Para la acción de las masas, de la electricidad libre y de las corrientes galvánicas cerradas, obtiene la necesaria transformación de las leyes conocidas considerando las fuerzas como la expresión física de ciertas formas de movimiento de un medio que llena el espacio tridimensional, en general de manera uniforme. Los puntos del espacio en los que se encuentran los cuerpos que actúan, se consideran entonces como lugares infinitamente densos del medio, o, de una forma más intuitiva, como lugares en los que el medio sale del espacio tridimensional en cuestión hacia el espacio multidimensional que lo circunda por todas partes. El medio analítico empleado aquí puede describirse, empleando la designación hoy habitual, como la transformación de Pfaff de la expresión de los momentos virtuales de las fuerzas.[75]

Así pues, Riemann deja de formular su hipótesis en términos de un paso de la fenómenico a lo mental, y se limita a postular que la función densidad se hace infinita, supuesto que no encuentra objeciones desde el punto de vista matemático y que podría dar lugar a una "teoría espacial de la materia" al estilo de Clifford. Alternativamente, y en términos más intuitivos, cabe pensar que los átomos son simplemente lugares en los que el éter sale al espacio circundante. Pero continuemos citando el final del interesante informe de Schering:

> La teoría redactada últimamente por Cauchy, sobre el movimiento del éter que describe los fenómenos luminosos, la basó en una condición de mínimo para el valor de una integral definida. Añadiendo algunos miembros simples a la

---

[72] Citado en Bottazzini y Tazzioli, *op. cit.* [1995], 24.
[73] Schering, *op. cit.* [1866], 378.
[74] Carta de Weber de marzo de 1845, en Gauss, *Werke*, vol. 5, 601–29.
[75] Schering *op. cit.* [1866], en Riemann, *Werke*, ed. Narasiham, p. 377–78.

función que aparece en esta integral, le dio una configuración tal que la condición de mínimo abarca las leyes de todas las fuerzas antes mencionadas, y concretamente en una forma que es análoga a la del principio gaussiano de mínima acción.

Con lo dicho, queda resumido lo fundamental de las especulaciones de Riemann, que en todo caso permanecieron sin publicar. Es natural preguntarse cuáles habrían sido sus contribuciones si hubiera vivido más tiempo, y en concreto cuál habría sido su reacción ante la teoría de Maxwell y, de haberla aceptado, adónde le hubiera conducido todo ello.

Los esfuerzos de Riemann en física quedaron inconclusos y no llegaron a ejercer influencias importantes. Su principal resultado positivo se encuentra en las contribuciones específicamente matemáticas del autor, de algunas de las cuales tendremos ocasión de hablar más tarde (§ 5 y 6). Naturalmente, Riemann impartió también lecciones sobre física matemática, empezando por el primero de sus cursos, que tuvo lugar en 1854/55 y tomaba como modelo las clases de Dirichlet. El mismo curso se repitió tres veces a partir de 1860, bajo el título ‘Teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, con aplicaciones a problemas físicos’, y fue editado en 1869 por un alumno de Riemann, Karl Hattendorff.[76] Este libro fue muy admirado y estudiado por varias generaciones de físicos, siendo reimpreso todavía en 1938, y dio lugar (mediando una revisión de Heinrich Weber) al conocido manual de Frank y von Mises. Riemann impartió también otras series de lecciones: sobre elasticidad de cuerpos sólidos (dos veces), sobre mecánica superior, y sobre ‘Teoría matemática de la gravedad, la electricidad y el magnetismo’ (cuatro veces). Estas últimas lecciones, en su última versión de 1861, fueron también editadas por Hattendorff,[77] representando renovados esfuerzos por llevar a la práctica la unificación de los diversos fenómenos físicos en un tratamiento matemático homogéneo, sin el postulado de la acción a distancia y sobre la hipótesis de un pleno continuo de éter, en el que los efectos físicos se propagan a velocidad finita.

Además de ello, hay al menos tres artículos originales de Riemann que suponen contribuciones importantes a la física matemática. En 1861 estudió el movimiento de un elipsoide fluido homogéneo bajo la acción de su propia gravedad, lo que suponía desarrollar trabajos previos de Dirichlet. Aquí estableció el resultado clásico de la estabilidad de un elipsoide que rota en torno a un eje principal, sometido a perturbaciones ecuatoriales. El mismo año envió un artículo a la Academia de París, en contestación a un premio ofrecido a la solución de una cuestión sobre teoría del calor. Aunque los resultados eran muy notables, Riemann no obtuvo el premio por no presentar con suficiente detalle los métodos en que basaba sus cálculos, y el artículo se publicó póstumamente.[78] Con todo, se trata de una obra de gran importancia, porque en ella Riemann aplicaba métodos relacionados con los desarrollos analíticos que apenas indicó en su famosa lección inagural sobre geometría (§ 5.5). Se encuentran aquí nociones relacionadas con el cálculo tensorial que surgiría hacia fines de siglo de la mano de los italianos Ricci y Levi-Civita.

La contribución más importante de Riemann a la física matemática fue su artículo de 1860 ‘Sobre la propagación de ondas planas con amplitud finita’. Los problemas estudiados aquí guardan relación con la teoría de ondas de choque, retomada por la aerodinámica moderna, aunque en una forma diferente a la que surgía en el análisis riemanniano. Desde el punto de vista matemático, el trabajo dio lugar a la teoría de las ecuaciones diferenciales hiperbólicas, y el método empleado por Riemann para la resolución de las mismas sigue explicándose hoy en día. El lector encontrará traducido el anuncio de su memoria escrito y publicado por el propio Riemann, que resulta interesante entre otras cosas por los comentarios que incluye sobre metodología científica y de investigación matemática.

---

[76] *Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen*, ed. K. Hattendorff, Brunswick, Vieweg, 1869 (3ª edn. 1881).

[77] *Schwere, Elektrizität und Magnetismus*, ed. K. Hattendorff, Hannover, C. Rümpler, 1876.

[78] ‘Commentatio mathematica’, en Riemann, *Werke*, p. 391–404, con aclaraciones de Dedekind y Weber en 405–23.

4. Riemann y los fundamentos de la matemática.

> Cuando lo admite la cuestión, considero siempre mejor no comenzar por el principio, pues es siempre lo más difícil.[79]

Durante el siglo XIX tuvo lugar una reforma en profundidad de las matemáticas, que sin duda estuvo ligada a la profesionalización de esta disciplina y a las nuevas necesidades planteadas por las mejoras de la enseñanza superior. Había ahora un número creciente de matemáticos profesionales, dotados de medios de comunicación especializados (como el *Journal* de Crelle), y las universidades se convertían cada vez más en centros de investigación. Además, era preciso organizar la formación de nuevos profesionales, elaborando cursos de introducción al cálculo infinitesimal y otras materias avanzadas, lo que hacía especialmente inoportunas las graves lagunas existentes en los fundamentos de estas materias. El resultado fue que, por primera vez en la historia, se recuperó e incluso se superó el nivel de rigor alcanzado por los antiguos griegos, tal como se manifestaba en los admirados *Elementos de geometría* de Euclides. Riemann se encontró con respuestas ya elaboradas para buena parte de estos problemas del rigor, no en vano sus maestros fueron Gauss y Dirichlet.

Pero la recuperación del rigor no fue el único cambio fundamental en las matemáticas del XIX. Durante ese siglo tuvo lugar una transformación revolucionaria que afectó a los objetos y los métodos de la disciplina. Hacia 1800, la matemática era todavía –como lo había sido tradicionalmente– una ciencia que trataba de objetos concretos y, hasta cierto punto, intuitivos: números, figuras, ecuaciones y funciones. Hacia 1900, las semillas de la matemática contemporánea, de carácter abstracto, están firmemente sembradas y comienzan a dar frutos. En este proceso de transformación desde lo concreto a lo abstracto, Bernhard Riemann representó un auténtico punto de inflexión. Puede decirse que fue el primer matemático abstracto, en el sentido que este término adoptaría en el siglo XX; esta idea se refleja, dentro de un contexto marcadamente crítico, en la siguiente cita tomada de una carta del matemático alemán Siegel al francés Weil (1959):

> La degeneración de la matemática comenzó con las ideas de Riemann, Dedekind y Cantor, que hicieron retroceder más y más el sólido espíritu de Euler, Lagrange y Gauss.[80]

Al margen de críticas inspiradas en el constructivismo, lo cierto es que la reorientación de la matemática en un sentido abstracto llevó a que se plantearan de nuevo viejas preguntas que ya habían preocupado a los griegos: cuáles son los objetos básicos de la matemática, qué tipo de existencia tienen, qué métodos resultan admisibles y rigurosos, y en particular qué posición se debe adoptar con respecto al infinito. Como no podía ser menos en el caso de un pensador de sus características, Riemann reflexionó de manera profunda sobre estos problemas.

4.1. Objetos matemáticos. Hacia 1850 todavía era habitual definir la matemática como la ciencia de las magnitudes, siguiendo el modelo griego que recogió el mismo Aristóteles. Con ello se estipulaba el carácter concreto de los objetos matemáticos, ya que las magnitudes se suponían dadas en el mundo físico. Por citar a todo un clásico, Euler dice al comienzo de su *Álgebra*:

> Se dirá que es una magnitud todo lo que es susceptible de incremento o disminución, o a lo que es posible añadir o sustraer algo ... la matemática no es nada más que la *ciencia de las magnitudes*, que encuentra métodos por medio de los cuáles pueden ser medidas.[81]

---

[79] Schiller, carta a Goethe de 1796, que Riemann anotó (*Werke. Nachträge*, 113). La cita acaba: "y más vacío", palabras que Riemann ignoró, de forma muy significativa.

[80] Citado en Laugwitz, *Bernhard Riemann* (Basel, Birkhäuser, 1996), p. 11.

[81] Euler, *Vollständige Anleitung in die Algebra* (1796), p. 9.

Así pues, magnitud es cualquier cosa que, estando compuesta de partes, puede experimentar aumento o disminución; valgan como ejemplo volúmenes, longitudes, intervalos temporales, o cantidades de dinero. Desde Aristóteles venía siendo tradicional distinguir dos tipos de magnitudes, las *discretas* (caso del dinero) y las *continuas* (caso de las longitudes en geometría); la comparación de magnitudes discretas se hace mediante los números naturales, la medición de magnitudes continuas mediante los números reales. La teoría de las magnitudes ofrecía así un marco unitario que abarcaba las dos ramas que constituyen los orígenes históricos de la matemática (aritmética y geometría), con lo que aclaraba de manera bastante satisfactoria los fundamentos de esa disciplina.[82]

El propio Gauss tenía por costumbre hablar en estos términos. En su cuarta demostración del teorema fundamental del álgebra, publicada en 1849, utilizó argumentos topológicos diciendo que "pertenece[n] a un dominio superior de la teoría abstracta de magnitudes". No deja de ser notable que Gauss considerase una teoría *abstracta* de las magnitudes, en consonancia con la tendencia ya mencionada de la matemática decimonónica. Parece un hecho histórico que la elaboración de la idea de magnitud en una dirección cada vez más abstracta condujo a conceptos básicos de la matemática contemporánea. Podríamos poner como ejemplos de ello a Grassmann y a Weierstrass, pero sobre todo al propio Riemann, cuyas nuevas ideas respecto a las magnitudes le llevaron a los conceptos fundamentales de conjunto y de variedad. Posteriormente, la idea de magnitud, que resultaba vaga por diversos motivos, sería eliminada y reemplazada por las nuevas nociones abstractas.[83]

El lugar donde Riemann habla con más detalle de las magnitudes es, precisamente, su famosa lección inaugural. Con vistas a aclarar y analizar la idea del espacio tridimensional, se plantea allí la tarea de elaborar y precisar "el concepto de magnitud múltiplemente extensa a partir del concepto general de magnitud"; en lo que sigue, Riemann dirá indistintamente "magnitud *n*-uplemente extensa" o "variedad *n*-uplemente extensa" (esto es, *n*-dimensional). El espacio tridimensional no será más que un caso particular de variedad *n*-dimensional, y las variedades de cualquier dimensión no son otra cosa que magnitudes abstractas.

La discusión que hace Riemann del concepto general de magnitud se convertirá, pues, en un esbozo programático de "teoría abstracta de las magnitudes", por retomar la expresión de Gauss. Así, Riemann tendrá ocasión de hacer referencia a las magnitudes discretas y las continuas, a las ideas de contar y medir, al *analysis situs* o topología, y finalmente a la geometría. El lector puede consultar por sí mismo este riquísimo texto, y conviene siempre que recuerde la obsesión de Riemann por lograr la máxima generalidad y precisión en sus afirmaciones. En lo que sigue expondré, de una manera libre, mi interpretación de la discusión riemanniana en el apartado I.1 de su lección inagural.

Un análisis cuidadoso de la terminología de Riemann revela que el término "magnitud" se emplea como sinónimo de "variedad", si bien a veces se maneja también en el sentido más estricto de "cantidad", de determinación métrica. Así como en la introducción de su escrito Riemann busca enlazar con ideas bien conocidas, hablando de "magnitudes", en el desarrollo más pormenorizado y técnico de sus concepciones da preferencia al término "variedades". Seguiré aquí esta misma tendencia.

El comienzo mismo de la discusión plantea una de las mayores dificultades interpretativas, porque esconde ya el profundo replanteamiento que Riemann va a proponer. Dice el matemático que sólo es posible introducir "conceptos de magnitud" cuando nos viene dado "un concepto general que admite diversas formas de determinación". Estas "formas de determinación" [Bestimmungsweisen] constituyen los "elementos" de una "variedad" [Mannigfaltigkeit]. La variedad puede ser discreta o continua, y en el último caso hablaremos de "puntos" en lugar de

---

[82] Sin embargo, se planteaban problemas bastante graves con los números negativos (¿magnitudes menores que nada?) y con los imaginarios; véase mi introducción a Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?* (Madrid, Alianza/UAM, 1998).

[83] Un importante motivo de vaguedad era que, al tener un referente supuestamente real, determinados supuestos esenciales de la teoría de magnitudes (como el de continuidad) permanecían implícitos; o también, en otra dirección, la costumbre muy extendida de hablar de "magnitudes variables". Véase Dedekind, *op. cit.* [1998].

elementos. Aclaremos la idea con dos ejemplos, el primero de los cuales lo da el propio Riemann. Entre los conceptos habituales en la vida diaria, el de 'color' es uno de los pocos que dan lugar a una variedad continua, ya que la transición de un color (digamos, un cierto azul) a otro (un verde) sucede a través de una infinidad de grados intermedios, a través de un intervalo cromático continuo. Así pues, el conjunto de todos los colores es una variedad continua; por otro lado, el conjunto de (digamos) las ciudades del planeta Tierra constituye una variedad discreta.

Ese par de ejemplos basta para que resulte posible entender mejor la idea que Riemann había definido en abstracto. Las "determinaciones" o "formas de determinación" de un concepto no son otra cosa que sus *instancias*, lo que vulgarmente llamaríamos los 'objetos' a los que se aplica o –en la terminología de la época– que caen bajo el concepto. La "variedad", en el sentido general que Riemann da a esta palabra, no es otra cosa que una colección de instancias, una clase, un *conjunto*. La idea de definir la variedad como el correlato extensional de un concepto general sigue el patrón del viejo principio, habitual en la tradición lógica, de asociar a cada concepto un *ámbito*, una *extensión*, una *clase* de objetos. Riemann hace descansar su teoría general de las magnitudes y las variedades en el *principio de comprehensión*, axioma básico de lo que suele llamarse la teoría ingenua de conjuntos.[84] Como es bien sabido, esta versión decimonónica de la teoría de conjuntos se reveló contradictoria, al ser descubiertas (a partir de 1897) las llamadas 'paradojas' por Cantor, Russell y otros.

Al lector se le puede haber ocurrido una pregunta bastante obvia: ¿por qué Riemann habla de "variedades" y no de conjuntos? La respuesta es también simple: la terminología no estaba ni mucho menos asentada en aquel momento, y la elección de términos resultaba especialmente complicada en alemán. Cada autor adoptaba un término distinto, como puede verse consultando las obras de Bolzano, Dedekind, Frege y Cantor. Riemann optó por un término que aparece con mucha frecuencia en los escritos de Herbart (aunque no en el sentido técnico que le dio el matemático) y que el propio Gauss había empleado, de manera poco sistemática, para plantear ideas acerca del espacio *n*-dimensional. Como es sabido, Gauss fue el primer gran matemático que aceptó plenamente los números complejos, haciendo amplio uso de ellos. Cuando, en 1831, decidió ofrecer una justificación de su uso, dijo que está justificado para determinar los puntos de una "variedad de dos dimensiones"; y en sus lecciones habló también de "variedades de *n* dimensiones". Riemann recogió este uso lingüístico y lo generalizó todo lo posible, al ponerlo en conexión con la idea de clase que venían manejando los lógicos. El propio Cantor, creador de la teoría de conjuntos transfinitos, la llamó "teoría de variedades" [Mannigfaltigkeitslehre] desde 1878 a 1892.

Dado que las variedades o conjuntos vienen determinadas por un concepto, Riemann se ve inducido a considerar que toda variedad nos viene dada con una cierta estructura, como diríamos hoy, al menos en lo tocante a continuidad. Ya lo vimos en el ejemplo anterior: las características del concepto de color hacen que la clase asociada tenga una estructura de continuidad; lo mismo sucede con el concepto de lugar en el espacio, tal como habitualmente se entiende; pero no con el concepto de hoja, con el de libro, ni con el de número natural, cuyas clases o variedades correspondientes son discretas. De esta manera, Riemann no ve ningún inconveniente en introducir una primera clasificación *exhaustiva* de todas las variedades en dos tipos: las discretas y las continuas.

Ahora bien, para comparar dos variedades discretas, lo que hacemos es *contar*, así que por esta vía encontramos los números naturales; para comparar dos variedades continuas, lo que se hace es *medir*, llegando así a los números reales positivos. Sin embargo, la posibilidad de medir esconde diversas presuposiciones: que pueda determinarse una unidad de medida, y que sea posible transportarla para efectuar la medición. Riemann conoce, a través de escritos de Leibniz y Gauss, y por sus propios desarrollos del tema, que es posible investigar comparativamente las

[84] Esta interpretación y sus implicaciones se propusieron por vez primera en mi libro *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Madrid, UAM, 1993), así como en el artículo 'Traditional logic and the early history of sets', *Archive for History of Exact Sciences* **50** (1996), 5–71.

variedades continuas aún en el caso de que no sea posible medir. Esta "parte general de la teoría de magnitudes, independiente de determinaciones métricas", no es otra cosa que el *analysis situs*, la topología. La topología –esa geometría de figuras de goma perfectamente flexibles y estirables, como a veces se dice– respeta plenamente la estructura de continuidad de los objetos investigados, pero hace abstracción de sus características métricas. Seguiremos hablando de este tema en el § 5.

Las menciones de las magnitudes discretas y los números que se encuentran en la lección sobre geometría son muy breves y asistemáticas; no hay duda de que Riemann las introdujo sólo por su afán de completar y generalizar, de mencionar al menos los temas colaterales al que centraba su atención. De este modo, no encontramos ninguna indicación de cómo surgen las operaciones elementales de adición, sustracción, multiplicación y división, y aún las de integración y diferenciación.[85] Pero, en todo caso, sus indicaciones bastan para advertir que, a través de este replanteamiento de la teoría de magnitudes en términos de variedades, Riemann consideraba posible un tratamiento unificado de toda la matemática: desde la aritmética y el álgebra, hasta la geometría, la topología y el análisis. Bajo su empleo del tradicional lenguaje de las magnitudes se esconde una nueva visión abstracta de la matemática.

FIG. 9. Richard dedekind (1831–1916), amigo, editor y continuador de la obra de Riemann.

Riemann fue, pues, el primer matemático influyente que propuso el concepto de variedad o conjunto como la noción matemática más básica. Basta una lectura atenta de la tesis doctoral (1851) para advertir cómo emplea ya, en lo esencial, el moderno lenguaje de conjuntos y aplicaciones [Abbildungen] como el más idóneo para verter su enfoque abstracto de la matemática. Sus escritos tuvieron, además, una gran influencia sobre el desarrollo de las investigaciones de Dedekind y Cantor, que pueden considerarse como los padres de una matemática conjuntista madura. Así pues, no hay duda de que Siegel (en el texto citado más arriba) tuvo muy buen tino en su intento de localizar a los padres de la matemática "degenerada".

4.2. El enfoque conceptual y abstracto. Ya he citado la afirmación de Weber, que Gotinga se había convertido, con Gauss, Dirichlet y Riemann, en "la plantación de la orientación más profundamente filosófica en la investigación matemática".[86] Weber puede haber tenido en mente diversas cosas al escribir esas palabras: los tres matemáticos desarrollaron su disciplina en una dirección eminentemente moderna; los tres realizaron contribuciones importantes, y en ocasiones muy profundas, a la física matemática; los tres reflexionaron a

[85] Las dos últimas operaciones se consideran elementales en una nota al § 20 de la tesis doctoral de Riemann (1851); véase el apéndice a la 'Teoría de las funciones abelianas'.

[86] Dugac, *Dedekind et les fondements des mathématiques* (Paris, Vrin, 1976), p. 166.

fondo sobre los fundamentos de la matemática, a veces en conexión con ideas filosóficas. En la terminología de la época, se puede decir que Gauss, Dirichlet y Riemann están entre los principales representantes del *enfoque conceptual* de la matemática, algo peculiar y característico del siglo XIX, que dio origen a la matemática contemporánea. En este sentido, la Gotinga posterior del cambio de siglo, liderada por Klein y Hilbert, fue la mejor continuadora de su propia tradición decimonónica. Ahora bien, dentro del enfoque conceptual, Riemann representa una inflexión fundamental, un giro hacia lo abstracto que le convierte en una figura quizá única en la historia de la matemática.

Dirichlet mencionó el enfoque conceptual en una frase muy citada de su obituario de Jacobi. Alli dijo que había en el análisis una tendencia cada vez más pronunciada "a poner pensamientos en el lugar de los cálculos".[87] Según aclaraba otro matemático de Berlín y alumno de Dirichlet, Eisenstein, el origen de ese nuevo estilo de argumentación estaría en Gauss, Jacobi y Dirichlet; su característica central es evitar "cálculos y deducciones largos e intrincados" en favor de un "brillante expediente": "abarcar toda un área [de verdades matemáticas] en una sola idea principal, y presentar de un golpe el resultado final con suma elegancia", de tal modo que "uno puede ver la verdadera naturaleza de toda la teoría, la maquinaria interna y los engranajes esenciales".[88] Esto es lo que sucede en la teoría de funciones de Riemann, o en sus ideas sobre los fundamentos del análisis a propósito de las series trigonométricas; dichos textos ilustran de la mejor manera esas nuevas tendencias.

El enfoque conceptual representaba una novedad esencial frente a la tradición del cálculo y de la matemática anterior. Desde el surgimiento del álgebra literal hasta finales del siglo XIX, los matemáticos tendieron a privilegiar las construcciones desarrolladas de una manera concreta por medio de fórmulas. Incluso la geometría griega era, en buena medida, un asunto de construcción de figuras con medios prefijados. Así las cosas, no es extraño que todavía hoy el hombre de la calle identifique la matemática con la manipulación de fórmulas, hasta el punto de que le cuesta comprender que exista la posibilidad de una matemática más abstracta, conceptual. Fue éste un descubrimiento del siglo XIX, que sin duda tiene una gran importancia no sólo para la matemática, sino para el pensamiento en general, y que alcanza una de sus plasmaciones más logradas en lo que se llamó el enfoque conceptual.

Para aclarar lo que está en juego, puede ponerse, entre los muchos ejemplos posibles, el siguiente, que tiene la ventaja de su sencillez. En el siglo XVIII, se solía definir una *función* como una expresión analítica compuesta por variables (letras del alfabeto), constantes (números reales), y ciertas operaciones elementales (como pueden ser +, √, sen, log). Esto incluía el caso de las funciones dadas a través de una serie infinita, bien entendido que los miembros de la serie venían siempre determinados a través de una ley de construcción. Se admitía como algo obvio que toda función será continua en el sentido moderno (salvo quizá en unos pocos puntos aislados); tan asumido estaba que, de hecho, se entendía por función 'discontinua' la que (siendo continua en el sentido moderno) obedece distintas leyes o expresiones analíticas en su recorrido. Así que las *functiones continuae*, en expresión de Euler, eran aquellas que obedecían una única expresión analítica en todo su recorrido.

Las necesidades planteadas por diversos problemas de física matemática, y en especial el estudio de las series trigonométricas de Fourier a principios del XIX, condujeron a debates sobre si es admisible considerar funciones como las dadas por una gráfica trazada libremente (que parecían 'naturales' en ciertos casos, desde el punto de vista físico). Fourier se vio llevado a decir que una función no es otra cosa que una correlación bien definida entre números, que a cada número real tomado como argumento le asocia un único valor $f(x)$. Con esto se planteó una cuestión de gran calado para los fundamentos del análisis: la aceptabilidad de funciones definidas en términos puramente abstractos. Entretanto, Cauchy mostraba que es posible establecer los teoremas básicos del análisis partiendo de meros conceptos generales: definió que

[87] Dirichlet, *Werke* (1889; New York, Chelsea, 1969), vol. 2, 245.

[88] Citado en Wussing, *The genesis of the abstract group concept* (MIT Press, 1969), 270; el pasaje está tomado del *curriculum* de Eisenstein, escrito a los 20 años.

una función $f(x)$ es *continua* si, para un incremento infinitesimal de x, el valor $f(x)$ recibe también un incremento infinitamente pequeño.[89] Aquí no intervienen en absoluto las posibles representaciones de la función mediante fórmulas, y sin embargo Cauchy procedía a desarrollar los teoremas básicos de su curso de análisis.

Dirichlet terció en la discusión al proponer con toda claridad, en un artículo fundamental de 1829 sobre las series de Fourier, que se debe emplear el concepto abstracto de función. En este sentido, dio el famoso ejemplo de la función que toma el valor $f(x) = 0$ para x racional, y $f(x) = 1$ para x irracional, una función que da infinitos saltos en cualquier intervalo, por pequeño que sea.[90] Entiéndase bien, la cuestión no era que Dirichlet tuviera interés en estudiar todas las funciones que puedan definirse, arbitrariamente, en esos términos abstractos; la cuestión era filosófica o metodológica: consideraba más conveniente desarrollar las teorías matemáticas partiendo de conceptos generales y no de fórmulas. Y el motivo no era puramente estético, ni se trataba de un mero ejercicio de lógica, sino que la motivación estaba en que un enfoque conceptual permitía simplificar el tratamiento del análisis, y sobre todo generalizar los resultados, obteniendo a la vez una importante clarificación acerca de la "verdadera naturaleza" de la teoría. Como diría Minkowski más tarde, Dirichlet fue un maestro en el arte de doblegar los problemas matemáticos con un mínimo de cálculos ciegos y un máximo de pensamientos clarividentes.

Su enfoque fue retomado por Riemann ya en la tesis doctoral de 1851, así como en el trabajo ulterior de 1854: al dar una nueva definición de la integral, Riemann daba un paso crucial hacia la consolidación del concepto abstracto de función, y abría el camino al estudio de las funciones discontinuas de variable real. Ahora bien, no todos los matemáticos estaban conformes con esta nueva manera de proceder, que en realidad suponía una desviación importante con respecto a lo tradicional. Alguno criticó la noción abstracta de función por ser "puramente nominal" y carecer de propiedades generales; Weierstrass, el gran rigorizador del análisis, opinaba también que el concepto de función asociado a Dirichlet era demasiado general y no permitía obtener ninguna conclusión concreta sobre las propiedades de las funciones. Weierstrass prefería trabajar con clases de funciones para las que conocía representaciones analíticas explícitas, sobre todo representaciones mediante series. Vemos así que el giro abstracto impuesto por Dirichlet y Riemann estaba lejos de ser habitual en sus días. La gran influencia que tuvo la escuela de Weierstrass hizo que la mayoría de los matemáticos alemanes, hacia fin de siglo, prefirieran una matemática más próxima a la tradición de tomar como punto de partida representaciones formales, fórmulas.

Ahora bien, el nivel de abstracción impulsado por Dirichlet y sus antecesores era mucho más suave que el propuesto por Riemann, y es en este sentido que debe hablarse del último como un personaje que supone una inflexión en el camino hacia la matemática abstracta. El significado de lo que acabo de decir quedará más claro cuando hayamos revisado, en los § 5 y 6, los detalles de algunas de sus contribuciones matemáticas. Pero podemos confirmar ya esa afirmación con un par de citas; comencemos con dos detalles relativos al análisis de variable compleja. Riemann contaba que ya hacia 1847, cuando estudiaba en Berlín, discutió con Eisenstein acerca de la introducción de los números complejos en teoría de funciones. Ambos tenían opiniones muy distintas sobre los principios que debían seguirse, ya que Eisenstein se mostró partidario de basarse en el cálculo formal, mientras que Riemann tendía a considerar que la definición esencial de una función (analítica) de variable compleja está en las ecuaciones en derivadas parciales que llamamos de Cauchy–Riemann.[91] Es decir, Eisenstein habría defendido algo así como el principio de permanencia de las leyes formales, como guía para la extensión del análisis al dominio complejo, mientras que Riemann esbozaba ya su innovador enfoque, que parte de definir las funciones analíticas por medio de una propiedad característica abstracta. Este punto de partida le permitía profundizar el enfoque conceptual abstracto de Dirichlet, al transferirlo al

[89] El concepto puede también precisarse sin recurrir a infinitésimos, según es habitual en manuales de análisis, y como veremos más abajo Riemann empleó esta versión.

[90] Dirichlet, *op. cit.*, 169. Erróneamente, Dirichlet creía que esta función no era representable mediante una única expresión analítica, y pensaba además que no tenía integral.

[91] Dedekind *op. cit.* [1876], 544.

análisis de variable compleja (véanse sus comentarios en el § 20 de la tesis doctoral, incluido como apéndice a la 'Teoría de las funciones abelianas').

Veamos ahora unas declaraciones de Dedekind, autor al que sus contemporáneos criticaban también por llevar la abstracción demasiado lejos, y cuyas construcciones conceptuales fueron calificadas por alguno de ellos (con ironía) de "demasiado incorpóreas" y por otro (sin ella) de "horrendas". En lo tocante a sus temas de trabajo, Dedekind seguía los pasos de Gauss y Dirichlet mucho más que los de Riemann, pero cuando llegaba la ocasión de expresar sus preferencias teóricas y metodológicas, a Dedekind le venía siempre a la boca (o a la pluma) el nombre de su amigo:

> Mi esfuerzo en teoría de números [algebraicos] se encamina a basar la investigación, no en formas de representación (o expresiones) accidentales, sino en conceptos básicos simples, y con ello –aunque esta comparación pueda sonar presuntuosa– a lograr en este dominio algo similar a lo que Riemann en el dominio de la teoría de funciones.[92]

Las expresiones y las fórmulas pueden variarse a voluntad, y por tanto introducen un cierto grado de arbitrariedad; están lejos de captar lo estrictamente esencial y general a los objetos que se estudian por medio de ellas. Las representaciones tienen carácter externo, y hay que privilegiar lo interno, las propiedades características definitorias. Dedekind seguía pues el ejemplo de Riemann, tratando de localizar y precisar los conceptos básicos por medio de los cuáles fuera posible un desarrollo abstracto de la teoría, edificándola de modo que estuviera "en situación de predecir los resultados del cálculo", como dijo en un artículo del mismo año. Contra lo que era habitual, tanto en análisis como en álgebra, las representaciones y fórmulas debían relegarse siempre al final del desarrollo teórico. La misma idea, e idéntica referencia a Riemann, se encuentran todavía en comentarios metodológicos del autor realizados en 1895.

La única pega de los planteamientos de Riemann es que apostó siempre por lo que le parecía el enfoque conceptualmente idóneo, aún en el caso de que esto planteara dificultades en relación al rigor. No se trata de que Riemann fuera indiferente a los problemas del rigor, recordemos que era discípulo directo de Gauss y Dirichlet, pero sí es cierto que su actitud frente a esta cuestión era claramente diferente de la de un Weierstrass o un Dedekind. Diríamos que para Riemann el rigor era un rasgo metódico muy importante, pero no un fin en sí mismo ni un *summum bonum*. A este respecto, la teoría de funciones nos da de nuevo algunos de los mejores ejemplos: la noción de 'superficie de Riemann', y la famosa cuestión del 'principio de Dirichlet' en el que Riemann basó su desarrollo de la teoría (§ 6.2). Sólo en 1913, con un libro de Hermann Weyl titulado precisamente *La idea de las superficies de Riemann*, se llegó a presentar ambos puntos sobre la base de un tratamiento riguroso.

Sin embargo, Riemann era consciente de la necesidad de tratar con cuidado los fundamentos del análisis. Por ejemplo, aunque en la conferencia sobre geometría parezca identificar el requisito de continuidad con el de diferenciabilidad, en sus lecciones dio ejemplos de funciones continuas no diferenciables, antes de que fueran conocidos los famosos ejemplos de Weierstrass. En temas del análisis real, seguía los mismos principios que sus contemporáneos, y así podemos leer en una nota manuscrita:

> En matemáticas, conceptos tales como continuidad, infinitud, similaridad y disimilaridad deben siempre tratar de reducirse a igualdades y desigualdades. Sólo así pueden traerse a una plena claridad los métodos con los que se les somete a cálculo (investigación). Las demostraciones de los teoremas fundamentales del cálculo infinitesimal se hacen, al tener que resolver también estos problemas, algo más prolijas.[93]

Y en otro lugar puede verse cómo empleaba, igual que Weierstrass, formulaciones en términos de ε-δ (en su caso, ε-α) para precisar conceptos básicos como el de continuidad de una función.[94]

---

[92] Carta a Lipschitz, junio de 1876, en Dedekind, *Werke* (1932; New York, Chelsea, 1969), vol. 3, 223–24; véase también p. 296 y vol. 2, 54–55.

[93] Riemann *Werke. Nachträge*, 111.

[94] Riemann *Werke*, 46.

Las carencias de rigor que se encuentran en su obra se derivan, en buena medida, de la misma novedad de los caminos y enfoques intentaba hacer valer. Hay que decir que, en general, la posteridad vino a darle la razón y a reconstruir sus planteamientos de forma totalmente satisfactoria.

En todo caso, los trabajos de Riemann se hicieron famosos por los puntos oscuros que podían llegar a encerrar. La oscuridad advertida por sus contemporáneos se debía a la originalidad del enfoque, que exigía un largo período de tiempo para ser asimilado, complicada por la necesidad de complementar y perfeccionar sus desarrollos. Valga como muestra la declaración que le hacía Dedekind al otro editor de las obras de Riemann, Heinrich Weber, cuando empezaban a discutir ese proyecto conjunto:

No soy el profundo conocedor de las obras de Riemann por el que Ud. me toma. Ciertamente conozco esas obras y *creo* en ellas, pero no las domino, y no las dominaré hasta haber superado a mi manera, con el rigor habitual en la teoría de números, toda una serie de oscuridades.[95]

En alguien como Dedekind, que convirtió la exigencia de demostrar todo lo demostrable en su divisa, resulta llamativo encontrar una apelación tan clara a la mera *creencia*, lo que da una buena indicación del enorme respeto que sentía por su antiguo amigo. En un pasaje de su biografía de Riemann nos ofrece lo que parece ser su explicación del peculiar modo de trabajo riemanniano:

Su brillante capacidad de pensar y su fantasía anticipadora le hacían dar casi siempre –como se ponía de manifiesto especialmente en conversaciones casuales sobre temas científicos– pasos muy grandes que no era tan fácil seguir, y si se le pedía un examen más detallado de algunos miembros intermedios de sus deducciones podía quedarse desconcertado, y le causaba algún esfuerzo acoplarse al razonar más lento de los otros y alejar rápidamente sus dudas. Así, en sus lecciones a menudo le molestaba sensiblemente observar las expresiones de sus oyentes, … cuando, a veces contra todas sus expectativas, se creía obligado a demostrar en particular un punto que para él era casi obvio.[96]

4.3. La cuestión del infinito. Riemann fue ante todo un especialista en análisis y –como dijo Hilbert– el análisis matemático es una sinfonía del infinito. El núcleo de todos los debates en torno a los fundamentos que se han presenciado en el último siglo puede localizarse en el continuo de los números reales, que llevan la marca indeleble del infinito actual a modo de un estigma. Así pues, es imposible obviar el problema del infinito al tratar de los fundamentos de la matemática desarrollada en la época moderna y contemporánea.

La posición de Riemann en esta cuestión parece haber sido una combinación sutil entre impulsos matemáticos y filosóficos, pero no hay duda de su tendencia a admitir el infinito actual. A menudo se ha dicho que los matemáticos se opusieron tradicionalmente a la idea de un infinito actual o completo, adhiriéndose al aristotélico *horror infiniti*, hasta que por fin Cantor luchó incansablemente por un cambio e introdujo los números transfinitos. Desde luego hay algunos ejemplos notables y famosos de rechazo, como en Descartes:

No se debe intentar la comprensión de lo infinito, sino sólo se debe pensar que todo aquello en lo que no encontramos límites es indefinido.
De este modo no nos veremos nunca envueltos en las disputas acerca de lo infinito, pues sería ridículo que nosotros, siendo finitos, intentásemos determinar algo infinito y, de esta forma, suponerlo finito, pues intentamos comprenderlo.[97]

o en la conocida carta de Gauss, escrita en 1831:

---

[95] Carta de noviembre 1874, *Nachlass* Riemann, I, 2, p. 14 (el *Nachlass* se conserva en la Biblioteca Estatal y Universitaria de Baja Sajonia, localizada en Gotinga).

[96] Dedekind *op. cit.* [1876], 550–51.

[97] Descartes, *Los principios de la filosofía* (Madrid, Alianza, 1995), 37.

Protesto contra el empleo de una magnitud infinita como si fuera completa, cosa que nunca está permitida en la matemática. El infinito es sólo una *façon de parler*, cuando propiamente se habla de límites.[98]

Pero también podrían ponerse ejemplos contrarios, especialmente tomados de Leibniz. Igual que sucede con otras generalizaciones extremas, la anterior no se sostiene frente a la evidencia, y el lector podrá comprobar que no es fácil encontrarla en trabajos históricos bien informados. Cuando menos en Alemania –y en este punto probablemente tiene mucho sentido hablar de diferencias entre culturas nacionales– hubo una tendencia significativa a admitir el infinito actual. La atmósfera filosófica era favorable, especialmente debido al ambiente de recuperación de Leibniz; ello se alió con otras razones matemáticas y lógicas, llevando a que matemáticos como Steiner, Bolzano, Riemann y Dedekind se manifestaran a favor del infinito actual antes incluso de Cantor. Y lo mismo sucedía con científicos y filósofos como los mencionados Fechner y Lotze, o como el propio Weber.

Pasemos pues a Riemann. Hay que decir, ante todo, que sus puntos de vista requieren una reconstrucción, ya que no hay ningún texto matemático suyo en el que se declare expresamente a favor del infinito actual. Más bien, sus afirmaciones *presuponen* que ese problema está ya resuelto; comencemos –por variar– con ejemplos matemáticos. El mero hecho de que considerase las variedades de dimensión arbitraria como conjuntos de puntos, sugiere ya que admitía el infinito actual. Sin embargo, bien podría argumentarse que esta evidencia no es concluyente. Más claro parece el hecho de que introdujera "puntos en el infinito" en el contexto de su 'Teoría de las funciones abelianas', lo que le permitía considerar el plano complejo como una superficie *cerrada* y simplificar sus consideraciones teóricas. Todavía más llamativo es que, en la conferencia de 1854, no sólo se atreviera a considerar sin ningún reparo variedades *n*-dimensionales, sino que asumiera la existencia de variedades o espacios de infinitas dimensiones:

existen variedades en las cuales la determinación de posición exige, no un número finito, sino bien una sucesión infinita o bien una variedad continua de determinaciones de magnitud. Constituyen variedades tales, por ejemplo, las determinaciones posibles de una función para una región dada, las configuraciones posibles de una figura espacial, etc.

Difícilmente podría haber escrito estas frases un seguidor ortodoxo de Aristóteles. Resulta interesante, además, advertir cómo Riemann diferencia claramente el caso de una sucesión infinita del de un continuo. Esto sugiere poderosamente que no cayó en el error de identificar lo discreto con lo finito (la sucesión, igual que], es un infinito discreto), lo que a su vez parece confirmar que era un partidario del infinito actual.

Un comentario llamativo de Riemann acerca del infinito es el siguiente, que se encontró entre sus manuscritos:

El conocimiento del hecho de que las series infinitas y las integrales múltiples se dividen en dos clases, constituye un punto de inflexión en la concepción del infinito en la matemática.[99]

Aclaraciones sobre el significado de esta frase se encuentran en la introducción histórica al trabajo sobre las series trigonométricas (1854). Como veremos, Dirichlet demostró que una amplia gama de funciones continuas admiten representación mediante series de Fourier; Riemann, que había discutido el tema y su desarrollo histórico con el propio Dirichlet, afirma:

La idea del camino a seguir para la solución de este problema le vino con la inteligencia de que las series infinitas se dividen en dos clases esencialmente distintas, según que, al hacer positivos todos sus miembros, permanezcan convergentes o no.

Las series de Fourier pueden ser de un tipo o de otro, pero la suma de las series infinitas del segundo tipo depende del orden de sus términos; de hecho Riemann perfecciona el resultado de

[98] Gauss, *Werke*, vol. 8, 216.
[99] Riemann, *Werke. Nachträge*, 111.

Dirichlet demostrando que, al reordenarlos adecuadamente, se puede hacer que la serie converja a un valor *cualquiera*. Tras esto, comenta:

Las leyes de las sumas finitas sólo son aplicables a las series de la primera clase; sólo ellas pueden realmente ser consideradas como una [mera] colección de todos sus miembros, no las series de la segunda clase; circunstancia que había pasado inadvertida a los matemáticos del siglo pasado, principalmente por la razón de que las series de potencias pertenecen, hablando en general (es decir, exceptuando valores aislados de la variable), a la primera clase.

Como vemos, el punto de inflexión está ligado ante todo a un problema de rigor y clarificación conceptual; no deja de ser relevante el que, según Riemann, un tipo de series infinitas pueda considerarse, en cierto modo, como la simple colección o conjunto (infinito, claro está) de sus términos.

Es tiempo ya de pasar a lo que los escritos filosóficos de Riemann nos dicen acerca del infinito: veremos que nos permitirán confirmar lo que sugieren los pasajes anteriores. Para empezar, conviene discutir brevemente las posiciones de los filósofos que influyeron en él. Comenzando por Leibniz, es bien sabido que en sus escritos filosóficos se mostró partidario declarado del infinito actual, y que sus obras matemáticas no pueden reconstruirse sin hacer uso de los infinitésimos. Para Leibniz, la infinitud era una característica esencial de Dios y de su creación; en un texto célebre (citado por Bolzano en 1851 y por Cantor en 1883) dice:

Estoy en tal medida a favor del infinito actual, que en lugar de admitir que la naturaleza lo aborrece, como se dice vulgarmente, sostengo que la afecta por todas partes para mejor mostrar las perfecciones de su Autor. Así, creo que no hay ninguna parte de la materia que no sea, no digo ya divisible, sino actualmente dividida; y en consecuencia la menor partícula debe considerarse como un mundo lleno de una infinidad de criaturas diferentes.[100]

En cuanto a Herbart, al principio de su carrera, en la etapa en que estudió matemáticas con detalle, fue partidario manifiesto del infinito actual. Mucho más tarde, a finales de los años 1830, declararía que el infinito sólo puede considerarse indeterminado e incompleto,[101] y esta es la tesis que por la que se le suele recordar; pero conviene repetir que Riemann indicó claramente su preferencia por los escritos iniciales de Herbart.[102] Entonces, Herbart hablaba del servicio que la metafísica había prestado a la matemática al eliminar la aversión hacia el infinito, la cual había llevado a los matemáticos a enseñar "en formas extrañas, *sin* ese concepto fundamental, aquello que *sólo* a través de él fue accesible al propio *descubridor*" [alusión a Leibniz como descubridor del cálculo].[103] Recordemos también la ontología de los "reales", versión herbartiana de la monadología de Leibniz (§ 2.1). Todo esto sugiere que Riemann podría haber estado del lado infinitista de Leibniz y del primer Herbart.

El texto que sirve para confirmar esa hipótesis es precisamente el de las 'Antinomias', del que ya hemos hablado. Aquí, las ideas de la tesis llevan el encabezamiento "finito, representable", las de la antítesis "infinito, sistemas conceptuales que están en las fronteras de lo representable". Y en la aclaración general leemos:

Los sistemas conceptuales de la antítesis son conceptos que están *bien definidos* mediante predicados negativos, pero no son representables positivamente. [cursivas añadidas]

En particular, el concepto de infinito está bien definido y resulta plenamente admisible, aunque no admite conceptualización positiva. Lo infinito es, etimológica y conceptualmente, lo no-finito, lo

---

[100] J. E. Erdmann, *Leibnitii Opera Philosophica* (Berlín, 1840), 118. La misma idea se repite en la famosa *Monadología*, véanse sus puntos 57 y 64–67.

[101] Herbart, *Lehrbuch zur Einleitung in die Philosophie* [1837]: "Por el contrario, para una cantidad [Menge] *infinita* la posibilidad de contar queda decididamente excluida, pues lo *verdaderamente infinito sólo puede ser concebido como algo indeterminado, incompleto*" (en *Sämtliche Werke*, Aalen, Scientia, 1964, vol. 4, p. 88–89).

[102] Riemann, *Werke*, 507–08.

[103] Herbart, *Über philosophisches Studium* [1807], en *Sämtliche Werke* (Aalen, Scientia, 1964), vol. 1, 174.

que se encuentra en el límite (frontera) de lo finito, cuando esto finito crece más allá de cualquier cantidad asignable.

Hay varios aspectos de esta posición que merecen ser comentados. La concepción de Riemann está algo lejos de lo que se encontrará en la obra conjuntista posterior de Dedekind y Cantor. Aunque Riemann aceptaba el infinito actual, creía que no era posible definir ese concepto directamente, pero su amigo Dedekind se encargó de enmendarle la plana. Según la famosa definición de Dedekind, un conjunto C es infinito si y sólo si existe una aplicación biunívoca φ: $C \rightarrow S$, siendo S un subconjunto de C.[104] Por si fuera poco, Dedekind basó en esa definición, y en el estudio de conjuntos infinitos, su teoría de los números naturales y los conjuntos finitos; lástima que Riemann no hubiera vivido más, para conocer su reacción ante semejante inversión de lo que tradicionalmente se había considerado el orden natural de las cosas. Por otro lado, cuando dice que el infinito no es representable positivamente, podría entenderse que Riemann niega la posibilidad de investigarlo desde el punto de vista matemático. Si es así, los logros de Cantor, desde el descubrimiento de que hay más puntos en un segmento que números naturales, hasta la introducción de los números ordinales y cardinales transfinitos, le habrían sorprendido enormemente.

FIG. 10. Georg Cantor (1845–1918), continuador de la obra de Riemann en análisis, adoptó su noción de 'variedad' elaborando la teoría de conjuntos.

En otro orden de cosas, hay que señalar un matiz filosófico muy importante. Los comentarios de Riemann sobre finito e infinito aparecen en una tabla de antinomias, y se entiende por antinomia una contradicción irresoluble, natural e inevitable para la razón. Esto quiere decir que la mente humana no está en condiciones de elegir uno u otro de los términos o proposiciones antitéticos que forman cada par. Hay que suponer que Riemann asumía esta implicación, de donde se sigue que, en su opinión, una antitética irresoluble afecta al par de conceptos finito/infinito. Podemos concebir las cosas, en los distintos ámbitos, desde el punto de vista de lo finito y representable, o desde el punto de vista de lo infinito, en el límite de lo representable. Ambos enfoques son admisibles y justificables, pero son contrarios, y además resulta imposible dar argumentos para optar por uno o por otro. Este importante matiz, de cariz típicamente filosófico, diferenciaría profundamente a Riemann de sus continuadores Dedekind y Cantor. (Sin embargo –igual que en otros casos–, no es descartable que el fragmento sobre antinomias fuera de comienzos de los años 1850, y que las ideas de Riemann al respecto hubieran sufrido una evolución posterior.)

[104] Esto también sorprendió mucho a Cantor, cuando Dedekind se lo comunicó en 1882; véase Dedekind, *¿Qué son y para qué sirven los números?* (Madrid, Alianza/UAM, 1998), 115–16, 174.

Algo análogo puede decirse del par de conceptos que constituyen la primera antinomia de Riemann: discreto/continuo. Riemann aceptaba sin duda la concepción infinitista del continuo, y de hecho consideraba el concepto de continuidad como idea básica y matriz de la matemática (véase su escrito sobre epistemología). Pero debía pensar que no es posible definir ese concepto directamente, punto en el que, de nuevo, su amigo Dedekind y más tarde Cantor se encargaron de enmendarle la plana. Dedekind indicó en 1872 que un conjunto *C* dotado de un orden lineal denso es continuo si y sólo si toda cortadura en *C* corresponde a un elemento de *C*; dijo, además, que esta definición sirve de fundamento para un análisis general de los continuos. En 1883, Cantor definió un continuo, en términos de topología de conjuntos de puntos, como un conjunto perfecto y conexo.[105] De nuevo vemos que la evolución posterior de la matemática tiende a dar definiciones incluso para estos conceptos altamente abstractos.

Ahora bien, tales definiciones sólo son posibles admitidas ciertas "hipótesis" o axiomas, en este caso los axiomas de la teoría de conjuntos, incluyendo el axioma de infinitud (que, expresado informalmente, diría: existe un conjunto infinito). A este nivel es, precisamente, donde se localizaron las intensas disputas sobre fundamentos que han estado vivas (aunque fuera a nivel de brasas residuales) durante los últimos 130 años. La disputa principal es, precisamente, la que enfrenta a finitistas/constructivistas y a infinitistas, o en otros términos, a los partidarios radicales de lo discreto y de lo continuo. Puede decirse que el principal caballo de batalla para el debate de fundamentos ha sido y es la idea del continuo. Teniendo esto en cuenta, el lector podrá apreciar en su justa medida la sabiduría que se encierra bajo la apariencia quizá simple de la primera antinomia de Riemann.

5. Riemann matemático: topología y geometría.

> Et his principiis via sternitur ad majora.
> Y con estos principios se abre camino a cosas más altas.[106]

Sin duda, el lector estará ya deseando encontrar unas palabras sobre las famosas ideas geométricas de Riemann, si es que no ha saltado buena parte de las páginas anteriores en busca de ello. Pasemos, pues, a sus contribuciones propiamente matemáticas, admitiendo de partida que no se encontrará aquí un comentario sobre *toda* la obra de Riemann, sino sobre los aspectos representados en la presente selección. Comenzaremos hablando de geometría y topología, haciendo un especial esfuerzo por divulgar los conceptos que aquí se encuentran; luego (§ 6) consideraremos las contribuciones de Riemann al análisis real y complejo, para acabar con su famosa contribución a la teoría de números.

Es bien sabido que la geometría de Riemann se inscribe en uno de los capítulos más famosos de la historia de la matemática, el desarrollo de las geometrías no euclideas, y que constituyó un preparativo esencial para la teoría relativista de la gravitación. Puede decirse, abusando de una expresión famosa, que aquí nos encontramos con tres gigantes subidos unos a hombros de otros: Riemann sobre las espaldas de Gauss, y Einstein encima de aquél. A propósito de este desarrollo de ideas, escribía precisamente Einstein en 1922:

> Los conocimientos matemáticos que posibilitaron el establecimiento de la teoría de la relatividad general, hemos de agradecérselos a las investigaciones geométricas de Gauss y Riemann. El primero investigó en su teoría de superficies las propiedades métricas de una superficie inmersa en un espacio euclideo tridimensional, y mostró que

---

[105] Véase Dedekind, *op. cit.* [1998], 84–85, y sobre Cantor el libro de Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos* (Madrid, Alianza, 1984), 255–56 o también Ferreirós, *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Madrid, UAM, 1993), 249–52. Un subconjunto S de $|^n$ se dice 'perfecto' si contiene todos sus puntos de acumulación, 'conexo' (siguiendo a Cantor) si dos elementos s, s' de S pueden siempre enlazarse mediante una cantidad finita de elementos $t_1, \ldots, t_n$ de S, manera que las distancias $st_1, \ldots, t_n s'$ sean todas menores que un $\delta > 0$ cualquiera.

[106] Frase de Newton, al final de un trabajo suyo sobre la cuadratura de curvas (integración), que Riemann empleó como encabezamiento de un trabajo donde desarrollaba y aplicaba aspectos analíticos de su geometría diferencial: 'Commentatio mathematica', *Werke*, 391.

éstas pueden ser descritas mediante conceptos que sólo guardan relación con la propia superficie, y no con la inmersión [en el espacio] … Riemann extendió la línea de pensamiento gaussiana a continuos de cualquier número de dimensiones, y previó el significado físico de esta generalización de la geometría de Euclides con visión profética. … las leyes naturales sólo adoptan su forma lógica más satisfactoria cuando son expresadas como leyes del continuo cuatridimensional espacio-temporal.

Así, no resulta extraño que la lección de Riemann sobre geometría, un texto de sólo 15 páginas, haya adquirido un aura legendaria.

El lector del famoso texto debe recibir una advertencia, que ya apuntaba al principio mismo de la introducción. Por evitar el empleo de formalismo matemático, su exposición parecerá inevitablemente vaga y difusa a los lectores que sean matemáticos de formación. Esto se ve empeorado por el hecho de que Riemann no hizo –ni estaba en condiciones de hacer– explícitos todos los presupuestos de sus conceptos, especialmente de su idea de variedad (que en el espacio de dos páginas pasa de hacer referencia a conjuntos en general, a designar variedades diferenciables). Riemann hace libre uso de un lenguaje de estilo filosófico, que puede resultar difícil al lector actual, aunque sea muy preciso; es importante asociar a cada término el significado que Riemann define, y no cualquier sentido usual en el lenguaje de la calle. Especiales dificultades plantean los términos 'determinación', 'variedad' y 'magnitud', de los que me he ocupado en una sección anterior (§ 4.1). Además, el efecto de extrañeza se ve aumentado por los importantes cambios que se han dado en la configuración de la matemática desde entonces. ¿Vale la pena, a pesar de todos estos pesares, emprender la lectura? Lectores como Dedekind y Weyl han señalado que la lección es una auténtica obra maestra en lo relativo a exposición, y yo creo también que la respuesta es indiscutiblemente sí. Pero el lector debe saber que le será útil tener alguna ayuda.

5.1. La geometría no euclidea antes de Riemann. Puede decirse que durante el siglo XIX la geometría perdió su posición de paradigma matemático en favor del análisis, elaborado sobre una base aritmética rigurosa. Y sin embargo se ha dicho que ese siglo fue la "edad heroica de la geometría", debido a la enorme variedad de novedades y desarrollos introducidos. Se profundizó en la comprensión de las propiedades geométricas, con lo que de la clásica geometría métrica se pasó a las geometrías afín y proyectiva; se inició el desarrollo de la topología, que daría lugar a una de las ramas más características de la matemática del siglo XX; se desarrollaron enormemente la geometría algebraica y la geometría diferencial, etc. El estudio de la *geometría proyectiva* fue el principal tema de trabajo desde principios de siglo, sirviendo como gran campo de innovación y experimentación; entre otras muchas cosas, llevó a los primeros esfuerzos 'modernos' de fundamentación axiomática rigurosa, y a una reorganización del conocimiento geométrico desde la perspectiva de los grupos de transformaciones (el célebre "programa de Erlangen" de Klein). Sin embargo, la contribución más famosa del siglo son las *geometrías no euclideas*, lo que sin duda se debe al alcance que tuvo esta innovación para la comprensión de la naturaleza de la matemática. A este nivel filosófico y metodológico, las geometrías no euclideas han desempeñado un papel capital y revolucionario.

El trabajo de Riemann se inscribe en este terreno y viene, pues, asociado a los nombres de Lobachevskii y Bolyai, aunque hay que decir que fue incomparablemente más profundo que los de éstos. La motivación de Lobachevskii y Bolyai fue el viejo problema de las paralelas, tema predilecto de aficionados a la matemática desde la antigüedad. Ya que el axioma de las paralelas de Euclides es mucho más complejo, e incluso de carácter distinto, que sus restantes axiomas, ¿no sería posible deducirlo de postulados simples? Tras 2.000 años de intentos infructuosos, se llegó a sospechar no sólo que la respuesta era negativa, sino incluso que era lógicamente posible desarrollar geometrías basadas en axiomas contrarios. Los primeros en establecer rigurosamente una geometría basada en un axioma no euclideo (por un punto exterior a una recta r pasa *más de una* recta paralela a r) fueron Lobachevskii y Bolyai, que publicaron hacia 1830. El logro era impresionante desde el punto de vista conceptual, lógico y filosófico, pero en términos matemáticos resultaba muy próximo al modelo euclideo.[107]

Lobachevskii y Bolyai establecieron ecuaciones para la geometría no euclidea tridimensional que les indujeron a pensar que no había en ello ninguna contradicción. En dichas fórmulas figuraba una constante K de la que dependía el comportamiento de las figuras geométricas, pero de momento carente de interpretación; K podía variar continuamente, y la geometría euclidea aparecía como un caso degenerado de geometría de Lobachevskii–Bolyai ($K = 0$). Estos autores creyeron pues que habían dado con la forma más general de tratar la geometría, y el segundo lo llamaba "ciencia absoluta del espacio". Pero hay que decir que con Riemann se alcanzó un punto de vista muy superior en relación con el problema del espacio; las geometrías de Lobachevskii–Bolyai se quedaban, a su vez, en casos muy especiales y particulares.

En todo caso, bastaron las contribuciones de estos predecesores para que tuviera lugar un cambio revolucionario en la concepción del espacio. Hasta aquel momento, se pensaba que había plena identidad entre el espacio real y el espacio euclideo. Se creía que la geometría de Euclides era la única posibilidad conceptual para la mente humana, y que además ese espacio conceptualmente necesario y evidente era idéntico al espacio real. (No es de extrañar que el apriorismo y el racionalismo buscaran siempre en la matemática su refugio más seguro.) Ahora, al constatarse la posibilidad lógica de toda una gama de geometrías de Lobachevskii–Bolyai, se planteaba la posibilidad de que el espacio real, físico, fuera no euclideo. Gauss, Lobachevskii, Bolyai y Riemann aceptaron plenamente esta posibilidad; reflexionando sobre ello, Gauss escribía a su amigo el astrónomo Bessel, en 1830:

> Según mi más íntima convicción, la posición de la teoría del espacio con respecto a nuestro conocimiento *a priori* es muy distinta a la de la pura teoría de magnitudes: nuestro conocimiento de aquélla se aleja completamente de *esa* convicción total de su necesidad (o sea, también de su verdad absoluta) que es propia de la *última*; debemos conceder con humildad que, si el número es *puramente* un producto de nuestro espíritu, el espacio tiene también una *realidad fuera* de nuestro espíritu, y que no podemos prescribir sus leyes completamente *a priori*.[108]

Por dar otro ejemplo, Lobachevskii anunció en 1826, cuando ya estaba en posesión de sus nuevas ideas geométricas, una "prueba rigurosa del teorema de las paralelas"; no se trataba de una prueba matemática, sino empírica: había medido los ángulos de paralaje de Sirio y de otras dos estrellas, constatando que su suma era muy próxima a 180°.[109] Este cambio de perspectiva marcó una transformación de gran alcance en la comprensión de la matemática: los objetos matemáticos no están restringidos a lo real, sino que, por así decirlo, lo superan en la dirección de lo posible.

En todo caso, las ideas planteadas por Lobachevskii y Bolyai entre 1830 y 1840 apenas fueron objeto de atención; ni siquiera en el caso de Riemann tenemos ningún indicio de que las conociera. Sólo en los años 1860, a raíz de la publicación de la correspondencia de Gauss, comenzó una discusión abierta en torno a las geometrías no euclideas. Entretanto, Riemann había leído su conferencia en 1854, y había logrado la aprobación entusiasta de Gauss, pero nunca publicó la obra, seguramente porque esperaba escribir algún día un tratado riguroso y detallado. Tras su muerte, Dedekind la editó en las memorias de la Academia de Ciencias de Gotinga (1868); un joven testigo del momento contaba años más tarde:

---

[107] También Gauss, en su obra inédita, había desarrollado la geometría hiperbólica. La principal novedad, clave para que fuera posible un desarrollo completo, fue la introducción del tratamiento analítico basado en las funciones trigonométricas hiperbólicas. El lector puede consultar, entre otras obras, la de J. Gray, *Ideas de espacio* (Madrid, Mondadori, 1992).

[108] Gauss, *Werke*, vol. 8, 201. La propia teoría de los números reales acabaría perdiendo también el aura de necesidad y verdad absoluta que Gauss aun le confería.

[109] La suma de los ángulos de un triángulo, en la geometría Lobachevskii–Bolyai, es menor de 180°, y tanto más pequeña cuanto mayor sea el área del triángulo (de ahí la conveniencia de trabajar con triángulos astronómicos).

Esta conferencia causó una tremenda sensación al ser publicada … Pues Riemann no sólo había abordado profundísimas investigaciones matemáticas … sino también, en todo momento, la cuestión de la naturaleza interna de nuestra idea de espacio, y había tocado el tema de la aplicabilidad de sus ideas a la explicación natural.[110]

El tratamiento de Riemann abría un enfoque totalmente nuevo para la cuestión, basado en la geometría diferencial. Intentaré aquí ofrecer una introducción elemental al tema, dejando al propio Riemann y a Weyl la tarea de dar explicaciones detalladas; pero, antes que nada, necesitaremos hablar de una importante contribución de Gauss.

5.2. La geometría diferencial de superficies de Gauss. En las geometrías de Lobachevskii–Bolyai surge toda una serie de resultados poco familiares: los ángulos de un triángulo suman menos de dos rectos; no hay triángulos semejantes de área distinta; existe una medida absoluta de longitud (la altura máxima de un triángulo rectángulo isósceles); e incluso se dan rectas asintóticas, es decir, rectas que se acercan cada vez más sin cortarse nunca. Inicialmente, todo esto hacía pensar que dichas geometrías debían encerrar alguna contradicción; y el último resultado paradójico que he mencionado hacía pensar que lo que faltaba, para poder demostrar fehacientemente la 'verdad' de la geometría euclidea, era una buena definición de *recta*. Parecía claro que algo va mal si tenemos rectas asintóticas, y las demás paradojas pueden ponerse en relación con esta situación anómala. Ahora bien, ¿qué es, realmente, una recta? La pregunta era más complicada de lo que podía parecer a primera vista, y cuanto más larga y cuidadosa fuera la reflexión sobre este tema, más oscura se volvía la presunta necesidad de la geometría euclidea. Herón de Alejandría había dicho que una línea recta es una línea tensada al máximo; dicho con más precisión, una recta se distingue de las curvas próximas a ella por tener longitud mínima. Pero esto todavía está lejos de llevarnos de vuelta a Euclides.

En 1828, se publicó un famoso trabajo de Gauss que dio origen a la geometría diferencial moderna, pero que también puede ponerse en relación con el problema de la naturaleza de las rectas. Su título era 'Disquisitiones generales circa superficies curvas', y en él se abría camino al estudio de la geometría de las superficies desde un punto de vista *intrínseco*; para ello, Gauss definía el concepto de *medida de curvatura* de la superficie en cada punto. El objetivo de la memoria era introducir un "nuevo punto de vista" respecto a las superficies curvas:

Si no se consideran las superficies como contornos de cuerpos, sino como cuerpos, una de cuyas dimensiones es infinitamente pequeña, y también se las considera flexibles, pero no extensibles,

entonces nos vemos llevados a considerar las propiedades "absolutas" que aun se conservan al deformar las superficies sin romperlas, estirarlas, ni plegarlas.[111] Entre ellas está precisamente la medida de curvatura en cada punto, pero también las consideraciones relativas a figuras construidas sobre la superficie (ángulos que forman, su área, etc.), así como las consideraciones relativas a las líneas mínimas o geodésicas sobre la superficie. Es notable cómo el trabajo de Gauss aborda explícitamente las propiedades "infinitesimales" de las superficies; no es fácil traducir sus desarrollos a un lenguaje libre de esa idea.

Supongamos una superficie cualquiera en el espacio; a nivel local, en el entorno de un punto P, las superficies sólo pueden (salvo casos degenerados) tener la forma de un gorro, o bien la de una silla de montar; además, por P pasan dos curvas de la superficie distinguidas, que definen las *curvaturas principales*: son las curvas que tienen mayor y menor curvatura entre todas las que pasan por P. Gauss definió rigurosamente la curvatura K de la superficie en P (de un modo que no detallaré aquí), obteniendo el resultado de que K es igual al producto de las curvaturas principales k_1 y k_2 en P. Se conviene en que la curvatura es positiva si la superficie tiene forma de gorro, y negativa en el caso de la silla de montar; un plano euclideo (y las superficies que pueden deformarse hasta coincidir con un plano, por ejemplo una superficie cilíndrica) tiene

[110] Felix Klein, *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert* (Berlin, Springer, 1926), 173.
[111] Gauss, 'Disquisitiones generales circa superficies curvas' [1828], *Werke*, vol. 4, §13.

curvatura cero en todos sus puntos. La curvatura gaussiana *K* permite dar un sentido a la constante arbitraria en la que descansaban los trabajos de Lobachevskii y Bolyai, al menos en el caso bidimensional (la medida de curvatura de Riemann hará lo propio para 3 o *n* dimensiones). La geometría plana de Lobachevskii–Bolyai queda caracterizada por una medida de curvatura constante en todos los puntos, que puede ser negativa, o bien 0, en cuyo caso el plano es euclideo.

Lo más importante, sin embargo, es que Gauss demostraba rigurosamente que el concepto de curvatura es *intrínseco*: que sólo depende de las características internas de la superficie, y no de la posición de ésta relativa al espacio ambiente. El resultado le pareció a Gauss tan importante que lo denominó "teorema egregio".[112] Para aclarar lo que significa, supongamos que curvamos y deformamos la superficie a voluntad, pero siempre sin alterar las longitudes de las curvas que contiene; dichas transformaciones *isométricas* respetan las distancias intrínsecas entre sus puntos (distancias medidas a lo largo de curvas en la superficie). Pues bien, el teorema egregio dice que la curvatura gaussiana *K* es invariante bajo transformaciones isométricas. Es fácil ver –compruébelo el lector con una hoja de papel– que una superficie plana finita se puede transformar, de tal modo, en un cilindro, o también en un cono sin su cúspide. El resultado de Gauss implica, pues, que la geometría intrínseca del plano es la misma que la geometría intrínseca en un cilindro o un cono.[113] Las rectas del plano se transforman, bajo la transformación isométrica, en las llamadas *geodésicas* de las otras superficies. Se denomina geodésica a la curva que determina la distancia más corta entre dos puntos *sobre* una superficie dada (y no en el espacio tridimensional ambiente).

Si aplicamos esos resultados al problema de la naturaleza de las rectas, nos encontramos con una grave dificultad. Ninguna condición que podamos expresar en términos de la geometría del plano nos permitirá caracterizar la línea recta, porque esa misma condición (intrínseca) se aplica a las geodésicas de las superficies que son sus imágenes bajo deformación isométrica. Extrapolando al caso de tres dimensiones, ¿cómo podemos saber si lo que llamamos 'rectas' en nuestro espacio no son más bien geodésicas de algún tipo? Análogamente, ¿cómo podemos saber que nuestros 'planos' no son superficies curvas? Todo indica que Gauss era muy consciente de estos problemas; en una carta de aquel tiempo escribe que el tema de su memoria

> nos lleva a un plano impredictible. Esta investigación está profundamente interrelacionada con mucho más, yo diría que con la metafísica del espacio, y encuentro difícil sacudirme las consecuencias de ello.[114]

A la muerte de Gauss, su colega el profesor Sartorius von Waltershausen informaba de conversaciones en las que Gauss había dicho que la tridimensionalidad podría ser una limitación de nuestras mentes, y en las que comparaba a los hombres con planilandeses:

> Podemos imaginar, dijo, una especie de seres que sólo son conscientes de dos dimensiones; quizá los que están por encima de nosotros nos contemplen de forma semejante, y [Gauss] habría dejado de lado cierto número de problemas, continuó diciendo de broma, que pensó que podría tratar geométricamente más adelante, en circunstancias superiores.[115]

Diversas afirmaciones de Gauss sugieren que veía una relación clara entre el artículo sobre superficies curvas y la geometría no euclidea, y que su estudio le confirmaba en la idea de que el espacio real bien pudiera ser no euclideo. Hay que resaltar que en dicha memoria enfatizaba resultados sobre la suma angular en triángulos formados por geodésicas que están ligados a resultados típicos de las geometrías no euclideas. Hacia el final del trabajo exponía el siguiente

---

[112] Gauss, *op. cit.* [1828], §12.

[113] Riemann hace referencia a los resultados de Gauss que hemos visto hasta aquí en el apartado II, sección 3, de su lección.

[114] Gauss, *Werke*, vol.. 12, 8. Gauss también veía relaciones con la "metafísica de los números imaginarios", ya que éstos se ligan inevitablemente con las variedades bidimensionales.

[115] Citado por Bottazzini, 'Geometry and "metaphysics of space" in Gauss and Riemann', en Poggi y Bossi, eds., *Romanticism in science* (Dordrecht, Kluwer, 1994), 20.

resultado que, por simplificar, daré para superficies de curvatura K constante. Supongamos dado un triángulo cuyos lados son geodésicas en la superficie, cuyos ángulos sean α, β, γ, y cuya área o contenido de superficie sea σ; entonces la diferencia entre la suma de sus ángulos y π (dos rectos) será

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = K\,\sigma.$$ [116]

Volvemos a encontrar, exactamente, el resultado un tanto paradójico que habían obtenido Lobachevskii y Bolyai (y el propio Gauss) para sus geometrías: la suma angular de un triángulo en ellas se aleja de la suma euclidea en proporción de su área (y de la constante K). Es importante también el dato de que, por la misma época, Gauss estudió con detalle la pseudo-esfera, superficie de curvatura constante negativa, generada por rotación de una tractriz sobre su eje. La pseudo-esfera ofrece un modelo natural (aunque parcial) de la geometría de Lobachevskii–Bolyai para el caso de 2 dimensiones, y como tal sería estudiada más tarde por Beltrami.

Por plantear la cuestión de otra forma, todo lo anterior sugiere una asimetría fundamental entre los elementos geométricos de dos y tres dimensiones que solemos considerar. Mientras Euclides aceptaría que las superficies pueden adoptar múltiples configuraciones y estar curvadas de múltiples maneras, él y sus seguidores postulan un espacio muy especial y característico. Riemann advirtió todas estas implicaciones del trabajo de Gauss, y lo empleó como base para elaborar una noción de espacio que tiene el grado de generalidad justo y necesario para eliminar completamente esa discrepancia. El concepto requerido es el de las que hoy llamamos *variedades riemannianas*. Es justo mencionar en este punto que, hacia el final de su vida, Gauss parece haber estado obsesionado por el tema de los espacios n-dimensionales, para los que empleaba el nombre de 'variedades'.[117]

5.3. Las "hipótesis" de Riemann. Lo primero que nos dice Riemann en su famosa lección es que, para analizar en profundidad la interrelación entre los principios básicos de la geometría, hay que desarrollar un concepto general que abarque la idea de espacio. En otros términos, si queremos comprender mejor las presuposiciones que esconde la idea habitual de espacio euclideo, hace falta contemplarla desde un punto de vista más abstracto. El punto de partida es de inspiración herbartiana, aderezada con las características tendencias del propio Riemann. El autor localiza el concepto requerido, con buen tino, en la idea de *variedad n-dimensional*, un concepto esencialmente topológico: el espacio euclideo resultará ser una variedad tridimensional a la que se ha impuesto una métrica muy particular. Como veremos, las variedades *riemannianas* son variedades n-dimensionales dotadas de una métrica euclidea *a nivel local*. Pero Riemann destaca, empleando geometría diferencial inspirada en Gauss, que una misma variedad riemanniana puede dar lugar a muy diversas métricas *globales*. Todo esto servirá, a fin de cuentas, no sólo para comprender mejor las ideas básicas de la geometría, sino también para hacer posibles nuevos planteamientos geométricos en la exploración física del universo, lo que para Riemann era mucho más importante.

Ya hemos visto la razón de que Riemann titule *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría*. Me atrevo a afirmar que, si hubiera escrito el texto en 1900, el título llevaría la palabra 'axioma' en lugar de 'hipótesis'; pero en 1850 todavía se entendía por axioma, no una proposición básica de un sistema matemático, sino una verdad cierta y evidente. En opinión de Riemann, los llamados 'axiomas' de la geometría euclidea no tienen ese carácter de certeza y evidencia:[118] "como todos los hechos, estos hechos no son necesarios, sino sólo tienen certeza empírica, son hipótesis". Aunque, eso sí, dentro de los límites de error de nuestras observaciones, los principios de la geometría euclidea tiene un grado de probabilidad muy alto.

---

[116] Gauss, *op. cit.* [1828], §27. También resaltaba que el exceso de la suma angular de un triángulo formado por geodésicas sobre dos rectos, es igual a la curvatura total del triángulo (§20).

[117] En un curso de 1850/51 hablaba de ellas, extendiéndoles la métrica euclidea a nivel global; esto sugiere, de paso, que quizá no llegó tan lejos como Riemann en sus especulaciones (Bottazzini en *op. cit.* [1994]).

[118] Como tampoco lo tienen los 'axiomas' de Newton, véase el final del escrito sobre epistemología.

Pero, en todo caso, estos principios pueden ser analizados en la forma de una serie de hipótesis cada vez más restrictivas, que nos llevan desde las nociones geométricas más generales hasta la concreción del espacio euclideo. Esta idea es la que guía la brillante exposición de Riemann.

Formularemos las hipótesis de Riemann para el caso de 3 dimensiones, antes de proceder a explicarlas en los términos más simples que podamos. Se trata de una secuencia de hipótesis cada vez más restrictivas; las principales son:

1. el espacio es una variedad continua de 3 dimensiones (y, concretamente, una variedad diferenciable);
2. las líneas dentro de esa variedad tridimensional son medibles y comparables, es decir, cada segmento posee una longitud que no depende de la posición (no se ve afectada por un movimiento en la variedad);
3. la longitud de un elemento o 'porción infinitesimal' de línea puede expresarse por medio de una forma diferencial cuadrática definida positiva; esto determina la métrica en la variedad y permite definir un concepto de *medida de curvatura* que generaliza la noción de Gauss;
4. los sólidos pueden moverse libremente en el espacio sin sufrir deformaciones métricas, o como dice Riemann "estiramientos"; esto determina que la variedad tenga curvatura constante (que es igual a 0 en el caso euclideo).

Pasemos pues a una explicación sucinta, comenzando por lo que son la topología y las variedades de n dimensiones.

5.4. Topología y variedades. La topología es una rama muy moderna y abstracta de la matemática, que tiene en Riemann a uno de sus padres fundadores.[119] La geometría de Euclides es métrica, trabaja sobre la base de una noción de distancia entre puntos, definida por la fórmula que corresponde al teorema de Pitágoras:

$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ ,$$

donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son las coordenadas cartesianas de los puntos del plano cuya distancia hemos establecido. Otros tipos de geometría no prestan atención a las distancias, como sucede en la proyectiva, que sin embargo conserva nociones como las de recta, cónica, o colineación (el estar dos puntos en la misma línea). Generalizando aún más, se puede prescindir de las características tanto métricas como proyectivas de las figuras, para quedarse sólo con propiedades geométricas sumamente básicas. Esto sucede en la topología, donde se preserva la noción de contigüidad o adyacencia de los puntos, o dicho de otro modo la noción de *entorno* de un punto, pero donde las figuras pueden deformarse a voluntad, siempre –dicho informalmente– que no se rasguen y que no peguemos dos puntos que estaban separados. Las propiedades topológicas son invariantes bajo aplicaciones continuas cuya inversa también es continua (aplicaciones bicontinuas). Entre estas propiedades está el número de agujeros que tenga la figura, de ahí la broma habitual según la cual el topólogo puede llegar a confundir una taza de café con un donuts (en terminología matemática, un toro).

Riemann fue uno de los primeros en concebir la topología como una rama autónoma de la matemática, de carácter fundamental. La misma idea se halla sugerida en algunos escritos de Gauss, y fue desarrollada en cierta extensión por otro de sus alumnos, Listing, profesor de física en Gotinga y codirector del Seminario Físico-Matemático al que perteneció Riemann. En un trabajo de 1849 sobre el teorema fundamental del álgebra (del que hablaremos en § 6.2) decía Gauss:

Expondré la demostración en un ropaje tomado de la geometría de posición, pues aquella alcanza de esta manera la máxima intuitividad y simplicidad. Pero en rigor el auténtico contenido de toda la argumentación pertenece a un dominio superior de la teoría abstracta de magnitudes, independiente de lo espacial, cuyo objeto son las

[119] Sobre este tema es recomendable la exposición de Guy Hirsch, 'Topologie', en J. Dieudonné, *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900* (Paris, Hermann, 1986).

combinaciones entre magnitudes ligadas según la continuidad – un dominio que hasta el momento ha sido poco cultivado, y en el que tampoco podemos movernos sin un lenguaje tomado de las figuras geométricas.[120]

Este es el texto que apunta más claramente a la necesidad de una nueva rama de la "teoría abstracta de las magnitudes" que debe ocuparse de cuestiones topológicas. Riemann empleó 'definiciones' de la topología que recuerdan bastante a la de Gauss en el apdo. II.1 de su lección y el apdo. II de la 'Teoría de las funciones abelianas'. Ahí dice que esta disciplina considera relaciones entre puntos y entre regiones de una variedad, sin presuponer que puedan introducirse consideraciones métricas. Este último punto, la total independencia de consideraciones métricas, es el que queda más claro en las, por lo demás, bastante oscuras definiciones de Riemann.

En cuanto a Listing, fue precisamente él quien acuño el término "topología", en una carta de 1836 y un trabajo de 1847 (*Vorstudien zur Topologie*, Gotinga). Riemann, en cambio, hablaba de *analysis situs*, término que etimológicamente quiere decir lo mismo, y que tenía un precedente ilustre en Leibniz (aunque empleado en otro sentido; los matemáticos europeos, incluida otra figura clave como fue Poincaré, siguieron hablando de "analysis situs" hasta el primer tercio del siglo XX). Las contribuciones más importantes de Listing están relacionadas con la demostración rigurosa del teorema de Euler sobre los polihedros y su generalización. Aunque su obra no tuvo una gran influencia en Riemann, no hay duda de que debió estimular su trabajo en este campo. Nuestro autor introdujo novedades esenciales en topología combinatoria, relacionadas con las propiedades topológicas de superficies y variedades, y demostró muy claramente el servicio que esta disciplina podía prestar al análisis y a la propia geometría diferencial. Más tarde (§ 6.2) diremos algunas palabras sobre los métodos de investigación que empleó en el contexto de la teoría de funciones.

Riemann nos dice, en una nota a su lección, que el apdo. I de ésta establece los prerrequisitos para contribuciones a la topología. Efectivamente, en su primera sección plantea consideraciones muy amplias, esbozando incluso un programa de estudio general del "analysis situs" que parece haber estimulado también los estudios de topología conjuntista.[121] De todas formas, en la lección se limitó a esbozar las ideas imprescindibles para las consideraciones geométricas que quería desarrollar: variedad, dimensión, y parametrización.

El concepto de *variedad* es, según Riemann, el punto de partida adecuado para la topología y en general para todas las ramas de la teoría de las magnitudes. Nuestro autor parece haber llegado a este nuevo concepto reflexionando sobre las 'superficies de Riemann', nuevos objetos geométricos que había introducido en la teoría de funciones (§ 6.2). Estas superficies plantean el problema de que no pueden darse en el espacio tridimensional, sino sólo en espacios de un mayor número de dimensiones. (En este punto, es notable que, según su maestro Schmalfuss (§ 1.1), las "abstracciones" de Riemann "sobre las dimensiones espaciales" se remontan a su primer año como universitario, 1846–47.) Por otro lado, había que justificar la legitimidad de su introducción, particularmente en el contexto del análisis, sometido entonces a exigencias bastante rígidas a propósito del rigor. Surgían pues problemas fundacionales, que Riemann considera en el fragmento sobre variedades y geometría que hemos traducido. Leyendo este texto, resulta bastante plausible que el intento de Riemann por fundamentar su nuevas ideas sobre superficies fue lo que le llevó al concepto de variedad.[122] Si es así, el matemático habría prefigurado, también aquí, el desarrollo contemporáneo de la cuestión.

Inicialmente, Riemann consideraba sólo variedades continuas, que de hecho son el contexto natural para la topología y las aplicaciones que de ella hacía nuestro autor. En un fragmento de 1852 o 1853 escribía:

---

[120] Gauss, *Werke*, vol. 3, 79.

[121] Véase mi libro *El nacimiento de la teoría de conjuntos* (Madrid, UAM, 1993) o el artículo 'Traditional Logic and the Early History of Sets', *Archive for History of Exact Sciences* **50** (1996).

[122] Hay que decir que Gauss había justificado la introducción de los números complejos por la existencia de "variedades de dos dimensiones" (§ 6.2; *Werke*, vol. 2, 176), y esto dio a Riemann una pista. La conexión es similar a la que existe entre el plano complejo de Gauss y las superficies de Riemann.

Si entre un conjunto [Menge] de determinaciones distintas de un objeto [Gegenstand] variable es posible una transición continua de cada una a cualquier otra, entonces la totalidad de aquellas constituye una variedad extensa continua; cada una de ellas se llama un punto de la variedad.[123]

Aquí encontramos ya el característico lenguaje de 'determinaciones' [Bestimmungsweisen], pero no en referencia a un "concepto general" como en la lección (véase § 4.1), sino en conexión con un "objeto variable", por ejemplo un cuerpo que puede calentarse o enfriarse. El punto de vista más general, y en opinión de Riemann más preciso, expresado en términos de conceptos es una novedad de la lección inaugural, como también lo son las referencias ocasionales a variedades discretas. En todo caso, las consideraciones geométricas de Riemann se refieren a variedades continuas, que además se suponen (tácitamente) diferenciables. A este respecto, el lector puede leer las aclaraciones de Weyl.

Nuestro matemático advirtió asimismo que el concepto de *dimensión* de un espacio –o en general de una variedad– es, en esencia, una noción topológica, desarrollando sus ideas al respecto en las secciones I.2 y I.3. Para aclarar la noción de dimensión recurre a la imagen de una *generación* sucesiva; esencialmente, la idea es que el movimiento de un punto engendra una variedad unidimensional, el movimiento de ésta una variedad bidimensional, el movimiento de un espacio tridimensional engendra una variedad de 4 dimensiones, y así sucesivamente. Este tipo de análisis de la dimensionalidad en términos de un proceso de generación 'mecánico' tiene precedentes muy antiguos, para el caso de una figura o un cuerpo (Aristóteles, Proclo, Oresme). La novedad esencial en Riemann es que se superan las barreras tradicionalmente impuestas, según las cuales es imposible ir más allá de la tercera dimensión. Esta posición tradicional se encuentra todavía en Herbart, y el lector debe considerar lo atrevido que resultaba en 1854 introducir directamente *n* dimensiones, sin ningún miramiento ni titubeo.

Pero la idea clave en esta parte de la lección es que resulta posible determinar la posición de un punto en una variedad *n*-dimensional introduciendo coordenadas o, como se dice en terminología matemática, mediante una parametrización. (Riemann no aclara los pormenores del asunto, en particular la cuestión de si la parametrización es para toda la variedad o sólo vale a nivel local; a la luz del resto de su trabajo, sólo cabe entenderla como una parametrización *local*.) El autor afirma, sin demostrarlo, que para establecer la posición de un punto en la variedad *n*-dimensional se requieren, precisamente, *n* parámetros o coordenadas. Esto constituye la clave de su concepto de dimensión, pero contribuciones posteriores mostrarían que esa idea, intuitivamente correcta, necesitaba precisiones bastante sofisticadas.

Cantor demostró (1878) que los puntos de una variedad *n*-dimensional pueden determinarse mediante una sola coordenada, si bien la aplicación que estableció era discontinua. Más tarde, Peano dio (1890) un famoso ejemplo de curva que llena un área plana, o sea, una función *continua* de un segmento en un cuadrado. Todo esto, aparte de exigir clarificaciones a propósito de la idea de curva, llevó a conjeturar que la definición de dimensión dada por Riemann presupone aplicaciones bicontinuas. En estos términos, lo que Riemann establece es que, si hay una aplicación biunívoca y bicontinua entre una variedad dada y el espacio euclideo *n*-dimensional $|^n$, entonces la variedad también tiene *n* dimensiones. Este es el teorema de invariancia de la dimensión, demostrado por Brouwer en 1911.

Aunque Riemann disponía de toda una serie de resultados sobre topología de superficies y de variedades *n*-dimensionales,[124] nada dice de ellos en la lección. Es natural, porque con lo anterior bastaba para los propósitos limitados de una investigación sobre la noción de espacio. La parametrización de la variedad mediante coordenadas abre el camino a la introducción de las nociones analíticas que permitirán el desarrollo de la geometría diferencial. De lo que se trata, ahora, es de dotar a la variedad de una *métrica*: la variedad *n*-dimensional sólo tiene

---

[123] Editado en Scholz, 'Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie', *Archive for History of Exact Sciences* **27** (1982), 222. La datación es también de Scholz. Una definición similar, escrita al parecer algo después, se encuentra al principio del fragmento sobre variedades y geometría.

[124] 'Fragment aus der Analysis Situs', *Werke*, 479–82. Según Scholz, que ha podido datar el original, este texto sobre topología *n*-dimensional es de 1852/53, y por tanto *anterior* a la lección sobre geometría.

características topológicas, puede decirse que es "informe"; la métrica permitirá el paso a formas geométricas y a conceptos como los de distancia y ángulo. El gran descubrimiento de Riemann fue que una misma base topológica admite múltiples métricas distintas.

5.5. Conceptos básicos de la geometría diferencial de Riemann. Para dar el nuevo paso de introducir una métrica, Riemann establece una hipótesis que resulta natural pero, a la vez, interesantemente débil: supone que los segmentos pueden desplazarse por la variedad sin que su longitud se vea afectada. Exigir esto es mucho menos que exigir la libre movilidad de cuerpos sólidos rígidos; mientras el último supuesto conduce necesariamente a variedades de curvatura constante, el primero da lugar a variedades de curvatura variable.

Supongamos que se trata de una variedad tridimensional en la que hemos introducido coordenadas locales x_1, x_2, x_3. Una curva vendrá determinada por un conjunto de puntos cuyas coordenadas vienen dadas en función de un parámetro t, en la forma: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$. La primera cuestión de carácter métrico es ¿cómo puede determinarse la longitud de la curva? Riemann expone el tema en el lenguaje de los infinitésimos, con lo que el problema se traduce a encontrar una expresión para un elemento de línea ds, un segmento infinitesimal de la curva. Aunque Riemann es perfectamente consciente de que hay múltiples respuestas posibles, va a reducir sus consideraciones al caso más simple. Si el elemento de línea ds parte del punto P, suponemos que es posible introducir coordenadas locales en P de tal modo que

$$ds = \sqrt{dx_1^{\,2} + dx_2^{\,2} + dx_3^{\,2}}\ ,$$

donde dx_1, dx_2, dx_3 son las diferencias infinitesimales entre las coordenadas de los dos extremos P y Q del elemento de línea. Las variedades con esta característica han dado en llamarse *riemannianas*; si comparamos la expresión anterior con la que dimos más arriba para la distancia euclidea, veremos que cabe decir que las variedades riemannianas se comportan como las euclideas a nivel local. Sin embargo, a nivel global se abre una amplia gama de posibilidades.

La anterior expresión para ds sólo es válida en el entorno del punto P; para hacerla valer en otro punto R sería preciso introducir nuevas coordenadas locales en R. Así que el siguiente problema es encontrar una expresión general para el elemento de línea; en la lección, Riemann sólo da indicaciones generales (aunque precisas) al respecto, pero en otro trabajo de 1861 la introdujo explícitamente.[125] Para que la variedad sea riemanniana, se debe cumplir en todo punto que

$$ds = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dx_i dx_k}\ , \text{ o sea, } \quad ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,dx_i dx_k\ ,$$

donde los g_{ik} varían continuamente con la posición dentro de la variedad, es decir, son funciones continuas de las coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. A la expresión de la derecha en la segunda ecuación se le llama la *forma cuadrática fundamental*, y se dice que es una forma cuadrática definida positiva (ya que $ds^2 > 0$ siempre, salvo que todos los dx_i sean cero). Con esto hemos alcanzado el primer concepto fundamental introducido por Riemann en el apartado II.1 de su lección.

Dada la expresión general para ds, resulta fácil precisar el significado de los conceptos de longitud de una curva, ángulo entre dos curvas, área y volumen, etc.; todas estas nociones métricas dependen de las funciones g_{ik}. Por ejemplo, la longitud l de una curva vendrá dada por una integral definida a lo largo de la curva, $l = \int ds$. También es posible ahora encontrar las geodésicas, o curvas de longitud mínima entre dos puntos, para una variedad dada: se trata de un problema de cálculo de variaciones, el cual conduce a una ecuación diferencial que deben cumplir las geodésicas. Se demuestra por ejemplo que, en un dominio pequeño, cada dos puntos de la variedad están unidos por una geodésica.

[125] Véase 'Commentatio mathematica', *Werke*, 401–04.

Veamos un ejemplo de forma cuadrática fundamental. Tras la formulación de la teoría de la relatividad especial por Einstein (1905), el gran matemático Hermann Minkowski, que también trabajaba en Gotinga, advirtió que estas ideas podían expresarse mediante la geometría diferencial. Introdujo así el llamado universo de Minkowski, una variedad espacio-temporal de 4 dimensiones cuyos puntos representan sucesos, y cuya métrica viene dada de forma general por

$$ds = \sqrt{dx_1{}^2 + dx_2{}^2 + dx_3{}^2 - c^2 dt^2}\ .$$

Como digo, esta es la expresión global y no sólo local para *ds*; puede verse que se trata de un espacio bastante sencillo, de curvatura constante y casi euclideo. Si se introduce un cambio de variables, con la variable temporal imaginaria $x_4 = i\ c\ t$ (donde $i = \sqrt{-1}$), el tratamiento formal del nuevo espacio es totalmente análogo al de un espacio euclideo cuatridimensional. La condición de que *ds* sea invariante para sistemas de referencia de Galileo, tiene como consecuencia la validez de las transformaciones de Lorentz, en las que se basó Einstein.

Riemann concluye el apartado II.1 diciendo que, para poder abarcar las "diferencias esenciales" entre todas las variedades representables mediante la forma cuadrática fundamental, "es necesario suprimir las que proceden de la forma de representación, lo que se logrará eligiendo las magnitudes variables según un principio determinado". Así pues, se necesitan nuevos conceptos que permitan determinar en abstracto la naturaleza de una variedad dada, y Riemann los localiza en la idea de *medida de curvatura*, generalización de la curvatura de Gauss para superficies. La medida de curvatura tiene la función de expresar hasta qué punto las propiedades geométricas de la variedad se diferencian de las propiedades de un espacio euclideo; viene a ser una medida de la no-euclidianidad de la variedad.

Recordemos que la curvatura gaussiana era un concepto intrínseco, que no involucra la idea del espacio ambiente en el que pueda estar inmersa la superficie en cuestión. Lo mismo pasa con la curvatura de Riemann, así que no hay necesidad de pensar en la variedad como si estuviera inserta en otra variedad de más dimensiones. La medida de curvatura se define intrínsecamente, dentro de la variedad dada, sobre la base de la forma cuadrática fundamental que expresa su métrica. En cada punto tendremos curvaturas distintas para distintas direcciones de superficie, aunque, como establece Riemann, bastan $n\dfrac{n-1}{2}$ valores en cada punto para determinar totalmente la métrica. Así, en una variedad bidimensional (una superficie) basta dar una medida de curvatura en cada punto; en una variedad tridimensional, 3 curvaturas; en una cuatridimensional como la de Minkowski–Einstein, 6 curvaturas; y así sucesivamente.

Para definir la curvatura, Riemann considera dada en un punto *P* una superficie lisa (una subvariedad bidimensional) formada por geodésicas que pasan por el punto; en el caso de 3 dimensiones, la dirección de una geodésica quedaría dada por dx_1, dx_2, dx_3, la dirección de otra por dx'_1, dx'_2, dx'_3, y todas las demás geodésicas de la superficie lisa vienen expresadas en la forma lineal binaria

$$dy_i = \lambda\, dx_i + \lambda'\, dx'_i \qquad (\text{para } i = 1, 2, 3).$$

Queda así definida una dirección de superficie en el punto *P*, y se trata de dar la curvatura de la variedad en ese punto y esa dirección. No entraremos en detalles. Baste decir –con vistas a facilitar la comprensión del texto original– que Riemann considera una cierta expresión homogénea de segundo grado, a la que denominaremos Ω, y además el área o contenido de superficie Δ del triángulo infinitesimal de vértices (0,0,0), (x_1, x_2, x_3), (dx_1, dx_2, dx_3). El autor afirma que, si se define la curvatura en $P = (x_1, x_2, x_3)$, para la dirección estipulada, como

$$K = -\frac{3}{4}\frac{\Omega}{\Delta^2},$$

se obtiene una medida que, en el caso bidimensional, coincide exactamente con la curvatura de Gauss.

Así pues, la curvatura de Riemann para una variedad tridimensional, en un punto *P*, puede verse como un conjunto de 3 valores, cada uno de los cuales viene a ser una curvatura gaussiana para una dirección de superficie en P. Estos valores de la medida de curvatura son independientes entre sí, y pueden variar de un punto a otro en la variedad. De este modo, se ve con claridad que las variedades riemannianas son, en general, de curvatura variable.

Tras la publicación de la lección de Riemann, varios autores comenzaron a estudiar los aspectos analíticos de su trabajo, los invariantes diferenciales asociados con la geometría riemanniana. Esto acabó llevando al desarrollo, entre 1887 y 1901, de lo que daría en llamarse el *cálculo tensorial*, a manos de los matemáticos italianos Ricci y Levi-Civita. Los tensores, que facilitan la expresión de propiedades geométricas y leyes físicas, se convirtieron en la herramienta habitual para el tratamiento de la geometría diferencial riemanniana. De este modo, la medida de curvatura se suele introducir mediante el denominado *tensor de curvatura*.

El interés por la geometría diferencial y el cálculo tensorial se desató tras la publicación, en 1916, de la teoría general de la relatividad de Einstein. El gran físico consideraba un espacio-tiempo de métrica riemanniana,

$$ds^2 = g_{11}\, dx_1^2 + 2\, g_{12}\, dx_1\, dx_2 + \ldots + 2\, g_{34}\, dx_3\, dx_4 + g_{44}\, dx_4^2,$$

donde las funciones métricas g_{ik} dependían de la presencia de materia en las distintas regiones del espacio. La curvatura en cada punto, que es variable, se expresaba por medio del llamado tensor de Ricci.

5.6. Aplicaciones geométricas. Con lo dicho hemos analizado las tres primeras hipótesis clave de Riemann: la 1. nos llevó al campo de la topología, al concepto de variedad continua n-dimensional; la 2. y la 3. nos introdujeron en las consideraciones métricas de la geometría diferencial (expresión para el elemento de línea ds y definición de curvatura). Definidas así las variedades riemannianas de n dimensiones y de curvatura variable, Riemann había establecido un terreno de partida enormemente general, desde el que contemplar el caso particular del espacio euclideo. Este espacio presenta la peculiaridad de que la curvatura es igual en todos los puntos y en todas las direcciones de superficie; de hecho, la curvatura es siempre = 0. Como paso previo a su estudio, era natural considerar el caso algo más general de las variedades de curvatura constante.

La hipótesis física que conduce a las variedades de curvatura constante es la siguiente: que los sólidos rígidos puedan moverse libremente en el espacio, sin sufrir deformaciones métricas (o como dice Riemann "estiramientos"). Esta hipótesis establece una cierta homogeneidad del espacio, y es la forma más simple de concebir los fenómenos de la experiencia habitual, de modo que la geometría había asumido siempre que tal era el caso. Pero Riemann estaba en condiciones de afirmar que dicho supuesto no conduce directamente al espacio euclideo, sino sólo a variedades de curvatura constante $K = \alpha$, donde α será un número positivo o negativo, o cero. Sin entrar en demostraciones (para las que puede verse el texto de Weyl), Riemann afirmaba a continuación que en estas variedades la forma cuadrática fundamental que expresa el elemento de línea puede ponerse en la forma:

$$ds = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}\,,$$

que doy aquí para el caso particular de 3 dimensiones. El lector apreciará que los g_{ik} de la expresión general para la forma cuadrática fundamental quedan reducidos a una única función de la posición que depende sólo del parámetro α; además, en el caso euclideo tendremos $\alpha = 0$ y la expresión para ds se reduce efectivamente a la esperada.

En el caso de α negativo, lo que obtenemos son precisamente las geometrías de Lobachevskii–Bolyai, con lo que el lector puede ahora apreciar hasta qué punto quedan reducidas a un caso particular dentro del marco riemanniano. En la lección, Riemann no indicó esta relación explícitamente; los historiadores tienden a pensar que, o bien no conocía la obra de esos dos predecesores, o bien prefirió evitar alusiones demasiado explícitas a un tema controvertido.[126] El caso de α positivo lleva a las que a veces se denominan (de forma equívoca) geometrías no euclideas de Riemann; más adecuado es llamarlas geometrías *elípticas*, reservando la expresión "riemannianas" para el caso más general que abarca también espacios de curvatura variable. Los nombres de geometría "hiperbólica" para la de Lobachevskii–Bolyai, y geometría "elíptica" para el otro caso, fueron propuestos por Felix Klein; tienen su origen en la geometría proyectiva, en la manera proyectiva de alcanzar o definir esas dos situaciones no euclideas.

La ilustración que suele darse para esas geometrías viene sugerida por las consideraciones de Riemann en el apartado II.5, aunque es más concreta que éstas. Un modelo euclideo, definible dentro del espacio $\mathbb{R}^3$, de la geometría hiperbólica en 2 dimensiones viene dado (como ya vimos) por la pseudo-esfera que estudiaron Gauss y Beltrami; su único defecto es que no sirve como modelo del plano hiperbólico completo, sino sólo de una parte del plano. Aquí es fácil ver cómo puede ser que tengamos múltiples paralelas a una 'recta' (geodésica) dada. El modelo de la geometría elíptica es la geometría sobre la esfera, donde las geodésicas o 'rectas' son los círculos máximos. También este modelo tiene un defecto, fácil de subsanar: las 'rectas' se cortan en dos puntos; la solución es considerar idénticos a cada par de puntos diametralmente opuestos, o si se prefiere entender por 'punto' un diámetro de la esfera; ahora, cada dos 'rectas' se cortan en un solo 'punto', cumpliéndose todos los axiomas. El italiano Beltrami, que había tratado a Riemann durante su estancia en aquél país, fue (en 1868) el primer matemático que explicitó estas ideas, incluyendo también una consecuencia interesante: si hubiera una contradicción en la geometría elíptica (o hiperbólica) se podría traducir a la geometría de la esfera (pseudo-esfera), y por tanto a la geometría euclidea tridimensional. Recíprocamente, suponiendo que la geometría de Euclides es consistente –no contradictoria–, también tienen que serlo la geometría elíptica y la hiperbólica. Fue el primer resultado de consistencia relativa establecido explícitamente por un matemático.

Durante el siglo XIX apenas se consideraron los espacios de curvatura constante, mientras que los espacios más generales de Riemann cayeron en el olvido, como algo aparentemente fantasioso. Ya dijimos que la forma más simple de concebir los fenómenos de nuestra experiencia, la que los geómetras habían venido asumiendo, era pensar que los sólidos rígidos se mueven libremente en el espacio, sin deformarse, estirarse ni contraerse. El gran fisiólogo y físico Helmholtz, que escribió sobre estos temas en cuanto se publicó la lección de Riemann, seguía dicho camino. Descartando la noción de línea o segmento unidimensional como una pura abstracción (y descartando con ello el axioma riemanniano de la constancia de longitud para segmentos), buscó una base de tipo operacional sobre la que establecer la geometría, y planteó que la geometría presupone siempre el manejo de cuerpos rígidos (reglas) y su libre movilidad. El punto de partida debía ser, pues, la constancia de las longitudes en un sólido rígido, y la consecuencia: que sólo tienen sentido los espacios de curvatura constante. Sin embargo, este razonamiento se alejaba de la sabiduría de Riemann, pues hacía pasar como "hechos positivos" lo que no son sino nuestras interpretaciones habituales de los hechos (hipótesis). No es casualidad que el artículo de Helmholtz se titulara, en clara réplica a Riemann: 'Sobre los hechos en que se funda la geometría'.[127] Einstein (que a veces también se inclinó al operacionalismo, aunque, como le gustaba enfatizar, sólo de forma oportunista y no sistemática) acabaría mostrando que incluso desde el punto de vista físico tiene sentido ampliar más la perspectiva y contemplar la posibilidad de espacios riemannianos en el sentido más general.

5.7. Aplicaciones físicas. ¿Cómo puede saberse si el espacio físico es euclideo? Riemann lo hace explícito en el apartado III.1: basta comprobar que la suma de los ángulos de un

[126] Habida cuenta de que estaba pronunciando su lección inaugural como *Privatdozent* o, diríamos, profesor ayudante; sin embargo, esta segunda explicación no encaja demasiado bien, vista la radicalidad del resto de sus afirmaciones y de su mismo punto de partida.

[127] 'Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen', *Nachrichten Königliche Gesellschaft der. Wiss. Göttingen* (1868), 193–227; en Helmholtz, *Wissenschaftliche Abhandlungen* vol. 2 (Leipzig, 1883).

triángulo es *en todas partes* igual a 180°. Supuesta la libre movilidad de los sólidos rígidos (curvatura constante), basta pues comprobarlo en el caso de un solo triángulo, criterio que habían manejado ya Lobachevskii y Gauss (§ 5.1). A tal fin se empleaban las mediciones astronómicas de paralajes y, como dice Riemann en el apdo. III.3, de ellas se sigue que α parece efectivamente ser cero, salvo que la región del espacio accesible a nuestros telescopios sea comparativamente muy pequeña.

Ahora bien, Riemann procede hacia el camino de la física en dos pasos, considerando primero la extensión de consideraciones geométricas a escala astronómica, y luego su extensión a escala atómica o subatómica (aunque naturalmente él, como buen defensor del pleno continuo, no emplea esta última expresión). Su primera y muy profunda indicación es que debemos ser cuidadosos y emplear la distinción capital entre propiedades topológicas (lo que llama "relaciones de extensión") y propiedades métricas del espacio. Así, cuando juzgamos que las rectas son infinitas, hay en realidad dos propiedades involucradas: la topológica es la pura ilimitación (que se encuentra ya en la línea de una circunferencia), la métrica es lo que propiamente cabría llamar infinitud. Con esta observación, se resolvía la paradoja aparentemente insalvable escondida tras las geometrías elípticas, y se abría camino de nuevo hacia la cosmología basada en la relatividad general.

Sin embargo, los problemas acerca del cosmos en su conjunto le parecían a Riemann asuntos baladíes; recordemos su afirmación de que sólo en lo infinitamente pequeño, sólo para puntos en el espacio y el tiempo, pueden encontrarse las leyes naturales verdaderamente elementales. Es un pensamiento que guió todo el trabajo de Riemann sobre física y física matemática, de acuerdo con el cual, todo lo esencial se juega en las hipótesis que podamos establecer y comprobar acerca de la constitución infinitesimal del mundo. Riemann nos presenta tres consideraciones fundamentales:[128]

1. las comprobaciones empíricas que podemos realizar acerca de la métrica en el espacio se basan en el empleo de cuerpos sólidos y rayos de luz, "conceptos empíricos" que pierden su validez en lo infinitamente pequeño;
2. la independencia de los cuerpos respecto a la posición, su libre movilidad sin deformaciones, sigue siendo una hipótesis; basta negarla para que nuestro conocimiento de la geometría del mundo a escalas medias y grandes no tenga ninguna implicación para lo muy pequeño;
3. una hipótesis aun más básica es la que nos condujo a la forma cuadrática fundamental, pero ésta no es más que un tipo de métrica entre otras muchas.

Por todo ello, sigue diciendo, es concebible que las relaciones métricas en lo infinitamente pequeño no sean conformes a la geometría de Euclides; "y deberíamos suponer que de hecho es así tan pronto como esto permitiera explicar los fenómenos de manera más simple".

Pero el atrevido pensador de Gotinga no se para aquí: el párrafo que sigue constituye una joya que indica del modo más claro su estatura intelectual. La cuestión de la geometría a escala infinitesimal está íntimamente ligada con el fundamento interno, físico, que pueda tener la métrica. Si la realidad que subyace a nuestra representación del espacio es discreta, esto puede ya ser bastante para determinar la cuestión. Ahora bien, si el supuesto del continuo físico es correcto, "el fundamento de las relaciones métricas debe buscarse fuera, en las fuerzas de enlace que actúen" sobre el espacio. Como es natural, Riemann tenía aquí en mente los problemas de la unificación de luz, calor, electricidad, magnetismo y gravitación, que le obsesionaban en sus especulaciones físicas del momento (§ 3). Weyl creyó, en el entusiasmo de la recién formulada relatividad general, que esas proféticas y oscuras palabras quedaban por fin aclaradas con la contribución de Einstein. Hoy resulta posible intuir que iban aún más allá, y cabe esperar que alguna contribución del siglo XXI, relacionada con el problema de la gravedad cuántica, nos las haga ver a una luz nueva.[129]

---

[128] Nuestro autor dejó claro, en una nota a pie de página, que estaba especialmente insatisfecho con las breves consideraciones del apartado III.3 de su lección: éste requería "ser reformulado y desarrollado".

[129] Como probablemente sabe el lector, el problema más profundo que tiene planteada la física es lograr una unificación entre la teoría relativista de la gravitación y la teoría cuántica; en esto trabajan los especialistas en gravedad cuántica, guiados por la obra de Witten, en la que se emplean conceptos muy modernos de geometría y topología.

Huelga decir que, naturalmente, Riemann sólo pudo haber intuido aspectos muy parciales: poco sabía de la noción contemporánea de campo, nada del espacio-tiempo einsteiniano, ni tampoco (obviamente) de la mecánica cuántica. Si su frase sigue dando que pensar, se debe sobre todo a la fascinación que puede llegar a ejercer un aforismo, y a la condensación de connotaciones y sugerencias que puede llegar a encerrar.

Aunque la física del siglo XX ha dado la verdadera medida del valor de las ideas geométricas de Riemann, éstas no tuvieron que esperar tanto para encontrar aplicaciones físicas. La primera, de carácter más bien formal, la dio el propio Riemann en su trabajo de 1861, conocido como el *Preisschrift* parisino y dedicado a un tema aparentemente muy lejano: la propagación del calor en un cuerpo rígido homogéneo, con preservación de un sistema dado de isotermas.[130] Su estudio del problema aplicaba el aparato analítico básico de la geometría diferencial, lo que le dio ocasión a desarrollar –todavía de una forma demasiado sucinta, de ahí que no se le otorgara el premio– las ideas relativas a la forma cuadrática fundamental y la medida de curvatura que hemos indicado en su momento. (Aquí se encuentra, entre otras cosas, el símbolo de cuatro índices que puede interpretarse como tensor de Riemann, y lo que Einstein llamaba la "condición de Riemann" para las funciones g_{ik}.) Otra aplicación más estricta fue el empleo de un espacio riemanniano tridimensional para representar las relaciones de proximidad entre los colores; Herbart se equivocaba al pensar que bastaban dos dimensiones.[131] Todavía otras aplicaciones surgirían en campos como la mecánica, por ejemplo el espacio de configuración de un sistema. En general, desde el paso decidido a la abstracción que dio Riemann, el pensamiento geométrico encuentra aplicación en los más diversos terrenos, por alejados que parezcan de la idea tradicional del espacio.

6. Riemann matemático: análisis y teoría de números.

> En cuanto a lo que decís de Riemann, no puedo sino suscribirlo plenamente. Fue uno de esos genios que renuevan tanto la faz de la ciencia, que imprimen su sello no solamente sobre las obras de sus seguidores inmediatos, sino sobre las de todos sus sucesores durante una larga serie de años. Riemann ha creado una teoría nueva de las funciones, y siempre será posible reencontrar el germen de todo lo que se ha hecho y se hará tras él en análisis matemático.[132]

El análisis matemático es la rama de esta disciplina que da cuenta del cálculo infinitesimal y explora las muchas ramificaciones a que aquél ha dado lugar. Como es bien sabido, el análisis es probablemente la rama de la matemática más fecunda en aplicaciones científicas, y en este sentido resulta adecuado que Riemann, siempre tan interesado en los problemas científicos, fuera ante todo experto en este campo. En él realizó las contribuciones que le darían enorme fama en su momento, en especial su teoría de las funciones de variable compleja, con la que enlaza su famoso trabajo sobre teoría de números.

6.1. Análisis real. Todo el que haya cursado una asignatura básica de análisis conoce la famosa integral de Riemann, que recoge la idea intuitiva de la integral, como área encerrada por la curva descrita por una función, en términos del límite de ciertas sumas. Durante el último tercio del siglo XIX fue habitual saludar esta contribución como la máxima generalización posible del concepto de integral (apreciación abandonada desde aprox. 1900). Esta famosa contribución de Riemann se encuentra en la tesis que presentó para su habilitación como profesor en Gotinga (1854), la cual sólo fue publicada por Dedekind en 1868, simultáneamente

[130] Riemann, 'Commentatio mathematica', *Werke*, 391–404.
[131] En esta dirección trabajó precisamente Helmholtz.
[132] Carta de Poincaré a Klein, en 'Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires', *Mathematische Annalen* **20** (1882), 52–53.

con la lección de habilitación.[133] Dicha tesis afrontaba un problema avanzado en el análisis de variable real, 'la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica'. Fue precisamente la generalidad con que Riemann quiso tratar esta cuestión, lo que le forzó a ofrecer un concepto preciso y más general de la integral.

El desarrollo del cálculo y sus extensiones directas constituyó la casi totalidad del trabajo matemático durante el siglo XVIII, siempre bajo la guía de problemas físicos. Pero Euler y sus contemporáneos procedían tan absortos y entusiasmados en los grandes resultados que estaban alcanzando, que descuidaron la cuestión del rigor. Algún autor ha afirmado que el desarrollo histórico de la matemática es "ilógico", porque a menudo las premisas se analizan y establecen más tarde que las conclusiones. Hilbert, más comprensivo, decía que el edificio de la ciencia no se empieza por los cimientos, sino a media altura: la ciencia prefiere asegurarse cuanto antes habitáculos cómodos, y construir hacia arriba desde ellos; sólo después, si aparecen signos de debilidad, se decide a prestar atención a los fundamentos sobre los que dichas habitaciones están construidas y fortificarlos.

Los signos de debilidad en los fundamentos del cálculo estaban claros a lo largo del siglo XVIII: infinitesimales, diferenciales, fluxiones (Newton), cantidades infinitamente grandes, … todos estos eran conceptos oscuros. El filósofo y obispo Berkeley apuntaba, con buen criterio, que no era más fácil creer en los conceptos básicos del cálculo, que en verdades de la fe como la trinidad divina; y es famosa la frase de d'Alembert, quien recomendaba a sus alumnos: "seguid adelante, y la fe os llegará". En 1784 la Academia de Ciencias de Berlín convocó un premio para una teoría clara y precisa del infinito en matemática, pidiendo una explicación de cómo es posible "que se haya conseguido deducir tantos teoremas correctos a partir de unos presupuestos contradictorios".[134] Con la profesionalización de la matemática en el siglo XIX, y el establecimiento de cursos organizados para la enseñanza superior en dicha disciplina, esa situación se hizo insostenible, y a lo largo del siglo el edificio del análisis se reformó hasta alcanzar y sobrepasar el legendario rigor de la geometría.

La reforma del análisis está ligada sobre todo, en la memoria histórica, a los nombres de Cauchy y Weierstrass; naturalmente, una narración detallada citaría muchos otros, y no en último lugar el de Dirichlet. El caso es que el gran matemático francés Cauchy sentó las bases para la eliminación de todos los conceptos oscuros, empleando de manera sistemática la noción de límite y el cálculo con desigualdades (ya d'Alembert había insistido repetidamente en que la idea de límite era la clave del asunto, pero no desarrolló su enfoque en detalle). El famoso *Cours d'analyse* (1821) ofrecía una teoría bastante rigurosa de los límites, de las funciones continuas, y de las series infinitas; otros tratados posteriores, como el *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique* (1823), avanzaban hacia el cálculo y sus desarrollos.[135] Hay que decir, sin embargo, que Cauchy seguía empleando el lenguaje de los infinitésimos, y los historiadores no se ponen de acuerdo sobre si este uso era o no esencial. También Riemann emplea en buena parte de su obra un lenguaje infinitesimal que no resulta fácil eliminar de sus razonamientos, y lo mismo sucede en la geometría de superficies de Gauss (§ 5.2).[136]

Volviendo a Cauchy, aquí nos interesa ante todo resaltar un aspecto que ya he indicado (§ 4.2), a saber, que su enfoque era de carácter *conceptual*. Al tratar de las funciones continuas, no prestaba atención a las fórmulas que pudieran definir dichas funciones, sino que se preocupaba ante todo de precisar una característica general que debe tener toda función para ser continua. En el siglo XVIII, al considerar una función se pensaba ante todo en una expresión analítica, una fórmula, y de acuerdo con ello se concebía la integración y la diferenciación al estilo 'algebraico', como operaciones sobre fórmulas. Esto ya no resultaba posible en el enfoque de

---

[133] No debe confundirse esta segunda tesis de habilitación (segunda tras la doctoral de tres años antes) con la lección inaugural sobre geometría.

[134] Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos* (Madrid, Alianza, 1984), p. 134.

[135] Véase *Oeuvres complètes*, ser. 2, vol. 4 y 5. Del *Cours* hay una reciente edición facsímil preparada por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales" (1998).

[136] Sobre este aspecto, hay que recomendar el libro de Laugwitz, *Bernhard Riemann* (Basel, Birkhäuser, 1998; edn. inglesa en preparación).

Cauchy; al concebir las funciones de esa manera abstracta, como simples correspondencias entre valores numéricos, era preciso abordar también el concepto de integral de un modo más conceptual. La solución se encontró volviendo a la idea geométrica de *área*, origen histórico de la integración, pero analizándola adecuadamente y sin presuponer consideraciones geométricas. La idea es aproximar el área bajo una curva $f(x)$, en el intervalo $[a,b]$, por medio de sumas de una cantidad finita de áreas rectangulares $S_n = (x_1-a)\, f(x_0) + \ldots + (b-x_n)\, f(x_n)$. La *integral definida* de la función $f(x)$ en $[a,b]$, denotada por $\int_a^b f(x)dx$, será entonces el límite de las sumas S_n cuando n tiende a infinito, de manera que la longitud de los subintervalos en que partimos $[a, b]$ tiende a cero. Esta es la definición que, para funciones $f(x)$ *continuas*, se encuentra en el *Résumé* de Cauchy publicado en 1823.

Riemann se limitó a introducir un leve refinamiento en esa idea, para a continuación –y aquí está una gran novedad– aplicarla a funciones cualesquiera, aunque sean discontinuas; eso sí, para poder hablar de la integral es necesario que el límite de las sumas S_n exista y sea único. En este punto Riemann introdujo su mayor contribución, al establecer un criterio para la existencia del límite (cuya validez no demostró), el cual le lleva a la *condición de integrabilidad de Riemann*, que formula como sigue. Llamemos Δ_n al menor de los valores (x_i-x_{i-1}) en la suma S_n, y *oscilación* de la función $f(x)$ en $[x_i, x_{i-1}]$ a la diferencia entre los valores máximo y mínimo que puede tomar en ese intervalo. Ahora, para que las sumas S_n converjan, cuando Δ_n tiende a cero, la función debe ser acotada y además “la longitud total de los intervalos en los que las oscilaciones son > σ, sea cual sea σ”, debe poder “hacerse tan pequeña como se quiera”. Inversamente,

> Si la función *f(x)* es siempre finita [acotada] y, al disminuir infinitamente todas las magnitudes [Δ], la magnitud total *s* de los intervalos en los que las oscilaciones de la función *f(x)* son mayores que una cantidad dada, σ, acaba siempre haciéndose infinitamente pequeña, entonces la suma *S* converge al hacerse infinitamente pequeños todos los δ.

Riemann resaltaba que se trata de una condición necesaria y suficiente para la integrabilidad, y luego mostraba cómo ahora era posible integrar funciones altamente discontinuas. Como estas funciones “no han sido consideradas nunca”, daba un sorprendente ejemplo de función integrable, con discontinuidades en un conjunto denso en |. La idea de “condensación de singularidades” que Riemann empleó en este ejemplo sería luego sistematizada y generalizada por Hankel y Cantor.

Con sus nuevas ideas acerca de la integral, Riemann estaba en condiciones de considerar series de Fourier para funciones discontinuas. Las series de Fourier son un tipo de series de funciones especialmente importante y con grandes aplicaciones prácticas. Con precedentes en el siglo XVIII, emergieron en la magnífica obra de Joseph Fourier sobre la difusión de calor en sólidos, *Théorie analytique de la chaleur* (París, 1822). Se trata de uno de los ejemplos más notables de cómo un problema de las ciencias naturales puede dar lugar a un desarrollo puramente matemático de gran calado: las series de Fourier guiaron buena parte del progreso del análisis de variable real a partir de entonces, incluyendo los inicios de la teoría de conjuntos de puntos y la teoría de la medida. Fourier había advertido que, en general, todas las funciones $f(x)$ que pudieran aparecer en la física se podían representar, en el intervalo $[0, 2\pi]$, mediante una serie trigonométrica

$$a_0 + \sum_{r=1}^{\infty} (a_r \cos rx + b_r \operatorname{sen} rx)\,,$$

donde a_r, b_r son los llamados ‘coeficientes de Fourier’ y vienen dados en la forma de ciertas integrales definidas dependientes de $f(x)$. Los coeficientes de Fourier son, precisamente, la razón de que Riemann necesitara considerar de nuevo la integral definida.

Los razonamientos originales de Fourier, aunque bastante convincentes, no eran rigurosos. Pronto los matemáticos se pusieron a trabajar sobre el problema de la convergencia de la serie de Fourier para una función $f(x)$ dada. Dirichlet fue precisamente quien, en 1829, consiguió dar una demostración correcta de la convergencia para un cierto tipo de funciones acotadas y continuas salvo en un número finito de puntos. El motivo de estas restricciones era, precisamente, garantizar la existencia de la integral de $f(x)$ y la posibilidad de determinar los coeficientes al modo de Fourier. Su trabajo establecía criterios de rigor aún más altos en análisis, a propósito de series condicionalmente convergentes y límites dobles. Pero no es necesario revisar aquí la historia del tema, ya que el lector puede consultar la magistral exposición que realiza el propio Riemann al comienzo de su escrito. Tendrá así ocasión de verle ejercer de historiador de la matemática, escribiendo con una elegancia y una claridad conceptual envidiables.

Con su artículo, Dirichlet había definido condiciones *suficientes* sobre $f(x)$ para su representación mediante series de Fourier. Riemann quiso proceder al revés, investigando cuáles son las condiciones *necesarias* para que una función sea representable mediante una serie trigonométrica (de Fourier o no) convergente. Aunque los resultados a los que llegó no eran 'redondos', motivo por el cual nunca publicó su trabajo, su planteamiento le llevó a desarrollar medios de trabajo totalmente nuevos, que tuvieron una gran influencia. Su herramienta básica era el estudio de una función *F(x)* obtenida por doble integración formal de la serie trigonométrica en cuestión, y su resultado más conocido era el *teorema de localización* (§ 9 del escrito) según el cual la convergencia de la serie en un punto sólo depende del comportamiento de la función en su entorno. Pero lo más importante fue que el enfoque de Riemann sugería toda una serie de nuevas cuestiones en el estudio de las series trigonométricas. Al poco de publicarse su memoria, Heine planteó el problema de demostrar que la serie de Fourier para cada función es única, y Cantor desarrolló esa línea de trabajo empleando las herramientas y los resultados riemannianos, e iniciando con ello la serie de consideraciones que le llevarían a su teoría de conjuntos.

Una gran diferencia entre los trabajos de Cauchy o Dirichlet y el del propio Riemann está, como hemos visto, en que el último abordaba por vez primera en la historia una investigación seria de las funciones reales discontinuas. Encontramos expresada aquí la tendencia característica del siglo XIX hacia la *matemática pura*: los problemas y temas de trabajo ya no vienen dictados exclusivamente por el estudio de la naturaleza, sino que tienen su origen en una problemática interna a la propia disciplina. El propio Riemann resaltaba en su trabajo que, "para todos los casos de la Naturaleza", basta considerar funciones continuas salvo quizá en una cantidad finita de puntos aislados, que es lo que había hecho Dirichlet. Aun así, Riemann veía dos buenas razones para interesarse por un enfoque más general, siendo la primera la estrecha conexión entre el asunto y "los principios del cálculo infinitesimal", por lo que la generalización serviría para aclarar y precisar dichos principios. No hay duda de que aquí acertó: su trabajo estimuló grandemente el estudio de las funciones de variable real; su definición de la integral fue gradualmente reformulada en términos de teoría de conjuntos y teoría de la medida, llevando a teorías de la integración más avanzadas, como la integral de Lebesgue.[137]

La segunda razón que tenía Riemann para interesarse por las funciones discontinuas surgía de la posibilidad de aplicar las series de Fourier en teoría de números, donde "parecen ser de importancia precisamente aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no ha investigado Dirichlet". La idea de conectar análisis y teoría de números fue la más importante contribución del propio Dirichlet, de la que hablaremos en el § 6.3.

6.2. Teoría de funciones. El análisis de variable compleja (habitualmente llamado 'teoría de funciones') fue la rama más brillante del análisis en el siglo XIX, y quizá la creación más original de toda la matemática de aquel tiempo. Las funciones de variable compleja habían sido

[137] La integral de Riemann presentaba ciertos 'defectos' que fueron advertidos hacia 1900, como que la integrabilidad no se preserva en el paso al límite, y que los procesos de diferenciación e integración no son totalmente reversibles. Véase el trabajo de Hawkins en Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos* [1984]; dicho artículo y los de Grattan-Guinness y Dauben en la misma colección dan información adicional sobre las series de Fourier.

empleadas con anterioridad, pero se las había tratado como meros expedientes heurísticos para lograr resultados en variable real. Fueron Gauss (en trabajos inéditos) y sobre todo Cauchy los primeros en investigar con seriedad y sin temores la variable compleja. Tras su ingente obra en la primera mitad del siglo, vino la sistematización de la teoría, en direcciones muy distintas, por Weierstrass y Riemann.

Antes de dar algunos detalles acerca de la teoría de funciones riemanniana, conviene detenerse en lo que fue su prerrequisito esencial: la aceptación plena de los números complejos, que sólo tuvo lugar de forma generalizada en el segundo tercio del siglo XIX. Estos números venían empleándose con atrevimiento desde la época de los algebristas italianos (siglo XVI), ya que permitían establecer resultados generales muy atractivos, e incluso obtener de forma misteriosa soluciones reales. Pero eran 'números' extraños a los que se miraba con desconfianza; téngase en cuenta que el apelativo de *imaginarios* tenía ya un claro matiz positivo, si se compara con los de "imposibles" o "fantásticos". Leibniz había dicho, en frase memorable, que se trata de sorprendentes "anfibios entre el ser y el no ser", y aún en 1831 el gran lógico De Morgan decía que el símbolo $\sqrt{-a}$ carece de sentido, o más bien es contradictorio y absurdo. La actitud negativa ante los números complejos se acentuó, de hecho, con la recuperación gradual del rigor, y hacia 1830 eran minoría los que se inclinaban a aceptarlos. Eso sí, una minoría aplastante, al estar encabezada por Cauchy, Gauss, Abel y Jacobi; nos interesa aquí centrarnos en el segundo de ellos, no en vano era el único autor citado por Riemann en su tesis doctoral.

La aceptación plena de los complejos llevó por un lado al magnífico edificio del análisis de variable compleja, y por otro a la teoría de los números (complejos) algebraicos. Fue precisamente en este segundo contexto que Gauss tomó por fin, en 1831, la decisión de defender las "magnitudes complejas" frente a las críticas:

> La transposición de la teoría de los restos bicuadráticos al dominio de los números complejos podría quizá parecer escandalosa y antinatural a algunos, menos familiarizados con la naturaleza de las magnitudes imaginarias y atrapados en falsas nociones acerca de ellas, y podría dar lugar a la opinión de que con ello la investigación se sitúa igualmente en el aire, recibe una posición tambaleante, y se aleja totalmente de la intuitividad. Nada podría ser más infundado.[138]

Gauss venía empleando los números complejos y la idea de asociarles puntos del plano (el plano complejo) nada menos que desde su tesis doctoral en 1799, dedicada a demostrar el teorema fundamental del álgebra. Pero, como dijo Abel, el comportamiento de Gauss era el del zorro que esconde sus huellas: en su tesis reformulaba la idea original hasta no dejar rastro de la concepción del plano complejo, al igual que sucedió en otros trabajos posteriores.

El hecho de que los números complejos y sus operaciones tienen una interpretación natural en términos de los puntos del plano, quedó establecido con detalle en ese anuncio de 1831; la representación geométrica de Gauss, e ideas similares de otros autores, desempeñaron un papel central en la aceptación generalizada de los complejos a partir de entonces. Sin embargo, para Gauss la representación geométrica no era más que una ejemplificación de cómo los complejos sirven para caracterizar situaciones concretas. La "verdadera metafísica de las magnitudes imaginarias" apuntaba, según él, a algo más abstracto: en matemática se estudian ante todo relaciones, y sucede que podemos vérnoslas con un sistema de objetos cuyas relaciones no permiten ordenarlos "en una única serie ilimitada, sino sólo en series de series, o lo que es lo mismo, con una variedad de dos dimensiones".[139] La existencia de variedades de dos dimensiones es la razón última de que el matemático necesite emplear números complejos, y desde este punto de vista los números racionales o los negativos no están mejor justificados.

---

[138] Anuncio de la 'Theoria residuorum biquadraticorum' (1832), donde se empleaba una extensión de las ideas de teoría de números al caso de los números enteros complejos $a + bi$ (con a, b enteros). Gauss, *Werke*, vol. 2, 174.

[139] Gauss, *op. cit.*, 176. Conviene recordar que este texto es muy anterior a la lección donde Riemann introduce el concepto de variedad (§ 5), y que Riemann cita explícitamente este trabajo de Gauss en su lección.

También el empleo de métodos topológicos estaba prefigurado en Gauss: la demostración del teorema fundamental del álgebra (nombre algo anticuado) puede verse como un capítulo de la teoría de funciones. Y precisamente en la nueva demostración del teorema que Gauss ofreció en 1849, para celebrar el 50 aniversario su doctorado, se hacía libre uso de funciones (polinómicas) complejas y se analizaba de una manera esencialmente topológica su comportamiento. Gauss era aquí explícito acerca de la necesidad de estudios topológicos, que describía en unos términos que su discípulo retomaría tanto en la lección de 1854 como la 'Teoría de las funciones abelianas' (véase § 5.4). Un último dato fundamental es que, antes de la teoría de las superficies curvas (§ 5.2), Gauss había escrito otro trabajo relacionado con la geometría diferencial, con el cual ganó un premio de la Academia de Ciencias danesa en 1822. Se trata de 'Solución general del problema de aplicar las partes de una superficie dada sobre las de otra, de modo que la imagen sea similar al original en las partes mínimas'.[140] Este tipo de aplicación, "similar en las partes mínimas", es lo que hoy llamamos aplicación *conforme*. En el trabajo, Gauss volvía a comportarse como el zorro: no hablaba en absoluto de análisis complejo, pero su solución al problema equivalía a establecer que la aplicación conforme viene dada por una función analítica de variable compleja.

Riemann leyó estos trabajos de Gauss en sus primeros años como estudiante universitario, y fue capaz de captar sus implicaciones tanto para la geometría (según vimos) como para la teoría de funciones. De hecho, el enfoque riemanniano de la teoría de funciones lleva mucho más allá la interrelación entre cuestiones analíticas y cuestiones geométricas que Gauss había comenzado a explorar. Queda claro, pues, que, aparte de su deuda con la tradición francesa, el enfoque riemanniano era deudor sobre todo de su maestro Gauss.

En cuanto a Cauchy, llegó a publicar más de 200 artículos sobre variable compleja a lo largo de su vida. Comenzó a trabajar sobre la idea de integración compleja en 1814, exponiendo con gran claridad sus resultados sobre la integral definida entre límites complejos una década más tarde.[141] El trabajo de Cauchy fue una lenta labor de exploración y reconocimiento; por ejemplo, sólo en 1851 expresó la idea de que era esencial requerir de las funciones analíticas la existencia de una derivada independiente de la dirección (esto es, que la derivada en $z = a$ no dependa del camino por el que nos aproximemos a a). Entonces decidió emplear como punto de partida las ecuaciones diferenciales de Cauchy–Riemann (véase más abajo). En ese mismo año, Riemann presentaba un enfoque muy general y ambicioso del análisis de variable compleja en su tesis doctoral, partiendo del mismo tipo de consideraciones. Al parecer había considerado definitorias las ecuaciones de Cauchy–Riemann desde 1847.[142]

Pero las ideas de Riemann sólo vieron la luz pública en 1857 con una obra maestra, 'Teoría de las funciones abelianas', cuyos primeros apartados encontrará traducidos el lector. Esta obra fue un pilar fundamental del merecido renombre del que gozó en vida, lo que es fácil comprender conociendo algunos detalles de las circunstancias históricas del caso. Para situar el tema de su artículo, conviene comenzar hablando de las funciones elípticas, que fueron tema de una fascinante competición entre Abel y Jacobi hacia 1830. El problema de calcular la longitud de arco de una elipse había llevado ya en el siglo XVII a integrales de la forma

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx\,,$$

donde P es un polinomio y R es una función racional. De ahí que las integrales de esta forma se dieran en llamar *elípticas*; no tenían solución en forma cerrada y planteaban notables dificultades y oscuridades. Abel y Jacobi fueron los primeros en clarificar la cuestión, sobre la base de dos novedades esenciales: considerando valores complejos de la variable, y centrándose en las funciones inversas de las anteriores (que eran funciones analíticas y simplificaban

[140] Publicado en los *Astronomische Abhandlungen* de Schumacher en 1825; *Werke*, vol. 4, 189–216.

[141] Para entonces, dichos resultados eran bien conocidos por Gauss, que los analiza en una carta de 1811. El omnipresente Gauss también había obtenido algunos de los resultados de Abel y Jacobi, que mencionaremos más abajo. Como tantas veces, no llegó a publicarlos: se tomaba muy en serio su lema *pauca sed matura* (pocas obras, pero maduras).

[142] Dedekind *op. cit.* [1876], 544.

notablemente el problema). Vemos aquí un ejemplo del papel que ha desempeñado la variable compleja como fuente de grandes clarificaciones en el universo del análisis.

A dichas funciones inversas de integrales elípticas se les dio en llamar *funciones elípticas*, y centraron una parte muy importante del trabajo en análisis durante todo el siglo. La competición de Abel y Jacobi les granjeó enseguida una merecida fama (que le llegó tarde al primero, muerto prematuramente). Tras sus trabajos quedaron planteados varios problemas importantes, entre ellos el 'problema de inversión de Jacobi', que pedía soluciones para las integrales de funciones algebraicas cualesquiera; o lo que es lo mismo, se pedía determinar las llamadas, en aquel entonces, "funciones trascendentes abelianas". Conviene decir que aquí se estaba empleando una noción ampliada de función, que desde el punto de vista actual es espuria, ya que estas 'funciones' arrojan más de un valor para cada argumento. La cuestión era considerada del máximo interés: Weierstrass publicó en 1856 una solución del problema de inversión para las llamadas integrales hiperelípticas, y con ello pasó de ser un desconocido profesor de instituto a una nova en el firmamento de la matemática alemana.[143] Pero con los métodos empleados por estos autores, parecía imprescindible una prolija elaboración caso por caso. El artículo de Riemann (1857) ofrecía nada menos que una solución general para el problema de Jacobi, sobre la base de métodos radicalmente nuevos, que no se basaban en prolijos cálculos sino que ofrecían algo así como una panorámica a vista de pájaro. Se comprende la excitación que despertó y la gran fama que le atrajo, igual que había sucedido ya con sus antecesores.

El planteamiento de Riemann combina elementos geométricos (más propiamente, topológicos) con otros que tienen su origen en la física matemática (ecuaciones diferenciales, y en concreto teoría del potencial), para dar un tratamiento general de los problemas del análisis complejo en una variable. Sin embargo, nada de eso es lo que el propio Riemann consideraba más característico de su planteamiento. Su énfasis recayó siempre en el carácter *abstracto* de sus principios (véase § 4.2), que permitían estudiar las funciones de variable compleja "independientemente de expresiones [analíticas] para las mismas".[144] Se trataba de dar con una definición abstracta del concepto de función analítica –las ecuaciones de Cauchy-Riemann– y a continuación introducir las condiciones indispensables para caracterizar cada función concreta. Este es precisamente el motivo que le llevó a introducir consideraciones topológicas y a emplear medios de la teoría del potencial, porque en ellos encontraba condiciones suficientes, e independientes entre sí, para caracterizar cada función. Las formas de representación concretas (mediante series, mediante integrales) debían aparecer sólo después, como un resultado de la teoría general. No hace falta subrayar que este planteamiento metodológico hace de Riemann un autor central, un verdadero punto de inflexión en el camino hacia la matemática abstracta del siglo XX.

Visto el énfasis de Riemann en las consideraciones abstractas, independientes de formas de representación, es posible entender lo divergente que era su planteamiento con respecto al de Weierstrass. El tratamiento que el matemático de Berlín da a las funciones analíticas descansa siempre en el empleo de series de potencias (series de Laurent convergentes), y su objetivo prioritario era establecer formas particulares de representación de funciones. No en vano Weierstrass era buen amigo de Kronecker y, aunque no fuera tan purista como para prohibir los números irracionales, siempre fue un claro partidario de los medios de trabajo constructivos.[145] El purismo de Weierstrass se hacía notar, además, en que sólo estaba permitida la representación mediante series, y no mediante integrales, cosa que acabó siendo ridiculizada por matemáticos posteriores. Felix Klein tenía en mente a Weierstrass cuando resaltaba cómo Riemann había sido ajeno a cualquier prejuicio y rigidez, empleando los más diversos métodos y buscando interrelaciones entre las diversas ramas de la matemática. Esta característica, con la

[143] Así obtuvo un doctorado *honoris causa* y algo después su primera plaza en Berlín, todo a los 40 años.

[144] Como dice en el art. 19 de su tesis (*Werke*, 35); estas ideas se analizaban con detalle en el art. 20, traducido como apéndice a la 'Teoría de las funciones abelianas'.

[145] Por este motivo le he calificado de semi-constructivista, ya que trabaja al estilo constructivo sobre la base (no constructiva) de |. Esto le aproxima al enfoque defendido en el siglo XX por Bishop.

que Klein se identificaba, ponía a los matemáticos de Gotinga en las antípodas de la escuela de Berlín.

El planteamiento de Weierstrass estaba mucho más en la línea de la tradición, por ejemplo la de Legendre, Abel y Jacobi, mientras que Riemann seguía los pasos de la tendencia conceptual de Cauchy y Dirichlet, dándole un poderoso y atrevido impulso. Eso sí, Riemann perdió la primera ronda de la competición: los métodos de Weierstrass eran susceptibles de un tratamiento sumamente riguroso, mientras que los de Riemann tuvieron que esperar medio siglo para encontrar un marco adecuado y satisfactorio. Weierstrass y sus alumnos de Berlín dominaron el panorama del análisis, tanto en Alemania como fuera, durante la segunda mitad del siglo XIX, y sólo unos pocos prefirieron el innovador estilo conceptual y abstracto propuesto desde Gotinga.

Pero pasemos, por fin, a algunos detalles y rasgos característicos de la teoría de funciones de Riemann. Seguiremos para ello el hilo de su exposición en la tesis doctoral de 1851, *Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja*.[146] Comenzaba planteando el concepto de función al estilo de Dirichlet, enfatizando su carácter abstracto, y señalando que su investigación iba a considerar las funciones de variable compleja "independientemente de su expresión" por medios analíticos. Luego hacía observar que, si $w = f(z)$ es una función compleja (w, $z \in \mathbb{C}$) que admite representación analítica, el valor de la derivada $\frac{dw}{dz}$ "siempre será independiente del valor particular del diferencial dz".[147] Esta es la condición de que la derivada en $z = a$ no varíe con el camino por el que z tiende al punto a, y sugiere la idea de considerar, en general, todas las funciones (representables o no) que cumplan dicho requisito, que hoy llamamos *funciones analíticas*. Definía Riemann:

> Una magnitud compleja variable w se llama función de otra magnitud compleja variable z, cuando varía con ella de tal modo que el valor del cociente diferencial $\frac{dw}{dz}$ es independiente del valor del diferencial dz.

A continuación, mostraba que esta condición es equivalente a la validez de las ecuaciones de Cauchy–Riemann (siendo $w = f(z)$, $z = x+yi$, $w = u+vi$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Estas ecuaciones ofrecen una condición necesaria y suficiente para que una función compleja sea analítica, y una condición de carácter abstracto, por lo que Riemann las consideró el punto de partida ideal para su teoría.[148] En el artículo sobre las funciones abelianas prefirió poner en su lugar la condición equivalente $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$. Partiendo de cualquiera de esas definiciones, se deduce que las partes real u e imaginaria v de la función satisfacen la ecuación en derivadas parciales que caracteriza a un potencial bidimensional. Resulta que u y v son funciones potenciales, un hecho del que Riemann sacará partido a la hora de determinar funciones particulares mediante propiedades abstractas.

Por otro lado, Riemann mostraba cómo la representación geométrica de los números complejos abre el camino a una concepción directa y más simple de las funciones analíticas. Presenta la idea del plano complejo al modo de Gauss, representando $z = x+yi$ mediante el punto de coordenadas (x, y) en un plano A, y sugiere que consideremos la función $w = f(z)$ como una correspondencia entre los puntos del plano A y los de otro plano B. Si la función es continua, dice, "se podrá concebir dicha dependencia de la magnitud w respecto a z como una aplicación [Abbildung] del plano A en el plano B". Si ahora se analiza qué efecto tiene la condición de

---

[146] Riemann, *Werke*, 3–43.

[147] Riemann, *op. cit.* [1851], 4.

[148] Entretanto, Weierstrass tomaba como definición la posibilidad de representar la función localmente mediante series de potencias, y de desarrollar la función por prolongación analítica. Criticaba el enfoque de Riemann diciendo que la clase de las funciones diferenciables no está delimitada con precisión.

analiticidad de la función sobre el tipo de aplicación establecida, se llega a la conclusión de que impone una *aplicación conforme*: un triángulo infinitesimal en A tiene como imagen otro triángulo en B de ángulos iguales y lados proporcionales, y por tanto las "partes mínimas" del plano A son "similares" a las de su imagen. Esta idea de 'similaridad en las partes mínimas' es precisamente el concepto de aplicación conforme, y Riemann remitía al trabajo de Gauss sobre el tema que hemos mencionado (1825).

Tras esa introducción al tema, Riemann presentaba la idea que es característica de su enfoque y que supone un paso decisivo más allá de Gauss: las superficies de Riemann. Su objetivo era lograr medios adecuados para el estudio de 'funciones' multivaluadas, como lo eran las abelianas. Cauchy y Puiseux habían estudiado ya el tema desde un punto de vista puramente analítico.[149] El ejemplo más simple y típico es la función $f(z) = \sqrt{z}$, que tiene un punto de ramificación en $z = 0$ (y también en $z = \infty$). Si partimos de un cierto valor de w para un punto en el entorno de 0 (por ejemplo, $w = i$ para $z = -1$), y observamos cómo varía la función al moverse el argumento en círculo alrededor de 0, nos encontramos que al cabo de una vuelta no se obtiene otra vez el valor anterior (i en este caso) sino uno distinto (a saber, $-i$); otra vuelta más, y volvemos al valor inicial. En general, esto puede suceder tras n (o incluso infinitas) vueltas en torno al punto de ramificación.

El tratamiento tradicional de las funciones multivaluadas, al estilo de Puiseux, era muy limitado y no permitía avances significativos. Riemann tuvo aquí una idea genial al considerar la situación desde un punto de vista geométrico: lo que sucede en el caso anterior es que la función $w = \sqrt{z}$ tiene dos "ramas", siendo cada rama prolongación de la otra (véase la figura). En general, a toda función multivaluada puede asociarse una superficie, en la que están representados los puntos de ramificación y el modo en que las distintas ramas de la función están conectadas entre sí en torno a dichos puntos. Esto, que en principio es sólo una curiosa "invención geométrica", como dijo Klein, se convirtió en una herramienta poderosísima: Riemann se vio llevado a estudiar las propiedades topológicas de las *superficies de Riemann*, descubriendo relaciones profundas entre dichas propiedades topológicas y las propiedades analíticas de las funciones.

He aquí cómo introducía Riemann su genial "invención" en la tesis de 1851:

Para las consideraciones siguientes restringimos [el dominio de] variabilidad de las magnitudes x, y [e.d., de la variable independiente $z = x+yi$] a una región finita, considerando como el lugar del punto [(x, y)] no ya el propio plano [complejo] A, sino una superficie T desplegada sobre el mismo. Elegimos esta forma de presentación, en la que consideraremos inobjetable el hablar de superficies que yacen unas sobre otras, para dejar abierta la posibilidad de que el lugar del punto [(x, y)] se extienda múltiples veces sobre la misma parte del plano. Pero presuponemos que en tal caso las porciones de superficie yuxtapuestas no estarán conectadas a lo largo de una línea, de modo que no tiene lugar un plegamiento de la superficie, ni una división en partes disconexas.[150]

Considerando su correspondiente superficie T, la función deja de ser multivaluada (sobre el plano complejo) para ser una verdadera función en el sentido moderno –esto es, univaluada– sobre la superficie de Riemann. Riemann procedía a analizar con cuidado el concepto de *punto de ramificación* de la superficie T; en el caso anterior $w = \sqrt{z}$, la superficie de Riemann tiene dos hojas que se unen en torno al punto de ramificación $z = 0$. Riemann describía las superficies en cuestión determinando los componentes de su frontera, su número de hojas, la posición y el orden de sus puntos de ramificación, y el modo de unión de las hojas.

A continuación, pasaba al tema capital de estudiar la topología de las superficies T, culminando en el concepto de *orden de conexión*, que representaba también una idea totalmente nueva. Los métodos que empleó a tal efecto cambiaron entre la tesis de 1851 y la 'Teoría de las

---

[149] El último en un importante artículo de 1850 sobre el comportamiento de las funciones algebraicas en el entorno de puntos de ramificación (*Journal de mathématiques* **15**, 365–480). De hecho, Puiseux distinguió entre lo que hoy llamamos polos y puntos de ramificación, y comenzó a trabajar sobre integrales de funciones algebraicas. Se ha podido confirmar que Riemann conocía su obra.

[150] Riemann *op. cit.* [1851], 7.

funciones abelianas' de 1857. En la tesis doctoral consideraba superficies conexas con borde, esto es, superficies no cerradas, empleando *cortes transversales* –o disecciones– de la superficie, esto es, cortes a lo largo de líneas –sin puntos dobles– que llevan de puntos frontera a puntos frontera. El ejemplo más simple es un disco sin agujeros, superficie "simplemente conexa", cuya característica estriba en que toda disección la rompe en dos partes disconexas (véanse las ilustraciones del propio Riemann al final del apdo. 2 de su artículo sobre funciones abelianas). Análogamente, puede decirse que una superficie tiene orden de conexión $m+1$ si hacen falta m disecciones para transformarla en simplemente conexa.[151] Un detalle significativo a este respecto es que, de acuerdo con una carta de Betti (a quien Riemann le habría contado la anécdota en sus conversaciones privadas), la idea de emplear disecciones se le ocurrió a raíz de una conversación con Gauss sobre un tema de física.[152]

En la 'Theorie der Abel'schen Funktionen', Riemann consideraba superficies cerradas y empleaba un método de análisis basado en considerar sistemas de curvas cerradas en el interior de la superficie. El número máximo de curvas cerradas que no delimitan una parte de la superficie constituye un invariante apropiado para caracterizarla topológicamente. Se trata del llamado *primer número de Betti*, $n = 2p$, siendo p lo que Clebsch denominó en 1865 el *género* de la superficie.[153] La importancia de estas nociones topológicas quedó resaltada de forma espectacular con la formulación del célebre teorema de Riemann–Roch. Éste determina el número de funciones algebraicas linealmente independientes sobre una superficie, en función del género p de dicha superficie. Riemann estimó que, para funciones con polos simples en m puntos dados, el número de "constantes arbitrarias" para determinarlas era $\geq m-p+1$.[154] En su lección sobre geometría (apdo. I.1) decía Riemann que la topología se había hecho imprescindible para la teoría de las funciones complejas multivaluadas; esta idea encontró una brillante y muy profunda confirmación en el teorema de Riemann–Roch, yendo más allá de cualquier resultado contenido en su tesis.

Pero volvamos a la propia tesis. Disponiendo ya de la definición general de función analítica, que conecta la teoría de funciones y la teoría del potencial, y manejando la idea de las superficies de Riemann, nuestro autor se dispone a buscar condiciones minimales para definir una función analítica cualquiera. Las condiciones o datos definitorios son de carácter global, y están seleccionados de tal modo que no haya relaciones cuantitativas entre ellos, es decir, que sean independientes y puedan pues elegirse arbitrariamente. Dichos datos son:

1. la superficie de Riemann, que fija las características de ramificación de la función, y
2. condiciones analíticas respecto al comportamiento de la función en polos y (en 1857) singularidades logarítmicas, respecto a los valores que toma su parte real en la frontera de la superficie (eventualmente seccionada), y respecto a la norma de su parte imaginaria.

El instrumento clave que permitía a Riemann determinar la función partiendo de ese conjunto de datos era el *principio de Dirichlet*, que todavía sin este nombre aparecía en el art. 16 de su tesis. Esta herramienta analítica, tomada de la teoría del potencial y generalizada por el propio Riemann, fue motivo de dificultades para su planteamiento.

No entraremos aquí en una discusión detallada del principio de Dirichlet (para lo que debe verse el texto del propio Riemann y nuestras notas). Se trata en realidad de un nombre acuñado por el propio Riemann para la generalización de una herramienta analítica empleada por Gauss y Dirichlet (e independientemente por William Thomson, Lord Kelvin) con vistas a establecer la existencia de determinada solución de la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ para la función potencial. Un tanto paradójicamente, Riemann parece haber aprendido y desarrollado el principio no a

---

[151] Si bien la definición que daba Riemann en su tesis era más general; el orden de conexión de Riemann es igual a la *característica de Euler* de la superficie, cambiada de signo.

[152] Véase A. Weil, 'Riemann, Betti, and the birth of topology', *Archive for History of Exact Sciences* **20** (1979), 91.

[153] Riemann estudiaba también las relaciones numéricas entre los nuevos invariantes y el 'orden de conexión', cuestión algo complicada porque su definición de dominio simplemente conexo cambió entre 1851 y 1857 (véase Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff*, Basel, Birkhäuser, 1980, 63–64).

[154] 'Teoría de las funciones abelianas', apdo. 5, *Werke*, 107–09; Riemann afirma haber encontrado dicho resultado ya en 1852. Su alumno Gustav Roch precisó el resultado en el artículo: 'Über die Anzahl der willkürlichen Konstanten in algebraischer Funktionen', *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **64** (1864), 372-376.

través de Dirichlet, sino leyendo a Gauss, como por otra parte lo había hecho el propio Dirichlet (véanse las indicaciones precisas que da el propio Riemann en el apdo. 3 de la 'Teoría' y téngase en cuenta que no asistió a clases de Dirichlet sobre teoría del potencial, pero sí había leído asiduamente el trabajo de Gauss).[155] En su artículo, Riemann empleaba dicho principio obteniendo resultados espectaculares, pero sin que sus argumentos de base fueran suficientes. En 1870, Weierstrass leyó ante la Academia de Berlín una crítica del principio de Dirichlet, mostrando con un ejemplo que la *existencia* de la función en cuestión no está garantizada *a priori*. Planteaba así dificultades que exigían una nueva vuelta de tuerca en el rigor analítico.

La objeción fue considerada un argumento definitivo en contra del enfoque de Riemann, aunque –como se ha dicho– lo que sucedió más bien es que la decisión a favor de Weierstrass ya estaba tomada, y la mayoría de los matemáticos se sintieron aliviados por no tener que aprender el empleo de los abstractos métodos riemannianos. En cuanto al propio Riemann, al parecer era consciente de que había carencias en su exposición del principio, pero lo consideraba sólo como uno (muy expeditivo) entre varios métodos posibles de establecer sus resultados. Esta apreciación se vio confirmada por los resultados de varios matemáticos del XIX que, desde Neumann a Poincaré, elaboraron métodos alternativos para establecer el teorema fundamental en el que se basa el enfoque riemanniano (formulado a continuación en el apdo. 3 del texto traducido). Finalmente, Hilbert logró en 1904 reconstruir el principio de Dirichlet, en versión modificada, empleando métodos más rigurosos del cálculo de variaciones, los llamados "métodos directos". Pocos años después el enfoque riemanniano lograba al fin triunfar.

En el art. 20 de su tesis (traducido como apéndice), Riemann daba un ejemplo de la potencia de sus métodos abstractos estableciendo una caracterización de las funciones algebraicas. En su enfoque, lo común a una clase de funciones queda reflejado, no en la forma de representaciones analíticas, sino de "condiciones de frontera y de discontinuidad". Dada una superficie de Riemann de una o varias hojas, y una función sobre ella cuyas discontinuidades son puntos aislados en los que se hace infinita (polos), entonces la función es algebraica, e inversamente. (En términos modernos, toda función *meromorfa* sobre una superficie compacta es algebraica.) A continuación, en el art. 21, Riemann daba otro ejemplo del alcance sus métodos, el célebre *teorema de aplicación* de Riemann:

> Dos superficies planas simplemente conexas pueden siempre relacionarse de tal modo, que a cada punto de la una corresponde un único punto de la otra que se desplaza continuamente con aquél, y que sus partes mínimas correspondientes son similares [aplicación conforme]; además, la correspondencia para un punto interior y de un punto de frontera puede determinarse arbitrariamente; mas con ello queda determinada la relación para todos los puntos.[156]

Para ello basta demostrar que existe una aplicación conforme entre un dominio simplemente conexo y el disco unidad, cosa que Riemann hacía sin el debido rigor. Como ha dicho Ahlfors, se trata de uno de los teoremas más importantes del análisis complejo, que dio lugar a numerosos trabajos de autores posteriores. Para demostrarlo se emplearon diversos medios y en el proceso surgieron importantes desarrollos analíticos y topológicos, hasta que el teorema de Riemann, convenientemente modificado, encontró sus primeras demostraciones rigurosas hacia 1910.

Además de la aplicación de sus ideas a las funciones abelianas, Riemann las empleó también para el tratamiento de la serie hipergeométrica, en otro artículo escrito en 1856 y publicado en 1857.[157] El asunto se inscribe en la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias y debió ser, para sus contemporáneos, el ejemplo más convincente de la potencia de sus nuevos métodos.

---

[155] E. Neuenschwander, 'Interactions among the French school, Riemann, and Weierstrass', *Bulletin Amer. Math. Soc.* **5** (1981), 87–105, especialmente p. 98. Sobre el principio de Dirichlet, se recomienda el libro de Bottazzini, *The Higher Calculus: A history of real and complex analysis* (Nueva York, Springer, 1986).

[156] Riemann *op. cit.* [1851], 40.

[157] 'Contribuciones a la teoría de las funciones representables mediante la serie gaussiana $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$', en *Werke*, 67–83. Como indicaba Riemann mismo, se trata de series de funciones que resultan de utilidad para resolver problemas de física matemática, especialmente en astronomía.

Riemann ofrecía una visión general y muy clara de las difíciles contribuciones previas de Gauss y Kummer, relativas a la transformación de dichas series. Como indicaba el propio Riemann, Kummer había logrado en un trabajo de 1835 establecer un procedimiento para encontrar todas las transformaciones posibles de cierto tipo,

> pero el desarrollo efectivo del mismo exigía discusiones tan prolijas, que ya en el caso de las transformaciones de grado tres se abstuvo de llevarlo a cabo, y se contentó con desarrollar completamente las transformaciones de grado uno y dos, y las compuestas de ambas. En la memoria que anunciamos se aplica a estas [funciones] trascendentes un método cuyos principios se han expresado en la disertación inaugural del autor (Art. 20), mediante el cual se obtienen todos los resultados encontrados anteriormente, casi sin cálculos.[158]

Riemann lograba determinar el número de expresiones distintas equivalentes para los distintos casos (casi 900 en total) prácticamente sin necesidad de cálculos. Entretanto, la obra de Kummer es un ejemplo típico del enfoque tradicional de las matemáticas, centrado en el cálculo formal. De ahí que esas líneas resulten especialmente significativas.

Riemann publicó también un artículo sobre las funciones theta, que es continuación de la memoria sobre funciones abelianas, e impartió clases sobre estos asuntos que desarrollan el tema. Como ha escrito Narasimhan, el conjunto de estas obras "constituye uno de los grandes tesoros de la matemática" por la originalidad y la cantidad de nuevas ideas que contienen. Abrieron el camino a la teoría de las superficies de Riemann compactas, y "forman la base de muchos grandes temas matemáticos".[159]

La teoría de funciones riemanniana, al igual que otras contribuciones matemáticas suyas, ofrecía un replanteamiento del tema muy profundo, pero a la vez visionario: era una llamada a enfocar todo el problema de un modo nuevo, o cuando menos a intentar restablecer con medios más tradicionales sus resultados. Esta segunda fue la manera en que habitualmente se trabajó sobre teoría de funciones durante la segunda mitad del XIX. Como diría Klein, los métodos riemannianos eran entonces "una especie de arcano de sus alumnos directos", y fueron vistos con desconfianza por los restantes matemáticos.[160] Los discípulos de Weierstrass, y sobre todo Schwarz, abordaron los resultados de Riemann en versiones mucho más limitadas, empleando medios puramente analíticos ajenos a la teoría del potencial. Otros autores emplearían métodos ligados a la geometría algebraica, a la teoría de invariantes, e incluso al álgebra pura. Carl Neumann (en 1865) y el propio Klein (en 1882) intentaron rehabilitar y desarrollar el enfoque del propio Riemann, pero sin demasiado éxito. Lo que se necesitaba era, primero, obtener versiones rigurosas de los métodos analíticos de Riemann (Hilbert, 1904), y segundo, una puesta en limpio de la idea de superficie de Riemann y cuestiones relacionadas.

El problema quizá más interesante era el de las superficies de Riemann. En sus escritos, nuestro autor las introducía de una manera tentativa, como un medio auxiliar, sin duda sumamente útil, pero prescindible. No cabe duda de que era muy consciente de la dificultad que suponía poner su novedosa idea en claro, pero también es cierto que dio los primeros pasos en esa dirección: todo indica que esa reflexión fue lo que le llevó al concepto fundamental de *variedad n*-dimensional y a un primer esbozo de topología general.[161] El camino, sin embargo, estaba lleno de dificultades y cuestiones espinosas, empezando por los problemas –simples sólo en apariencia– de qué es una curva y qué es un dominio. Aclaraciones fundamentales al respecto vendrían con el desarrollo de la topología conjuntista, y entre otras cosas con los intentos de restablecer el teorema de aplicación de Riemann.

Pero ya a mitad de camino llegó un cambio importante con Felix Klein, para quien las superficies de Riemann pasaron a ser algo más que una brillante invención geométrica y un medio auxiliar "útil". Como dijo en su libro de 1882:

---

[158] 'Selbstanzeige', *Werke*, 85.
[159] Véase el Prefacio de Narasimhan a la edición 1991 de Riemann, *Werke*, 9–10, y los comentarios detallados en 10–16.
[160] Klein, 'Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik', *Jahresbericht der Deut. Math. Vereinigung* **4** (1894), 71–87, en p. 79.
[161] Véanse el § 5.4 y el fragmento sobre variedades y geometría; sobre topología general, el fragmento en *Werke*, 479–82.

La superficie de Riemann no sólo ilustra intuitivamente las funciones que entran en consideración, sino que las *define*.[162]

Las primeras definiciones y pruebas rigurosas al respecto llegaron en 1913, con el libro de Herman Weyl *La idea de la superficie de Riemann*. Weyl compartía la opinión de Klein, llegando a decir que las superficies de Riemann son lo originario, la "tierra virgen" donde crecen y prosperan las funciones. Presentaba con rigor las variedades conexas bidimensionales,[163] y definía una superficie como una variedad conexa bidimensional que admite triangulación. Sobre la base del principio de Dirichlet, en la versión hilbertiana, Weyl pasaba a desarrollar todos los aspectos esenciales de la teoría de funciones clásica. Con esto se cerraba definitivamente la era del predominio weierstrassiano, y se abría el período más moderno de triunfo pleno de la tendencia abstracta.

6.3. Teoría de números. Decía Gauss que, si la matemática es la reina de las ciencias, la teoría de números es la reina entre las disciplinas matemáticas. La pureza y elegancia de sus métodos, la simplicidad de sus problemas y la dificultad de su resolución, hacen de ella un campo que ofrece especiales atractivos para buena parte de los matemáticos. Riemann sólo le dedicó un breve artículo, pero se trata de una contribución fundamental en la que aparece la célebre Conjetura de Riemann, considerada como el más importante problema abierto en la matemática actual. Sabemos además que Riemann tuvo mucho interés por la teoría de números desde muy joven (véase la larga cita de Schmalfuss en § 1.1), y probablemente sólo la corta duración de su vida fue la causa de que no escribiera más sobre el tema.

Entre los problemas de teoría de números, los relativos a los primos son especialmente notables e intrigantes. Ya Euclides, en las porciones aritméticas de sus *Elementos*, venía a demostrar el teorema fundamental de la aritmética –todo entero puede escribirse de una única manera como producto de números primos– y demostraba que existen infinitos números primos.[164] Pronto se advirtieron peculiaridades en la sucesión de los números primos, como la presencia de pares de primos gemelos p y $p+2$ (11 y 13, o bien 8.004.119 y 8.004.121), y también la presencia de importantes "huecos" sin números primos en la sucesión numérica. Bastaba hacer cuentas para ver que, en general, los primos tienden a ser cada vez más escasos según se avanza en]; la pregunta era obvia: ¿puede decirse algo preciso acerca de la distribución de los números primos, de su frecuencia de aparición? En este marco se sitúa la contribución de Riemann.

En lo relativo a los medios técnicos empleados, su contribución se encuadra en la teoría analítica de números. Con el desarrollo de la teoría de números, los medios empleados se han ido diversificando y complicando cada vez más: de los métodos más puros se pasó a métodos algebraicos, analíticos y geométricos. El caso todavía muy reciente de la celebérrima Conjetura de Fermat, demostrada por Andrew Wiles tras 350 años de esfuerzos, es un perfecto ejemplo de ello: el simplísimo enunciado de Fermat ($x^n + y^n = z^n$ no tiene soluciones enteras para $n > 2$) sólo ha podido demostrarse sobre la base de ideas geométricas y analíticas sumamente avanzadas, relativas en particular a curvas elípticas y funciones modulares.

La teoría analítica de números fue la principal creación original de uno de los maestros de Riemann, Dirichlet, quien empleó las series de Fourier para investigar propiedades de los números primos. Hay que decir enseguida que Euler había empleado ya, de forma ocasional pero muy importante, series infinitas en el contexto de la teoría de números. Fue Euler quien introdujo la función que hoy –siguiendo a Riemann– se denota por $\zeta(s)$:

---

[162] Klein, *Über Riemann's Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Leipzig, 1882), 555.

[163] Aunque todavía faltaba un importante detalle: el axioma de separación de Hausdorff (1914).

[164] O, más bien, de que dada una cantidad cualquiera de primos $p_1, \ldots, p_n$, existe otro mayor que todos ellos (ya sabemos que los griegos evitaban el infinito actual); consideraba Euclides el número $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, y afirmaba que, o bien n es primo, o tiene un divisor primo necesariamente distinto de $p_1, \ldots, p_n$ (*Elementos*, Madrid, Gredos, 1991, vol. 2, proposición IX.20). Los resultados sobre el teorema fundamental de la aritmética se encuentran en el Libro VII y el comienzo del IX.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots$$

(léase función zeta). Euler consideraba valores reales de s y demostró, sobre la base del teorema fundamental de la aritmética, un resultado muy importante:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \text{ (para todo } p \text{ primo).}$$

El empleo que dio Euler a este resultado –considerando el caso $\zeta(1)$, que da la llamada serie harmónica, la cual es divergente– fue ofrecer una nueva demostración de que existen infinitos números primos. En cuanto a Dirichlet, sus métodos le sirvieron entre otras cosas para una generalización de este resultado de Euler, el teorema siguiente, que se cuenta entre los más importantes de la teoría de números: toda progresión aritmética a, $a+d$, $a+2d$, …, cuyo primer término a y diferencia común d sean primos relativos, contiene infinitos números primos.[165]

Fue idea original de Riemann estudiar $\zeta(s)$ como una función de variable compleja, con el objetivo de obtener nuevos resultados sobre la distribución de los primos. Al hacer esto, estaba ampliando el campo de la teoría analítica de números, poniéndolo en conexión con el análisis de variable compleja al que tanto estaba contribuyendo. El propósito de Riemann en su artículo, que remitió a la Academia de Ciencias de Berlín tras ser nombrado miembro correspondiente de ella, era obtener fórmulas explícitas o aproximadas para la frecuencia o densidad de números primos menores que un número real dado x. Representemos por $\pi(x)$, como es habitual,[166] el número de primos no superiores a x; en la segunda parte de su trabajo, Riemann muestra cómo el comportamiento de $\pi(x)$ se relaciona con log $\zeta(s)$, a través de lo que hoy se llama la transformada de Mellin. La famosa Conjetura surgió como un producto colateral del trabajo, que se encuentra hacia la mitad del mismo, debido a que el estudio de las singularidades de log $\zeta(s)$ conduce a investigar las raíces de $\zeta(s)$.

Las fórmulas de Euler para $\zeta(s)$ convergen sólo en tanto la parte real de s es mayor que 1, $\mathrm{Re}(s) > 1$, pero la función se puede prolongar analíticamente al resto del plano complejo. Lo primero que hace Riemann es obtener una fórmula que determine la función en todo el plano, empleando el teorema del resto de Cauchy. Resulta entonces que $\zeta(s)$ es una función meromorfa con una única singularidad en $s = 1$ (un polo simple). A continuación, Riemann obtiene una *ecuación funcional* que relaciona $\zeta(s)$ y $\zeta(1-s)$, a saber:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\,\Gamma(\tfrac{1-s}{2})\zeta(1-s)$$

(si bien Riemann escribe Π en lugar de Γ). Luego obtiene de nuevo esa ecuación funcional a partir de la representación integral de Γ, para finalmente, realizando el cambio de variable $s = ½ + it$, introducir la función $\xi(t)$. Empleando ésta, la ecuación funcional puede expresarse de una manera muy simple: $\xi(t) = \xi(-t)$.

Es inmediatamente a continuación donde se encuentra la formulación de la Conjetura de Riemann, expresada en términos de $\xi(t)$. El lector debe tener en cuenta que, dado el anterior cambio de variable, lo que vale para la parte real de t habrá de aplicarse a la imaginaria de s, y viceversa. Traducido en términos de la función zeta, Riemann comienza estableciendo que $\zeta(s)$ sólo puede ser igual a cero en la llamada "banda crítica" $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$. Un poco más adelante escribe que "es muy probable" que todos los ceros de $\zeta(s)$ estén sobre la "línea crítica" $\mathrm{Re}(s) = ½$, es decir, que sean de la forma $s = ½ + ib$. Y dice:

Sería deseable, en todo caso, una prueba rigurosa de esto; mas yo, tras algunos breves intentos en vano, he dejado a un lado su búsqueda provisionalmente, dado que parecía superflua para el objetivo inmediato de mi investigación.

---

[165] Dirichlet, 'Beweis des Satzes …' (1837), en *Werke*, vol. 1, 307–42.
[166] Riemann escribe $F(x)$ para esta función.

Como se ha ido estableciendo en años posteriores, de la Conjetura de Riemann pueden deducirse toda una serie de consecuencias importantes para la teoría de números.

Enunciada la Conjetura, Riemann sigue adelante, hacia su objetivo de encontrar una fórmula explícita, no exactamente para $\pi(x)$, como he dado a entender arriba, sino para la función relacionada que llama $f(x)$:

$$f(x) = \pi(x) + \tfrac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \tfrac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \ldots$$

La fórmula que obtuvo, y sus variantes, desempeñan un papel importante en la teoría de los números primos. Entre otras cosas, es importante conocer el tamaño de la diferencia entre $\pi(x)$ y la integral logarítmica $li(x)$, tema sobre el que se había especulado desde tiempos de Gauss. Riemann creyó haber confirmado la opinión de que $\pi(x) < li(x)$ para grandes x, si bien aquí hubo de ser corregido por autores posteriores, empezando por Littlewood. Afortunadamente, comprobamos que también Riemann podía equivocarse.

La memoria de Riemann ha estimulado desarrollos muy importantes en teoría de números durante los siguientes 140 años, o sea, hasta hoy. Incluso el trabajo de Wiles sobre el llamado último teorema de Fermat se liga históricamente con la Conjetura de Riemann a través de una serie de conjeturas planteadas en los años 1940 por André Weil y demostradas en 1974. Volviendo atrás, ya en los años 1890 se produjeron grandes progresos relacionados con aquel trabajo: en concreto, von Mangoldt completó diversos detalles y lagunas en la exposición riemanniana,[167] y tuvieron lugar aportaciones muy importantes de Hadamard y de la Vallée Poussin. Empleando el mismo tipo de métodos que Riemann, y habiendo demostrado un resultado que es consecuencia (muy débil) de su Conjetura,[168] el francés y el belga lograron en 1896, independientemente, completar la demostración de una proposición conjeturada por Gauss un siglo antes: el *Teorema de los números primos*. Este viene a decir que $\pi(x)$, el número de primos no superiores a x, tiene una buena aproximación en la función $\dfrac{x}{\ln x}$ para valores grandes de la variable.

El problema de los ceros de $\zeta(s)$ sobre la "banda crítica", y en torno a la "línea crítica" indicada por Riemann, ha resultado ser una de las cuestiones más espinosas y difíciles de la teoría de números, y ha atraído a numerosos autores posteriores. El inglés Hardy demostró en 1914 que hay infinitas raíces de $\zeta(s)$ que satisfacen la Conjetura, y junto con Littlewood realizó importantes descubrimientos adicionales.[169] Resulta notable que, como estableció Siegel en un artículo de 1932, Riemann había ya anticipado y superado notablemente el trabajo de Hardy y Littlewood, en manuscritos que quedaron inéditos a su muerte.[170] Las aproximaciones a la Conjetura de Riemann incluyen resultados estadísticos como el de Levinson, quien demostró que al menos un tercio de los ceros de $\zeta(s)$ están en la línea crítica; y también aproximaciones puramente 'empíricas' por computación efectiva, renovadas con la llegada de los grandes ordenadores (en 1987 se habían computado 1.500 millones de raíces, sin encontrar un contraejemplo).[171]

---

[167] Von Mangoldt, 'Zu Riemanns Abhandlung …', *Journal für reine und ang. Math.* **114** (1895), 255–305.

[168] Que $\zeta(s)$ no tiene ninguna raíz con parte real 1, esto es, no tiene raíces sobre la recta $\mathrm{Re}(s) = 1$. Hadamard, *Oeuvres* vol. 1, 189–210; de la Vallée Poussin en *Annales de la Soc. des Sciences de Bruxelles*, ser. 1, **20**, parte II.

[169] Hardy, *Collected Papers*, vol. 2, 6–9.

[170] Dicho trabajo puede verse en las obras completas de L. Siegel, y también en la última edición de las de Riemann.

[171] Sobre este tema véase J. Echeverría, 'Modelos empíricos en matemáticas: la conjetura de Riemann como ejemplo', *Arbor* **152**, nº 600, 77–100. Para una historia de la conjetura de Riemann, el estudio de H. Edwards, *Riemann's Zeta Function* (New York, Academic Press, 1974).

7. En torno a la unidad de la obra de Riemann.

> Precisamente en el caso de Riemann, que no tiene igual en cuanto a penetración conceptual de los problemas matemáticos, vale la pena rastrear la concepción unitaria en que se basó.[172]

Antes de terminar y dar la palabra al propio Riemann, parece adecuado intentar una reflexión sobre la concepción unitaria en la que se basó, o que consiguió erigir –como también podría ser–. Los escritos de Riemann discurren por múltiples campos de la matemática, la física matemática, la física teórica, e incluso la filosofía y la fisiología, pero los conocedores de su obra siempre han resaltado la profunda unidad que se esconde tras esa diversidad aparente. Encontramos un intenso intercambio de ideas e inspiraciones entre todos sus campos de trabajo: entre las distintas ramas de la matemática, pero también, y de un modo especial, entre sus ocupaciones filosóficas, físicas y matemáticas.

El problema de explicar la unificación de elementos tan heterogéneos puede abordarse de varias maneras. Comparando la obra de Riemann con un edificio, una posible explicación estaría en la existencia de *bases* o cimientos que afectan a todas las partes de la obra. Este fue el planteamiento de Weyl, quien sin duda dio con un punto clave al enfatizar la importancia en Riemann de un "motivo epistemológico" como es el principio de comprender el mundo a partir de su comportamiento a escala infinitesimal (luego hablaremos de ello). Pero semejante enfoque adolece sin duda de reduccionismo, y no parece que la imbricación de la obra de Riemann pueda explicarse tan sólo a base de mencionar ese o algún otro *leit-motif*. Siguiendo con la comparación anterior, otra vía de explicación apelaría a la habilidad de Riemann para establecer *puentes* entre las distintas partes de su obra. Semejante capacidad sólo puede ponerse en práctica con éxito cuando se dispone de un excelente dominio de los distintos bloques que se quiere relacionar, y de una gran capacidad de pensamiento sistemático. Riemann poseyó sin duda estas virtudes, a las que unía una magnífica habilidad para pensar las implicaciones últimas de una idea o un enfoque nuevos, tanto en la dirección del análisis como en la de la síntesis. Obviamente, sólo las muy especiales condiciones intelectuales que reunió explican sus éxitos.

Como decíamos ya al principio de esta introducción, Riemann fue un gran pensador, un pensador sistemático, penetrante y claro. En este sentido, se tiene la tentación de compararlo con los más grandes de la tradición occidental, por ejemplo –y por no elegir otros nombres que el lector pudiera considerar desmesurados– con su admirado Leibniz.[173] Al leer los escritos de Riemann, se tiene la impresión de que nada de lo que nos ofrece se ha logrado mecánicamente: ninguna generalización surge de un mero interés en generalizar, el espíritu de sistema nunca se antepone al interés por lo particular, etc. Todas sus investigaciones, incluso las que nos pueden resultar más ajenas o sorprendentes (sobre psicología, sobre el alma de la Tierra), están guiadas por objetivos claramente fijados y de profunda relevancia. Teniendo siempre a la vista esos objetivos, Riemann es un maestro en analizar las posibles vías de tratamiento, modificarlas y reconcebirlas, proponer nuevos planteamientos, y elaborar sus implicaciones.

Como hemos intentado hacer palpable en esta introducción, matemática, física y filosofía fueron tres ámbitos que Riemann tuvo siempre presentes, y entre los que continuamente trazó puentes y conexiones. Empecemos por los dos temas en los que trabajó más profesionalmente, física y matemática; hacia 1855 no estaba claro si Riemann se decantaría por uno o por otro, y de hecho su primer artículo publicado era de física.[174] La reflexión conjunta sobre estos ámbitos, guiada por autores de la talla de Newton, Euler, Gauss y Weber, dio resultados espectaculares. Como hemos visto, hay múltiples indicaciones de que la teoría de funciones riemanniana surgió elaborando sobre estímulos y analogías físicas, tal como le aseguró el propio Riemann a su

[172] Weyl, *Philosophy of mathematics and natural science* (Princeton Univ. Press, 1949).
[173] Una pregunta obvia es ¿qué habría pasado si Riemann hubiera vivido 70 años, como Leibniz?
[174] 'Teoría de los anillos coloreados de Nobili', *Annalen der Physik und Chemie* **95** (1855). Véase Archibald, *op. cit.* [1991].

amigo italiano Betti.[175] Buena muestra de ello es la conexión que establece con la física matemática al otorgar un papel central a los métodos de teoría del potencial, pero también la idea de emplear "cortes transversales" como herramienta de análisis topológico se le ocurrió en el curso de una conversación con Gauss sobre física.

En otras obras, inversamente, Riemann dio cumplidas muestras de su capacidad para reformular las teorías físicas en términos matemáticos nuevos. En esto consiste lo esencial de sus esfuerzos en el campo de la filosofía natural –guiados también por motivos de carácter inevitablemente filosófico–. Ello sucede de nuevo en sus trabajos sobre geometría, donde el concepto de espacio físico se pone a la luz de una novedosa y muy amplia elaboración matemática. Además, no mucho tiempo después Riemann aplica las herramientas analíticas que había desarrollado para la geometría en el tratamiento de un problema físico sobre la teoría del calor. Vemos, pues, cómo Riemann recorre constantemente los caminos de ida y de vuelta entre matemática y física. Es un aspecto de su obra en el que se nos revela como un autor clásico, pre-contemporáneo (aunque no lo fuera en muchos otros sentidos).

Hay, eso sí, un principio fundamental que le guía en muchos de sus trabajos en ambos terrenos, el *leit-motif* de buscar las leyes básicas simples en lo infinitesimal, y deducir a partir de ahí el comportamiento global. No es casualidad que Weyl haya detectado muy bien este principio, porque también para él fue determinante. Ya vimos cómo Riemann avanzó en la dirección de una formulación de la física en términos de campos, sobre la base de principios de acción *local* contigua (aspecto en el que le superó su contemporáneo Maxwell). Su intenso trabajo en física matemática elaboraba, pues, sobre la idea de que las ecuaciones diferenciales no nos dan sólo una descripción útil, sino que apuntan a leyes de la naturaleza. En este sentido, hemos citado su afirmación de que las leyes naturales verdaderamente elementales "sólo pueden ocurrir en lo infinitamente pequeño, sólo para puntos del espacio y el tiempo". Esta idea guió toda su obra en física y física matemática, pero también su trabajo geométrico, donde se explora la rica fenomenología global que puede darse en espacios cuyo comportamiento a nivel local está determinado por leyes simples (las variedades riemannianas, que son localmente euclideas). El mismo principio encuentra expresión de nuevo en sus teorías acerca de las funciones de variable compleja: fue tratando de comprender qué hacía posible la prolongación analítica de las funciones (el paso de lo local a lo global), que Riemann se vio llevado a las ecuaciones que llevan su nombre y el de Cauchy. Tanto Klein como Weyl han señalado que, al convertir ese "principio de localidad" en una auténtica piedra angular, Riemann fue a la matemática lo que Faraday y Maxwell a la física del XIX.

Dentro de los límites estrictos de la matemática, en el sentido contemporáneo, Riemann es uno de los que más claramente han intuido –o apostado por– la unidad intrínseca de todas las ramas de su disciplina. Quizá fue el autor que más visionariamente adivinó este principio de unidad, en el que tanto insistirían posteriormente Klein y Hilbert, así como los Bourbaki. Hemos visto numerosos ejemplos de los puentes que Riemann establece en matemática, y bastará que recordemos un par de ejemplos. Su teoría de funciones apuesta por un punto de vista abstracto, en el que la variable compleja se liga íntimamente con la teoría del potencial, por un lado, y con la idea geométrica de las 'superficies de Riemann' y la topología, por otro. Recíprocamente, su aproximación al problema de las geometrías y el espacio se basa en una perspectiva analítica: la geometría diferencial, construida de nuevo sobre una base topológica. Y su genial trabajo en teoría de números, a la que contribuyó el gran problema abierto que es su Conjetura, descansa sobre fundamentos de teoría de funciones. Todo ello da idea de la manera en que los conceptos provenientes de distintas ramas de la matemática se entrelazan y fertilizan recíprocamente en su obra, siempre al servicio de nuevos puntos de vistas más abstractos y unificadores.

El "principio de localidad" mencionado arriba es un buen ejemplo de idea que no sólo admite una expresión física y matemática precisa, sino que se funda en argumentos filosóficos de plausibilidad: el propio Weyl lo llama un "motivo epistemológico". Y esto nos recuerda que

[175] Véase U. Bottazzini y R. Tazzioli, '*Naturphilosophie* and its role in Riemann's matehamtics', *Revue d'histoire des mathématiques* **1** (1995), p. 10.

ejemplos como los de la geometría riemanniana y sus especulaciones sobre filosofía natural ponen de manifiesto algo más que la interacción física/matemática. Ponen de relieve, también, el importante papel que las cuestiones filosóficas desempeñaron en toda la obra de Riemann. Su clara preferencia por un enfoque conceptual y abstracto de la matemática, que hace de él un autor tan contemporáneo, deriva con bastante claridad de sus concepciones epistemológicas. Por otro lado, no debemos olvidarnos de la indudable relevancia que tuvieron para él los motivos empíricos, la atención a los datos experimentales. Un buen ejemplo de la presencia de este último elemento se encuentra en el trabajo fallido de 1858 sobre electrodinámica, aquél en el que Riemann emplea un potencial retardado que establece una íntima relación entre luz y electromagnetismo (recordemos que le guiaban los delicados experimentos de Weber y Kohlrausch, que en parte había presenciado). En clave muy herbartiana, experiencia y reflexión mantienen una interacción constante en los trabajos de Riemann.

Ya que hemos mencionado la filosofía, hay que enfatizar que la preferencia de Riemann por las ideas de Herbart no es casual. Se trataba de una filosofía fácilmente compatible con sus ideas científicas, armonizable con los planteamientos de autores como Weber y Gauss. El ejemplo más claro de ello es la epistemología que Riemann defendió, mucho más actual que la de contemporáneos suyos tendentes al idealismo o al positivismo. Llama la atención cómo, en sus escritos filosóficos, Riemann no se detiene en ningún tipo de barrera disciplinar, entrando con rigor no sólo en el campo de la psicología (todavía entonces bajo la etiqueta de 'filosofía') sino incluso en el de la biología. Pero, sobre todo, sus trabajos filosóficos son una buena muestra de la capacidad de penetración de su pensamiento, de su rigor al perseguir las implicaciones de las ideas defendidas, tanto hacia arriba (sus consecuencias) como hacia abajo (sus presupuestos) y, diríamos, en todas direcciones.

Ahora bien, lo que quizá fue la mejor muestra de esa capacidad de *Durchdenken* es el notable tren de ideas que desplegó, a lo largo de varios años (aprox. 1849–54), en relación con las *superficies de Riemann* y las *variedades*. Buscando cómo aplicar su concepción de las funciones analíticas a las 'funciones' multivaluadas, Riemann se ve llevado a la "invención geométrica" de sus superficies, y al estudio topológico de las mismas. Pero nuestro autor no se contenta con desarrollar las implicaciones de esos principios para el análisis de variable compleja, sino que le preocupa vivamente el problema fundacional que sus superficies plantean. Es necesario elaborar un planteamiento que dé cabida a las consideraciones topológicas y a una geometría multidimensional: Riemann encuentra la solución en el concepto clave de *variedad n*-dimensional. Y este resultado se convierte, a su vez, en nuevo punto de partida para elaboraciones en todas las direcciones. Hacia abajo, las variedades ofrecen un modo muy interesante de reconcebir los fundamentos de la matemática, leyendo la vieja idea de magnitud en sentido conjuntista. Lateralmente, Riemann generaliza las consideraciones topológicas a variedades *n*-dimensionales. Pero, al poco tiempo, ve también la posibilidad de someter los principios de la geometría a un análisis mucho más profundo, desde este nuevo punto de vista (fertilizado con las ideas de Gauss), y así surge esa contribución clave que fue su lección inagural de 1854. Finalmente, el desarrollo geométrico se presta a nuevas especulaciones físicas, que dan origen a los sorprendentes párrafos finales de la lección, que Einstein calificó de verdadera "adivinación".

Una obra tan polifacética, de tantas dimensiones como la de Riemann, no hubiera sido posible sin el peculiar ambiente intelectual de su época, que estimulaba la interacción y la circulación de ideas entre distintas disciplinas. Como estudiante, Riemann asistió a clases de filosofía, teología, matemática, física, fisiología, y se sintió libre de cultivar estas diversas disciplinas de una manera seria. Me gustaría acabar expresando el deseo de que logremos recuperar ambientes de libertad e interrelación rigurosa como los de aquel tiempo, evitando miopes consideraciones de fronteras disciplinares (donde hay que incluir también la manida distinción entre ciencias y humanidades). Y, finalmente, quisiera repetir con Weyl: ¡ojalá los escritos de Riemann sigan contribuyendo, como ya lo han hecho en gran medida desde su aparición, a impulsar la vida de las ideas!

8. Vida y circunstancias.

1826 El 17 de septiembre nace Georg Friedrich Bernhard en Breselenz, un pueblo cercano al Elba, en el Reino de Hannover. Es el segundo de los seis hijos de un pastor luterano.
Crelle funda el *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Por esta época, la ciencia y las universidades alemanas están en pleno proceso de revitalización. Dirichlet, futuro maestro de Riemann, se encuentra a punto de volver de París, donde ha estudiado matemáticas y física.

1839 Bernhard recibe su educación elemental en casa, guiado sólo por su padre, lo que seguramente estimula su carácter muy tímido y reservado; teniendo 10 años pasa a colaborar con aquél un maestro.

1840 Riemann asiste al *Gymnasium* o instituto en Hannover, y más tarde (desde 1842) en Lüneburg. Aquí, el director del instituto reconoce su talento matemático y le presta obras de Euclides, Arquímedes, Descartes, Newton y Legendre, entre otros, que el joven asimila con rapidez.
La enseñanza secundaria ha sido objeto de una profunda renovación en los estados alemanes, en un proceso que asegura una educación matemática sólida a los alumnos, a la vez que garantiza plazas remuneradas para los estudiantes universitarios de esta disciplina.

1846 Riemann se matricula en la Universidad de Gotinga el 25 de abril, como estudiante de filología y teología. Pero su interés por las matemáticas no cesa, y al año siguiente obtiene el permiso paterno para dedicarse íntegramente a esta disciplina.
La enseñanza matemática en Gotinga no ha sufrido todavía la revolución característica del XIX alemán. La universidad cuenta con el famosísimo Gauss, pero los profesores de matemáticas son otros, y el gran 'príncipe de las matemáticas' enseña solo materias aplicadas como el método de mínimos cuadrados y geodesia.

1847 Riemann se desplaza a la Universidad de Berlín, asistiendo a lecciones de Dirichlet sobre análisis y teoría de números, de Jacobi sobre mecánica y álgebra. Establece un contacto estrecho con el joven *Privatdozent* Eisenstein, con quien estudia funciones elípticas.
La universidad de Berlín es por entonces un modelo de organización, especialmente en matemáticas. Esto se refleja en el renombre de los profesores que allí enseñan y el alto nivel de sus clases y seminarios, verdaderas introducciones a la investigación.
Bernhard permanece en Berlín hasta 1849, viviendo allí los turbulentos sucesos de la Revolución de Marzo. Como miembro del cuerpo estudiantil, colabora en la guardia del Palacio real, con la misión de proteger al Rey de Prusia.

1850 Tras asistir a algunas clases de ciencias y de filosofía, en particular las de Weber sobre física experimental, Riemann entra en el recién creado Seminario Físico-Matemático de la universidad. Establece un estrecho contacto con el gran físico, de quién será ayudante entre 1853 y 1854. En toda esta época dedica gran parte de sus esfuerzos a la física, y lee con interés las obras filosóficas de Herbart (quien había sido profesor en Gotinga hasta 1841).
Los seminarios son instituciones típicas de las reformas universitarias alemanas, encaminadas a poner a los alumnos en contacto con la investigación. Esta costumbre comienza a principios de siglo en el campo de las humanidades, siendo luego imitada por los científicos.

1851 En diciembre entrega y defiende su tesis doctoral, sobre los fundamentos de la teoría de funciones de variable compleja, bajo la supervisión (quizá un tanto nominal) de Gauss. En su informe, éste señala que el trabajo va mucho más allá de los requisitos de una tesis, mostrando una "mente creativa, activa y decididamente matemática, acompañada de una fértil y maravillosa originalidad" [ ].

1854 El 10 de junio recibe su "habilitación" como *Privatdozent* (profesor a título privado) en Gotinga, con dos famosos trabajos: una tesis sobre funciones trigonométricas y una lección sobre geometría. La fecha del acto se ha retrasado, en parte porque Riemann no conseguía alejarse de la investigación sobre las leyes físicas, que le absorbía, para preparar su lección; entretanto. Puede ahora comenzar a dar clases, aunque en míseras condiciones económicas.

1855 Muere Gauss el 23 de febrero, y la universidad, que pretende seguir contando con el primer matemático vivo, contrata a Dirichlet (para ello, se crea una nueva cátedra de matemáticas, ya que Gauss era oficialmente astrónomo). Muere el padre de Riemann y una hermana; entra en contacto con Dedekind, que se convertirá en amigo íntimo y editor de sus obras.

1856 Riemann es nombrado asesor de la sección de matemáticas en la Sociedad de Ciencias de Gotinga.

1857 Se publica en el *Journal* de Crelle la 'Teoría de las funciones abelianas', trabajo que lanza a la fama a Bernhard. En noviembre es nombrado profesor extraordinario, lo que por fin, tras largo tiempo, asegura su posición financiera.

1858 Año que comienza con penalidades para Riemann: muere su hermano y una hermana menor, de modo que Riemann se hace cargo del resto de su familia (dos hermanas); todo esto le causa una intensa depresión. En otoño, los matemáticos italianos Brioschi, Betti y Casorati visitan Gotinga, conociendo a Riemann; el contacto establecido entonces se reanudará en 1863.

1859 Dirichlet muere en mayo, y Bernhard se convierte directamente en su sucesor, lo que da una idea de su fama y rápido ascenso en la carrera académica.
Es nombrado miembro de la Academia de Gotinga y corresponsal de la de Berlín. Con ese motivo viaja a esta ciudad, en compañía de Dedekind, visitando a Weierstrass, Kummer y Kronecker, y publica su famoso artículo sobre la frecuencia de números primos (con la conjetura de Riemann).

1860 Visita la ciudad de París en abril, conociendo a Serret, Bertrand, Hermite, Puiseux y Briot.

1862 En junio se casa con Elise, amiga de una de sus hermanas. Al mes siguiente sufre una pleurisia, que degenera en tuberculosis; la causa última han sido, probablemente, las difíciles condiciones de vida sufridas en la infancia y los tiempos de estudiante y *Privatdozent*.
Viaja a Italia con el fin de recuperarse de sus dolencias, siguiendo el consabido consejo médico y la práctica de la burguesía culta alemana. Se establece en Sicilia, y a la vuelta se demora en ciudades como Nápoles, Roma y Florencia.

1863 Aunque vuelve tras la primavera a Gotinga, enseguida se manifiesta de nuevo la enfermedad y retorna a Italia, donde permanecerá buena parte de los días que le restan. Se establece en Pisa, donde nace una hija y muere otra de sus hermanas. Establece una intensa amistad con Betti, y contacto estrecho con Beltrami, Brioschi y Casorati, recibiendo una oferta de cátedra en Pisa, que se siente obligado a rechazar.
Pese a todo, estas estancias le resultan magníficas, no solo por el clima, la naturaleza y el arte, sino también por una sensación de libertad que experimenta, fuera de la atmósfera algo cerrada de Gotinga.

1865 Vuelve por fin a Alemania en octubre, pese a que su salud sigue sin ser buena; con todo, consigue trabajar algunas horas diarias durante los meses de invierno. En junio de 1866 decide hacer su tercer viaje a Italia, esperando de nuevo una mejoría. Muere junto al Lago Maggiore, al norte de Italia, el 20 de julio del 66. Poco antes ha sido nombrado miembro extranjero de la Academia de París y la Royal Society de Londres.
Es la época dorada de la escuela de Berlín, guiada ante todo por Weierstrass; también el tiempo en que se fundan numerosos institutos de investigación científica en las universidades alemanas, y, en otro orden de cosas, el tiempo de la unificación alemana. La publicación de las cartas y escritos de Gauss estimula un debate abierto sobre las geometrías no euclideas, como la de varios inéditos de Riemann estimula un primer debate sobre la matemática abstracta.

Agradecimientos

En la preparación de esta obra han colaborado especialmente las siguientes personas: Antonio Durán, por su amabilidad al facilitarme el acceso a bibliografía importante; José F. Ruiz y Javier Ordóñez, por el material que pusieron a mi disposición; Guillermo Curbera, revisando la traducción de algunos textos; Renato Alvarez, que me ayudó con algunas ilustraciones; y como siempre Ralf Haubrich, cuya ayuda me permitió acceder desde Sevilla al rico mundo bibliográfico y científico de Gotinga.

Quiero también dar las gracias a José Manuel Sánchez Ron por haberme animado a emprender el trabajo y haber respaldado su publicación. Y a Dolores, por razones que ella conoce mejor que nadie.

Finalmente, me gustaría dedicarlo a la pequeña Inés, y a otros matemáticos del futuro.

Sevilla, Julio de 1999 José Ferreirós

Nota editorial y Bibliografía comentada

Los escritos aquí traducidos, con una única excepción, se han tomado de la última edición alemana de las obras de Riemann:

Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass, ed. H. Weber y R. Dedekind, revisada y ampliada por R. Narasimhan, New York, Springer, 1991.

Esta obra incluye la edición de 1892 de las obras de Riemann, junto con las adiciones tomadas de diversos manuscritos que se publicaron en 1902: *Nachträge*, editadas por M. Noether y W. Wirtinger.[176] Existe una edición francesa de las obras, en traducción de L. Laugel: *Oeuvres mathématiques* (París, 1898).

La excepción es el texto 'Sobre variedades y geometría (1852/53)', traducción de dos fragmentos extraídos de un artículo de Erhard Scholz, hasta entonces inéditos.[177] Conviene señalar, por otro lado, que me he tomado la libertad de reordenar los fragmentos filosóficos de Riemann, y en un caso he alterado también el título que daban los editores alemanes (no proveniente del autor).

Los números de página que aparecen en las referencias que doy en el texto corresponden a la edición de *Werke* de 1892, y por tanto son los de las ediciones más accesibles. Pero la mencionada edición de Narasimhan (1991) es especialmente recomendable ya que incluye varios textos, de procedencia diversa, que ofrecen complementos importantes para una apreciación de la obra y la biografía de Riemann. Además, contiene exhaustivas bibliografías de W. Purkert y E. Neuenschwander.

Existe una traducción anterior al castellano de la lección inagural de Riemann sobre geometría, realizada por Vidal Abascal, aunque no he podido tenerla a la vista. Otras ediciones: italiana, …

Con respecto a la biografía de Riemann, las principales referencias son los trabajos de R. Dedekind y E. Schering, contenidos en las *Werke* antes citadas, y especialmente el reciente libro:

D. Laugwitz, *Bernhard Riemann, 1826–1866. Wendepunkte in der Auffassung der Mathematik*, Basel, Birkhäuser, 1998 [edn. inglesa en preparación].

Además de ellos, es recomendable la entrada 'Riemann' en el *Dictionary of scientific biography* (8 vols., New York, Scribner's, 1981), que fue redactada por H. Freudenthal.

La bibliografía disponible en castellano sobre temas relacionados con el desarrollo de la matemática contemporánea es muy escasa. Aparte de obras con carácter general –entre las cuales se recomienda el conocido trabajo de Morris Kline y las obras de Hans Wussing–, se tratan aspectos de la obra de Riemann en:

J. Ferreirós, *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854–1908*, Madrid, Ediciones de la Universidad Autónoma, 1993, cap. 3 y 10.

I. Grattan-Guinness, *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630–1910*, Madrid, Alianza, 1984, cap. 3 y 4.

J. Gray, *Ideas de espacio*, Madrid, Mondadori, 1992, cap. 12. [Esta obra contiene también una introducción a las teorías de la relatividad.]

Sobre historia de la física en el siglo XIX, es recomendable:

---

[176] La edición original de las obras apareció en 1876 (Leipzig, Teubner), pero la de 1892 introduce algún cambio y nueva paginación. Las adiciones en *Nachträge* (Leipzig, Teubner, 1902) son especialmente relevantes en lo relativo a las lecciones que Riemann impartió en Gotinga. Ambos textos se encuentran reunidos también en la anterior de Dover (New York, 1953).

[177] 'Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie', *Archive for History of Exact Sciences* **27** (1982), 213–32.

P. M. Harman, *Energía, fuerza y materia. La estructura conceptual de la física en el siglo XIX*, Madrid, Alianza.

Resulta muy relevante también la edición de obras de Maxwell en esta misma colección:

J. C. Maxwell, *Escritos científicos*, ed. J. M. Sánchez Ron, Madrid, CSIC, 1998.

En lo tocante a estudios que analizan en detalle las contribuciones matemáticas de Riemann, cabe destacar los siguientes:

Umberto Bottazzini, *The Higher Calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, New York, Springer, 1986.

Erhard Scholz, *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriff von Riemann bis Poincaré*, Basel, Birkhäuser, 1980.

Roberto Torretti, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, Reidel, 1984.

Además de estas obras, el lector consultará con provecho los trabajos que han ido citándose en notas a lo largo de este estudio-introducción.

Finalmente, daremos algunas referencias respecto a los que Riemann consideró como sus maestros más inmediatos. En general, para la mayoría de los autores que se han ido citando, son recomendables los artículos del *Dictionary of Scientific Biography* editado por Gillispie (New York, Scribner, 1980). A nivel más específico, pueden consultarse

G. W. Dunnington, *Carl Friedrich Gauss. Titan of science*, New York, 1955.

K. H. Wiederkehr, *Wilhelm Weber. Erforscher der Wellenbewegung und der Elektrizität*, Stuttgart, 1967.

En cuanto a Herbart, uno de sus libros fue traducido al castellano con introducción (no especialmente interesante para temas relacionados con Riemann) de J. Ortega y Gasset:

J. F. Herbart, *La pedagogía general derivada del fin de la educación*, Madrid, La Lectura, 1914; Barcelona, Humanitas, 1983.