UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

RAFAEL DOS REIS FERREIRA

SOBRE O SIGNIFICADO DA FUNÇÃO PROPOSICIONAL NO *TRACTATUS* DE WITTGENSTEIN

CAMPINAS
2016

RAFAEL DOS REIS FERREIRA

SOBRE O SIGNIFICADO DA FUNÇÃO PROPOSICIONAL NO TRACTATUS DE WITTGENSTEIN

Tese apresentada ao Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Doutor em Filosofia.

Supervisor/Orientador: Prof. Dr. Arley Ramos Moreno

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO RAFAEL DOS REIS FERREIRA, E ORIENTADO PELO PROF. DR. ARLEY RAMOS MORENO.

CAMPINAS

2016

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CNPq, 140504/2011-7

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas
Cecília Maria Jorge Nicolau - CRB 8/3387

F413s
Ferreira, Rafael dos Reis, 1981-
Sobre o significado da função proposicional no Tractatus de Wittgenstein / Rafael dos Reis Ferreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.

Orientador: Arley Ramos Moreno.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Filosofia e Ciências Humanas.

1. Wittgenstein, Ludwig, 1889-1951 - Tractatus logico-philosophicus. 2. Proposição (Lógica). 3. Lógica simbólica e matemática. 4. Filosofia austríaca. I. Moreno, Arley Ramos,1943-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: On the meaning of propositional function in Wittgenstein's Tractatus
Palavras-chave em inglês:
Proposition (Logic)
Logic, symbolic and mathematical
Austrian philosophy
Área de concentração: Filosofia
Titulação: Doutor em Filosofia
Banca examinadora:
Ítala Maria Loffredo D'Otaviano
Antonio Ianni Segatto
José Fernando da Silva
Eduardo Gomes Siqueira
Arley Ramos Moreno
Data de defesa: 31-03-2016
Programa de Pós-Graduação: Filosofia

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Filosofia e Ciências Humanas

A Comissão Julgadora dos trabalhos de Defesa de Tese de Doutorado, composta pelos Professores Doutores a seguir descritos, em sessão pública realizada em 31 de Março, considerou o candidato Rafael dos Reis Ferreira aprovado.

Prof. Dr. Arley Ramos Moreno

Profa. Dra. Ítala Maria Loffredo D'Ottaviano

Prof. Dr. Antonio Ianni Segatto

Prof. Dr. José Fernando da Silva

Prof. Dr. Eduardo Gomes de Siqueira

A Ata de Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no processo de vida acadêmica do aluno.

Dedicatória

Dedico esta Tese à minha amada esposa Natálie que respirou, junto comigo, cada linha e vírgula deste trabalho: sem suas bases afetivas eu não teria conseguido. À minha querida mãe, Edith, que acreditou em minha pessoa nos momentos mais difíceis e não hesitou em se sacrificar para me ajudar nos meus estudos. Ao meu saudoso e querido pai, Antônio, lembranças e saudades. À minha querida irmã Patrícia e sobrinhos queridos Luiz, Nuno e Guel. Dedico, por fim, esta Tese ao meu querido amigo, Ricardo Tassinari, que forneceu as bases para minha formação acadêmica.

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, prof. Arley, por ter me aceito como orientando nos caminhos do doutorado, sinônimo de humildade e sabedoria; fizemos, sem dúvida, uma excelente parceria na organização dos Colóquios Wittgenstein na Unicamp. Quero agradecer, também, à profa. Ítala por me receber na Unicamp como uma mãe e por ter me acompanhado durante toda minha caminhada, inclusive na Qualificação, ajudando-me na parte da Lógica, até a reta final. Na Qualificação, agradeço, também, ao prof. Antonio Segatto pelas sugestões pontuais na parte conceitual e interpretativa do *Tractatus*. Agradeço aos meus colegas do Grupo de Estudo Filicon, José Fernando, Cláudio Salvatore, Gilberto César, Cristiane Gottschalk, Rejane e Rodrigo; foi um momento de grande aprendizagem e troca de conhecimentos. Faço, também, um agradecimento aos meus colegas da Lógica por terem me ajudado, no início, quando cursei as disciplinas de Lógica: Angela, Ana, Kleidson, Edgar e Henrique. Agradeço, também, ao Anderson de Araújo, pelos ensinamentos e doses de incentivo. Faço questão de lembrar aqui do meu amigo marcante nesta jornada: Rony, amigo de moradia e de todas as horas. Agradeço à minha amiga Maria Érbia pela sua presteza no início, quando morei na Moradia da Unicamp, e aos meus amigos de moradia Hildo Sena e Hugo Abacher. Meus agradecimentos, também, à profa. Zelia Ramozzi-Chiarottino, por acreditar em minha capacidade durante esse processo. Não posso também deixar de agradecer dois professores que me incentivaram a estudar no Ensino Médio, sendo determinantes nas minhas escolhas: meu professor de Filosofia Valter Cícero da Silva e a profa. Inês Crema. Agradeço, por fim, ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) por me conceder uma bolsa de estudo e me propiciar condições para dedicação de modo integral aos estudos.

“[...] o que se pode em geral dizer, pode-se dizer claramente;
e sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.”.
(*Tractatus Logico-Philosophicus*. Prefácio)

“Uma obra filosófica consiste essencialmente de elucidações.
O resultado da filosofia não é ‘proposições filosóficas’,
mas é tornar proposições claras.”.
(*Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.112)

RESUMO

A análise da predicação lógica tem longa tradição filosófica em que um dos temas centrais de estudo é a análise da forma lógica da proposição. Podemos dizer que, contemporaneamente, a forma mais bem-acabada da predicação lógica é a função proposicional. Historicamente, a função proposicional surge como um esquema de análise lógica da proposição, resultante da convergência entre Matemática e Lógica entre os séculos XIX e XX. Dois dos principais responsáveis por essa convergência foram Gottlob Frege (1848-1925) e Bertrand Russell (1872-1970). Influenciado pelas ideias de Frege e herdeiro direto de Russell, tendo sido discípulo deste em Cambridge, Ludwig Wittgenstein (1889-1951) torna-se, em vista da originalidade de seu pensamento, um dos mais discutidos e comentados pensadores do século XX, principalmente com a publicação de sua obra intitulada "Tractatus Logico-Philosophicus" (1921). É nesta obra que Wittgenstein mais se considera devedor de Frege e Russell, tendo nela deixado menção explícita a eles. Então, a questão que norteou o desenvolvimento desta Tese é: qual é o significado da função proposicional de Frege e Russell no *Tractatus* (1921) de Wittgenstein? O nosso objetivo consiste, nesse sentido, em investigar o significado do conceito de função proposicional no *Tractatus* (1921). Nosso ponto de partida consiste em compreender o significado da função proposicional em Frege e Russell para compreender seu significado no *Tractatus* (1921). Centraremos nossa análise no que Wittgenstein chama por "variável proposicional" (*Satzvariable*), termo que mais se aproxima, a nosso ver, da função proposicional de Frege e Russell. Nesse sentido, nossa questão interpretativa foi assim formulada: qual é o significado do conceito de variável proposicional no *Tractatus* (1921)? Defendemos a tese de que o papel desempenhado pela função proposicional em Frege e Russell corresponde ao papel desempenhado pela variável proposicional em Wittgenstein.

Palavras Chave: Função Proposicional; Variável Proposicional; Forma Lógica da Proposição.

ABSTRACT

The analysis of logical predication has long philosophical tradition in which one of the central subjects of study is the analysis of the logical form of the proposition. We contemporaneously can say that the way more well-finished of logic predication is propositional function. Historically, the propositional function arises as a logical analysis of the proposition scheme resulting from the convergence of mathematics and logic between the XIX and XX centuries. Two of the main responsible for this convergence were Gottlob Frege (1848-1925) and Bertrand Russell (1872-1970). Influenced by Frege's ideas and direct heir of Russell, having been a disciple of this in Cambridge, Ludwig Wittgenstein (1889-1951) has become, in view of the originality of his thought, one of the most discussed and commented thinkers of the twentieth century, especially with the publication of his work entitled “Tractatus Logico-Philosophicus” (1921). It´s in this work that Wittgenstein more considers himself debtor from Frege and Russell, having left explicit mention to them. Then the question that guides the development of this thesis is: what is the meaning of the propositional function of Frege and Russell in the Wittgenstein's *Tractatus* (1921)? Our goal is, in this sense, to investigate the meaning of the concept of propositional function in the *Tractatus* (1921). Our starting point is to understand the meaning of the propositional function in Frege and Russell to understand its meaning in the *Tractatus* (1921). We will focus our analysis on what Wittgenstein calls “propositional variable” (*Satzvariable*), term that best approximates, in our view, of the propositional function of Frege and Russell. In this sense, our interpretative question was formulated as: what is the meaning of the concept of propositional variable in the *Tractatus* (1921)? We defend the thesis that the role of the propositional function in Frege and Russell corresponds to the role of the propositional variable in Wittgenstein.

Keywords: Propositional Function; Propositional Variable; Logic Form of the Proposition.

SUMÁRIO

Introdução

A análise da predicação lógica tem longa tradição filosófica em que um dos temas centrais de estudo é a análise da forma lógica da proposição. Podemos dizer que, contemporaneamente, a forma mais bem-acabada da predicação lógica é o esquema de análise expresso pelo conceito de função proposicional.

Historicamente, a função proposicional surge como um esquema de análise lógica da proposição, resultante da convergência entre Matemática e Lógica entre os séculos XIX e XX. Dois dos principais responsáveis por essa convergência foram Gottlob Frege (1848 – 1925) e Bertrand Russell (1872 – 1970).

Influenciado por Frege e herdeiro direto de Russell, tendo sido seu discípulo em Cambridge, Ludwig Wittgenstein (1889 – 1951) torna-se, em vista da originalidade de seu pensamento, um dos mais discutidos e comentados pensadores do século XX, principalmente com a publicação sua obra intitulada "Tractatus Logico-Philosophicus" (1921). É nesta obra que Wittgenstein mais se considera devedor de Frege e Russell, tendo deixado nela menção explícita a eles.

Tendo em vista a relevância que o conceito de função proposicional ocupa no estudo da predicação lógica e, também, a sua relevância no interior das obras Frege e Russell – relevância que apresentamos no Capítulo I e Capítulo II de nosso trabalho –, e tendo em vista os propósitos do *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) de Wittgenstein e sua originalidade para os debates em Lógica Contemporânea, uma pergunta que se coloca, e que será objeto central de estudo nesta Tese, é a pergunta pelo significado da função proposicional de Frege e Russell no *Tractatus* (1921) de Wittgenstein; questão analisada e investigada no Capítulo III de nosso trabalho.

Para a investigação dessa questão, centramos nossa análise no que Wittgenstein chama no *Tractatus* (1921) de "variável proposicional" (*Satzvariable*), conceito que mais se aproxima, a nosso ver, da função proposicional de Frege e Russell. Nesse sentido, nossa questão interpretativa consiste na pergunta pelo significado do conceito de variável proposicional no *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) de Wittgenstein.

Mas, antes que possamos apresentar nosso estudo propriamente dito, entendemos que se torna necessário expor, de modo introdutório, alguns dos principais traços histórico-conceituais constituintes da formação do conceito de função proposicional.

Predicação lógica e função proposicional

Podemos dizer, inicialmente, que predicados são classificados como termos gerais que geralmente se referem a uma gama de objetos e não exclusivamente a um objeto determinado.[1] O predicado, assim compreendido, é contemporaneamente expresso pelo simbolismo da função proposicional.

O termo “função proposicional” aparece pela primeira vez nas obras de Bertrand Russell (1872 – 1970). No conjunto das obras de Russell, encontramos tal termo como aparecendo pela primeira vez em sua obra intitulada “Os Princípios da Matemática” (*The Principles of Mathematics*), publicada em 1903. É na seção desta obra, intitulada “Lógica Simbólica”, que Russell introduz, pela primeira, o termo “função proposicional”.

Nesta seção, explica Russell (cf.1903, p. 11-12) que a Lógica Simbólica divide-se em três partes: o Cálculo das Proposições, o Cálculo das Classes e o Cálculo das Relações. O Cálculo das Proposições, em especial, envolve, como o próprio nome expressa, a noção básica de proposição. Sobre o conceito de proposição diz ele: “Uma proposição, podemos dizer, é tudo o que é verdadeiro ou o que é falso.”. (RUSSELL, 1903, § 13, p. 12-13, tradução nossa).[2] Por exemplo, a sentença “Sócrates é homem” é uma proposição, pois podemos dizer se ela é verdadeira ou falsa.

Mas, expressões como, por exemplo, “*x* é um homem”, não são proposições, pois não podemos dizer se é verdadeira ou falsa. Podemos dizer apenas que ela se tornará uma proposição quando for dado a *x* um valor determinado, pois com a determinação de *x*, podemos afirmar quem ou o que é um homem e, por conseguinte, julgar se nossa afirmação é verdadeira ou falsa.

Embora a expressão “*x* é um homem” não seja uma proposição, ela tem uma importância fundamental para a Lógica, pois, como diz Russell, essa expressão é uma “forma esquemática permanente” para qualquer classe de proposição. Sobre isso, escreve: “Se nós dermos a *x* algum valor constante, qualquer que seja ele, a expressão torna-se uma

---

[1] Cf. McGinn, 2000, p. 52.
[2] “A proposition, we may say, is anything that is true or that is false.”.

proposição: é assim como se fosse uma forma esquemática permanente para qualquer uma das classes inteiras de proposições.". (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, tradução nossa)[3]

A função proposicional é uma forma esquemática, pois conforme é dado à variável *x*, que nela ocorre, um valor determinado, podemos gerar, em correspondência, determinadas proposições que pertencem a um tipo ou a uma classe de proposições conforme o tipo de forma esquemática da função proposicional dada. E ela é permanente, pois sua forma esquemática se mantém invariável diante da possibilidade de substituições, representada pela variável, e diante da possibilidade de determinações de proposições correspondentes à substituição na variável.

No entanto, nem sempre a ocorrência do termo *x* indica uma forma esquemática como indicada acima. Há casos em que a ocorrência do termo *x* na expressão determina uma proposição. Por exemplo, seja "*x* é um homem implica *x* é mortal para todo valor de *x*"; esta sentença é verdadeira, pois seria uma sentença falsa se disséssemos que "*x* é um homem implica *x* é mortal para algum valor de *x*". Desse modo, podemos dizer que tal sentença é uma proposição e que a letra "*x*" que ocorre nesta proposição não tem o mesmo significado que a letra "*x*" que ocorre, por exemplo, na expressão "*x* é um homem".

A letra "*x*" que ocorre na proposição "*x* é um homem implica *x* é mortal para todo valor de *x*" não expressa uma variável no sentido próprio do termo, mas se constitui apenas como uma variável aparente na proposição, pois tal sentença já é uma proposição, uma proposição verdadeira, não dependendo do valor de *x* para se tornar uma proposição. Já a letra "*x*" que ocorre na expressão "*x* é um homem" é uma variável real, pois há diferentes proposições para diferentes valores da variável, isto é, as diferentes proposições geradas dependem dos valores atribuídos a *x* na expressão considerada.

É nesse contexto de distinção entre variável aparente e variável real, para definir o que é ou não uma proposição, que Russell introduz, pela primeira vez, o termo "função proposicional" (*propositional function*). Diz ele:

> Vou falar de proposições exclusivamente onde não existem variáveis reais: onde existem uma ou mais variáveis reais, e para todos os valores das variáveis a expressão envolvida é uma proposição, vou chamar a expressão

[3] "An expression such as '*x* is a man' is therefore not a proposition, for it is neither true nor false. If we give to *x* any constant value whatever, the expression becomes a proposition: it is thus as it were a schematic form standing for any one of a whole class of propositions.".

> uma *função proposicional*. (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, grifo do autor, tradução nossa)[4]

Para termos uma noção mais clara do que seja função proposicional, encontramos no livro introdutório e de divulgação de Russell, intitulado "Introdução à Filosofia da Matemática" (1919) (*Introduction to Mathematical Philosophy*) o seguinte: "Uma 'função proposicional' é, na verdade, uma expressão contendo um ou mais componentes indeterminados, tais que, quando são atribuídos constituintes, a expressão se torna uma proposição. Em outras palavras, ela é uma função cujos valores são proposições.". (RUSSELL, 1963, p.155-156, tradução nossa)[5]

Já em uma das obras centrais de Russell, a obra intitulada "Princípios da Matemática" (1910) (*Principia Mathematica*)[6], que escreveu em colaboração com Alfred North Whitehead (1861-1947), o conceito de função proposicional aparece, em termos formais, logo no início da obra, como um dos conceitos elementares da obra:

> Seja ϕx uma sentença contendo uma variável x tal que ela se torna uma proposição quando a x é dado algum significado determinado fixo. Então, ϕx é chamada de "função proposicional"; ela não é uma proposição, já que, devido à ambiguidade de x, não faz realmente uma afirmação como um todo. (RUSSELL; WHITEHEAD, 1968, p. 14, tradução nossa)[7]

Notemos, ademais, que uma função proposicional pode ter mais de uma variável para indivíduo. Seja, por exemplo, a proposição "Sócrates era menor que Platão"; ser menor no sentido de ter uma estatura menor. Como visto, podemos decompor esta proposição pelo seguinte esquema: "x era menor que Platão", tal que podemos substituir x por qualquer indivíduo. Conforme a substituição em x, se o indivíduo que o substitui é menor que Platão, então a proposição é verdadeira, caso contrário é falsa.

---

[4] "I shall speak of propositions exclusively where there is no real variable: where there are one or more real variables, and for all values of the variables the expression involved is a proposition, I shall call the expression a *propositional function*.".

[5] "A 'propositional function', in fact, is an expression containing one or more undetermined constituents, such that, when values are assigned to these constituents, the expression become a proposition. In other words, it is a function whose values are proposition.".

[6] Não é muito usual a tradução do título desta obra em português, sendo mais usual citá-la no original. Designaremos, então, esta obra de Russel por "Principia Mathematica" ou simplesmente "Principia".

[7] "Let ϕx be a statement containing a variable x and such that it becomes a proposition when x is given any fixed determined meaning. Then ϕx is called a 'propositional function'; it is not a proposition, since owing to the ambiguity of x it really makes no assertion at all.".

Mas, além disso, podemos visualizar esta proposição não como constituída por um indivíduo e um predicado atribuído a ele, mas podemos olhar para a relação em si, isto é, para a relação "ser menor que". Neste caso, podemos expressar o primeiro elemento da relação por "x" e o segundo elemento da relação por "y", tal que podemos ter a seguinte expressão: "x é menor que y". Ademais, se expressarmos a relação "ser menor que" por M, então, temos a seguinte expressão: xMy ou $M(xy)$. Desse modo, conforme a substituição em x ou y, temos como resultado uma proposição que é ou verdadeira ou falsa, sendo que a especificação do valor de verdade depende dos indivíduos que se colocam na relação "é menor que".

Assim, podemos observar que a função proposicional permite expressar não apenas a forma de uma relação entre sujeito e predicado, mas, também, a forma das relações entre indivíduos em uma proposição. Isso significa que a função proposicional é condição para expressar uma lógica das classes, em que se procura determinar se um sujeito tem ou não um determinado predicado, ou uma lógica das relações, em que se procura determinar relações quaisquer entre dois ou mais sujeitos em uma proposição.

Esse poder de análise expresso pela forma esquemática da função proposicional para a análise das proposições no nível da Lógica das Classes e da Lógica das Relações, torna-se mais nítido se comparado com o tipo de análise da proposição realizada até então, antes do surgimento da função proposicional, pela tradicional Lógica Aristotélica.

Na Lógica Aristotélica a análise mais simples e redutível da proposição é expressa, tradicionalmente, por "*S* é *P*". Isso quer dizer que a estrutura básica da proposição é constituída por três noções elementares: os termos sujeito e predicado, e o verbo ser. Sobre isso, diz Aristóteles no início de sua obra intitulada "Primeiros Analíticos": "Chamo de *termo* (*ὅρος*) aquilo em que a premissa se resolve, a saber, tanto o predicado (*κατηγορούμενο*) quanto o sujeito, quer com a adição do verbo *ser,* quer com a remoção de *não ser.*". (ARISTÓTELES, 24b 15, p. 112, grifo nosso). Notemos que o verbo "ser" une os referidos termos envolvidos na relação ou os separa, no caso do "não ser", constituindo-se, nesse sentido, como um "operador copulativo", fundamental para a realização da predicação.

Diz Lucas Angioni em *Teoria da Predição em Aristóteles* que em Aristóteles "Por predicação, entende-se o enunciado que (i) possui a forma '*S* é *P*' ou alguma forma equivalente e redutível àquela, (ii) pretende reportar-se a fatos dados do mundo e, assim apresenta-se como pretensão de constatação ou registro.". (ANGIONI, 2006, p. 17)

Um enunciado com pretensão de constatação é, por exemplo, o enunciado declarativo "Sócrates é filósofo"; e um enunciado que não há pretensão de constatação é, por exemplo, "Que chova hoje" ou "Feche a porta", pois este primeiro exprime um desejo e o segundo uma ordem. Diz Angioni, nesse sentido, que "[…] um enunciado declarativo pretende *declarar* ou *mostrar* um estado de coisas, ou seja, um enunciado que se define essencialmente pelo propósito de constatar uma situação dada no mundo.". (ANGIONI, 2006, p. 20, grifo do autor). Desse modo, "[…] se a situação proposta no enunciado realmente se apresenta no mundo, o enunciado é verdadeiro. Se a situação proposta no enunciado não se apresenta no mundo, o enunciado é falso.". (ANGIONI, 2006, p. 20, grifo do autor)

O uso de letras do alfabeto é imprescindível para a expressão da forma "*S* é *P*". No *Órganon*, Aristóteles utiliza-se de letras nos *Primeiros Analíticos* e *Segundos Analíticos* para a análise dos termos nas proposições categóricas. Escreve Aristóteles, por exemplo, nos *Primeiros Analíticos*: "[…] se A é predicado de todo B e B de todo C, A terá necessariamente que ser predicado de todo C.". (ARISTÓTELES, 26a1, p. 116).

Tais letras parecem expressar o conceito de variável. Diz Józef Maria Bocheński em *Lógica Formal Antiga* que "Há uma dificuldade em compreender o que as variáveis representam; mas se considerarmos o texto correspondente de Aristóteles (11.33) [*Primeiros Analíticos*] e a tradição inalterável posterior, parece que elas devem ser interpretadas como variáveis-predicado, não como variáveis proposicionais.". (BOCHENSKI, 1951, p. 75, tradução nossa)[8]

Quanto à importância da utilização da variável por Aristóteles, diz Bocheński: "Ele [Aristóteles] descobriu a variável: mas muitos dos seus textos mostram como a passagem de uma letra como abreviação de um nome converte-se lentamente em uma variável; mesmo assim, parece como se nunca se percebeu a elevação que foi lidar com variáveis.". (BOCHENSKI, 1951, p. 44, tradução nossa)[9]

Essa noção de variável é também importante para a expressão da Teoria do Silogismo de Aristóteles: "A maior parte disto [dos tipos de sentenças categóricas] é indicada com o uso de variáveis; na verdade Aristóteles desenvolve aqui, pela primeira vez na história, um

[8] "There is a difficulty in understanding what the variables stand for; but if we consider the corresponding text of Aristotle (11. 33) and the constant later tradition, it seems that they must be interpreted as predicate-variables, not as propositional variables.".

[9] "He discovered the variable: but his very text shows how the passage from a letter as shorthand for a name slowly changed into a variable; even so, it looks as if he never a tall realized himself that he was dealing with variables.".

sistema de leis da lógica formal.". (BOCHENSKI, 1951, p. 43, tradução nossa).[10] Em outra passagem ainda escreve o autor: "O silogismo assertivo é provavelmente a descoberta mais importante em toda a história da lógica formal, pois não é apenas a primeira teoria formal com variáveis, mas é também o primeiro sistema axiomático já construído.". (BOCHENSKI, 1951, p. 46 tradução nossa)[11]

Mas, George Boger em *A Lógica Subjacente de Aristóteles* diz que não podemos falar em variáveis genuínas na Lógica de Aristóteles. "Não há variáveis genuínas, ligada ou livre, variando sobre indivíduos em um dado domínio na linguagem formal de Aristóteles.". (BOGER, 2004, p. 142, tradução nossa).[12] Segundo Boger, as variáveis genuínas pressupõem um domínio mais amplo de indivíduos sobre os quais a linguagem formal é aplicada. Esses indivíduos são quantificados por símbolos na linguagem[13] cujos sinais de variáveis, representando esses indivíduos (que são as constantes) na linguagem, estão ou não relacionados a essa quantificação.

Nesse sentido, Boger diz que as letras utilizadas por Aristóteles não são variáveis genuínas, mas letras esquemáticas, pois elas funcionam como suporte metalinguístico determinado para um lugar permanente, seja para sujeito seja para predicado, não havendo um domínio quantificável sobre o qual possa variar. "De fato, não há necessidade de variáveis, uma vez que o sistema carece de teoria da quantificação e funciona com padrões apropriados para um termo lógico.". (BOGER, 2004, p. 142, tradução nossa)[14]

Mesmo supondo que Aristóteles não tivesse plena consciência do conceito contemporâneo de variável, a noção de que o sinal "S" representa sujeitos e o sinal "P" representa predicados expressa, de certo modo, uma noção de variável, elementar mas não genuína. Os sinais "*S*" e "*P*" parecem indicar uma variação, mesmo funcionando, como argumento Boger, como padrões apropriados para um termo lógico em um domínio restrito de variação.

---

[10] "Most of this is stated with the use of variables; in fact Aristotle develops here for the first time in history a system of formal logic laws.".

[11] "The assertoric syllogism is probably the most important discovery in all the history of formal logic, for it is not only the first formal theory with variables, but it is also the first axiomatic system ever constructed.".

[12] "There are no genuine variables, whether bound or free, ranging over individuals in a given domain in Aristotle's formal language.".

[13] Cf. o conceito de quantificação lógica que veremos nas Seções 2.5 e 2.6 deste trabalho.

[14] "Indeed, there is no need for variables, since the system lacks quantification theory and works with patterns appropriate to a term logic.".

Voltando ao esquema de análise da função proposicional, quando se analisa a relação sintática das operações entre os símbolos envolvidos na análise da forma predicativa *S* é *P* e nos símbolos envolvidos na análise realizada pelas funções proposicionais ϕx ou $\psi(x,y)$, podemos dizer que: (i) a expressão "*S* é *P*" é uma relação assimétrica entre "*S*" e "*P*", pois a relação "*S* é *P*" não implica "*P* é *S*"; (ii) a expressão ϕx é uma relação simétrica entre "ϕ" e "x", pois a relação "ϕx" implica "$x\phi$"; e a expressão $\psi(x,y)$ é uma relação simétrica entre "ψ" e "(x,y)", pois a relação "$\psi(x,y)$" implica a relação "$(x,y)\psi$".

Isso significa que no caso da expressão "*S* é *P*", a ordem é importante, pois tal expressão está mais atrelada à estrutura da linguagem natural, cuja cópula deve constar na relação entre os termos. Já no caso da função proposicional, a ordem das relações entre os termos envolvidos na expressão é apenas uma convenção adotada pelo lógico em sua linguagem; nesse caso, a convenção se deve mais, propriamente, a sua semelhança, como veremos, com a expressão da função em Matemática; convencionando-se adotar, então, por razões históricas, a expressão "ϕx", mas não a expressão "$x\phi$".

A supressão da cópula "é" parece ser de fundamental importância para o grau de abstração alcançado com a função proposicional. Podemos dizer que sem a utilização da cópula, ganha-se em poder de expressão da forma lógica mais simples e redutível da proposição e, também, em poder de expressão operacional ou de cálculo entre os termos envolvidos nessa expressão, distanciando-se das intuições da estrutura sujeito-predicado presente na linguagem natural. Nesse distanciamento, enquanto a função proposicional permite expressar, como dissemos, não apenas a Lógica das Classes, mas, também, a Lógica das Relações, o esquema de análise "*S* é *P*" expressa apenas a Lógica das Classes. Assim, com a função proposicional, a análise da forma lógica da proposição se distancia da linguagem natural e se aproxima da natureza da análise e do cálculo realizada em Matemática.

Podemos dizer que essa aproximação é resultado de uma tendência de refinamento do simbolismo da linguagem da Lógica que ocorreu, principalmente, no final do século XIX e começo do século XX. Russell, um dos principais lógicos deste período, tendo sido, como vimos, o primeiro a introduzir o termo "função proposicional", capta essa tendência ao se expressar com as seguintes palavras:

> A Matemática e a Lógica foram, historicamente falando, estudos inteiramente distintos. A Matemática esteve relacionada com a ciência e a Lógica com a língua grega. Mas, ambas se desenvolveram nos tempos

> modernos, a saber: a Lógica tonou-se mais Matemática e a Matemática tornou-se mais Lógica. (RUSSELL, 1963, 186, tradução nossa)[15]

Observam Blanché e Dubucs, em *História da lógica*, que essa tendência e convergência inauguram uma nova área de investigação que foi designado de "Logística", mas se tornou mais conhecida por "Lógica Matemática". Dizem os autores que a Lógica Matemática "[...] traduz bem uma das características distintas da lógica contemporânea, a saber, a aplicação constante dos métodos e dos raciocínios usados na matemática […].". (BLANCHÉ; DUBUCS, 1996, p. 357)

Bocheński, em *Uma História da Lógica Formal*, diz (Cf. BOCHEŃSKI, 1961, p. 266 - 267) que as características centrais para o advento da Lógica Matemática foram a seguintes: a) Noção de cálculo como método para expressar a forma lógica; isto é, embora a expressão da forma lógica tenha sido preocupação dos lógicos desde a antiguidade, a aplicação de regras de operações como princípio geral do método lógico surge apenas com a Lógica Matemática; b) As leis lógicas, formuladas e derivadas, exclusivamente, no interior de uma linguagem artificial, são expressas por símbolos matemáticos; tal que uma das novidades, aqui, é o uso de constantes, como símbolos artificiais, na relação com as variáveis – sendo estas utilizadas desde a Lógica de Aristóteles, mesmo que de modo elementar; c) Antes os teoremas lógicos eram obtidos por abstração da linguagem natural, enquanto que, com o advento da Lógica Matemática, os lógicos passaram a deduzir os teoremas no interior de sistemas puramente formais para, depois, encontrar uma interpretação semântica para tais teoremas; d) Até 1930 os teoremas obtidos encontravam-se no plano da linguagem objeto, a partir de 1930[16], passou-se a formular teoremas metalógicos que se referem a teoremas obtidos no plano da linguagem objeto; e) Pode-se dizer, também, que a utilização de uma linguagem artificial e de sistemas formais enriqueceu o formalismo, distanciando-se de questões psicológicas, epistemológicas e metafísicas.

---

[15] "Mathematics and logic, historically speaking, have been entirely distinct studies. Mathematics has been connected with science, logic with Greek. But both have developed in modern times: logic has become more mathematical and mathematics has become more logical.".

[16] Diz Bocheński (cf. 196, p. 285) que a expressão "metalógica" aparece pela primeira vez em 1930 com artigo de Jan Łukasiewicz (1878 – 1956) e Alfred Tarski (1901 – 1983) intitulado "Investigações sobre o Cálculo Proposicional" (*Untersuchungen über den Aussagenkalkül*). Em 1930 é publicado, também, o trabalho de Kurt Gödel (1906 – 1978), resultado de sua tese de doutorado, intitulado "A Completude dos Axiomas do Cálculo Funcional da Lógica" (1930) (*The completeness of the axioms of the functional calculus of logic*). Segundo Van Heijenoort "Em sua tese de doutorado na Universidade de Viena (1930) Gödel provou que o cálculo de predicados de primeira ordem é completo, no sentido de que cada fórmula válida é demonstrável.". (HEIJENOORT, 1967, p. 582). ["In his doctoral dissertation at the University of Vienna (1930) Gödel proved that the predicate calculus of first order is complete, in the sense that every valid formula is provable."].

É notório, nesse sentido, que a função proposicional surja no final do século XIX e começo do século XX como resultado gradativo da convergência dessas duas áreas. Áreas estas que, por muito tempo, percorreram caminhos paralelos e quase que independentes, mas que, progressivamente, encontraram elementos de intersecção, sendo um desses elementos de interseção a própria função proposicional, que une, de um lado, o conceito de predicação em lógica e, de outro, o conceito de função matemática.

Na História da Lógica, a primeira teorização sobre o conceito de predicação em lógica tem origem, como dissemos brevemente, em Aristóteles. Na Lógica Aristotélica há todo um estudo sobre a predicação que não veremos aqui, pois foge ao escopo de nosso trabalho. Mas, uma distinção marcante, que parece direcionar o estudo da análise da predicação lógica ao encontro da análise matemática, é a separação mais clara entre "compreensão" (*compréhension*) e "extensão" (*étendue*) de um conceito.

O registro mais explícito desta distinção terminológica está em um conhecido manual de Lógica escrito no século XVII, publicado anonimamente em 1662, intitulado de "A Lógica ou a arte de pensar" (*La Logique ou l'art de penser*), conhecido, também, pelo nome de "A Lógica de Port-Royal" (*La Logique de Port-Royal*) – depois se soube que era dos autores Antoine Arnaud e Pierre Nicole.

Esta distinção está no que estes autores chamam de "ideias" (*idées*). Sobre o significado deste termo, dizem Arnaud e Nicole (cf. 1965, p. 49-50) que as ideias podem ser consideradas em sua singularidade e generalidade. As ideias, que representam apenas uma coisa são chamadas de singulares ou particulares, e as que representam várias coisas são chamadas de universais, comuns ou gerais. Dizem eles que os nomes que servem para indicar as coisas singulares são chamados de "nomes próprios" (*noms propres*), por exemplo, Sócrates, Roma, Bucéfalo; e os nomes que sevem para indicar a generalidade são chamados de "nomes comuns" (*noms communs*), por exemplo, homem, cidade, cavalo, etc. Os nomes comuns são, ainda, chamados de "termos gerais" (*termes généraux*).

Os termos gerais advêm de nossa atividade de *abstração* (*abstraction*). A abstração "[...] é quando uma mesma coisa com vários atributos pensa um sem pensar no outro, embora entre eles tenham distinção de razão. E é assim que é feito.". (ARNAUD, 1965, p. 47- 48, tradução nossa).[17] A abstração não permite que nossa mente tenha todos os tipos de ideias,

---

[17] "[...] abstraction est quand un même chose ayant divers attributs pense à l'un sans penser à l'autre, quoiqu'il n'y ait entre eux distinction raison. Et voici comme cela se fait.".

mas podemos conceber determinada coisa, como um todo, separando-a das demais. Escrevem os autores que "[...] é tão útil nestas coisas ainda considerar as partes separadamente em vez do todo, que sem ela [abstração] você não pode ter quase conhecimento separado.". (ARNAUD, 1965, p. 47- 48, tradução nossa)[18]

Podemos, assim, representar várias coisas com uma mesma ideia, por exemplo, suponha alguém que desenhe um triângulo, sem considerar qualquer outra forma exceto senão a ideia de que ele é formado, a saber: uma figura de três ângulos, três lados, a soma dos seus ângulos internos é sempre 180 graus, etc. Desse modo, esta figura pode ser usada para conceber os demais triângulos. Quando se distingue apenas a ideia de que a coisa é formada, isto é, quando se descreve apenas as características ou os atributos que são próprios da ideia de algo, como vimos no exemplo do triângulo, ocorre a *compreensão* (*compréhension*) da ideia. Nesse sentido, escrevem os autores: "Eu chamo compreensão da ideia, os atributos que ela encerra em si mesma, e não se pode removê-la sem destruí-la, como a compreensão da ideia de um triângulo encerra figura, extensão, três linhas, três ângulos […]". (ARNAUD, 1965, p. 54, tradução nossa)[19]

Mas, quando se distingue as coisas singulares ou os indivíduos que fazem parte da ideia mais geral, não estamos preocupados com compreensão da ideia, mas com a *extensão* (*étendue*) da mesma; assim, por exemplo, a extensão da ideia de triângulo são todos os distintos triângulos existentes representados pela compreensão da ideia de triângulo. Nesse sentido, escrevem os autores: "Eu chamo extensão da ideia, os sujeitos a que esta ideia convém; este que nós chamamos também de menor termo geral, que, para eles, é chamado superior, como a ideia do triângulo se estende para todas as diferentes espécies de triângulo.". (ARNAUD, 1965, p. 54, tradução nossa)[20]

Sobre a novidade dessa distinção entre compreensão e extensão de um conceito há um escrito de Charles Sanders Peirce (1839 – 1914) intitulado "Sobre a Compreensão e a

[18] "Or il est si utile dans ces choses-là même de considérer plutôt les parties séparément que le tout, que sans cela on ne peut avoir presque aucune connaissance distincte.".

[19] "Or, dans ces idées universelles, il y a deux choses qu'il est très-important de bien distinguer, la compréhension e l'étendue. J'appelle compréhension de l'idée, les attributs qu'elle enferme en soi, et qu'on ne peut lui ôter sans la détruire, comme la compréhension de l'idée du triangle enferme extension, figure, trois lignes, trois angles […]".

[20] "J'appelle étendue de l'idée, les sujets à qui cette idée convient; ce qu'on appelle aussi les inférieurs d'un terme général, qui, à leur égard, est appelé supérieur, comme l'idée du triangle s'étend à toutes les espèces diverses de triangle.".

Extensão Lógica" (1867) (*Upon Logical Comprehension and Extension*) em que ele comenta a relevância desta distinção realizada pela Lógica de Port-Royal.

Diz Peirce (cf. 1984, p. 416-417) que embora essa distinção tenha sido feita em termos gerais por Aristóteles e tenha sido enunciada na obra "Isagoge" de Porfírio[21], escapou da acuidade dos escolásticos durante toda a Idade Média, permanecendo esquecida e ignorada até a publicação da Lógica de Port-Royal.

Neste artigo, Peirce lista (cf. 1984, p. 418-419) diferentes termos associados à extensão e compreensão de um conceito na História da Filosofia e da Lógica. Os termos "quantidade externa" (*external quantity*) e "quantidade interna" (*internal quantity*) são, segundo ele, termos usados, posteriormente, por kantianos. Há, também, os termos escopo (*scope*) e força (*force*) utilizados por Augustus De Morgan (1806-1871) de modo que, segundo Peirce, escopo expressa, na linguagem ordinária, o que designa o termo "extensão" e força não expressaria tanto o que designaria o termo "compreensão", mas expressaria mais o poder de criar, na mente de uma pessoa, uma representação viva gerada por uma palavra ou expressão. Peirce cita, também, John Stuart Mill (1806-1873), quando o mesmo usa os verbos denotar (*denote*) e conotar (*connote*).

Peirce extrai sua noção de *rema* baseando-se nesta distinção entre extensão e compreensão de um símbolo, analisada em *Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica* (1867). A noção de rema, equivale ao conceito de função proposicional, de modo que Peirce pode ser considerado o precursor do conceito de função proposicional. Sobre isso, conferir o Anexo de nosso trabalho intitulado "Peirce e a função proposicional".

Em Frege, a importância da extensão do conceito é notada, por exemplo, quando ele utiliza o termo "cai sob" (*fällt unter*) para a determinação do conceito na relação de

[21] O escrito "Isagoge" é o nome da tradução latina feita por Anício Boécio (480-524/525) da obra do filósofo grego Tiro de Porfírio (século III) - obra que também aparece por vezes referida por "Quinque voces" ou "Quinque voces Porphyrii". Neste escrito, Porfírio realiza uma introdução ao estudo das categorias de Aristóteles. Com base nessas categorias, Porfírio propõe a seguinte classificação de predicados: Gênero, Espécie, Diferença, Próprio e Acidente. Não entraremos nos detalhes de cada uma delas, mas o que é interessante para nossos propósitos é, por exemplo, a distinção que Porfírio faz entre Gênero e Espécie do ponto de vista da extensão: "Eles [Gênero e Espécie] diferem na medida em que o gênero abrange as espécies, enquanto que as espécies são abrangidas e não abrangem os gêneros; com efeito, o gênero tem uma extensão maior do que as espécies.". (PORFÍRIO, 1998, p. 19, tradução nossa). ["Ils diffèrent en ce que le genre embrasse les espèces, tandis que les espèces sont embrassées et n'embrassent nullement les genres; en effet, le genre a une extension plus grande que l'espèce.".]. Notemos que Porfírio classifica os predicados com base no conceito de extensão: do mais extenso para o menos extenso. Essa classificação dos predicados, do mais extenso para o menos extenso, é a base da conhecida Árvora de Porfírio (*Arbol porphyriana*), termo cunhado e estudado pelos filósofos medievais. A Árvore de Porfírio é uma classificação das categorias de Gênero, Espécie, Diferença, Próprio e Acidente pelas suas relações de extensão: quarto mais próximo do Gênero, maior é a extensão, e quanto mais próximo do Acidente, menor é a extensão.

predicação entre sujeito e predicado. Nesse sentido, escreve ele em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): "Quanto a um conceito, a questão é sempre a de saber se algo cai sob ele, e o quê.". (FREGE, 1980, p. 243). E no artigo *Função e Conceito* (1891) Frege diz, como veremos na Seção 1.5 que a extensão de um conceito é o percurso de valores de uma função. O percurso de valores é correspondência entre o conjunto dos argumentos que saturam a função e seus correspondentes valores de verdade. Isso evidencia seu interesse pelos elementos extensionais da predicação.

Assim, a distinção entre compreensão e extensão de um conceito separa, com mais clareza, o que é próprio da ideia de algo, sendo condição para sua formação (a compreensão), dos sujeitos que convém ao conceito (a extensão). Esta separação parece ser de fundamental importância para o surgimento da função proposicional, pois direciona sua análise mais aos seus elementos extensivos, plano do tipo de análise realizada pela função matemática, cuja natureza é mais extensiva que intensiva.

Breve histórico e caracterização do conceito de função matemática

Do lado matemático, na perspectiva da História da Matemática, o termo "função" aparece pela primeira vez, segundo historiadores da Matemática (EVES, 2011; BOYER, 1968; YOUSCHKEVITCH, 1976), nos trabalhos de Gottfried Leibniz (1646 - 1716).

Howard Eves, em *Introdução à História da Matemática,* diz que a palavra função foi introduzida por Leibniz para "[...] expressar qualquer quantidade associada a uma curva, como, por exemplo, as coordenadas de um ponto da curva, a inclinação de uma curva e o raio da curvatura de uma curva.". (EVES, 2011, p. 660). Carl Boyer, em *Uma História da Matemática*, escreve que "Leibniz não foi o responsável pela notação moderna de função, mas é a ele que a palavra 'função', em grande parte no mesmo sentido como é usado hoje, é devido.". (BOYER, 1968, p. 444, tradução nossa)[22]

Adolf Youschkevitch, em *O conceito de função até metade do século XIX* – um trabalho todo dedicado aos aspectos históricos do conceito de função –, comenta, mais precisamente, que "A palavra 'função' aparece pela primeira vez nos manuscritos de Leibniz de Agosto de 1673, em particular, no seu manuscrito intitulado *O método inverso de*

[22] "Leibniz was not responsible for the modern function notation, but it is to him that the word 'function' in much the same sense as it is used today, is due.".

tangentes, ou sobre funções (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*).”. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 56, tradução nossa)[23]

Neste manuscrito de Leibniz, a palavra função surge, segundo Youschkevitch, no contexto de determinação “[...] de uma dada propriedade da tangente da curva ou de *outros tipos de linhas que, em uma dada figura, realizam alguma função (ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis)*. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 56, grifo do autor, tradução nossa).[24] Isso significa que “[…] *a relação entre a sua aplicação ED [da ordenada] e abscissa AE é representada por alguma equação conhecida por nós* (*in qua Relatio applicatae ED ad abscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur)*.”. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 56, grifo do autor, tradução nossa).[25] Assim, ainda segundo Youschkevitch, Leibniz “[…] chama funções (*functiones, fonctions*) quaisquer partes de linhas retas, isto é, segmentos obtidos pela construção de linhas retas infinitas correspondendo a um ponto fixado e a pontos de uma dada curva.”. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 57, tradução nossa)[26]

Javier de Lorenzo (cf. 1994, p. LXX), em *Estudo Preliminar* ao livro “Análise Infinitesimal” de Leibniz, diz que, no final do século XVII, o conceito de função de Leibniz surge da análise proposta pela Geometria Cartesiana. Na perspectiva desta análise, a noção de curva exerce, de certo modo, segundo ele, o papel de função, ou seja, a partir desse novo enfoque, a curva, representável no Plano Cartesiano, é identificada com uma equação.

No interior do Plano Cartesiano, a contribuição de Leibniz não teria sido, segundo Lorenzo, apenas a de ser o primeiro a empregar o termo “função” como, também, de “[...] [variar] a noção de curva no sentido de distinguir em sua expressão analítica – ou algébrica ou transcedental – a existência, por um lado, dos ‘parâmetros’ a, b, c... ou ingredientes constantes e que não são diferenciais, e, por outro lado, da abscissa e ordenada ou das coordenadas de pontos da curva que si são diferenciais.”. (LORENZO, 1994, p. LXX, tradução nossa).[27]

[23] “The word ‘function’ first appears in Leibniz’s manuscripts of August, 1673, and in particular in his manuscript entitled *The inverse method of tangents, or about functions* (*Methodus tangentium inversa, seu de functionibus*).”.

[24] “[…] from a given property of the curve’s tangent or of *other kinds of lines which, in a given figure, perform some function (ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis)*.”.

[25] “[…] *the relation between its applicate [ordinate] ED and abscissa AE is represented by some equation known to us (in qua Relatio applicatae ED adabscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur)*.”.

[26] “[…] calls functions (*functiones, fonctions*) any parts of straight lines, i.e., segments obtained by constructing infinite straight lines corresponding to a fixed point and to points of a given curve.”.

[27] “[...] [variar] la noción de curva em el sentido de distinguir em su expressión analítica – sea algebraica o transcedente – la existencia, por un lado, de unos ‘parâmetros’ *a*, *b*, *c*...o igredientes constantes y que no son diferenciales, y por otro lado, de la abscisa y ordenada o coordenadas de los puntos de la curva y que si son

Assim, “[...] a expressão que relaciona estas ‘variáveis’ é a expressão da relação funcional ou equação.”. (LORENZO, 1994, p. LXX, tradução nossa)[28]

Nesse sentido, dada uma equação, a equação $y = ax^2 + bx + c$, por exemplo; esta equação tem os números *a*, *b* e *c* como parâmetros, a letra *x* da abscissa e a letra *y* da ordenada como variáveis. Os valores de *x* e *y* são, no Plano Cartesiano, as coordenadas de pontos da curva que variam. Esta equação assume, no Plano Cartesiano, uma parábola côncava. Nesse sentido, segundo Lorenzo, Leibniz “[...] utiliza ‘função’ para indicar quantidades que dependem de uma variável.”. (LORENZO, 1994, p. LXX, tradução nossa).[29] As quantidades têm como resultado as curvas expressas no Plano Cartesiano.

O Plano Cartesiano é um esquema gráfico proposto pelo filósofo e matemático René Descartes (1596-1650) em sua obra intitulada “A Geometria” (1637) (*La Géométrie*). Esse esquema nos permite expressar graficamente funções. Podemos dizer que o Plano Cartesiano é o ponto de encontro entre os objetos da Geometria e da Álgebra, pois, se assim podemos dizer, abre espaço para a pretensão de se resolver problemas em Geometria como problemas equivalentes em Álgebra, bem como a possibilidade de expressar em Álgebra objetos da Geometria. Essa possibilidade de resolução de problemas abre na Matemática um novo campo de estudo: a Geometria Analítica e a Análise Matemática.

As primeiras palavras de Descartes em *A Geometria* (1637) expressa, claramente, essa pretensão: “Todos os problemas de geometria podem ser facilmente reduzidos a tais termos [termos algébricos], que não é necessário depois saber o comprimento de algumas linhas retas para construí-las.”. (DESCARTES, 1885, p. 1, tradução nossa).[30] Em outra passagem: “[…] todos os pontos que podem ser chamados geométricos, ou seja, que sejam abrangidos por qualquer medida precisa e acurada, têm necessariamente qualquer relação com todos os pontos de uma linha reta, que pode ser expressa por alguma equação […]”. (DESCARTES, 1885, p. 13, tradução nossa)[31]

Mas, embora o termo “função” tenha surgido com Leibiniz, sua notação – notação utilizada até hoje para funções – tem origem com Johann Bernoulli (1667 – 1748),

---

diferenciales.”.

[28] “[...] la expresión que relaciona éstas, ‘variables’, es la expresión de la relación funcional o ecuación.”.

[29] “[...] utiliza ‘functión’ para indicar cantidades que dependen de una variable.”.

[30] “Tous les problèmes de géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu’il n’est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les construire.”.

[31] “[…] tous les points de celles qu’on peut nommer géométriques, c’est-à-dire qui tombent sous quelque mesure précise et exacte, ont nécessairement quelque rapport à tous les points d’une ligne droite, qui peut être exprimée par quelque équation [...]”.

contemporâneo de Leibniz. Comenta Lorenzo que "Jean Bernoulli, em 1697, toma o mesmo enfoque [de Leibniz] e adota a frase de Leibniz 'função de *x*' para designar uma quantidade formada por constantes e variáveis […] E John vai escrever *X* ou ξ para a função geral de *x*, notação alterada em 1718 para $\varphi(x)$.". (LORENZO, 1994, p. LXX, tradução nossa)[32]

Youschkevith diz que "A primeira definição explícita de uma função como uma expressão analítica surge impresso no artigo de J. Bernoulli *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètre* [Notas sobre soluções até agora alcançadas de problemas sobre as estruturas constantes], publicado na *Mém. Acad. roy. sci. Paris* em 1718.". (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 56 – 57, tradução nossa)[33]

Neste artigo aparece a seguinte definição de função dada por Bernoulli: "*Definição. Chamada função de uma grandeza variável uma quantidade composta de algum modo que são desta grandeza variável e constante*.". (BERNOULLI *apud* YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 56 – 57, tradução nossa).[34] E, logo em seguida, após esta definição, Bernoulli propõe a notação para expressá-la; sobre isso, escreve Youschkevith: "[...] Bernoulli também propôs a letra grega φ como uma notação *característica* de uma função (o termo é devido à Leibniz), ainda escreve o argumento sem parênteses: φx. Parênteses, bem como o sinal *f* para função é devido a Euler que o usou em seu artigo *E*. 45, divulgado em 1734 e publicado em 1740. (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 56 – 57, tradução nossa)[35]

Mas, para uma compreensão mais profunda dos aspectos históricos e conceituais envolvidos no surgimento do emprego do simbolismo para expressar o conceito de função, parece-nos fundamental observar que há um conceito mais elementar vinculado ao conceito de função, tal que sem esse conceito não seria possível conceber o conceito de função matemática, a saber: o conceito de incógnita.

O conceito de incógnita, na Histórica da Matemática, aparece claramente, com um simbolismo próprio, com o surgimento da Álgebra. A Álgebra surge (cf. RASHED, 2015, p.

[32] "John Bernoulli, en 1697, toma el mismo enfoque *y* adopta la frase de Leibniz, 'functión de *x*' para desingar una cantidad formada por constantes *y* variables […] Y John llegará a escribir *X* o ξ para la función general de *x*, notación que cambia hacia 1718 por $\varphi(x)$.".

[33] "The first explicit definition of a function as an analytic expression to appear in print is in J. Bernoulli's article *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètre*, published in the *Mém. Acad. roy. sci. Paris* for 1718. ".

[34] "*Définition. On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes*.".

[35] "[...] Bernoulli also proposed the Greek letter φ as a notation for a *caractéristique* of a function (the term is due to Leibniz), still writing the argument without brackets: φx. Brackets, as well as the sign *f* for function are due to Euler who used them in his article *E*. 45, communicated in 1734 and published in 1740.".

46; WAERDEN, 1985, p. 3) como disciplina própria com o manuscrito de Mohamed Ibn Musa Al-Khwārizmī (780 - 850, aproximadamente) intitulado "Al-jabr Wa'l-mocábala"[36], cuja tradução do título em língua latina mais conhecida é o título latino "Liber Algebrae et Almucabola".[37]

Nesta obra, o conceito de incógnita torna-se mais claro quando Al-Khwārizmī introduz uma questão para expressar um número que é desconhecido. Escreve ele: "O seguinte é um exemplo de quadrado e raízes igual a números: um quadrado e 10 raízes são iguais a 39 unidades. A questão, portanto, neste tipo de equação é aproximadamente a seguinte: qual é o quadrado que combinado com dez das suas raízes dará uma soma total de 39?". (AL-KHWARIZMI, 1915, p. 69, tradução nossa).[38] Em notação moderna, a sentença "um quadrado e 10 raízes são iguais a 39 unidades" é expressa do seguinte modo: "$x^2 + 10x = 39$". Notemos que a pergunta colocada por Al-Khwārizmī torna mais claro o significado do uso da expressão x em $x^2 + 10x = 39$.

Mas, a primeira ocorrência, no manuscrito, de um simbolismo para expressar esse valor desconhecido aparece na parte que ele chama por "Demonstrações Geométricas", após Al-Khwārizm apresentar os tipos principais de equação. Nesta parte do livro, diz Al-Khwārizmī: "E agora é evidente que a primeira figura quadrada, que representa o quadrado do

---

[36] Segundo Waerden o significado usual de "jabr" em tratados de matemática é: "[…] adicionar termos iguais a ambos os lados de uma equação para eliminar termos negativos. Outro significado, menos frequente, é: multiplicando ambos os lados de uma equação por um mesmo número para eliminar as frações.". (WAERDEN, 1985, p. 4, tradução nossa). ["[…] adding equal terms to both sides of an equation in order to eliminate negative terms. Another, less frequent meaning is: multiplying both sides of an equation by one and the same number in order to eliminate fractions.".]. E o significado de "muqabala" é: "[…] redução de termos positivos por subtração de quantidades iguais de ambos os lados de uma equação. Mas al-Karaji também usa a palavra no sentido de: igualar. O significado literal da palavra é: comparando, posando em frente.". (WAERDEN, 1985, p. 4, tradução nossa) ["[…] reduction of positive terms by subtracting equal amounts from both sides of an equation. But al-Karaji also uses the word in the sense: to equate. The literal meaning of the word is: comparing, posing opposite.".]. Assim, diz Waerden que "A combinação das duas palavras: a*l-jabr wal-muqabala* é usada às vezes em um sentido mais geral: a realização de operações algébricas. Pode, também, significar apenas: A ciência da álgebra.". (WAERDEN, 1985, p. 4, tradução nossa) ["The combination of the two words: *al-jabr wal-muqabala* is sometimes used in a more general sense: performing algebraic operations. It can also just mean: The science of algebra.".].

[37] A tradução mais conhecida da obra de Al-Khwarizmi, realizada diretamente do árabe, é a tradução latina realizada por Robert de Chester em 1140. A edição desta tradução de nossa consulta é a seguinte tradução inglesa: AL-KHWARISMI. The Book of Algebra and Almucabola. In: *Contributions to the history of science*. Humanistic Series. Vol. XI. Robert of Chester's latin translation of the Algebra of Al-khwarizmi. Trad. Louis Charles Karpinki. London and New York: The Mcmillan and Company Limited, 1915. Nesta edição, o título em inglês da obra é "The Book of Algebra and Almucabola".

[38] "The following is an example of square and roots equal to numbers: a square and 10 roots are equal to 39 units. The question therefore in this type of equation is about as follows: what is the square which combined with ten of its roots will give a sum total of 39?".

desconhecido [*unknown*] x^2, e as quatro áreas circundantes ($10x$) resulta 39.”. (AL-KHWARIZMI, 1915, p. 77, tradução nossa)[39]

O x representa, então, um número desconhecido, que comumente designamos em Matemática por “incógnita”. A tradução utilizada, nesta edição inglesa, para a noção de “número desconhecido” é a palavra inglesa “unknown”, que, segundo o editor Louis Karpinki, é a melhor tradução do latim “substância”, cuja palavra, por sua vez, foi utilizada para traduzir a palavra árabe “mal”.

Sobre a tradução, diz Waerden em *A história da Álgebra: de Al-Khwārizmī a Emmy Noether* que: “Para o quadrado da ‘coisa’ desconhecida o autor usa a palavra *mal*, o que significa algo como ‘riqueza’ ou ‘propriedade’. Ele finalmente obtém a equação.”. (WAERDEN, 1985, p. 4, grifo do autor, tradução nossa).[40] Assim, a palavra “mal” significada na língua árabe “riqueza” e “propriedade”, que no contexto da Álgebra pode ser compreendida como uma propriedade desconhecida, que é parte da equação, sendo nela expressa, e que precisa, de algum modo, ser conhecido para determiná-la.

Notemos que a incógnita x torna possível um grau de abstração que permite expressar números não como objetos determinados, mas como elementos indeterminados. Apesar da vaguesa do objeto desconhecido indicado na expressão “x”, torna-se possível formular equações gerais capazes de expressar a fronteira entre entidades numéricas e geométricas. Nesse sentido, observa Rashed: “Com al-Khwārizmī, os conceitos da nova disciplina [a Álgebra] - a saber, ‘a coisa’ (*al-shay*) ou ‘*cosa*’, o desconhecido - não designa uma entidade específica, mas um objeto que pode ser indiferentemente numérico ou geométrico; [...]”. (RASHED, 2015, p. 111, tradução nossa)[41]

Sobre essas características gerais das equações, escreve Al-Khwārizmī, na introdução do seu manuscrito: “[…] descobri que os números de restauração e oposição são compostos destes tipos, a saber: raízes, quadrado e números. […] a raiz é qualquer número maior do que a unidade multiplicada por si mesma: ou o que for encontrado para ser diminuído abaixo da

[39] “And now it is evident that the first square figure, which represents the square of the unknown, and the four surrounding areas ($10x$) make 39.”.
[40] “For the square of the unknown 'thing' the author uses the word *mal*, which means something like ‘wealth’ or ‘property’.”.
[41] “With al-Khwārizmī, the concepts of the new discipline - namely ‘the thing’ (*al-shay*) or ‘cosa’, the unknown – do not designate a specific entity, but an object that can be indifferently numerical or geometrical; [...]”.

unidade quando multiplicado por si mesmo. O quadrado é o que resulta da multiplicação de uma raiz por si mesma.”. (AL-KHWARIZMI, 1915, p. 69, tradução nossa)[42]

Nesse sentido, para a expressão dos números, há, segundo o matemático, três formas simples e gerais: “Destas três formas, a seguir, duas podem ser iguais umas as outras, como, por exemplo: quadrado igual a raízes, quadrado igual aos números, e raízes iguais a números.”. (AL-KHWARIZMI, 1915, p. 69, tradução nossa).[43] Essas três formas correspondem, na Álgebra Moderna, as seguintes formas expressas: $ax^2 = bx$, $ax^2 = n$, e $bx = n$. Sabe-se hoje, com clareza, que tais formas, quando combinadas, permitem expressar todas as possíveis funções quadráticas, o que respresenta um considerável grau de abstração e generalidade.

Esse grau de abstração e generalidade decorrente da expressão da indeterminação desses objetos algébricos abre espaço para uma nova percepção sobre a realidade. Analisa Roshdi Rashed em *Matemáticos clássicos de Al-Khwārizmī a Descartes* que “[…] o objeto dos algebristas, ‘a coisa’ deve ser suficientemente geral para assegurar uma variedade de conteúdo; mas deve, além disso, existir independentemente das suas próprias determinações, de modo que se possa sempre melhorar a aproximação. A teoria aristotélica claramente não pode dar conta do status ontológico tal objeto.”. (RASHED, 2015, p. 717, tradução nossa)[44]

Desse modo, torna-se necessário, segundo Rashed, uma nova ontologia: “É preciso, portanto, dar ao problema uma nova ontologia que torna possível discutir um objeto despojado das mesmas características que só teria tornado possível determinar aquilo de que ele é a abstração. Esta é uma ontologia que deve também nos permitir conhecer um objeto sem estar em condições de representar exatamente.”. (RASHED, 2015, p. 717, tradução nossa).[45] Nesse sentido, não seria demais dizer que sem essa nova percepção ontológica, expressa pela incógnita no contexto da Álgebra e do consequente grau de abstração que seu

[42] “I discovered that the numbers of restoration and opposition are composed of these there kinds: namely, roots, square and numbers. […] the root is any number greater than unity multiplied by itself: or that which is found to be diminished below unity when multiplied by itself. The square is that which results from the multiplication of a root by itself.”.

[43] “Of these three forms, then, two may be equal to each other, as for example: Square equal to roots, square equal to numbers, and roots equal to numbers.”.

[44] “Thus the object of the algebraists, ‘the thing’ must be sufficiently general to hold a variety of contents; but it must in addition exist independently of its own determinations, so that one can always improve the approximation. Aristotelian theory clearly cannot give an account of such an object’s ontological status.”.

[45] “One must therefore bring to bear on the problem a new ontology that makes it possible to discuss an object stripped of the very characteristics that alone would have made it possible to determine that of which it is the abstraction. This is an ontology that must also allow us to know an object without being in position to represent it exactly.”.

simbolismo permite alcançar, não seria possível a expressão do conceito de função matemática, realizado posteriormente por Leibniz.

Sobre a importância da variável para a Matemática, diz Whitehead no seu livro intitulado “Uma Introdução à Matemática” (1911) (*An Introduction to Mathematics*), um destacado matemático do início do século XX, colaborador de Russell na parte matemática do *Principia Mathematica* (1910; 1912; 1913), que “O objeto da solução da equação é a determinação do desconhecido. As equações são de grande importância na matemática [...]”. (WHITEHEAD, 1911, p. 17, tradução nossa).[46] Continua ele: “A ideia da ‘variável’ indeterminada como ocorrendo no uso de ‘alguma’ ou ‘qualquer’ é realmente importante em matemática; a do ‘desconhecido’ na equação, que é para ser resolvido o mais rapidamente possível, é apenas de uso subordinado, embora, certamente, muito importante.”. (WHITEHEAD, 1911, p. 17-18, tradução nossa).[47] Por fim, diz ainda o autor: “[...] a ideia de *variáveis* é fundamental, tanto na aplicação, bem como na teoria da matemática.”. (WHITEHEAD, 1911, p. 24, grifo do autor, tradução nossa)[48]

Compreendido alguns traços da importância do conceito de incógnita para o conceito de função matemática, cabe observar ainda alguns dos aspectos da importância do conceito de função para a Matemática atualmente.

Hoje é consenso entre matemáticos que a noção de função é uma das noções mais elementares da Matemática, pela sua característica fundamental, central e unificadora. Comenta Howard Eves que “[...] muitos matemáticos vêm advogando seu uso [da função] como princípio central e unificador na organização dos cursos elementares de matemática.”. (EVES, 2011, p. 661). Esse princípio central e unificador da função tem servido como princípio geral para as matemáticas devido, principalmente, a sua definição e aplicação geral nas diversas subáreas desta disciplina de estudo.

Nos cursos de Cálculo, por exemplo, o conceito de função é introduzido logo no início dos livros. Dado que os objetos do Cálculo são números (números reais), as funções são definidas como uma relação que associa números: “Uma função, definida para todos os números, é uma associação que para cada número dado associa outro número.”. (LANG,

[46] “The object of the solution of the equation is the determination of unknown. Equations are of great importance in mathematics [...]”.
[47] “The idea of the undetermined ‘variable’ as occurring in the use of ‘some’ or ‘any’ is the really important one mathematics; that of the ‘unknown’ in an equation, which is to be solved as quickly as possible, is only of subordinate use, though of course it is very important.”.
[48] “[...] the idea of *variables* is fundamental, both in applications as well as in the theory of mathematics.”.

1986, p. 14, tradução nossa).[49] Sobre a notação, diz ele: "É habitual denotar uma função por uma mesma letra, tal que uma letra 'x' denota um número. Então, se nós denotamos uma dada função por f, e x é um número; então nós denotamos por $f(x)$ o número associado com x pela função.". (LANG, 1986, p. 14, tradução nossa).[50] Continua ele: "Os símbolos $f(x)$ são lidos 'f de x'. A associação do número $f(x)$ ao número x é às vezes denotado por uma seta especial, a saber: $x \mapsto f(x)$. Por exemplo, considere a função que associa para cada número x o número x^2. Se f denota essa função, então nós temos $f(x) = x^2$.". (LANG, 1986, p. 14, tradução nossa).[51] Desse modo, dada a função $f(x) = x^2$, se substituirmos x em $f(x)$ por quaisquer números, então temos um valor y resultante desta substituição. Nesse caso, a função $f(x) = x^2$ pode que ser representada, graficamente, Plano Cartesiano.

Além da definição de função introduzida no Cálculo e de sua importância na Geometria Analítica como um dos pontos centrais de interseção entre a Geometria e a Álgebra, uma definição de função mais abrangente é a definição introduzida na Teoria de Conjuntos. Na Teoria de Conjuntos são consideradas não relações entre números, mas relações entre dois conjuntos de elementos, tal que estes elementos são quaisquer objetos do universo considerado.

Karel Hrbacek e Thomas Jech, por exemplo, em *Introdução à Teoria de Conjuntos* definem função do seguinte modo: "Uma relação F é chamada uma *função* (ou *mapeamento*, *correspondência*) se aFb_1 e aFb_2 implica que $b_1 = b_2$ para todo a, b_1 e b_2.". (HRBACEK; JECH, 1999, p. 23, grifo do autor, tradução nossa).[52] Explicam Hrbacek e Jech que "[...] uma relação F é uma função se e somente se para todo a do dom F há exatamente um b tal que aFb. Esse único b é chamado de *valor de F* em a e é denotado por $F(a)$ ou F_a.". (HRBACEK; JECH, 1999, p. 23, grifo do autor, tradução nossa)[53]

A ideia da função é, então, relacionar dois conjuntos A e B, tal que para todo elemento do conjunto A há apenas um elemento correspondente do conjunto B. Os matemáticos

[49] "A function, defined for all numbers, is an association which to any given number associates another numbers.".

[50] "It is customary to denote a function by some letter, just as a letter 'x' denotes a number. Thus if we denote a given fuction by f, and x is a number, then we denote by $f(x)$ the number associated with x by the function.".

[51] "The symbols $f(x)$ are read 'f of x'. The association of the number $f(x)$ to the number x is sometimes deno by a speecial arrow, namely $x \mapsto f(x)$. For example, consider the function which associates to each number x the number x^2.".

[52] "Definition. A binary relation F is called a *function* (or *mapping*, *correspondence*) if aFb_1 and aFb_2 imply $b_1 = b_2$ for any a, b_1, and b_2.".

[53] "[...] a binary relation F is a function if and only if for every a from dom F there is exactly one b such that aFb. This unique b is called the *value of F* at a and is denote $F(a)$ or F_a.".

chamam o conjunto A de "domínio da função" e o conjunto B de "contradomínio" ou "codomínio da função". Os elementos de B que têm relação com A são chamados de "imagem da função" considerada. Cabe ressaltar que toda função deve satisfazer, necessariamente, as seguintes condições: 1) todo elemento do domínio A deve se relacionar com um e apenas um elemento do contradomínio B, mas não é necessário que todo elemento de B se relacione com um elemento de A; 2) nunca pode ocorrer que um elemento do domínio A se relacione com dois ou mais elementos do contradomínio B, isto é, a relação entre os elementos dos conjuntos A e B nunca pode "bifurcar".

A definição de função supracitada define função como um tipo de relação, pois o conceito de relação é mais amplo que o conceito de função. O conceito de relação é assim definido por Hrbacek e Jech: "Um conjunto R é uma *relação binária* e todos os elementos de R são pares ordenados, i. e., se para todo $z \in R$ existe x e y tal que $z \in (x,y)$.". (HRBACEK; JECH, 1999, p. 19, grifo do autor, tradução nossa).[54] A notação é $(x,y) \in R$ ou xRy, tal que podemos considerar xRy como uma instância de $(x,y) \in R$.

Um par ordenado de elementos ocorre quando a ordem dos elementos é importante na relação R. O par ordenado pode ser representado nas coordenadas do Plano Cartesiano. Nesse sentido, o valor da abscissa x aparece como primeiro elemento da relação e o valor da ordenada y como segundo elemento da relação. Dizem Hrbacek e Jech que "Para muitas aplicações, é preciso emparelhar a e b de modo a tornar possível 'ler' que conjunto vem 'primeiro' e que vem 'segundo'. Denotamos este par ordenado de a e b pelo (a, b); a é a primeira coordenada do par (a, b), b representa a segunda coordenada.". (HRBACEK; JECH, 1999, p. 18, tradução nossa).[55] Além de um par ordenado, podemos ter, ainda, triplas ordenadas, quádruplas ordenadas … n-uplas ordenadas. Podemos ter, assim, um universo de muitas dimensões, conforme as coordenadas que estamos considerando para nosso estudo e nossa análise.

A função não é, com isso, uma relação qualquer entre elementos de conjuntos, mas é relação especial entre elementos de tais conjuntos. Devido a sua especificidade e generalidade, obtida com a Teoria de Conjuntos, o conceito de função passou a ser aplicado às diversas subáreas da Matemática, servindo como um conceito comum entre elas, inclusive nos

[54] "A set R is a *binary binary* relation if all elements of R are ordered pairs, i. e., if for any $z \in R$ there exist x and y such that $z = (x,y)$.".

[55] "For many applications, we need to pair a and b in a way making possible to 'read off' which set comes 'first' and which comes 'second'. We denote this ordered pair of a and b by (a, b); a is the first coordinate of the pair (a, b), b is the second coordinate.".

estudos de fundamentos da Matemática. Sua definição e aplicação geral nas diversas subáreas da Matemática, encontra, também, seu lugar na Lógica, em especial para a análise da predicação no contexto da proposição.

Nesse sentido, a partir do esquema de análise baseado no conceito de função matemática, pode-se determinar, na Lógica das Classes, se um sujeito tem ou não um determinado predicado como uma função que relaciona o sujeito que cai sob um conceito com a proposição ou o valor de verdade da proposição resultante dessa relação. Na Lógica das Relações, pode-se, também, determinar relações quaisquer entre dois ou mais sujeitos como um tipo de função matemática. E na Lógica das Proposições, pode-se interpretar os conectivos, que compõem proposições mais complexas a partir de proposições mais elementares, como funções de verdade que relacionam tais proposições. Este tipo de análise foi realizada por Gottlob Frege e Bertrand Russell quando ambos introduziram a função proposicional.

Tendo em vista essa breve exposição e análise dos elementos históricos e conceituais necessários para uma compreensão histórico-conceitual mais ampla da função proposicional, fizemos, em seguida, uma breve contextualização e introdução da questão que pretendemos investigar no presente trabalho.

Contextualização e introdução da questão investigada na Tese

Umas das obras centrais que culmina com a convergência entre Lógica e Matemática, em que um dos elementos fundamentais dessa convergência é, como mencionado anteriormente, a função proposicional, é a obra de Gottlob Frege (1848 – 1925), em especial a obra intitulada “Conceitografia, uma linguagem de fórmulas para o pensamento puro, imitada da linguagem aritmética” (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*), publicada em 1879.

Como o próprio subtítulo diz, a *Conceitografia* (1879) é uma linguagem de fórmulas semelhante à linguagem da Matemática (Aritmética) para expressar com rigor e clareza o raciocínio lógico. “Ela [a *Conceitografia*] serve assim primordialmente para testar da forma mais segura a validade de uma cadeia de inferência e mostrar qualquer pressuposto que possa ser involuntariamente introduzido, de modo que a sua origem possa ser investigada.”. (FREGE, 2008, p. IV).

O conceito de função proposicional aparece na *Conceitografia* (1879) sob o nome de "função" (*Function*). Nesse sentido, diz Frege: "[...] *nós chamamos a parte que permanece invariante na expressão uma função e a parte substituível de o argumento*. (FREGE, 2013, p. 18, grifo do autor, tradução nossa).[56] O termo "função" tem um sentido próprio na *Conceitografia* (1879) e está inserida nos seus propósitos: expressar as relações lógicas em um simbolismo desprovido de qualquer ambiguidade da linguagem natural com o propósito expressar diretamente o "conteúdo conceitual".

A relevância do conceito de função é tal que Frege dedica todo um artigo para discuti-lo, o artigo intitulado "Função e Conceito" (1891) (*Funktion und Begriff*). Nele o autor rediscute a noção de função, introduzida na *Conceitografia* (1879), e procura elucidar alguns de seus pontos essenciais. Neste artigo, Frege torna explícita a relação entre o que ele chama por "função" (extraído do conceito de função em Matemática) e o conceito em Lógica; escreve ele: "Vemos, assim quão estreitamente ligado está o que se chama de conceito em Lógica com o que chamamos de função. Com efeito, pode-se dizer imediatamente: um conceito é uma função cujo valor é sempre um valor de verdade.". (FREGE, 2009, p. 94)

Embora Frege tenha sido um dos primeiros a introduzir de modo mais explícito o conceito de função proposicional na História da Lógica, o termo "função proposicional" (*propositional function*) aparece pela primeira vez na obra de Russell *Os Princípios da Matemática* (1903), termo esse que ficou mais conhecido e se tornou mais usual na Lógica.

Os Princípios da Matemática (1903) consistia, nas palavras de Russell, em dois objetivos principais: (i) "[...] a prova de que toda matemática pura trata exclusivamente de conceitos definíveis em termos de um número muito pequeno de conceitos lógicos fundamentais [...]" (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa)[57]; e (ii) "[...] que todas as suas proposições são dedutíveis a partir de um número muito pequeno de princípios lógicos fundamentais.". (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa)[58]

Tempos depois, em 1910, Russell publica, em colaboração com Whitehead, o primeiro volume de uma das principais obras para a Lógica Matemática do século XX, *Principia Mathematica*. No Prefácio do *Principia*, diz Russell (cf. 1910, p. v) que esta sua obra trata dos princípios da Matemática e seu tema surge de um conjunto de dois diferentes estudos centrais

[56] "[...] *nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Theil des Ausdruches Function, den ersetzbaren ihr Argument*.".
[57] "[...] the proof that all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of fundamental logical concepts [...]".
[58] "[...] and that all its propositions are deductible from a very small number of fundamental logical principles.".

para a Lógica Moderna. Por um lado, a partir dos trabalhos dos analistas e geômetras no sentido de formalizar e sistematizar os axiomas, sendo que um dos alcances e expressão maior era, até então, os trabalhos de Georg Cantor (1845-1918) para a Teoria de Conjuntos. De outro lado, a contribuição de Peano e seus seguidores com a adaptação técnica e abrangência da Lógica como instrumento matemático para lidar com os princípios da Matemática.

Dessa combinação de estudos surgem dois resultados: (i) o método de demonstração que permite o questionamento das proposições que antes eram assumidas como axiomas, de modo que o questionamento ou considera tais axiomas como desnecessários ou se exige demonstrá-los pela sua necessidade lógica; (ii) surgimento, como consequência do método de demonstração, de importantes resultados, com ampliação, sistematização e rigor lógico em diversos campos da Matemática. Assim, como consequência "[...] o escopo da matemática é ampliado tanto para a adição de novos temas quanto uma extensão para trás em áreas até então abandonadas à filosofia.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. v, tradução nossa)[59]

No *Principia* (1910) a definição de função proposicional aparece como um dos conceitos mais elementares e fundamentais na obra. Como já citado, Russell define uma função ϕx como "[...] uma sentença contendo uma variável x tal que ela se torna uma proposição quando a x é dado algum significado determinado fixo.". (RUSSELL; WHITEHEAD, 1968, p. 14, tradução nossa)[60]

A função proposicional aparece no *Principia* (1910) como condição lógica para a definição de classes e relações, e, também, para o surgimento das proposições, pois as antecedem logicamente, constituindo-se em elemento fundamental para as suas definições, dando condições para o surgimento tanto da Lógica de Predicados quanto para a Lógica das Proposições. Ademais, a partir do conceito de função proposicional define-se, segundo Russell, os conceitos de "todo" e "algum". O estudo das funções proposicionais abre, também, novos horizontes para a Lógica com o surgimento de paradoxos a partir delas e da teoria dos tipos daí decorrente.

Um dos herdeiros mais ilustres dessa tradição, iniciada por Frege, e perpetrada por Russell, é Ludwig Wittgenstein (1889-1951). Nesse sentido, escreve o próprio Wittgenstein "Desejo apenas mencionar que devo às obras grandiosas de Frege e aos trabalhos de meu

[59] "[...] the scope of mathematics is enlarged both by the addition of new subject and by a backward extension into provinces hitherto abandoned of philosophy.".
[60] "[...] a statement containing a variable x and such that it becomes a proposition when x is given any fixed determined meaning.".

amigo Bertrand Russell uma boa parte do estímulo às minhas ideias.”. (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131). Essa passagem se encontra em sua obra pulicada originalmente em 1921, cujo título mais conhecido e que permaneceu é o título em latim “Tractatus Logico-Philosophicus”, que surgiu na edição de 1922.

Tendo em vista a relevância que o conceito de função proposicional ocupa nas obras de Frege e Russell, e conhecida a importância do *Tractatus* (1921) para os debates em Filosofia no século XX e nos dias de hoje, a pergunta que colocamos é a pergunta pelo significado deste conceito no *Tractatus* de Wittgenstein. Então, a questão que norteia o desenvolvimento desta Tese é assim formulada:

Qual é o significado da função proposicional de Frege e Russell
no *Tractatus* de Wittgenstein?

O objetivo da Tese consiste, então, em investigar o significado do conceito de função proposicional no *Tractatus* (1921). Nosso ponto de partida é o que Wittgenstein chama em sua obra de “variável proposicional” (*Satzvariable*). Tendo isso em vista, nossa questão interpretativa na Tese pode ser assim formulada:

Qual é o significado do conceito de variável proposicional
no *Tractatus* de Wittgenstein?

Defenderemos a tese de que o papel desempenhado pela função proposicional em Frege e Russell corresponde ao papel desempenhado pela variável proposicional em Wittgenstein.

A Tese divide-se em três capítulos. Os dois primeiros capítulos são dedicados ao estudo do conceito de função proposicional em Frege e Russell. Tais capítulos são uma preparação para o terceiro e último capítulo, a saber, os resultados de nosso estudo sobre o significado da função proposicional no *Tractatus* (1921), em particular, sobre o significado do conceito de variável proposicional (*Satzvariable*) de Wittgenstein.

O Capítulo I, intitulado “Frege e a função proposicional”, é dedicado ao estudo da função proposicional em Gottlob Frege. O conceito de função proposicional de Frege surge com o que ele chama por “função” *(Function*). Neste capítulo estudaremos, então, o significado da função em Frege. Na Seção 1.1, intitulada "O projeto de Frege", apresentaremos, em linhas gerais, o projeto fregeano de fundamentação da Aritmética em princípios lógicos gerais, cujos resultados de sua investigação se encontram em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) e *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893). Na Seção 1.2, intitulada "Conceitografia" (1879), apresentaremos a *Conceitografia* (1879), falaremos de sua importância para o projeto de Frege e mencionaremos sua relevância para a História da Lógica. Na Seção 1.3, intitulada "Função", veremos que a primeira ocorrência do conceito de função proposicional em Frege aparece na *Conceitografia* (1879) com a introdução do termo "função" (*Function*). Na Seção 1.4, intitulada "Função e conceito", veremos que Frege escreve o artigo *Função e Conceito* (1881) para explicitar o conceito de função introduzido por ele na *Conceitografia* (1879); veremos que o que a noção de conceito da Lógica é um tipo de função, tal que o conceito é uma função. Na Seção 1.5, intitulada "Extensão de conceito", veremos que a extensão de conceito é o percurso de valores de uma função, e o percurso de valores é a correspondência entre o conjunto de valores que saturam a função e os valores de verdade correspondentes a essas saturações. Na Seção 1.6, intitulada "Conceito e objeto", veremos que conceito e objeto, correspondentes à função e argumento, são elementos constitutivos mais simples na proposição, não podendo ser definidos, apenas explicitados pela linguagem. Na Seção 1.7, intitulada "O Pensamento", veremos que o pensamento, formado pela concatenação entre conceito é objeto, é uma proposição com sentido, mas nem toda proposição com sentido é um pensamento. Na Seção 1.8, intitulada "Conceito de conceito", veremos que além de poder ser saturado por objetos, um conceito pode ser saturado por outro conceito, resultando no conceito de conceito. Por fim, na Seção intitulada "Conclusão", retomaremos os tópicos centrais, que são resultados de nosso breve estudo sobre o conceito de função em Frege, apresentados no Capítulo I.

O Capítulo II, intitulado "Russell e a função proposicional", é dedicado ao estudo da função proposicional em Bertrand Russell. Faremos, então, neste capítulo, um estudo sobre significado do conceito de função proposicional em Russell. Na Seção 2.1, intitulada "Introdução ao termo 'função proposicional'", mostraremos como é introduzido pela primeira vez o termo "função proposicional" em *Os Princípios da Matemática* (1903). Na Seção 2.2, intitulada "Nomes próprios, adjetivos e verbos", estudaremos os nomes próprios, os adjetivos e verbos que correspondem às noções elementares de proposição, função proposicional, classes e relações. Na Seção 2.3, intitulada "A denotação", veremos como o estudo da denotação consiste em determinar o significado lógico dos termos que compõem uma proposição. Na Seção 2.4, intitulada "Funções proposicionais", veremos que as noções de função proposicional e classe podem ser derivadas a partir do estudo sobre as afirmações que envolvem a noção "tal que", noção geralmente presente nos enunciados matemáticos e, também, explicitaremos a passagem de *Os Princípios da Matemática* (1903) para *Principia Mathematica* (1910, 1912 e 1913) centrando nossa análise no conceito de função proposicional. Na Seção 2.5, intitulada "O conceito de variável", veremos que as noções de variável irrestrita e real são importantes para compreendermos o conceito de função proposicional, distinguindo este conceito de outras expressões e até mesmo de proposições onde ocorrem variáveis. Na Seção 2.6, intitulada "Classes e relações", apresentaremos os conceitos de classes e relações e mostraremos a importância da função proposicional como condição de determinação de classes e relações. Na Seção 2.7, intitulada "Proposições", veremos como as funções proposicionais são condição lógica para as proposições, em particular no que concerne à geração de novas proposições a partir de proposições mais simples. Na Seção 2.8, intitulada "O Atomismo Lógico", veremos a importância da função proposicional como esquema que expressa a decomposição de um enunciado complexo em partes constituintes mais elementares que os descrevem. Na Seção 2.9, intitulada "Funções de funções e paradoxos", veremos que as variáveis que ocorrem nas funções, por serem variáveis irrestritas, podem ser substituídas também por funções, resultando em funções cujos argumentos são funções, podendo resultar em paradoxos. Na Seção 2.10, intitulada "Hierarquia das funções", veremos que é possível a construção de uma hierarquia das funções com vistas ao desenvolvimento de uma teoria dos tipos de funções. Na Seção 2.11, intitulada "O Axioma da Redutibilidade", veremos a importância deste axioma na teoria dos tipos de funções para evitar totalidades e respeitar o cumprimento do princípio do círculo vicioso. Por fim, na Seção "Conclusão", faremos um resumo dos tópicos centrais apresentados no Capítulo II sobre o conceito de função proposicional em Russell.

O Capítulo III, intitulado "Wittgenstein e a função proposicional", é dedicado ao estudo do significado do conceito de função proposicional no *Tractatus* (1921) de Wittgenstein. Na Seção 3.1, intitulada "O Tractatus Logico-Philosophicus", apresentaremos um panorama da obra, seu problema e propósito central, a tese principal e comentários sobre seu estilo e arquitetura. Na Seção 3.2, intitulada "Símbolos ou expressões", veremos que o símbolo ou a expressão são os traços essenciais para a caracterização ou para a determinação do sentido das proposições. Na Seção 3.3, intitulada "Variáveis proposicionais", veremos que a possibilidade de substituição de símbolos por outros símbolos na proposição é representada por variáveis proposicionais. Na Seção 3.4, intitulada "A forma proposicional", veremos que a variável proposicional é condição para a forma das proposições, pois toda forma proposicional é uma variável proposicional. Na Seção 3.5, intitulada "Funções", veremos que a função é representada por uma variável proposicional, cuja substituição das expressões nas variáveis resulta em uma proposição com sentido com valor verdadeiro ou falso. Na Seção 3.6, intitulada "Operações", estudaremos a possibilidade de compor novas proposições a partir de proposições elementares. Na Seção 3.7, intitulada "A forma geral da proposição", veremos como as operações podem ser expressas por uma forma mais geral, a forma geral da proposição. Na Seção 3.8, intitulada "O apriorismo da Lógica", veremos como a tautologia é condição para a dedução lógica e, por conseguinte, como isso nos conduz à concepção de que a Lógica é *apriori*. Na Seção 3.9, intitulada "A forma de afiguração", veremos que a proposição é um modelo dos fatos da realidade. Na Seção 3.10, intitulada "A essência do mundo", veremos como a correspondência entre a forma da proposição e a forma lógica do mundo é a descrição da essência do mundo, e como a variável proposicional é fundamental para a esta descrição. Na Seção 3.11, intitulada "Sobre o significado da função proposicional no *Tractatus*", procuraremos mostrar que a variável proposicional (*Satazvariable*) correspondente a noção de variável em Lógica, sendo condição necessária para a expressão da essência da lógica, pois sem ela não é possível expressar a forma lógica da proposição. Por fim, na seção 3.11, intitulada "Conclusão", faremos um resumo dos tópicos centrais apresentados no Capítulo III sobre o significado da função proposicional no *Tractatus* (1921) de Wittgenstein.

Capítulo I: Frege e a função proposicional

Um dos primeiros registros mais explícitos do conceito de função proposicional na História da Lógica aparece na obra de Gottlob Frege (1848 – 1925) intitulada “Conceitografia”, publicada em 1879. Nesta obra, o conceito de função proposicional surge com o que Frege chama por “função” (*Function*). Apresentaremos, assim, neste capítulo, nosso estudo sobre o significado do conceito de função em Frege.

1.1. O projeto de Frege

Nesta seção, apresentaremos, em linhas gerais, o projeto de Gottlob Frege de fundamentação da Aritmética em princípios da Lógica. Faremos uma exposição das ideias centrais em torno deste projeto, em especial sobre sua investigação lógico-matemática sobre o conceito de número e dos propósitos filosóficos subjacentes a este projeto.

Matemático de formação, Frege se dedicou quase que exclusivamente à Matemática e à Lógica. Em 1884, ele publica o livro intitulado “Os Fundamentos da Aritmética: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número” (*Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Befriff der Zahl*).[61] Neste livro, ele realiza uma investigação lógico-matemática, informal e não axiomatizada, sobre a noção mais simples de número, o conceito de número cardinal (*Anzahl*).

A busca pela definição de número cardinal se tornava necessária, pois não havia, no entender de Frege, consenso entre os matemáticos em torno de sua definição. Diz ele que muitos matemáticos se satisfaziam com respostas simples e com definições psicológicas, fornecidas pelos livros elementares, encerrando, assim, o assunto, de vez, dando-se por satisfeitos. Diante disso, tornava-se necessário investigar o conceito de número, pois, escreve, nesse sentido, em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) que “Quando um conceito que serve de base a uma importante ciência oferece dificuldades, torna-se tarefa irrecusável investigá-lo de modo mais preciso e superar estas dificuldades [...]”. (FREGE, 1980, p. 200), pois “[...] dificilmente conseguiríamos esclarecer os números negativos, fracionários e complexos enquanto nossa compreensão dos fundamentos do edifício global da aritmética fosse ainda defeituosa.”. (FREGE, 1980, p. 200)

---

[61] Designaremos este livro apenas por “Os Fundamentos da Aritmética”.

É perguntando-se pela definição do número 1, o número cardinal mais simples e elementar, que ele inicia *Os Fundamentos da Aritmética* (1884):

> A questão: o que é o número um? Ou: o que significa o sinal 1? receberá frequentemente como resposta: ora, uma coisa. E se fazemos então notar que a proposição "O número um é uma coisa" não é uma definição, porque há em um lado o artigo definido, no outro o indefinido, e que ela apenas afirma que o número um pertence às coisas, mas não que coisa seja [...]. (FREGE, 1980, p. 199)

Frege propõe uma definição de número cardinal, explicitando, para isso, os princípios e conceitos lógicos mais fundamentais que são condições para a sua definição. São três os princípios lógicos apresentados por Frege em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): (1º) separar o lógico do psicológico, o subjetivo do objetivo; (2º) perguntar pela referência (*Bedeutung*)[62] das palavras no contexto da proposição e não isoladamente; (3º) distinguir conceito de objeto.

Através do princípio (2º), conhecido posteriormente pelo nome de "Princípio do Contexto de Frege", Frege propõe que se determine a referência das palavras no âmbito da proposição. É, pois, em proposições que se pode determinar o conteúdo objetivo de uma palavra, expresso pelos significados advindos do contexto em que esta palavra está sendo empregada. No caso dos números, se se quiser saber o que seja um número, deve-se obter o conteúdo do termo "número" a partir dos sentidos que o numeral é usado em proposições; com isso, pode-se obter suas propriedades e chegar a sua definição.

Diz Frege (cf. 1980, p. 191) que nas atribuições abstratas da ciência, a preocupação com a referência deve ser tal que, dado um sinal qualquer, é necessário pretender que ele designe algo determinado, evitando, assim, a ausência de conteúdo dos sinais e, com efeito, raciocínios no vazio que conduzam às verdades aparentes. É necessário, então, que um sinal

[62] Adotamos aqui a tradução de Alcoforado (2009), embora alguns tradutores prefiram traduzir "Bedeutung" por "significado" justificando, com isso, que Frege não se utiliza da palavra alemã "Referenz", que é o equivalente etimológico português de "referência". No entanto, o termo "significado", na língua portuguesa, pode ter acepção de "sentido", o que não é adequado para o que Frege quer expressar por "Bedeutung". Traduz-se, também, "Bedeutung" por "denotação"; porém, este termo, em português, é sinônimo de "indicação", "sinal", indicando o ato de revelar um sentido objetivo por meio do sinal; sendo usado, na linguística, como antônimo de conotação (sentido subentendido ou subjetivo de uma palavra). Entretanto, entendemos que o termo "denotação" não é a acepção requerida por Frege, pois "Bedeutung" não está relacionado, como veremos, ao sentido objetivo de uma palavra. Para evitar tais ambiguidades, adotamos a tradução de Alcoforado, pois pensamos que a palavra "referência" é, em português, a que melhor expressa a noção pretendida pelo autor, porque, em nossa língua, melhor expressa aquilo que se refere, e quando dizemos "a referência do sinal" nós indicamos o que é designado pelo sinal.

tenha sempre uma referência e que esta referência seja sempre determinada no contexto da proposição.

No entender de Frege, as palavras desprendidas de seu contexto podem nos remeter às representações (*Vorstellung*), pois, fora do contexto, não temos parâmetros para determinar o conteúdo de uma palavra, fazendo com que cada pessoa associe um conteúdo que lhe seja desejável. Desse modo, podemos dizer que a realização do segundo princípio já abarca o cumprimento do primeiro princípio. "Se não se observa o segundo princípio, fica-se quase obrigado a tomar como significado das palavras imagens internas e atos da alma individual, e deste modo a infringir o primeiro.". (FREGE, 1980, p. 204). Assim, quando tratamos do segundo princípio, consequentemente, estaremos nos referindo ao primeiro.

Além disso, a proposição pode ser dividida, como veremos na Seção 1.6, em conceito e objeto. Veremos que um objeto nunca pode ser um conceito e vice-versa, pois Frege entende que suas naturezas lógicas são completamente distintas. Veremos, também, que o conceito é visto pelo autor como um tipo de função. A função é insaturada, tal que, quando completada por um objeto (o que chama por "argumento", em particular), resulta em uma proposição suscetível de um juízo verdadeiro ou falso.

Embora haja essa motivação resultante da necessidade lógico-matemática em apresentar os fundamentos ou os princípios da Aritmética, Frege encontra, também, uma motivação filosófica. Escreve ele que há, também, motivações filosóficas em sua investigação: "Também motivos filosóficos determinaram-me a realizar estas investigações. As questões da natureza *a priori* ou *a posteriori*, sintética ou analítica das verdades aritméticas esperam encontrar aqui sua resposta.". (FREGE, 1980, p. 206, grifo do autor)

Frege espera encontrar resposta sobre a natureza de tais verdades aritméticas encontrando auxílio nas demonstrações matemáticas. "Pois ainda que estes conceitos [de sintético ou analítico] pertençam propriamente à filosofia, creio, contudo, que uma decisão não pode dispensar o auxílio da matemática.". (FREGE, 1980, p. 206). Nesse caso, o autor reporta-se a Immanuel Kant (1724 -1804): "Não pretendo naturalmente introduzir com isto um novo sentido, mas apenas captar o que os autores anteriores, especialmente Kant, visaram.". (FREGE, 1980, p. 206, nota do autor)

Kant define e discute os conceitos da natureza *a priori* ou *a posteriori*, sintética ou analítica das verdades aritméticas em sua obra intitulada "Crítica da Razão Pura" (1781) (*Kritik der Reinen Vernunft*). O filósofo entende que, dada uma proposição na sua forma redutível *S* é *P*, temos, basicamente, dois tipos de juízos, a saber: os juízos analíticos (*analytisches Urteil*) e os juízos sintéticos (s*ynthetischen Urteilen*).

Tais juízos podem ser definidos do seguinte modo: (i) um juízo é analítico se e somente se o predicado *P* pertence ao sujeito *S*, por exemplo, o juízo "Todos os corpos são extensos" é um juízo analítico, pois o conceito de extensão é intrínseco aos corpos, sem o qual não seria possível se referir e compreender o conceito de corpo; (ii) um juízo é sintético se e somente se o predicado *P* não pertence ao sujeito *S*, por exemplo, o juízo "Todos os corpos são pesados" é um juízo sintético, pois o conceito de pesado não é intrínseco ao conceito de corpo, podendo ocorrer em alguns corpos e outros não, constituindo-se, então, em um acidente do conceito de corpo.

No caso dos juízos sintéticos, torna-se necessário recorrer à empiria, isto é, a uma investigação para verificar *a posteriori* se todos os corpos são pesados. Pelo contrário, no caso dos juízos analítico, o significado de extensão do conceito não exige qualquer investigação empírica, pois seu significado é decorrente de uma análise das características essenciais e *a priori* do predicado, características sem as quais não é possível compreendê-lo.

Além dos juízos supracitados, existem os juízos sintéticos *a priori* (*synthetischen Urteilen apriori*), que se encontram entre os juízos analíticos e sintéticos. Um juízo é sintético *a priori* se e somente se o predicado *P*, embora não esteja contido no sujeito *S*, todavia lhe pertence. O exemplo dado por Kant é o juízo "Tudo o que acontece tem uma causa". É intrínseco ao sujeito "o que acontece" o conceito de tempo, condição para a causalidade, mas não é intrínseco a este sujeito o conceito de "ter uma causa", pois exige uma verificação *a posteriori*. Kant diz que todas as ciências são elaborações de juízos sintéticos *a priori*, pois são em parte *a priori* e em parte *a posteriori*.

Sobre os juízos matemáticos, em especial, afirma o filósofo: "Os juízos matemáticos são todos sintéticos.". (KANT, B15), isto é, são juízos sintéticos a priori, pois "[...] as verdadeiras proposições matemáticas são sempre juízos *a priori* e não empíricos, porque comportam a necessidade, que não se pode extrair da experiência.". (KANT, B15). Desse modo, a soma 7 + 5, embora seja uma verdade *a priori*, exige nossa capacidade de intuição dos objetos empíricos do mundo, pois para elaborar o juízo, neste caso, torna-se necessário recorrer a "[...] ajuda da intuição que corresponde a um deles, por exemplo, os cinco dedos da mão ou [...] cinco pontos, e assim acrescentar, uma a uma, ao conceito de sete, as unidades do número cinco dadas na intuição.". (KANT, B16). Isso quer dizer que, no caso dos juízos matemáticos e dos juízos da ciência em geral, todo o conhecimento se inicia com a experiência, o que não quer dizer, no entender de Kant (Cf. B2) que todo este conhecimento derive da própria experiência.

Assim, ao recorrer à intuição para justificar os juízos sintéticos *a priori*, Kant se coloca no âmbito da investigação da Teoria do conhecimento cuja questão central pode ser assim resumida: "[…] o verdadeiro problema da razão pura está contido na seguinte pergunta: como são possíveis os juízos sintéticos a priori?". (KANT, B19)

Comparando os propósitos de Kant com o projeto de Frege sobre a natureza das verdades aritméticas, podemos dizer que enquanto Kant investiga a possibilidade dos juízos sintéticos *a priori*, recorrendo a uma crítica das faculdades da razão e construindo, para isso, uma teoria do conhecimento, Frege advoga a distinção da natureza dos juízos matemáticos, em particular dos juízos aritméticos, no plano não de uma teoria do conhecimento, mas no plano da demonstração lógica, isto é, da justificação lógica da emissão de um juízo. Sobre esta distinção, escreve Frege: "A distinção entre *a priori* e a *posteriori*, sintético e analítico, concernem, a meu ver, não ao conteúdo do juízo, mas à justificação de emissão do juízo.". (FREGE, 1980, p. 206), pois o que

> […] estão em julgamento não são as condições psicológicas, fisiológicas e físicas que tornam possível formar na consciência o conteúdo do juízo, nem tampouco a maneira como alguém mais, talvez erroneamente, chegou a tomá-la por verdadeira, mas sim aquilo sobre o que se assenta mais fundamentalmente a justificação de ser ela tomada como verdadeira. (FREGE, 1980, p. 206)

Nesse sentido, Frege entende que "A questão é assim retirada do domínio da psicologia e remetida, tratando-se de uma verdade matemática, ao da matemática. Importa então encontrar sua demonstração e nela remontar até as verdades primitivas.". (FREGE, 1980, p. 206). Portanto, se se realiza uma demonstração recorrendo-se às questões de fato, isto é, às questões que envolvam "[…] verdades indemonstráveis e sem generalidade, implicando enunciados acerca de objetos determinados […]" (FREGE, 1980, p. 207), então a verdade é, no seu entender, *a posteriori*, mas "Se, pelo contrário, é possível conduzir a demonstração apenas a partir de leis gerais que não admitem nem exigem demonstração, a verdade é *a priori*.". (FREGE, 1980, p. 207)

Podemos dizer, mesmo que brevemente, que Frege tece uma crítica a Kant quanto a sua concepção sobre a natureza dos juízos da aritmética. Comenta Michel Potter (cf. 2010, p. 8) que a crítica de Frege a Kant consiste na tese de que as proposições aritméticas não são juízos sintéticos *a priori*. Segundo o comentador, ao fazer essa crítica, Frege distingue, por um lado, juízos aritméticos e, por outro, juízos geométricos, pois apenas as proposições da Geometria dependem da estrutura espaço-temporal da realidade, enquanto que as verdades das proposições da Aritmética são obtidas por demonstração lógica, no plano de justificação das necessidades lógicas. Quanto à distinção de natureza entre os juízos aritméticos e geométricos, Potter cita aqui a seguinte passagem de *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): "As verdades aritméticas governam o domínio do enumerável. Este é o mais inclusivo; pois não lhe pertence apenas o efetivamente real, não apenas o intuível, mas todo o pensável.". (FREGE, 1980, p. 217).

Desse modo, a principal objeção de Frege a Kant é que a verdade dos juízos aritméticos não depende de intuições espaço-temporais realizadas pelo sujeito do conhecimento, mas obtidas apenas pela necessidade da justificação lógica da demonstração. Isso quer dizer que as proposições aritméticas são juízos analíticos, pois não dependem das nossas intuições e de questões de fato.

Assim, a necessidade do projeto fregeano, anunciado em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), de demonstrar os princípios da aritmética, investigando, para isso, o conceito de número cardinal, tem, como resultado, a seguinte decisão quanto à natureza dos juízos aritméticos:

> Se de outros pontos de vista e de maneira fundamentada concluirmos que os princípios da aritmética são analíticos, isto testemunhará também em favor de sua demonstrabilidade e da definibilidade do conceito de número. As razões do caráter a posteriori destas verdades terão um efeito contrário. Por isso, cabe inicialmente submeter estes pontos de disputa a um rápido exame. (FREGE, 1980, p. 207)

Mas, embora o projeto de Frege já estivesse presente e fosse enunciado, mesmo que de modo informal e não axiomatizado, em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), é em 1893 que ele apresenta uma axiomatização de seu projeto de fundamentação da aritmética, o que resultou em sua *magnum opus*, a saber: sua obra intitulada "As Leis Fundamentais da Aritmética: conceitograficamente deduzidas" (1903) (*Grundgesetze der Arithmetik:*

begriffsschrift abgeleitet).[63] *As Leis Fundamentais da Aritmética* é publicada em dois volumes, sendo o primeiro publicado em 1893 e o segundo em 1903.

Podemos dizer que a totalidade considerável dos trabalhos de Frege esteve subordinada a este seu grande projeto. Segundo Michael Dummett (1981, p. 6), em *A Interpretação da Filosofia de Frege*, quase todos os seus escritos de 1879 a 1903 estão subordinados ao projeto de fundamentação da Aritmética na Lógica, cuja expressão máxima é *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893).

Diz Montgomery Furth (cf. 1964, p. 1) que essa obra foi para Frege o culminar do trabalho de metade de uma vida levando a cabo o projeto de fundamentação rigorosa e detalhada da análise do conteúdo expresso por proposições verdadeiras da Aritmética, cuja análise resultou na tese de que tais proposições não são irredutivelmente matemáticas e também não são proposições de natureza sintéticas *a priori*, como defendia Kant, mas eram proposições essencialmente analíticas, de natureza lógico-matemática, pois derivam de princípios lógicos gerais.

Diz Frege que *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893) é estruturada respeitando-se rigorosamente o método axiomático ao modo do método euclidiano. Sobre isso, diz no Prólogo da obra: “O ideal de um método estritamente científico da matemática que procurei realizar aqui e que bem poderia ser denominado euclidiano [...]”. (FREGE, 2005, p. 14 -15). Ainda diz: “Por isso há que se esforçar para reduzir ao máximo o número de leis primitivas, demonstrando tudo o que seja demonstrável. Além disso, e assim vou mais além de Euclides, exijo que se mencionem previamente todos os modos de dedução e de inferência empregado.”. (FREGE, 2005, p. 14 -15)

No *Prólogo* suas primeiras palavras apresentam logo o seu grande objetivo: “Neste livro encontram-se axiomas nos quais se baseia a aritmética, demonstrados com sinais especiais (*Zeichen bewiesen*), cujo conjunto eu chamo de conceitografia[64] (*Begriffsschrift*).”. (FREGE, 2005, p. 13). Estes sinais especiais constituem uma linguagem lógica para a

---

[63] Designaremos esta obra apenas por “As Leis Fundamentais da Aritmética”.

[64] Traduz-se “Begriffsschrift” em português por “conceitografia” ou “ideografia”. Em inglês aparecem as ocorrências “ideography” e “concept writing”. A opção por “ideography” é adotada, por exemplo, por Heijenoort (p. 11, 1967) na tradução para o inglês (cf. FREGE, 1967) do *Begriffsschrift* sob a justificativa do autor de que esta palavra foi usada por Jourdain em um *paper* de 1912 lido e anotado por Frege. Besson (FREGE, 1999) traduz para o francês por “idéographie”. Já J. L. Austin, na tradução para o inglês de *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), traduz por “concept writing” (cf. FREGE, p. 103, 1960). Entendemos que a tradução mais adequada para o português seja “conceitografia”, pois “ideografia” está mais próxima, etimologicamente, à palavra “ideia”, o que pode trazer confusões com aproximações do sentido psicológico da palavra “ideia”, já que Frege combate o psicologismo em Lógica.

expressão da dedução e do pensamento formal. Frege escreve, então, uma obra dedicada à elaboração desta linguagem.

Comenta Michel Potter que *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893) têm, em resumo, dois propósitos centrais a partir dos quais foi motivada sua elaboração. Um deles consistia em demonstrar que a “[…] sua afirmação de que as leis básicas da aritmética podem ser derivadas formalmente de uma definição explícita de números oferecidas em *Grundlagen*, fazendo uso em todos os estágios de nada mais do que a pura lógica.”. (POTTER, 2010, p. 16, tradução nossa)[65]. O outro propósito central encontrava-se no desafio de “[…] estender o sistema formal de que ele havia fornecido em *Begriffsschrift* de modo a dar conta da noção de extensão de um conceito.”. (POTTER, 2010, p. 16, tradução nossa)[66]

A noção de extensão de um conceito será analisada na Seção 1.7, já a *Conceitografia* (1879) (*Begriffsschrift)*, uma das obras centrais na qual Frege apresenta sua linguagem formal utilizada, como dito acima, no sistema formal de *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893; 1903), apresentaremos na próxima seção.

1.2. A *Conceitografia*

Faremos, nesta seção, uma breve apresentação da *Conceitografia* (1879) (*Begriffsschrift)*, falaremos de sua importância para o projeto de Frege e mencionaremos sua relevância para a História da Lógica.

Publicado em 1879, o título completo da *Conceitografia* é: “Conceitografia, uma linguagem de fórmulas para o pensamento puro, imitada da linguagem aritmética” (*Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*).[67] Sobre a *Conceitografia* (1879), escreve Frege no *Prefácio* da obra que

> Ela [a *Conceitografia*] serve assim primordialmente para testar da forma mais segura a validade de uma cadeia de inferência e mostrar qualquer pressuposto que possa ser involuntariamente introduzido, de modo que a sua origem possa ser investigada. Por isto desiste-se de expressar qualquer coisa que não tenha significado para a dedução. (FREGE, 2008, p. 131)

[65] “[…] his claim that the basic laws of arithmetic can be derived formally from the explicit definition of numbers offered in *Grundlagen*, making use at every stage of nothing other than pure logic.”.

[66] “[…] to extend the formal system he had provided in Begriffsschrift so as to give an account of the notion of the extension of a concept.”.

[67] O registro da publicação original desta obra é: *Begriffschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprasche des reinen Denkens*, L. Nebert, Halle A/S., 1879, X, 88p. Designaremos esta obra apenas por “Conceitografia”. A título de curiosidade, consta que a palavra “Begriffsschrift” não teria sido cunhada por Frege, mas por Alexander von Humboldt (1769 – 1859). (Cf. POTTER, 2010, p. 3)

Diz Frege que coube utilizar a expressão “linguagem de fórmulas para o pensamento puro”, pois essa linguagem procura expressar apenas o que há de essencial e necessário para a expressão da dedução e para a expressão do pensamento formal. Sobre isso, escreve: “Como me limitei na época à expressão das relações que são independentes das características particulares das coisas, pude também utilizar a expressão ‘linguagem por fórmulas do pensamento puro’.”. (FREGE, 2008, p. 132)

No seu texto intitulado “Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia” (1882) (*Uber die wissenschaftliche Berechtingung einer Befriffsschrift*) Frege diz o seguinte sobre os propósitos de uma conceitografia “[...] deve possuir para as relações lógicas expressões simples que, limitadas em número ao necessário, possam ser fácil e seguramente dominadas. Estas formas devem ser apropriadas a se associarem ao conteúdo da maneira mais íntima.”. (FREGE, 1980, p. 194)

Quanto à aplicação desta linguagem, diz Frege, ainda em *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia* (1882): “Tentei, pois, completar a linguagem de fórmulas da matemática com sinais para as relações lógicas, de modo a resultar para o domínio da matemática uma conceitografia da espécie que apresentei como desejável. O emprego de meus sinais em outros domínios não fica por isso excluído.”. (FREGE, 1980, p. 195), pois, como diz ele “As relações lógicas repetem-se em toda a parte, e os sinais para os conteúdos particulares podem ser escolhidos de modo a se acomodarem à armação da conceitografia.”. (FREGE, 1980, p. 195)

A ideia de emprego dos sinais da *Conceitografia* (1879) em outros domínios parece ser algo possível no entendimento de Frege e desejável por ele. Ele menciona, no Prefácio da *Conceitografia*, o ideal de uma linguagem universal, lançado, originalmente, por Gottfried Leibniz (1646 – 1716) no século XVII.

Leibniz é o primeiro a lançar a ideia de uma linguagem concebida cientificamente para auxiliar o homem a pensar de modo mais claro possível, sem erros de raciocínio, onde todas as verdades poderiam ser reduzidas a um cálculo. Essa linguagem é chamada por ele em latim por “lingua philosophica” ou “characteristica universalis”. Sobre isso, escreve Leibniz no seu trabalho enciclopédico intitulado “Plus Ultra” (1679-1682) que

> [...] ainda ninguém tentou uma linguagem ou característica que inclui ao mesmo tempo ambas as artes da descoberta e do julgamento, isto é, aquela cujos sinais ou caracteres serve para o mesmo propósito que os sinais aritméticos serve para os números e sinais algébricos para as quantidades tomadas abstratamente. (LEIBNIZ, [G., VII, 184-89], 1989, p. 221, tradução nossa)[68]

Frege considera que embora o projeto de Leibniz não possa ser alcançado de uma única vez devido a sua grandiosidade, não se deve duvidar, com a linguagem da *Conceitografia* (1879), da aproximação lenta e gradual aos propósitos leibnizianos. Diz Frege que é possível a aplicação da *Conceitografia* (1879) a campos particulares, por exemplo, no campo da Aritmética, da Geometria, da Química, da Física e demais áreas científicas. Com isso, ele entende que a *Conceitografia* (1879) pode ser o centro adjacente das aplicações particulares em cada domínio: "Partindo dela pode-se, com grande esperança de sucesso, preencher as lacunas das linguagens por fórmulas existentes, reunir as regiões até então separadas em um único domínio e estendê-lo aos campos nos quais até então tem faltado tal linguagem.". (FREGE, 2013, p. VI)

De modo geral, pode-se dizer (cf. POTTER, 2010, p. 4-5) que as principais inovações da linguagem apresentada na *Conceitografia* (1879) para o desenvolvimento da Lógica foram as seguintes: (i) Introdução de predicados como funções, cuja notação utilizada por ele é a seguinte: "Φ(A)" e "Ψ(A, B)"; (ii) Apresentação de um método para apresentar generalidade múltipla, chamado hoje de "Quantificação Lógica", que na linguagem moderna é representado pelo símbolo "∀" (que se lê "para todo"), chamado de "Quantificação Universal", e pelo símbolo "∃" (que se lê "existe ao menos um"), chamado de "Quantificação Existencial". A quantificação só tem sentido se for realizada sobre algo; desse modo ela encontra-se associada a variáveis e funções, por exemplo, $\forall x\ \exists y\ \mathrm{R}xy$, tal que as variáveis que nelas ocorrem são espaços reservados*;* (iii) Introdução do sinal vertical "|", que ele chamou por "barra de julgamento" (S*enkrechte Urtheilsstriche*), para expressar o juízo sobre algo, e do sinal horizontal "—", que ele chamou por "barra de conteúdo" (*Strich Inhaltsstrich*), para transformar a barra de julgamento, que expressa um juízo sobre algo, em conteúdo julgável; a junção entre os sinais resulta no sinal "|—".

[68] "[...] yet no one has attempted a language or characteristic which includes at once both the arts of discovery and of judgment, that is, one whose signs or characters serve the same purpose that arithmetical signs serve for numbers, and algebraic signs for quantities taken abstractly.".

Essa distinção entre barra de julgamento e barra de conteúdo se faz necessária, pois distingue sentenças em que se realiza, por exemplo, uma suposição (a sentença “Se 2 + 3 = 5”, por exemplo) de sentenças que afirmam um valor de verdade (a sentença “2 + 3 = 5 é verdadeiro”, por exemplo). Escreve Frege: “Esta separação entre o julgar e aquilo sobre o qual se julga parece-me indispensável, pois, de modo contrário, não poderíamos exprimir uma mera suposição, o estabelecimento de um caso, sem fazer simultaneamente um juízo sobre seu surgimento.”. (FREGE, 2009, p. 99 – 100). O sinal “|—” expressa, então, que um determinada sentença é verdadeira. Essa distinção se torna mais clara quando simplesmente escrevemos “2 + 3 = 5” e quando escrevemos “|— . 2 + 3 = 5”. No primeiro caso, estamos afirmando que a soma de um lado da equação é igual a outro lado, já no segundo caso não estamos apenas afirmando, mas dizendo que a igualdade da referida equação é o valor de verdade verdadeiro. (Cf. FREGE, 2009, p. 100)

A contribuição e grandiosidade da *Conceitografia* (1879) para a História da Lógica pode ser comparada, segundo historiadores da Lógica, ao *Organon* de Aristóteles. Bocheński, em *Uma História da Lógica Formal*, após descrever e discutir, em seu livro, as obras de vários outros lógicos, faz uma síntese da importância dessa obra de Frege:

> Sua *Begriffschrift* pode apenas ser comparada com outra obra em toda a História da Lógica: os *Analíticos Primeiros* de Aristóteles. Os dois não podem ser colocados no mesmo nível, pois Aristóteles foi o fundador da Lógica, enquanto Frege só poderia, como resultado, desenvolvê-la. (BOCHEŃSKI, 1961, p. 268, tradução nossa)[69]

O notável, nesse sentido, é que Kant, no *Prefácio da Segunda Edição* (1787) da *Crítica da Razão Pura* (1781), considerou a Lógica, referindo-se à Lógica Aristotélica, acabada, sem acréscimos a serem feitos devido a sua perfeição: “Pode reconhecer-se que a *lógica*, desde remotos tempos, seguiu a via segura, pelo fato de, desde Aristóteles, não ter dado um passo atrás […] Também é digno de nota que não tenha até hoje progredido, parecendo, por conseguinte, acabada e perfeita […]”. (KANT, B VIII, grifo do autor). Em seguida, ainda diz Kant: “Não há acréscimos, [...] os limites da lógica estão rigorosamente determinados por se tratar de uma ciência que apenas expõe minunciosamente e demonstra rigorosamente as regras formais de todo o pensamento [...]”. (KANT, B VIII)

[69]“His *Begriffsschrift* can only be compared with one other work in the whole history of logic, the *Prior Analytics* of Aristotle. The two cannot quite be put on a level, for Aristotle was the very founder of logic, while Frege could as a result develop it.”.

William Kneale e Marta Kneale, em *O Desenvolvimento da Lógica*, um dos livros de História da Lógica mais citados do século XX, dizem que "A *Begriffschrift* de Frege é o primeiro sistema realmente compreensivo de lógica formal […]" (KNEALE; KNEALE, 1968, p. 515). Escrevem eles ainda que "A obra de Frege, ao contrário, contém tudo o que é essencial em lógica moderna e não é injusto nem para os seus precursores nem para os seus sucessores, dizer que 1879 é a data mais importante da nossa disciplina.". (KNEALE; KNEALE, 1968, p. 515)

Dizem, também, Robert Blanché e Jacques Dubucs, em *História da lógica*, que, de um modo geral, deve-se "[...] a Frege, além da primeira apresentação satisfatória da lógica sob a forma de um sistema axiomatizado, a maior parte das noções de base da lógica moderna.". (BLANCHÉ, DUBUCS, 1996, p. 325). Dentre estas noções, podemos destacar "Em particular, o ter ido buscar as matemáticas a noção de função para a análise da proposição é um passo decisivo na renovação da moderna lógica.". (BLANCHÉ, 1996, p. 324). É a noção de função que estudaremos na próxima seção.

1.3. Função

Um dos primeiros registros mais explícitos do conceito de função proposicional na História da Lógica aparece na *Conceitografia* (1879). O conceito de função proposicional surge com o que Frege chama por "função" (*Function*). Veremos, nesta seção, como Frege introduz o termo "função" na *Conceitografia* (1879).

Frege abre a *Conceitografia* (1879), após o Prólogo, com uma seção que ele chama por "Definição dos símbolos". Logo no início o autor faz uma distinção que nos parece central: letras para expressar validade geral das proposições e letras com significado particular. Escreve ele:

> O primeiro consiste em letras, das quais cada uma representa ou um número indeterminado ou uma função indeterminada. Esta indeterminação torna possível a utilização de letras para expressar a validade universal de proposições, como em $(a + b)\ c = ac + bc$. O outro tipo consiste de sinais, tais como +, —, √, 0, 1, 2, dos quais cada um tem o seu significado particular. (FREGE, § 1, 1993, p. 1, tradução nossa)[70]

[70] "Die erstere umfasst die Buchstaben, von denen jeder entweder eine unbestimmt gelassene Zahl oder eine unbestimmt gelassene Function vertritt. Diese Unbestimmtheit macht es möglich die Buchstaben zum Ausdrucke der Allgemeingiltigkeit von Sätzen zu verwenden wie in $(a + b)\ c = ac + bc$. Die andere Art umfasst solche Zeichen wie +, —, √, 0, 1, 2 von denen jedes seine eigenthümliche Bedeutung hat.".

Desse modo, as letras são utilizadas para expressar algo indeterminado. A expressão da indeterminação torna possível alçar a generalidade, pois torna possível "expressar a validade universal de proposições" por oposição ao significado particular de um objeto determinado, como números e operações. Diz Frege: "Os primeiros são *letras* e isso servirá principalmente para expressar *generalidade*.". (FREGE, § 1, 1993, p. 1, grifo do autor, tradução nossa).[71] Uma das expressões indeterminadas que se utiliza de letras é a função.

Na *Conceitografia* (1879) Frege dedica uma seção, intitulada "Funções", para introduzir e definir o conceito e termo "função" (*Function*). Nesta seção, ele define, também, argumento (*Argument*), um sinal que completa a função e que tem um significado particular. Ele inicia esta seção do seguinte modo:

> Suponha-se que o fato de que o hidrogênio é mais leve do que o dióxido de carbono seja expresso na nossa linguagem formal, então podemos substituir o sinal de hidrogênio pelo de oxigênio ou de nitrogênio. Assim, o sentido muda no modo como "oxigênio" ou "nitrogênio" estão na relação que anteriormente era do "hidrogênio". Se nós pensarmos que a expressão pode ser alterada desta maneira, ela divide-se em um componente constante, que representa a totalidade das relações, e um componente objeto, que está nestas relações. (FREGE, 2013, p. 15, tradução nossa)[72]

A ideia, então, é que o sinal "hidrogênio", que expressa um objeto e compõe a proposição "O hidrogênio é mais leve do que o dióxido de carbono", pode ser substituído pelos sinais "oxigênio" ou "nitrogênio". Com esta substituição, embora a proposição mude, pois passa a expressar, com isso, outro fato, há algo que permanece estável na proposição, a saber: a expressão "é mais leve que o dióxido de carbono".

Outro exemplo, mencionado por Frege, é a proposição "O dióxido de carbono é mais pesado que o hidrogênio". Esta proposição não é a mesma que a proposição "O hidrogênio é mais leve do que o dióxido de carbono", citada no parágrafo acima, pois embora os sinais "hidrogênio" e "dióxido de carbono" ocorram em ambas as proposições, a relação entre estes sinais, expressa em cada uma das proposições, não é a mesma. Se na primeira proposição o

[71] "Die erstern sind die *Buchstalben*, und diese sollen hauptsächlich zum Ausdrucke der *Allgemeinheit* dienen.".
[72] "Denken wir den Umstand, dass Wasserstoffgas leichter als Kohlensäuregas ist, in unserer Formelsprache ausgedrückt, so können wir an die Stelle des Zeichens für Wasserstoffgas das Zeichen für Sauerstoffgas oder das für Stickstoffgas einsetzen. Hierdurch ändert sich der Sinn in der Weise, dass 'Sauerstoffgas' oder 'Stickstoffgas' in die Beziehungen eintritt, in denen zuvor 'Wasserstoffgas' stand. Indem man einen Ausdruck in dieser Weise veränderlich denkt, zerfällt derselbe in einen bleibenden Bestandtheil, der die Gesammtheit der Beziehungen darstellt, und in das Zeichen, welches durch andere ersetzbar gedacht wirdt, und welches den Gegenstand bedeutet, der in diesen Beziehungen sich befindet.".

que muda é o sinal “hidrogênio” e o que permanece estável é a expressão “é mais leve que o dióxido de carbono”, na segunda, o que muda é o sinal “dióxido de carbono” e o que permanece é a expressão “é mais pesado que o hidrogênio”. Neste segundo caso, o sinal “dióxido de carbono” pode também ser substituído por outros sinais, por exemplo, o sinal “ácido clorídrico” ou “amônia”.

Por outro lado, sejam as proposições “A circunstância de que o dióxido de carbono é mais pesado que o hidrogênio” e “A circunstância de que o dióxido de carbono é mais pesado que o oxigênio”; se consideramos “hidrogênio” e “oxigênio” os sinais que podem ser substituídos, então a expressão “A circunstância de que o dióxido de carbono é mais pesado que” é a mesma, presente em cada uma das proposições supracitadas, sendo que o que muda são os sinais “hidrogênio” ou “oxigênio”.

Assim, Frege nos faz observar que há elementos na proposição que podemos substituir por outros e, também, há elementos que permanecem estáveis. Nesse sentido, em termos gerais, diz ele:

> *Se em uma expressão, cujo conteúdo não necessita tornar-se um julgamento, se um símbolo simples ou composto tem uma ou mais ocorrências e se considerarmos esse sinal como substituível em todos ou em algumas destas ocorrências por outra coisa (mas em todos os lugares pela mesma coisa), então nós chamamos a parte que permanece invariante na expressão uma função e a parte substituível de o argumento*. (FREGE, 2013, p. 18, grifo do autor, tradução nossa)[73]

Ele designa, então, a parte estável ou invariável da proposição de “função” (*Function*) e a parte que não é estável de “argumento”[74] (*Argument*). Função e argumento são formalmente expressos por Frege *na Conceitografia* (1879) do seguinte modo:

> *Para expressar uma certa função do argumento A, deixamos A entre parênteses seguido por um caracter,* tal como, por exemplo: *Φ(A)*. *Também*

[73] “*Wenn in einem Ausdrucke, dessen Inhalt nicht beurtheilbar zu sein braucht, ein einfaches oder zusammengesetztes Zeichen an einer oder an mehren Stellen vorkommt, und wir denken es an allen oder einigen dieser Stellen durch Anderes, überall aber durch Dasselbe ersetzbar, so nennen wir den hierbei unveränderlich erscheinenden Theil des Ausdruches Function, den ersetzbaren ihr Argument.*”.

[74] Argumento pode, também, ser entendido na Lógica como o encadeamento de proposições com um final conclusivo. Nesse sentido, diz-nos Aristóteles nos *Tópicos* (101b – 15) que “[...] os argumentos surgem das proposições [...]” e não de seus elementos constitutivos internos, cuja análise se verá posteriormente, em especial com Frege. Em Frege o termo “argumento” significa, como dissemos, aquilo que substitui a variável na função. Frege parece ser um dos primeiros a utilizar argumento neste segundo sentido, com significado associado à função.

> *Ψ(A,B) significa uma função de dois argumentos A e B, a qual não é especificada. Aqui representamos o lugar de A e B nos parênteses, que A e B assumem na função*, mesmo se esse indivíduo são vários tanto para *A* ou para *B*. *É por isso, em geral, que Ψ(A,B) difere de Ψ(B,A)*. As funções indeterminadas de mais argumentos se expressam de um modo correspondente. (FREGE, 2013, p. 18, grifo do autor, tradução nossa)[75]

Nesse sentido, a proposição "O hidrogênio é mais leve do que o dióxido de carbono" pode ser expressa na forma da linguagem da *Conceitografia* (1879) como tendo apenas um argumento; nesse caso, a nossa análise recairia sobre o predicado da proposição, e podemos ter duas expressões: 1) "*A* é mais leve do que o dióxido de carbono"; e 2) "O hidrogênio é mais leve do que *B*", tal que *A* refere-se ao hidrogênio e *B* refere-se ao dióxido de carbono. Ambas podem ser expressas formalmente por $\Phi(A)$ ou $\Psi(B)$ respectivamente, tal que Φ e Ψ expressam funções diferentes; o termo Φ refere-se à expressão "é mais leve do que o dióxido de carbono" e o termo Ψ se refere à expressão "O hidrogênio é mais leve do que".

Mas, a mesma proposição pode ser expressa como tendo dois argumentos ao mesmo tempo, e nesse caso, analisamos não as relações entre o sujeito e o predicado propriamente, mas as relações em jogo entre os sujeitos. Nesse sentido, temos a expressão "*A* é mais leve que *B*" tal que temos dois argumentos, concomitantemente. Esta função pode ser expressa, formalmente, por $\Psi(A,B)$. Notemos que se considerássemos a expressão "*B* é mais leve que *A*" a expressão seria $\Psi(B,A)$. Agora, no caso da expressão "*A* é menos leve que *B*" a função não é mais a mesma que a função expressa por $\Psi(A,B)$ no caso "*A* é mais leve que *B*", devendo ser expressa por outra notação, podendo ser assim expressa: $\Phi(A,B)$.

Frege conclui a seção da *Conceitografia* (1879), dedicada à função, dizendo que o conceito de função na Análise em Matemática é muito mais limitado do que o que ele desenvolve na referida obra. "Isso mostra claramente que o conceito de função na análise, que em geral eu utilizei como um guia, é muito mais limitado do que foi desenvolvido aqui.". (FREGE, 2013, p. 19, grifo do autor, tradução nossa).[76] Essas linhas finais da seção parecem expressar a necessidade de se explicitar mais precisamente o que ele entende por função em

---

[75] "*Um eine unbestimmte Function des Argumentes A auszudrücken, lassen wir A in Klammern eingeschlossen auf einen Buchstaben folgen* z. B.: *Φ(A)*. *Ebenso bedeutet Ψ(A,B) eine Function der beiden Argument A und B, die nicht näher bestimmt ist*. *Hierbei vertreten die Stellen von A und B in der Klammer die Stellen, welche A und B in der Function einnehmen*, einerlei ob dies einzelne, oder für *A* sowohl wie für *B* mehre sind. *Daher ist Ψ(A,B) von Ψ(B,A) im Allgemeinen verschieden*. Diesem entsprechend werden unbestimmte Fuctionen mehrer Argumente ausgedrückt.".

[76] "Man sicht hieran besonders klar, dass der Functionsbegriff der Analysis, dem ich mich im Allgemeinen angeschlossen habe, weit beschrAnkter ist als der hier entwickelte.".

Matemática e qual é a novidade do conceito de função proposto por ele, o que parece prenunciar o seu artigo intitulado “Função e Conceito” (*Funktion und Begriff*), publicado posteriormente, em 1881.

Embora o conceito de função proposicional apareça de modo mais explícito na *Conceitografia* (1879), não podemos afirmar que Frege foi o único responsável pela sua introdução na História da Lógica. Há registros explícitos do conceito de função proposicional também nos trabalhos de Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), quando o mesmo introduz o conceito de “rema” (*rhema*) em 1867, no escrito intitulado “Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica” (*Upon Logical Comprehension and Extension*). Sobre as ideias contidas neste escrito e noções gerais do conceito de rema, consultar o Anexo deste trabalho intitulado “Peirce e a função proposicional”.

Do ponto de vista cronológico, podemos dizer, então, que a origem da função proposicional encontra-se nos trabalhos de Peirce e Frege. Esse caráter precursor é registrado, por exemplo, por Bocheński em *Uma História da Lógica Formal*, na seção do livro “Forma Lógica” do seguinte modo:

> Nem De Morgan nem qualquer outro lógico podiam seguir em tão alto nível de abstração como é aqui alcançado. Basicamente, isso é um redescobrimento do conceito escolástico de forma, feito mediante a ampliação do conceito matemático de função, o qual nos referimos a Peirce e Frege. (BOCHENSKI, 1961, p. 320, tradução nossa)[77]

Quando Bocheński menciona Augustus De Morgan (1806 – 1871) nesta passagem, ele se refere ao passo que De Morgan teria dado em direção a expressão da forma lógica quando empregou o símbolo “——” em sentenças categóricas, por exemplo, a sentença “Todo homem é mortal” teria sido simbolizada por “Todo *X* —— *Y*”, tal que o símbolo “——” indica transitividade entre *X* e *Y*. Segundo Bocheński, este símbolo “[…] é quase o juízo puramente formal, sem um único ponto material sobre ele, exceto a transitividade da cópula.”. (BOCHENSKI, 1961, p. 320, tradução nossa)[78]. Nesse sentido, ainda diz: “Mas ‘é’ é mais intenso do que o símbolo ‘——’, que significa apenas cópula transitiva: pois ‘é’ tem mais do

---

[77] “Neither De Morgan nor any other logician can remain at so high a level of abstraction as is here achieved. Basically, this is a rediscovery of the scholastic concept of form, made through a broadening of the mathematical concept of function, for which we refer to Peirce (42.02) and Frege.”.

[78] “[...] is nearly the purely formal judgment, with not a single material point about it, except the transitiveness of the copula.”.

que transitividade. Eliminar a palavra transitivo e esta linha [o símbolo '——'] mostraria a forma pura do juízo.". (BOCHENSKI, 1961, p. 320, tradução nossa)[79]

O que nos parece interessante observar é que, na obra intitulada "Projeto de um Sistema Proposto de Lógico" (1860) (*Syllabus of a Proposed System of Logi*c), De Morgan utiliza-se de outra notação que, também, expressa um grau de abstração elevado para expressar forma lógica da proposição antes mesmo da introdução do conceito de função proposicional realizada por Peirce e Frege.

Nessa notação, De Morgan utiliza-se de um símbolo similar ao sinal de parênteses.[80] Escreve ele: "*X*, totalmente dito, é *X*) ou (*X*; já *X*, particularmente dito, é)*X* ou *X*(." (DE MORGAN, 1860, § 21, p. 14, tradução nossa).[81] O autor usa a notação "*X*)) *Y*" para simbolizar a sentença "Todos os *X*s são *Y*s" (Sentença Universal Afirmativa); a notação "*X*)·(*Y*" para simbolizar a sentença "Alguns *X*s não são *Y*s" (Sentenças Universais Negativa); a notação "*X*( )*Y*" para simbolizar a sentença "Alguns *X*s são *Y*s" (Sentença Particular Positiva); e a notação "*X*(·(*Y*" para simbolizar a sentença "Alguns *X*s não são *Y*s" (Sentença Particular Negativa).

Com tais notações, pode-se operar apenas com a forma das sentenças categóricas do seguinte modo: se escrevermos apenas "))", expressamos somente Sentenças Universais Afirmativas, se escrevermos apenas ")·("", expressamos somente Sentenças Universais Negativas, e assim por diante. De Morgan utiliza-se deste simbolismo para apresentar e operar com o silogismo aristotélico em todas as suas figuras. O tipo de silogismo "Todo homem é mortal. Sócrates é homem. Logo, Sócrates é mortal", por exemplo, é assim expresso:)), ( ), logo ( ).

Embora De Morgan tenha dado um passo importante para a expressão da forma da predicação lógica, é somente com o conceito de função proposicional, introduzido, como vimos, por Peirce e Frege, que a forma lógica da predicação assume o modelo atual e se cristaliza nos moldes como é usado pelos lógicos a partir do século XX.

A primeira ocorrência do termo "função proposicional" surgirá em 1903, com a publicação de *Os Princípios da Matemática* (1903) de Russell (1872-1970). Russell, sem

---

[79] "But 'is' is more intense than the symbol '——' which means only transitive copula: for 'is' has transitiveness, and more. Strike out the word transitive, and the last line shews the pure form of the judgment.".

[80] Essa notação é chamada por De Morgan de "spicular" e faz referência à Hamilton: "Eu sigo Sir William Hamilton em chamar esta notação spicular.". (DE MORGAN, 1860, § 21, p. 14, tradução nossa). ["I follow Sir William Hamilton in calling this notation spicular.".].

[81] "Let *X*, totally spoken of, be *X*) or (*X* : let *X*, partially spoken of, be)*X* or *X*(.".

conhecer os trabalhos de Peirce e Frege, introduz, também, o conceito de função proposicional, quando se utiliza pela primeira vez do termo "função proposicional", termo este que ficou mais conhecido e se tornou mais usual na Lógica. Ele parece extrair seu conceito de função proposicional da distinção entre os conceitos de variável real e variável aparente realizada por Giuseppe Peano (1858 – 1932). (cf. RUSSELL, 1903, § 13)

Russell somente toma conhecimento dos trabalhos de Frege no contexto de publicação, e não de produção, de *Os Princípios da Matemática* (1903). Fiel as suas referências, quando toma conhecimento do conceito de função de Frege, ele já se encontrava em vias de publicação de *Os Princípios da Matemática* em 1903. Dando o devido mérito a Frege por tê-lo antecipado, dedica, então, um apêndice de sua obra para fazer menção a Frege e observa a semelhança que há entre o que ele chama por "função proposicional" com o que Frege chama por "função" (*Begriff*): "A palavra *Begriff* é usada por Frege para significar quase a mesma coisa que a função proposicional (e.g. FuB. p. 28); quando há duas variáveis o *Begriff* é uma relação.". (RUSSELL, 1903, § 481, p. 507, grifo do autor, tradução nossa)[82]

Estudaremos o conceito de função proposicional em Russell no Capítulo II, intitulado "Russell e a função proposicional". Para detalhes historiográficos sobre o conhecimento de Peirce sobre os trabalhos de Frege e Russell conferira, também, o Anexo de nosso trabalho intitulado "Peirce, Frege e Russell: notas historiográficas".

Embora Peirce tenha introduzido o conceito de função proposicional em 1867, o modelo de função proposicional de Frege – podendo Russell se colocar nessa tradição –, tornou-se o modelo padrão de expressão da forma lógica da predicação. Sobre essa prevalência do modelo fregeano, escreve Ignacio Angelelli, em *Teoria da Predicação: Clássico vs Moderno*, que "A teoria da predicação fregeana se tornou padrão, tida como certa tanto nos desenvolvimentos posteriores da lógica quanto na corrente principal da filosofia.". (ANGELELLI, 2004, p. 55, tradução nossa)[83]

Esse modelo aparece, por exemplo, nos trabalhos de David Hilbert (1863 – 1943), um dos principais matemáticos e lógicos do século XX. Na obra "Princípios da Lógica Matemática", que Hilbert escreve em colaboração com Wilhelm Ackermann (1896 – 1962), na seção intitulada "Bases metodológicas para o Cálculo de Predicados", dizem os autores

---

[82] "The word *Begriff* is used by Frege to mean nearly the same thing as *propositional function* (e.g. FuB. p.28); when there are two variables, the *Begriff* is a relation.".

[83] "Fregean predication theory became standard, and just taken for granted in the subsequent developments of logic as well as in the mainstream of philosophy.".

que no Cálculo de Predicados "[...] o seguinte método parece natural: separar na interpretação de uma sentença os *objetos* (*individuais*) das *propriedades* (*predicados*) atribuídas a eles e simbolizar ambos explicitamente.". (HILBERT; ACKERMANN, 1950, p. 57, grifo do autor, tradução nossa)[84]; o predicado é no sentido mais geral, pois inclui também relações. Em seguida, ainda escrevem: "Isto é feito através de emprego de *símbolos funcionais com lugares do argumento* (símbolos funcionais *n*-ádicos onde *n* é o número de lugares do argumento) para a interpretação simbólica de predicados, no qual os símbolos que representam os objetos são para substituídos nos lugares do argumento.". (HILBERT; ACKERMANN, 1950, p. 57, grifo do autor, tradução nossa)[85]

Segundo Loomis (2005, p. 3) a concepção de função proposicional de Hilbert e Ackermann é também adotada por Kurt Gödel (1906 – 1978), Rudolf Carnap (1891 – 1970), Alfred Tarski (1901 – 1983), entre outros.

Gödel, em especial, em sua tese de doutorado intitulada "A Completude dos Axiomas do Cálculo Funcional da Lógica" (1930) (*The Completeness of the Axioms of the Functional Calculus of Logic*), onde ele prova a completude do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem, diz que "Os símbolos e terminologia deste trabalho seguem *Hilbert e Ackermann* 1928.". (GÖDEL, 1967, p. 583, nota 3, grifo do autor, tradução nossa).[86] Ainda escreve Gödel: "De acordo com esse trabalho, o cálculo funcional restrito contém as expressões lógicas que são construídas a partir de variáveis proposicionais, *X*, *Y*, *Z*,... e variáveis funcionais (isto é, variáveis para propriedades e relações) do tipo 1, *F*(*x*), G(*x*,*y*), *H*(*x*, *y*, *z*), [...]". (GÖDEL, 1967, p. 583, nota 3, grifo do autor, tradução nossa)[87]

Na seção seguinte, veremos que embora o conceito de função apareça, no conjunto da obra de Frege, pela primeira vez na *Conceitografia* em 1879, tal conceito é discutido com mais propriedade por Frege em *Função e Conceito (*1881).

---

[84] "[…] the following method seems a natural one: to separate in the rendering of a sentence the *objects* (*individual*) from the *properties* (*predicates*) attributed to them and to symbolize both explicitly.".

[85] "This is done by employing *functional symbols with argument places* (*n*-adic functional symbols where *n* is the number of argument places) for the symbolic rendering of predicates, in which symbols representing objects are to substituted in the argument places.".

[86] "In terminology and simbolism this paper follows *Hilbert and Ackermann* 1928.".

[87] "According to that work, the restricted functional calculus contains the logical expressions that are constructed from proposicional vaiables, *X*, *Y*, *Z*, ..., and functional variables (that is, variables for properties and relations) of types 1, *F*(*x*), *G*(*x*,*y*), *H*(*x*, *y*, *z*), [...]".

1.4. Função e conceito

Veremos nesta seção que Frege escreve o artigo intitulado "Função e Conceito" (1881) (*Funktion und Begriff*) para explicitar o que ele entende por função e como sua concepção se diferencia do que se entende comumente por função em Matemática. Com isso, ele explicita o conceito de função já introduzido por na *Conceitografia* (1879). Nesta seção veremos, também, que seu conceito de função se aplica tanto a predicados quanto as proposições.

No seu artigo *Função e Conceito*[88] (1881) Frege expõe algumas das ideias fundamentais de sua *Conceitografia* (1879), rediscute a noção de função (*Funktion*)[89] em Matemática e procura elucidar, conceitualmente, alguns de seus pontos essenciais. Nesse sentido, ele elabora uma nova concepção de função, já introduzida, mas não detalhada, na *Conceitografia* (1879), contrapondo-se, segundo ele, ao que comumente se entendia, na História da Matemática, por função. Escreve ele:

> Meu ponto de partida é o que, em matemática, se chama por função. Esta palavra não teve inicialmente um significado tão amplo quanto o que mais tarde veio a receber. Será bom começar nossas reflexões com o uso originário desta palavra e, só após, considerar suas extensões posteriores. […] Há que se recuar, pois, ao tempo da descoberta da Análise superior, caso se queira saber o que, de início, se entendeu em Matemática pela palavra "função". (FREGE, 2009, p. 82)

Diz Frege que a pergunta "o que é uma função?", isto é, a pergunta pela sua definição, era geralmente respondida do seguinte modo: "por uma função de *x* entende-se uma expressão do cálculo que contenha *x*, uma fórmula contendo a letra *x*". Se aceitarmos essa definição, deveríamos entender que a expressão $2.\ x^3 + x$ seria uma função de *x* e a expressão $2.2^2 + 2$ uma função de 2. Mas, "Esta resposta não nos pode satisfazer na medida em que não distingue

[88] Conferência proferida na reunião de 09 de Janeiro de 1881 da Sociedade de Medicina e Ciências Naturais de Jena e publicada no mesmo ano sob a forma de um opúsculo de 31 páginas, cuja referência original é: *Funktion und Begriff*. H. Pohle. Jena, 1891, II, 31 p. Mas, a publicação mais conhecida é a sua republicação, que aconteceu quase um século depois, a saber: *Funktion, Begriff, Bedeutung: Fünf logische Studien*, ed. G. Patizg, Göttingen, Vandenhoek & Ruprecht, 1966, pp. 17-39.

[89] Na *Conceitografia* (1879) e em *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893) Frege usa a palavra "Function" para se referir à função em *Função e Conceito* (1881) ele se utiliza da palavra "Funktion" para se referir ao mesmo conceito de função. Posteriormente, nos seus últimos escritos, Frege chamará, segundo Michel Potter, o conceito de função por "símbolo de função" para distinguir de quaisquer outros usos do termo função em Matemática: "[...] em seus últimos escritos ele preferiu chamá-la [a função] um símbolo de função, a fim de deixar a palavra 'função' livre para qualquer que seja o que o símbolo se refere.". (POTTER, 2010, p. 13, tradução nossa). ["[...] in his later writings he preferred to call it a function symbol, in order to leave the word 'function' free for whatever the symbol refers to."]

a forma do conteúdo, o sinal do designado, erro este aliás frequente nos escritos matemáticos atuais, inclusive de autores renomados.". (FREGE, 2009, p. 82)

Observa Frege que esse erro se torna mais evidente na Matemática que em outras ciências. Na Matemática a referência de uma expressão matemática ou de um numeral, por exemplo, não é sensorialmente perceptível como o é no caso, por exemplo, de nomes que designam objetos perceptíveis pelos sentidos. Esta tendência da Matemática leva as pessoas a confundirem, por exemplo, a expressão da função e o que é designado por esta expressão, numerais e números, isto é, o sinal e o designado.

Argumenta o autor que se a Matemática fosse uma mera expressão, então poderíamos supor, no caso da relação entre numerais, por exemplo, que se substituíssemos os numerais romanos pelos numerais arábicos, ou mesmo se introduzíssemos um novo numeral, então poderíamos supor que obteríamos objetos aritméticos inteiramente novos, inclusive com propriedades não investigadas, o que é um absurdo. Assim, conclui ele que "[…] uma mera expressão, a forma a ser preenchida por um conteúdo, não pode ser a essência de uma coisa; só o pode ser o próprio conteúdo.". (FREGE, 2009, p. 83), pois, caso contrário, teríamos conclusões absurdas, e a Matemática seria apenas um jogo simbólico e mecânico.

Entretanto, mesmo que admitíssemos, como aponta Frege (cf. 2009, p. 84-85), que as funções, em particular, não fossem uma mera expressão do cálculo, mas que fossem apenas a referência da expressão do cálculo, então, nas expressões "2.1^3+1", "2.2^3+1" e "2.4^3+4", por exemplo, a função seria, neste caso, apenas um número, a saber, 3, 17 e 132, respectivamente. Nesse sentido, mesmo que a palavra "função" seja, como geralmente é, atribuída a expressões que têm a letra x para indicar indefinidamente um número, por exemplo, no caso da expressão "$2. x^3 + x$", ela seria, também, a referência da expressão do cálculo, isto é, ela apenas indicaria indefinidamente um número. Neste caso, não haveria diferença do ponto de vista conceitual se escrevêssemos cada um dos números indicados indefinidamente pela expressão x ou escrevêssemos própria letra x. Assim, se funções fossem números elas não trariam inovações, como trazem para a Aritmética.

Embora x seja uma expressão para indicar os possíveis números que possam ocupá-lo, chegamos, como aponta Frege (cf. 2009, p. 85), à concepção correta de função justamente quando escrevemos "x" para indicar indefinidamente. Desse modo, nas expressões "2.1^3+1", "2.2^3+1" e "2.4^3+1" chegamos à ideia correta de função quando escrevemos 'x' para indicar indefinidamente e passamos a olhar para o que permanece na expressão. O que permanece, no caso de nosso exemplo, é o que há de comum entre tais expressões, isto é, o que designamos de "forma", que pode ser expressa por "$2.x^3+3$". Assim, apesar de na expressão "$2. x^2 + x$" escrevermos o sinal "x" para um número indeterminado e na expressão "$2. 2^2 + 2$" substituirmos x pelo número 2, a expressão em si, isto é, a sua forma, permanece a mesma.

A função ela mesma é, no caso do exemplo já tratado por nós, assim expressa por Frege: "$2. (\ )^2 + (\ )$". Nesse sentido, o que há de essencial na função é o que subsiste ao suprimirmos o x no caso da expressão $2. x^2 + x$ ou ao suprimirmos 2 na expressão $2.2^2 + 2$. Desse modo, apesar de tais expressões poderem resultar em números distintos e poderem ser expressas por sinais diferentes, estes sinais têm algo em comum: designam a mesma função expressa pelos sinais.

A letra "[...] x não deve ser considerada como pertencente à função, pois esta letra só serve para indicar a espécie de complementação de que a função necessita, mostrando os lugares onde o sinal do argumento deve entrar.". (FREGE, 2009, p. 86). Nesse sentido, a letra "x", que vem a ocupar o espaço insaturado da expressão de uma função, indicado pelos parênteses, é o sinal genérico que indica a possibilidade de os elementos ocuparem esse espaço incompleto, saturando-o.[90] O espaço insaturado, expresso pelo sinal "x", é o que pode expressar melhor a função, pois, para o autor, como podemos notar, "A função, por si só, é dita incompleta, necessitada de complementação ou insaturada. É aqui que as funções diferem essencialmente dos números.". (FREGE, 2009, p. 86)

Genericamente, a função é expressa por Frege utilizando-se a letra f ou F, ficando assim indicada "$f(x)$" ou "$F(x)$", cujos parênteses "( )" indicam que o "lugar" está vazio e o sinal x ocupa esse "espaço" insaturado no papel, sendo este o sinal que indica algo que venha a ocupar este lugar. O sinal f ou F expressa qualquer função indefinidamente, pois "Assim como por uma letra se indica um número indefinidamente quando se visa a expressar a generalidade, também se necessita de letras para indicar uma função indefinidamente.". (FREGE, 2009, p. 90)

Frege designa por argumento, com dito na Seção 1.3, o que completa a função. Argumento é, então, o que ocupa o espaço insaturado da função, espaço indicado ou expresso por x. Quando completamos a função com o argumento temos o valor da função para este argumento. Diz ele que "Aquilo que resulta quando se completa a função por seu argumento

[90] Segundo Potter (2010, p. 13), é provável que Frege tenha emprestado da Química os termos "insaturado" (*ungesättigt*) e "saturado" (*gesättigt*).

denominamos ‘o valor da função (*den Wert der Funktion*) para este argumento’.”. (FREGE, 2009, p. 87, grifo nosso)

Entretanto, se ao invés de falarmos de funções com sinais de + ou –, tal como, por exemplo, a função $x^2 - 4x$, do exemplo, acima, tratarmos de funções com sinais de =, <, >, tais que estes sinais formem funções do tipo $x^2 - 4x = 0$ e $2 > 1$, obteremos, então, outra função, distinta das funções que vínhamos mencionando até agora. Pois, enquanto nas funções $2. x^2 + x$ e $x^2 - 4x$, por exemplo, os seus valores são números, nas funções $x^2 = 1$ e $2 > 1$ os seus valores são um *valor de verdade* (*Wahrheitswert*).

Por exemplo, seja o conjunto dos números naturais não-nulos como conjunto universo das operações para a função $x^2 = 1$, e se substituirmos x pelo número 1 ou -1, considerando o conjunto dos números inteiros, essa função assume o valor “verdadeiro” (*Wahre*); porém, se x for substituído pelos demais números desse conjunto, a função assume o valor “falso” (*Falschen*). Sobre isso, nos diz Frege no seu artigo:

> Assim digo: “o valor de nossa função é um valor de verdade” e distingo o valor de verdade do verdadeiro e o valor de verdade do falso. Chamo o primeiro, para abreviar, de o verdadeiro [*das Wahre*], e o segundo, de o falso [*das Falsche*]. Consequentemente, “$2^2 = 4$”, por exemplo, refere-se ao verdadeiro, tal como, digamos, “2^2” se refere a 4. E “$2^2 = 1$” se refere ao falso. Assim, “$2^2 = 4$”, “$2 > 1$”, “$2^4 = 4^2$” referem-se à mesma coisa, a saber, o verdadeiro, de modo que $(2^2 = 4) = (2 > 1)$ é uma igualdade correta. (FREGE, 2009, p. 92)

Nesse sentido, se já temos o valor de uma função, tal como na função $x^2 = 1$, por exemplo, então a forma linguística das equações é uma expressão que diz: “o quadrado de x é igual a 1”. Notemos que se trata de uma expressão incompleta com uma variável devido à propriedade insaturada representada pela letra x; e também, trata-se de uma sentença que, ao substituirmos x por um argumento qualquer, resulta em uma sentença ajuizável, isto é, da qual se pode julgar ser verdadeira ou falsa. Podemos notar uma estreita relação entre conceito e função.

O conceito é o que há de comum entre os vários objetos do mesmo tipo. Para isso atribuímos um sinal para designar esse algo de comum. Por exemplo, “cadeira” é um conceito, pois designa todas as cadeiras e “esta cadeira” é o objeto particular, pois faz referência ao que é específico. Diz Frege em *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia* (1882) que “Atribuindo o mesmo sinal a coisas semelhantes, designamos propriamente não mais a coisa singular mas o que lhes é comum, o conceito.”. (FREGE, 1980, p. 191-192)

Suponhamos, então, por exemplo, a proposição “Esta cadeira é uma cadeira”. Podemos, conforme vimos, expressar esta proposição por “*x* é uma cadeira”, o que poderia ser expresso por “*x* é *C*”, que em outros termos é simbolizado por *C*(*x*). O conceito “cadeira”, e os predicados que ocorrem nas proposições, pode ser visto, também, como uma função, pois é insaturado, cuja insaturação é expressa pela variável “*x*”. Sobre isso, escreve Frege:

> Vemos, assim quão estreitamente ligado está o que se chama por conceito em Lógica com o que chamamos de função. Com efeito, pode-se dizer imediatamente: um conceito é uma função cujo valor é sempre um valor de verdade. (FREGE, 2009, p. 94)

Assim, do mesmo modo que a função “$x^2 = 1$” é uma forma insaturada e gera um valor de verdade a partir de um número que a completa, a expressão “Este *x* é uma cadeira” também é uma forma insaturada e assume um valor de verdade ao substituirmos *x* por um argumento determinado. No caso da função “$x^2 = 1$”, se substituirmos *x* pelo número 1, por exemplo, o valor da função é o Verdadeiro, e pode-se dizer que 1 cai sob o conceito de ser raiz quadrada de 1. Do mesmo modo, se substituirmos *x* na expressão “Este *x* é uma cadeira” pelo nome “cadeira”, o valor da função é o Verdadeiro e pode-se dizer que “a cadeira” cai sob o conceito de cadeira. A função é, então, utilizado por Frege para analisar a forma da predicação nas proposições, tal que o conceito em lógica é um tipo de função cujo valor é sempre um valor de verdade, seja ele verdadeiro ou falso.

Mas, as funções, para Frege, não são aplicadas apenas aos predicados; elas podem ser aplicadas às proposições. Em *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893), diz que a negação e a implicação são funções. No caso da negação, escreve: “O valor da função ─┬─ξ deve ser falso para cada argumento em que o valor da função ── ξ é verdadeiro, e mostra ser verdadeiro para todo argumento.”. (FREGE, 1893, § 5, p. 9, tradução nossa).[91] Nesse sentido, “Temos, portanto, em─┬─ξ uma função cujo valor é um valor de verdade; é um conceito, em que cai cada objeto com exceção do Verdadeiro”. (FREGE, 1893, § 5, p. 9, tradução nossa).[92] O traço horizontal é, como vimos na Seção 1.2, a barra de conteúdo (*Strich Inhaltsstrich*). A barra de

[91] “Der Werth der Function ─┬─ soll für jedes Argument das Falsche sein, für das der Werth der Function ──ξ das Wahre ist, und soll für alle andern Argumente das Wahre sein.”.

[92] “Wir haben demnach in ─┬─ξ eine Function Werth immer ein Wahrheitswerth ist; es ist ein Begriff, unter den alle Gegenstände fallen mit einziger Ausnahme des Wahren.”.

conteúdo junto com a barra de julgamento, mais o traço de negação, expressa a falsidade de uma sentença, sendo assim expressa: $\vdash\!\top\xi$. Temos, então, como podemos observar, uma "função negação". Sobre a "função negação" diz Frege em *Função e Conceito* (1881):

> A próxima função mais simples pode ser aquela cujo valor é o falso apenas para os argumentos para os quais o valor de — x é o verdadeiro, e reciprocamente, cujo valor é o verdadeiro para os argumentos para os quais o valor de — x é o falso. Designo-a assim $\top x$, e denomino o pequeno traço vertical de traço de negação (*Strich Verneinungsstrich*).". (FREGE, 2009, p. 100).

A implicação como função, designada de "traço condicional" (*Bedingungsstrich*) é introduzida no § 12 de *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893). Segundo Peter Hylton em *Proposições, Funções e Análises* (*Propositions, functions, and analysis*) isso "[...] permite-lhe [a Frege] considerar os predicados como um caso especial de expressões funcionais: eles [predicados] denotam um caso especial de funções, chamados *conceitos* (*Begriff*) [...]". (HYLTON, 2005, p. 139, grifo do autor, tradução nossa)[93]

Há, para Frege, então, funções aplicáveis a predicados e funções aplicáveis à proposições, que, neste último caso, podemos chamar de "termos conectivos", como é o caso da negação, por exemplo. No primeiro caso, o conceito é um tipo de função cujo valor é sempre um valor de verdade, e no segundo caso, o conectivo é, também, um tipo de função cujo valor é um valor de verdade. Frege, ao aplicar funções aos predicados e proposições, parece sintetizar, na aplicação do conceito de função, o papel das expressões dos termos predicativos e dos termos conectivos como função de verdade, cujo valor é um valor de verdade.

Veremos no Capítulo II, na Seção 2.4, intitulada "Funções proposicionais", e na Seção 2.7, intitulada "Proposições", que Russell, na Segunda Edição do *Principia Mathematica* (1927), distingue, também, funções para predicados, chamadas por "funções proposicionais", e funções para proposições, que expressam os conectivos, chamadas por "funções de proposições".

Notemos que a distinção entre termos predicativos e conectivos tem origem na distinção, realizada pelos lógicos medievais, entre "categoremáticos" e "sincategoremático" para divisão dos termos que ocorrem na proposição. Guilherme de Ockham (1285 – 1347),

---

[93] "[...] enables him to give an account of predicates as a special case of functional expressions: they denote a special case of functions, called *concepts* (*Begriffe*)[...]".

um dos primeiros filósofos a fazer esta distinção, diz, no livro “Summa Logicae” (1341), que “[...] termos são categoremáticos enquanto outros são termos sincategorematico.”. (OCKHAM, 1974, p. 55, tradução nossa)[94]

Ockham diz que “Categoremáticos tem uma significação definida e determinada. Assim, o termo ‘homem’ significa todos os homens; o termo ‘animal’, todos os animais; e o termo ‘brancura’, todas as brancuras.”. (OCKHAM, 1974, p. 55, tradução nossa).[95] Já os termos sincategoremáticos não tem, por si só, significação definida e determinada: “Exemplos de termos sincategoremáticos são ‘cada’, ‘não’, ‘alguns’, ‘todo’, ‘exceto’, ‘tanto’, e ‘na medida em que’. Nenhuma destas expressões tem uma significação definida e determinada, nem qualquer um deles significa qualquer coisa distinta do que é significado por termos categoremáticos.”. (OCKHAM, 1974, p. 55, tradução nossa)[96]

A característica determinada e não determinada de tais termos tendem a uni-los na proposição. Por exemplo, o termo sincategoremático “não” passa a ter significado quando relacionado ao termo categoremático “homem” na proposição “Não é o caso que todos os homens sejam racionais”. Nesse sentido, diz Okcham que “[...] quando é [o termo sincategoremático] combinado com uma expressão categoremática faz com que a expressão categoremática signifique algo ou supõe algo de uma maneira determinada, ou realize alguma outra função no que se refere a relevância do termo categoremático.”. (OCKHAM, 1974, p. 55, tradução nossa)[97]

Essa distinção entre termos categoremáticos e sincategoremáticos tornou possível expressar a forma lógica não apenas no âmbito da predicação, na forma “S é P”, mas também no âmbito da relação entre proposições. Observa o filósofo medieval Jean Buridan (1295 – 1358), referindo-se à forma e ao conteúdo das sentenças, que “[...] toda a parte remanescente ‘da sentença’ se refere à forma. E, portanto, temos que (i) as cópulas das sentenças hipotéticas

---

[94] “[...] terms are categorematic while others are syncategorematic.”.
[95] “Categorematic terms have a definite and determinate signification. Thus, the term 'man'signifies all men; the term ‘animal’, all animals; and the term ‘whiteness’, allwhitenesses.”.
[96] “Examples of syncategorematic terms are ‘every’, ‘no’, ‘some’, ‘all’, ‘except’, ‘so much’, and ‘insofar as’. None of these expressions has a definite and determinate signification, nor does any of them signify anything distinct from what is signified by categorematic terms.”.
[97] “[...] when it is combined with a categorematic expression it makes that categorematic expression signify something or supposit for something in a determinate manner, or it performs some other function with regard to the relevant categorematic term.”.

assim como das sentenças categóricas referem-se à forma; (ii) negações e sinais de quantidade 'referem-se à forma'; [...]". (BURIDAN, 1985, p. 194, tradução nossa)[98]

Podemos observar, assim, que embora a expressão "*S* é *P*" tenha dado, desde Aristóteles, um passo importante para a expressão da forma lógica; e, posteriormente, a distinção entre termos categoremáticos e sincategoremáticos, realizada pelos medievais, tenha explicitado a forma lógica não apenas como expressão de termos predicativos, mas também como expressão de termos conectivos; e, mais recentemente, com De Morgan, quando o mesmo utiliza-se de expressões de cálculo para operar com termos predicativos de sentenças silogísticas; é somente a partir de Frege que a forma lógica, para termos predicativos e para termos conectivos, passa a ser interpretada, de modo mais abstrato, como uma função, cujo valor é sempre um valor de verdade – inspirada no conceito de função matemática. É sobre essa noção de valor de verdade de uma função, expressa pela noção de extensão de conceito, que veremos a seguir.

1.5. Extensão de conceito

Veremos que Frege interpreta, em *Função e Conceito* (1881), os valores de verdade de uma função como percurso de valores da função, designando-os de "extensão de um conceito". Introduziremos, então, nesta seção, a noção de extensão de conceito. Veremos que a extensão de conceito é o percurso de valores de uma função.

Para compreendermos o que a noção de extensão de conceito pressupõe é necessário definirmos, antes de tudo, o que Frege entende por "percurso de valores" (*Werthverlauf*). Para nos aproximarmos, intuitivamente, da noção de percurso de valores de uma função podemos utilizar o Plano Cartesiano da Geometria Analítica. "O método da Geometria analítica fornece-nos um meio de tornar intuitivos os valores de uma função para diferentes argumentos.". (FREGE, 2009, p. 87)

Consideremos, então, um plano cartesiano A x B, tal que, A é a abscissa, na qual cada ponto de A pode ser o argumento x de uma função f; e B é a ordenada, na qual estão os valores da função f que representaremos por y. Se admitirmos as funções $y = x^2 - 4x$ e $y = x\ (x - 4)$, e, a partir destas funções, substituirmos os respectivos argumentos, em cada uma das funções, ao mesmo tempo, por uma e mesma sucessão de números quaisquer, "[...] obtemos uma

[98] "[...] entire remaining part 'of the sentence' pertains to the form. And thus we hold that (i) the copulas of hyporthetical as well as categorical sentences pertain to the form; (ii) negations and signs of quantity 'pertain to the form'; [...]".

totalidade de pontos que se apresenta à intuição, nos casos correntes, como uma curva. Cada ponto da curva corresponde a um argumento e ao correspondente valor da função.”. (FREGE, 2009, p. 87)

Tendo isso em vista, podemos dizer, então, que ambas as funções têm o mesmo *percurso de valores* (*denselben Werthverlauf*), pois a curva que obtemos da função $y = x^2 - 4x$ é a mesma curva que obtemos da função $y = x\ (x - 4)$. Essa igualdade entre percurso de valores pode ser expressa, assim, do seguinte modo: $x^2 - 4x = x\ (x - 4)$. Em outras palavras, se para todo argumento que substitui o sinal x, a equação $x^2 - 4x = x\ (x - 4)$ for verdadeira, então exprimimos tal equação em termos gerais, tal que o percurso de valores indicado pela função $x\ (x - 4)$ é o mesmo que o percurso de valores expresso pela função $x^2 - 4x$, donde obtemos uma igualdade entre percurso de valores de funções distintas. Nesse sentido, escreve Frege:

> Expresso esse fato do seguinte modo: a função $x\ (x - 4)$ tem o mesmo percurso de valores que a função $x^2 - 4x$. Quando escrevemos $x^2 - 4x = x\ (x - 4)$ não fizemos uma função igual a outra, mas apenas igualamos seus valores. (FREGE, 2009, p. 88)

Neste último caso, a igualdade descrita é entre os valores das funções para cada um dos valores da abscissa; isso implica uma igualdade entre os percursos de valores de cada função, sendo, porém, nesse caso, uma função distinta da outra, pois a função $x^2 - 4x$ não é a mesma que a função $x\ (x - 4)$.

Notemos que a igualdade entre os valores de duas ou mais funções não é o mesmo que a igualdade entre o percurso de valores de duas ou mais funções. A igualdade entre os valores de funções é a igualdade dos resultados das funções a partir de um argumento específico que as completam. Por outro lado, o percurso de valores é, se assim podemos dizer, mais amplo, pois é a correspondência entre o conjunto de argumentos que saturam as funções e seus respectivos valores.

Frege introduz uma notação para designar o percurso de valores de uma função e distinguir o percurso de valores dos valores de funções. Como exemplo de designação de percurso de valores, consideremos as funções anteriormente citadas, $x^2 - 4x$ e $x\ (x - 4)$, as quais, como sabemos, possuem em comum o mesmo percurso de valores.

O percurso de valores da função $x^2 - 4x$ recebe a seguinte designação: $\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$; e o percurso de valores da função $x\ (x - 4)$ é designado por e $\alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$, donde segue-se que a expressão "$\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$" indica diretamente a igualdade entre percurso de valores das respectivas funções. Mais ainda, para indicar o percurso de valores de uma função *f*, ainda indefinida, Frege usa a seguinte notação: $\varepsilon' f(\varepsilon)$.

Além das expressões $\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$ e $\alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$ designarem o mesmo percurso de valores, temos que esse percurso de valores é um elemento determinado e não carece de complementação. Vimos na Seção 1.4 que elementos que têm essa propriedade recebem o nome de objeto (*Gegenstände*), logo o percurso de valores é também um objeto. Isso pode ser melhor visto quando a igualdade entre percurso de valores é entendida como uma proposição assim expressa: "$\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$".

Notemos que essa igualdade forma uma proposição, de modo que, podemos decompô-la em um objeto e um conceito: "Anteriormente, apresentamos algumas igualdades entre percursos de valores, por exemplo, $\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$, expressão que se decompõe em '$\varepsilon'\ (\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$' e '$(\ ) = \alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$'.". (FREGE, 2009, p. 97). Diz ele que "Esta última parte necessita de complementação, já que, à esquerda do sinal de igualdade, ela contém um lugar vazio. A primeira parte, '$\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$', é inteiramente completa em si mesma e refere-se, assim, a um objeto.". (FREGE, 2009, p. 97)

Vemos, então, que, a partir da decomposição, a primeira parte é saturada e indica um objeto, expressando, com isso, um argumento da função; e a segunda parte é insaturada, expressando uma função. Inversamente, podemos, também, obter a seguinte expressão "$\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = (\ )$"; esta expressão, a exemplo da anterior, indica uma função, e a expressão "$\alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$" refere-se a um objeto. Disto concluímos com Frege que "Os percursos de valores das funções são objetos (*Gegenstände*), enquanto que as funções elas mesmas não o são.". (FREGE, 2009, p. 97)

Observa Frege que se o percurso de valores é um objeto, não pode ser uma função, tal como alguns matemáticos costumam pensar: "Em algumas expressões que encontramos nos tratados de matemática corrente, a palavra 'função' corresponde certamente ao que chamei aqui de percurso de valores de uma função. Mas a função, no sentido em que a emprego, é logicamente anterior.". (FREGE, 2009, p. 89, nota do autor). Se uma função fosse o percurso de valores ela seria um objeto, e não é isso que Frege quer. Uma função, como vimos, é insaturada, e, com efeito, é logicamente anterior ao percurso de valores, pois este surge somente a partir de uma sucessão de argumentos que saturam uma função já dada.

Em suma, duas ou mais funções têm o mesmo percurso de valores se, e somente se, elas assumem, para os mesmos argumentos, os mesmos valores. Quando isso ocorre, Frege diz que tais funções têm a mesma extensão de conceito, isto é, há uma *igualdade de extensão de conceitos* (*Gleichheit des Umfanges der Begriffe*). Em outras palavras, quando duas ou mais funções têm o mesmo percurso de valores, elas têm a mesma extensão de conceito. Nesse sentido, escreve:

> Em lógica, chama-se isto [ter o mesmo percurso de valores] de igualdade de extensão dos conceitos. Portanto, podemos designar como extensão de um conceito o percurso de valores de uma função cujo valor, para qualquer argumento, é um valor de verdade. (FREGE, 2009, p. 95)

Frege introduz, então, a noção de "extensão de conceito" (*Begriffsumfang*) definindo-a como percurso de valores, partindo da definição de igualdade entre percurso de valores de duas funções quaisquer, tomadas como exemplo.

Notemos que a concepção de Frege sobre extensão de conceito é bastante distinta da extensão de conceito na História da Lógica. A primeira explicitação sobre a extensão de um conceito aparece, como vimos (cf. Introdução, nota 16) no escrito *Isagoge* de Tiro de Porfírio. Porfírio classifica os predicados com base no conceito de extensão: do mais extenso para o menos extenso. Essa classificação dos predicados, do mais extenso para o menos extenso, é a base da conhecida Árvore de Porfírio (*Arbol porphyriana*). A Árvore de Porfírio é uma classificação das categorias de Gênero, Espécie, Diferença, Próprio e Acidente pelas suas relações de extensão: quarto mais próximo do Gênero, maior é a extensão, e quanto mais próximo do Acidente, menor é a extensão.

Mas, o registro mais explícito desta distinção está, como dissemos na Introdução, em *A Lógica de Port-Royal* (1662) de Antoine Arnaud e Pierre Nicole. No livro há uma distinção mais precisa entre compreensão (*compréhension*) e extensão (*étendue*) de um conceito, pois, além de tornar mais precisa tal distinção terminológica, "extensão de uma ideia" da "compreensão de uma ideia", separa, com mais clareza, o que é próprio da ideia de algo, sendo condição fundamental para sua formação (a compreensão), dos sujeitos que convém ao conceito (a extensão). Esta separação parece ser de fundamental importância para o surgimento da função proposicional, pois direciona sua análise mais aos seus elementos extensivos, plano do tipo de análise realizada pela função matemática, cuja natureza é mais extensiva que intensiva.

Em Frege, a extensão de conceito não é, como indicado em *A Lógica de Port-Royal* (1662), apenas o conjunto de objetos que têm as características da compreensão do conceito, mas o percurso de valores, ou seja, a correspondência entre o conjunto dos argumentos que saturam a função e seus correspondentes valores de verdade. Nesse sentido, o conceito é interpretado como uma função, cujo valor é sempre um valor de verdade, inspirada no conceito de função matemática. Ao definir conceito como uma função cujo valor é um valor de verdade, Frege direciona sua análise mais para os elementos extensivos do conceito, isto é, para o seu percurso de valores, plano de análise da função em Matemática.

A importância da extensão do conceito para a determinação do conceito é notada, por exemplo, quando ele utiliza o termo "cai sob" (*fällt unter*) para a determinação do conceito na relação de predicação entre sujeito e predicado. Escreve ele em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) que "Quanto a um conceito, a questão é sempre a de saber se algo cai sob ele, e o quê.". (FREGE, 1980, p. 243). Essa passagem parece evidenciar seu interesse pelos elementos extensionais da predicação, plano no qual ele define extensão de conceito como percurso de valores.

Assim, para Frege, a extensão de um conceito (*Begriffsumfang*) é o percurso de valores (*Werthverlauf*) de uma função. Então, quando indicamos, por exemplo, o percurso de valores da função $x^2 = 1$ por $\varepsilon'(\varepsilon^2 = 1)$, expressamos a extensão do conceito raiz quadrada de 1. Sobre isso escreve: "Denominamos também de percurso de valores a $\varepsilon'(\varepsilon^2 = 1)$, mas poderíamos também designar esta expressão de extensão do conceito raiz quadrada de 1. As extensões conceituais são objetos, embora os conceitos em si mesmo não o sejam.". (FREGE, 2009, p. 97). Se o percurso de valores de uma função é um objeto, então podemos dizer que a extensão de conceito é também um objeto.

A extensão de conceito é condição para que Frege possa elaborar o conhecido Axioma V, um dos axiomas fundamentais para a sua definição de número, introduzido por ele no primeiro volume de *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893) (cf. FREGE, 1964 § 20, p. 72). O Axioma V pode ser assim expresso: $\varepsilon' F(\varepsilon) = \varepsilon' G(\varepsilon) \equiv \forall x\ (Fx = Gx)$, isto é, o percurso de valores $\varepsilon' F(\varepsilon)$ é igual ao percurso de valores $\varepsilon' G(\varepsilon)$ se e somente se os objetos que substituem Fx e Gx são os mesmos para todas as substituições em x. Em uma linguagem mais moderna, podemos expressar o Axioma V do seguinte modo: $\{x : fx\} = \{x : gx\} \equiv \forall x\ (fx =$

gx), isto é, dois conjuntos *f* e *g* são idênticos se e somente se *f* e *g* possuem a mesma extensão, ou seja, os objetos de *f* e os objetos de *g* são os mesmos objetos.

Diz Frege que a relação de igualdade entre os objetos de *f* e os objetos de *g* já teria sido mencionada por Hume. Escreve ele em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): "Hume já menciona um tal meio: 'Quando dois números são combinados de tal modo que um tenha uma unidade correspondente a cada unidade do outro, pronunciamo-los iguais'.". (FREGE, 1980, § 63, p. 250). Mas, não parece haver dúvidas que Frege explicitou a igualdade entre extensões de modo mais claro.

A ideia do Axioma V de Frege pode ser encontrada hoje nos livros de teoria de conjuntos, no chamado "Axioma da Extensionalidade", que tem a seguinte ideia: se dois conjuntos têm exatamente os mesmos elementos, então eles são idênticos. Em outras palavras, se todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de A, então $A = B$. Nesse sentido, o Axioma da Extensionalidade pode ser expresso pela seguinte notação: $\forall A\ \forall B\ ((\forall x\ (x \in A \leftrightarrow x \in B)) \rightarrow A = B)$.

Após nossas explicitações no âmbito de uma linguagem formal, a linguagem da conceitografia, observaremos, na próxima seção, como Frege fornece um tratamento mais intuitivo, mais próximo da linguagem natural, para a distinção entre conceito e objeto. Isto é, veremos como a distinção entre conceito e objeto é realizada por Frege no plano da linguagem natural.

1.6. Conceito e objeto

Veremos nesta seção que conceito e objeto são o que há de mais simples e elementar na proposição, tal que não podemos defini-los, mas apenas explicitá-los. Se não podemos defini-los, mas apenas explicitá-los, torna-se, então, necessário fornecer indicações linguísticas. Veremos como tais indicações são feitas por Frege no plano da linguagem natural.

No artigo intitulado "Sobre o Conceito e o Objeto" (1892) ("Über Begriff und Gegenstand")[99] Frege diz que o *objeto* (*Gegenstand*)[100] é um elemento logicamente simples.

[99] Este artigo, escrito um ano depois do aritgo *Função e Conceito* (1881), é uma resposta às críticas de Benno Kerry, seu interlocutor na época, aos *Fundamentos da Aritmética* e a outros de seus escritos. Uma das críticas de Kerry versa sobre a noção de conceito de Frege. Cf. KERRY, B. *System einer theorie der grenzbegriffe*: ein beitrag zur erkenntnisstheorie. Leipizig: Franz Deuticke, 1890, p. 43. Disponível em: https://archive.org/details/systemeinertheo00kerrgoog

[100] Embora a língua alemã disponha do termo "Objekt" (objeto), Frege usa o termo "Gegenstand". Segundo Santos (1980, p. 249, nota 86 do tradutor), o parentesco etimológico, entre objeto (*Objekt*) e objetivo (*objektiv*),

Sendo um elemento logicamente simples, não pode ser definido, pois não é decomposto em algo mais elementar. Nesse mesmo sentido, escreve em *Função e conceito* (1881): "[...] surge a questão do que é que chamamos aqui de objeto. Considero impossível uma definição regular [de objeto], já que temos aqui algo cuja simplicidade não admite uma análise lógica. Aqui só se pode assinalar o que se quer dizer.". (FREGE, 2009, p. 96)

Em relação à indefinição de objeto, ilustra Frege que, assim como não se pode requerer do químico a decomposição elementar de todas as substâncias, não se pode exigir do lógico que tudo seja definido. Desse modo, no percurso de uma investigação lógica, quando se busca a definição última das coisas, para-se no que é simples e elementar e, por sua simplicidade, indefinido. Diz que "Ao se descobrir algo que é simples, ou que, pelo menos por enquanto, deva ser tomado como simples, deve-se forjar-lhe uma denominação, já que a linguagem não contém originalmente uma expressão que lhe corresponda exatamente.". (FREGE, 2009, p. 112). Frege, então, designou "objeto" (*Gegenstand*) a esse elemento lógico descoberto, que não pode ser definido, mas que pode ser, assim, expresso e denominado pela linguagem, no contexto da proposição.

Vimos que no artigo *Função e Conceito* (1881) Frege apresenta-nos o objeto como algo completo ou saturado. Por exemplo, na sentença "Vênus é um planeta" o sujeito "Vênus" indica um objeto determinado. O objeto, por ser determinado, é algo completo em si mesmo, pois não precisa de algo a mais que lhe complete o sentido. Mas o que dizer do predicado "é um planeta"? Expressaria tal predicado também um objeto?

O predicado "é um planeta" nos faz recorrer a questão: "que ou quem é um planeta?" Esta questão indica ou sugere uma insaturação que é própria de algo que é indicado pelo predicado e não pelo sujeito de uma sentença. O mesmo ocorre com funções aritméticas; por exemplo, a expressão $2. x^3 + x = 3$ exprime uma função que é insaturada. Porém, os números que ocupam o lugar de x, nesta função, são completos em si mesmos. Sendo assim, números são objetos e é característica do objeto a saturação, nisso ele difere essencialmente do que é expresso pelo predicado e por uma função, pois ambos são insaturados. Sendo, como vimos, conceito um tipo de função, conceitos são insaturados. O *conceito* (*Begriff*) é, nesse sentido,

---

inexistente em alemão com o uso do termo "Gegenstand" (objeto) é evitado por Frege com o uso deste último termo. Santos nos diz que, para Frege e outros filósofos de influência kantiana, objeto (*Gegenstand*) é independente de objetivo (*objektiv*). Para Frege, objeto (*Gegenstand*) se opõe a conceito (*Begriff*) e não a sujeito (*Subjekt*), e objetivo (*objektiv*) se opõe a subjetivo (*subjetiv*) e não a conceitual. Salienta Santos que podemos, em Frege, falar de objetos subjetivos (por exemplo, as representações, cf. § 61, conforme indicação do comentador) e conceitos objetivos (por exemplo, o conceito de número, cf. § 47).

um elemento logicamente simples, e, com efeito, não pode ser objeto de definição. Nesse sentido, escreve Frege em *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892) referindo-se à noção de conceito: "Gostaria, antes de mais nada, de observar que minha explicitação não deve ser tomada como uma definição propriamente dita.". (FREGE, 2009, p. 112)

Conceito e objeto, apesar de serem indefinidos, isso não quer dizer que não possam ser compreendido por nós. Podemos assinalar o que queremos dizer por conceito e objeto através sugestões linguísticas. Frege recorre a linguagem verbal e oferece sugestões linguísticas para que tais elementos logicamente simples possam ser apreendidos. Sobre isso, escreve: "Não é possível uma definição para a introdução de um nome que corresponda a algo logicamente simples. Para isto, só resta levar o leitor ou o ouvinte, por meio de sugestões, a entender o que se quer dizer com esta palavra.". (FREGE, 2009, p. 112). Sobre isso ainda nos diz: "Conforme disse anteriormente, eu não pretendia dar uma definição, mas apenas sugestões, e para isto fiz apelo à intuição linguística dos que falam o alemão. Cabe agora pôr em destaque quão bem a distinção linguística concorda com a distinção conteudística.". (FREGE, 2009, p. 115). Conteúdos, aqui, são os elementos lógicos que podem ser explicitados pela linguagem. As sugestões requeridas da linguagem verbal devem concordar com os elementos logicamente simples, designando-os diretamente.

Frege compara, novamente, essa sua tarefa, de dar sugestões linguísticas, com a própria investigação do químico: apesar de não se exigir do químico a decomposição de todas as substâncias, cabe a este um trabalho científico sobre a natureza para explicitá-las; do mesmo modo, apesar de não ser possível definir um elemento logicamente simples, cabe ao lógico empreender uma investigação a fim descobri-lo e explicitá-lo, pois, no seu entender, "O logicamente simples não nos é dado logo de início, como tampouco ocorre com a maioria dos elementos químicos; pelo contrário, ele é alcançado por meio de um trabalho científico.". (FREGE, 2009, p. 112)

Uma sugestão linguística para expressar e distinguir objeto é quanto a sua nomeação. Frege entende não ser possível indicar um objeto sem recorrer à nomeação; por exemplo, seja a proposição "Todas as baleias são mamíferos". Esta proposição está tratando de baleias, mas podemos perguntar: a que baleia ela se refere? Na presença real desse animal é possível dizermos, a partir dessa sentença, que estamos designando este animal e, por conseguinte, expressando que ele é um mamífero? A partir da proposição "Todas as baleias são mamíferos", não poderíamos deduzir que uma suposta baleia, diante de nossos olhos, é um mamífero, sem nomeá-la. Desse modo, se quiséssemos afirmar que a baleia, que está diante de nós, é um mamífero, teríamos que recorrer à seguinte proposição: "*Esta* baleia é uma baleia" ou "A baleia é uma baleia".

O pronome demonstrativo ou o artigo definido são, então, elementos linguísticos para indicar diretamente o objeto. Sobre isso, escreve o Frege em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): "Não se poderia deduzir que o animal em questão fosse mamífero sem admitir a proposição de que é uma baleia, o que nossa proposição não implica. De modo geral, é impossível falar de um objeto sem de alguma maneira designá-lo ou nomeá-lo. A palavra 'baleia', porém, não nomeia nenhum ser singular.". (FREGE, 1980, p. 241, § 47)

Observemos que a palavra "baleia", por si só, não tem um conteúdo nítido, pois, na linguagem corrente, tanto pode designar o indivíduo quanto a espécie das baleias. Para fugir dessa ambiguidade, torna-se necessário, como Frege nos sugere, elaborar um artifício gramatical que expresse uma distinção lógica entre indivíduo e espécie. Desse modo, se nossa intenção é que essa palavra designe algo singular, devemos, conforme sugere, atribuir-lhe o pronome demonstrativo ou o artigo definido. Nesse sentido, escreve: "Apenas com um artigo definido ou pronome demonstrativo vale como nome próprio de uma coisa [...]". (FREGE, 1980, p. 243, § 51)

Frege denomina de nome próprio o sinal que designa um objeto (*Gegenstand*) determinado. Em outras palavras, escreve no artigo intitulado "Sobre o Sentido e a Referência" (1892) (*Über Sinn und Bedeutung*): "[...] por 'sinal' e por 'nome', entendi qualquer designação que represente um nome próprio, cuja referência seja um objeto determinado (esta palavra tomada na acepção mais ampla), mas não um conceito ou uma relação [...]". (FREGE, 2009, p. 131 - 132). A referência (*Bedeutung*) é um objeto designado por um nome próprio.

São nomes próprios tanto termos como "Vênus" e "Aristóteles" (denominado por Frege de nome próprio genuíno), quanto os termos exemplificados por "a baleia" e "este cavalo". Uma referência pode receber mais de um nome próprio, por exemplo, os nomes próprios de Vênus: "Estrela da Tarde" e "Estrela da Manhã". Visto que, neste caso, temos nomes de um mesmo objeto, dizemos que "a Estrela da Tarde é a mesma que a Estrela da Manhã", isto é, podemos dizer que são nomes que se referem a um e mesmo objeto.

Muito embora, enganos ocorram quanto a pressuposição de uma referência, principalmente quando o que pressupúnhamos existir passa a não mais existir devido às descobertas científicas recentes, isso não impede, no entender de Frege, que falemos da referência de um sinal, mesmo que seja necessário fazer uma ressalva, a saber: caso tal referência exista. Nesse sentido, escreve no artigo *Sobre o Sentido e a Referência* (1892): “[...] basta, por ora, indicar nossa intenção ao falar ou ao pensar, para justificar que falemos da referência de um sinal, mesmo que tenhamos que acrescentar a ressalva: caso tal referência exista.”. (FREGE, 2009, p. 137)

Além de ser designado por nomes próprios, objetos podem ser, também, expressos no contexto de sentenças gramaticais, através de um sujeito gramatical. Por exemplo, na sentença “Vênus é um planeta”, o sujeito “Vênus” indica um objeto, pois é um nome próprio que expressa algo determinado. Assim, o sujeito gramatical pode ser usado como parâmetro para designar um objeto.

Apesar de um objeto poder ser usado como a referência de sujeito gramatical, ele pode também, em certos casos, ocorrer como parte de um predicado gramatical; e.g., na sentença “Vênus é a Estrela da Tarde”, temos, segundo o autor, o nome próprio “Vênus” que é o sujeito da oração e que se refere a um objeto e, também, o nome próprio “Estrela da Tarde” que é, como já sabemos, outro sentido para o mesmo objeto, constituindo ele uma parte do predicado, não sendo, portanto, o predicado completo. O predicado completo, em nosso caso, é assim expresso: “é a Estrela da Tarde”. Notemos que o predicado completo não serve para indicar objeto porque é algo incompleto e não designa algo determinado ou completo. Desse modo, resume Frege no artigo *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892): “[...] um objeto é o que nunca pode ser a referência total de um predicado, embora possa ser a referência de um sujeito.”. (FREGE, 2009, p. 118)

Há casos, como aponta Frege, em que a linguagem natural é confusa em distinguir conceito de objeto. É o que pode ocorrer com a seguinte sentença: “cavalos são animais herbívoros”; nesta sentença o termo “cavalos” expressa conceito ou objeto? Se quisermos nos referir a um determinado cavalo, como objeto, deveríamos, como já dissemos, atribuir ao termo “cavalo” o artigo definido ou o pronome demonstrativo de modo a poder nomeá-lo: “o cavalo é um animal herbívoro” ou “este cavalo é um animal herbívoro”.

Agora, se a intenção é nos referirmos ao conceito de cavalo, isto é, à espécie dos cavalos, qual indicação gramatical é mais adequada? Frege oferece como sugestão a possibilidade de usarmos o termo “cavalo” acompanhado do artigo indefinido ou no plural sem artigo; com isso podemos expressá-lo assim: “um cavalo é um animal herbívoro” ou "cavalos são animais herbívoros". Nesse sentido, escreve em *Os Fundamentos da Aritmétic*a (1884): "Desde que uma palavra seja usada com artigo indefinido, ou no plural sem artigo, ela é *termo conceitual* (*Begriffswort*)". (FREGE, 1980, p. 243, § 51, grifo nosso). Um termo conceitual é, então, um modo de designar ou expressar um conceito. Aqui dizemos que o conceito é a referência do termo conceitual.

Notemos que a referência é o que é designado pelo sinal, seja por um nome próprio, seja por uma termo conceitual. A referência (*Bedeutung*) não pode ser confundida com objeto (*Gegenstand*), pois, para Frege, tanto nomes próprios quanto termos conceituais podem ter referência. Com isso, o termo "referência" pode ser usado tanto para designar objeto quanto conceito. Desse modo, não devemos opor, de um lado, conceito e sentido, e de outro, objeto e referência, como se poderia, erroneamente, entrever do que dissemos até agora. Tanto o termo "conceito" quanto o termo "objeto" têm sentido e referência.

O sentido (*Sinn*) é, para Frege, o modo de expressão do objeto designado e que pode ser apresentado pelo sinal. Sobre isso, escreve em *Sobre o Sentido e a Referência* (1892): "É, pois, plausível pensar que exista, unido a um sinal (um nome, combinação de palavras, letra), além daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência, ainda o que eu gostaria de chamar de o sentido do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto.". (FREGE, 2009, p. 131)

Desse modo, seja a sentença "A Estrela da Tarde é a Estrela da Manhã"; a igualdade, expressa pelo termo "é" na sentença expressa uma identidade entre o que é designado, mas não entre os sentidos do que é designado através dos sinais. Com isso, percebemos, então, uma conexão entre sinal, sentido e referência. Sobre esta relação escreve Frege no mesmo artigo: "A conexão regular entre sinal, seu sentido e sua referência é de tal modo que ao sinal corresponde um sentido determinado e ao sentido, por sua vez, corresponde uma referência determinada, enquanto que a uma referência (a um objeto) não deve pertencer apenas um único sinal.". (FREGE, 2009, p. 132). Desse modo, ele diz que "O mesmo sentido tem expressões diferentes em diferentes linguagens, ou até na mesma linguagem.". (FREGE, 2009, p. 132). Temos, então, vários sentidos para uma mesma referência e cada sentido se reveste do sinal para ser expresso.

Em suma, diz Frege que "Um nome próprio (palavra, sinal, combinação de sinais, expressão) exprime seu sentido e designa ou refere-se a sua referência. Por meio de um sinal exprimimos seu sentido e designamos sua referência.". (FREGE, 2009, p. 136). Desse modo, dado um termo conceitual e um nome próprio, diz o autor no artigo intitulado "Digressões sobre Sentido e Referência" (1882 – 1895) (*Ausführungen über Sinn und Bedeuntung*) "A cada termo conceitual e nome próprio corresponde, em regra, um sentido e uma referência, na acepção em que emprego estes termos.". (FREGE, 2009, p. 159). Assim, conceito se opõe a objeto, mas não à referência, pois tanto conceito quanto objeto são referências de sinais que os designam (termos conceituais e nome próprios, respectivamente).

Sendo que conceitos têm referência, podemos dizer que no contexto de sentenças gramaticais, conceitos podem ocorrer como a referência de um predicado gramatical. Por exemplo, na sentença "a direção do eixo do telescópio é igual à direção do eixo da Terra", o conjunto de palavras "é igual à direção do eixo da Terra" é um predicado, e indica um *conceito*. Frege chama, no § 70 de *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), esse conceito de "conceito simples" (*einfacher Begriff*). Podemos, então, dizer que um predicado pode se referir a um conceito simples, sendo, então, uma maneira de expressá-lo.

Todavia, existem conceitos que não são expressos no formato de um predicado gramatical; por exemplo, consideremos, inicialmente, a sentença "a Terra é maior que a Lua"; tal sentença pode ser dividida em sujeito e predicado, tal que, "a Terra" é o sujeito da oração, e "maior que a Lua" é o predicado. Mas, como vimos, "a Lua" é um nome próprio e refere-se a um objeto; se destacarmos esse objeto, então obtemos um outro predicado, não pertencente mais à sentença original, a saber: "menor que a Terra". Agora, se destacarmos, conforme nos sugere Frege no § 70 de *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), os termos "a Lua" e "a Terra", ao mesmo tempo, como objetos, obtemos o que ele chama por "conceito relacional" (*Beziehungsbegriff*), pois, como podemos notar, relaciona dois objetos.

Um conceito relacional liga, assim, dois objetos de modo a relacioná-los, tornando-se, com isso, uma sentença completa e passível de juízo. Nesse caso, conceitos não podem ser expressos pela estrutura gramatical de predicado. Falha, assim, como podemos observar, a tentativa de reduzir todo conceito ao formato gramatical, justamente porque um conceito relacional não se enquadra nos padrões da linguagem natural. Deste modo, o que podemos fazer é, no entender de Frege, apenas dar sugestões gramaticais sem querer com isso abarcar por completo todas as relações lógicas. Escreve em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) que "O conceito relacional pertence pois, como o simples, à lógica pura.". (FREGE, 1980, p. 256, § 70). Assim, para identificar um conceito relacional, devemos ficar atento não à estrutura gramatical, mas à propriedade relacional desse conceito.

As sugestões são necessárias para que os elementos lógicos possam ser apreendidos intuitivamente por aqueles que os desconhecem. É para satisfazer estas condições que Frege dá um tratamento mais intuitivo, mais próximo da linguagem natural, à distinção entre conceito e objeto. Sobre essa distinção, notemos que quando objetos saturam conceitos, temos, como resultado, um pensamento, com sentido completo e passível de juízo. Diz Frege em *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892) que "[...] nem todas as partes de um pensamento podem ser completas, pelo menos uma deve ser, de alguma maneira, insaturada ou predicativa; de outra forma, elas não se concatenariam.". (FREGE, p. 102 – 103). É sobre a noção de pensamento que apresentaremos a seguir.

1.7. O Pensamento

Apresentaremos, nesta seção, as características centrais do que Frege chama por "pensamento" (*Gedanke*). Veremos que o pensamento é uma proposição com sentido, mas nem toda proposição com sentido é um pensamento.

O que Frege entende por pensamento (*Gedanke*)[101] é um juízo que pode ser expresso pelo sentido de sentenças e que já envolve o verdadeiro ou falso. Desse modo, o pensamento não é a atividade mental que cada um de nós realiza individualmente, mas é uma proposição reconhecida por todos, pois cada um de nós reconhece seu valor de verdade, independentemente de nossas ideias ou representações mentais. Por exemplo, a proposição que expressa o Teorema de Pitágoras, a saber, "$b^2 + a^2 = c^2$", é verdadeira independente das vontades individuais.

Escreve Frege no seu escrito intitulado "O Pensamento: uma investigação lógica" (1918 – 1819) (*Der Gedanke: eine logische Untersuchung*)[102], um escrito de maturidade, que "O pensamento, em si mesmo imperceptível pelos sentidos, veste-se com a roupagem perceptível da sentença, tornando-se assim para nós mais facilmente apreensível. Dizemos que a sentença expressa um pensamento.". (FREGE, 2002, p. 14). Desse modo, um

[101]Traduz-se a palavra alemã "Gedanke" por pensamento ou ideia. Mas, o que Frege quer dizer por "Gedanke" não é algo subjetivo ou uma atividade mental, como a palavra pensamento ou ideia poderia comumente entrever. O autor quer expressar por "Gedanke" o que é independe de nós para existir, que pode ser expresso por sentenças e é comum a muitos (objetivo). Para indicarmos a noção expressa por Frege com a palavra "Gedanke" adotaremos o equivalente português "pensamento", tradução de Alcoforado (2009), muito embora essa palavra esteja tradicionalmente relacionada a uma atividade da mente subjetiva.

[102] Este escrito é um artigo de maturidade de Frege que, com outros artigos (*A Negação* e *Conexões de Pensamento*, e.g.), ele pretendia reunir sob a denominação de "Investigações Lógicas". Denominaremos este artigo apenas por "O Pensamento".

pensamento deve ser considerado como o sentido da sentença, pois o pensamento se reveste da "roupagem" da sentença para ser expresso.

No entanto, não basta que uma sentença tenha sentido para termos um pensamento. Diz Frege em *Sobre o Sentido e a Referência* (1892) que "[...] o pensamento é o sentido de uma sentença, sem querer com isto afirmar que o sentido de toda sentença seja um pensamento.". (FREGE, 2002, p. 14). Isso quer dizer que se estivermos comprometidos com a verdade, o sentido, por si só, não nos é suficiente; é preciso, pois, ir além se quisermos expressar um pensamento.

Seja, por exemplo, a sentença "Ulisses profundamente adormecido foi desembarcado em Ítaca"; notemos que o nome próprio "Ulisses" não tem referência, pois não se refere a um ser existente na realidade, mas é um ser imaginário. Sendo assim, esse nome próprio não tem referência. Se este nome próprio não tem referência, então não podemos relacioná-lo a um predicado para julgar se esta sentença é verdadeira ou falsa, pois somente da atribuição de um predicado a um sujeito com referência obtemos uma sentença passível de veracidade ou falsidade. Escreve Frege que é "[...] da referência deste nome que o predicado é afirmado ou negado. Todo aquele que não admite que o nome tenha uma referência não lhe pode atribuir nem negar um predicado.". (FREGE, 2009, p. 137)

Mas, no caso que não temos certeza se um nome próprio tem referência, por exemplo, a figura de Homero (há especulações Homero se realmente existiu ou se o nome é fictício), então não sabemos se a proposição "Homero é um grande poeta", por exemplo, é um pensamento. Neste caso, temos que supor que o nome próprio tenha uma referência para poder expressar um pensamento. Sobre isso, diz:

> Podemos, naturalmente, ser enganados ao pressupor uma referência, e tais enganos têm, de fato, ocorrido. Mas a pergunta de se nos enganamos sempre ou não pode ficar aqui sem resposta; basta, por ora, indicar nossa intenção ao falar ou ao pensar, para justificar que falamos da referência de um sinal, mesmo que tenhamos de acrescentar a ressalva: caso tal referência exista. (FREGE, 2009, p. 136 – 137)

Observa Potter que há uma tensão aqui entre proposições que expressam pensamentos, que são proposições que tem sentido e valor de verdade, e sentenças que apenas tem sentido. Diz o comentador que, por um lado "Frege foi atraído para a ideia de que a estrutura da frase é um guia para a estrutura do pensamento.”. (POTTER, 2010, p. 14, tradução nossa)[103] e por outro “[...] ele queria insistir que algumas características da estrutura da sentença podem ser irrelevantes para a lógica e, portanto, não correspondem a algo na estrutura do pensamento correspondente.”. (POTTER, 2010, p. 14, tradução nossa)

Segundo Potter, essa fronteira entre proposições com sentido e sentenças com pensamento expressa uma dificuldade que Frege parece enfrentar constantemente. Sobre isso diz o comentador: “Esta é uma tensão que ele nunca satisfatoriamente resolvido.”. (POTTER, 2010, p. 14, tradução nossa).[104] Esse problema será retomado por Wittgenstein, que, como veremos na Seção 3.2, entende que uma proposição com sentido já expressa um pensamento, isto é, não se pode formular uma sentença declarativa sem ter, pelo menos implicitamente, uma compreensão da distinção entre verdade e falsidade.

Voltando à Frege, no âmbito do pensamento, a busca pela verdade nos faz perguntar pela existência do sujeito da sentença e, com efeito, a verificar a veracidade ou falsidade do predicado a ele atribuído; torna-se necessário investigar, então, *o valor de verdade de uma sentença* (*den Wahrheitswert eines Satzes*), isto é, julgar se o atributo dado ao sujeito existente condiz com suas características reais.

Nesse sentido, a busca pela verdade nos conduz da referência do nome próprio para a atribuição do predicado a ela, gerando uma proprosição com sentido, e, por conseguinte, do sentido da proposição para sua referência, isto é, para a verificação do seu valor de verdade, resultando, portanto, em um pensamento. Diz Frege, com isso, que “Somos assim levados a reconhecer o *valor de verdade* de uma sentença como sendo sua referência. Entendo por valor de verdade de uma sentença a circunstância de ela ser verdadeira ou falsa. Não há outros valores de verdade. Por brevidade, chamo a um de o verdadeiro [*das Wahre*] e a outro de o falso [*das Falsche*].”. (FREGE, 2009, p. 139)

Se o valor de verdade é a referência de uma sentença , então Frege diz que sentenças são nomes próprios. Por conseguinte, escreve: “Toda sentença assertiva, em face à referência de suas palavras, deve ser, por conseguinte, considerada como um nome próprio, e sua referência, se tiver uma, é ou o verdadeiro ou o falso.”. (FREGE, 1978, p.69). Vemos, então, que um pensamento, expresso por uma sentença assertiva completa, é entendido como um

[103] “Frege was drawn to the idea that the structure of the sentence is a guide to the structure of the thought.”.
[104] “This is a tension which he never satisfactorily resolved.”.

nome próprio e tem como referência um valor de verdade. Assim, tanto o Verdadeiro quanto o Falso são objetos, pois estes são determinados, completos em si mesmos.

E se sentenças que expressam pensamentos são aquelas suscetíveis de receber valor de verdade, então sentenças imperativas e certas sentenças interrogativas não expressam pensamentos. "Não queremos negar um sentido a uma sentença imperativa; mas este sentido não é daquele tipo passível de suscitar a questão verdade. Por isto, não chamarei o sentido de uma sentença imperativa de pensamento.". (FREGE, 2002, p. 16). Do mesmo modo, continua ele, "[...] estão excluídas as sentenças que expressam desejo ou pedido. Só serão consideradas as sentenças mediante as quais comunicamos ou declaramos algo. (FREGE, 2002, p. 16). Sentenças assertivas são, então, as mais adequadas para expressar pensamentos, pois somente elas contém a asserção, isto é, são suscetíveis de receber um valor de verdade.

Notemos, que, para Frege, o pensamento não é uma coisa palpável e espacialmente perceptível. Escreve o autor, na mesma obra, que "O pensamento não pertence nem a meu mundo interior, como uma ideia, nem tampouco ao mundo exterior, ao mundo das coisas sensorialmente perceptíveis.". (FREGE, 2002, p. 35)

Tomemos, por exemplo, o que Frege nos diz, em *O Pensamento* (1918 – 1819), sobre o pensamento expresso pelo teorema de Pitágoras. "[...] o pensamento que expressamos no teorema de Pitágoras é intemporalmente verdadeiro, verdadeiro independente do fato de que alguém o considere verdadeiro ou não.". (FREGE, 2002, p. 27). Em seguida, continua: "Ele [o teorema de Pitágoras] não requer nenhum portador. Ele é verdadeiro não a partir do momento de sua descoberta, mas como um planeta que já se encontrava em interação com outros planetas antes mesmo de ter sido visto por alguém. (FREGE, 2002, p. 27). No mesmo sentido, em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), escreve:

> Distingo objetivo de palpável, espacialmente e efetivamente real. O eixo da Terra e o centro de massa do sistema solar são objetivos, mas não preferiria chamá-los de efetivamente reais como a própria Terra. Chama-se frequentemente o equador de linha imaginária; mas seria falso chamá-lo de linha imaginada; ele não nasceu do pensamento, não é produto de um processo mental, mas é apenas conhecido, apreendido pelo pensamento. (1980, p. 225 – 226, § 26)

Desse modo, na concepção de Frege, existe o pensamento que é algo permanente e estável. Diz que se não houvesse esse algo comum entre nós, isto é, "Se no fluxo constante de todas as coisas nada se mantivesse firme e eterno, o conhecimento do mundo deixaria de ser possível e tudo mergulharia em confusão.". (FREGE, 1980, p. 202)

O pensamento nos permite obter, nesse sentido, um conhecimento estável e permanente e é, na visão de Frege, uma evidência da existência de um terceiro domínio, que não estão nas coisas do mundo e também não estão em nossas representações que fazemos sobre as coisas do mundo.

> É preciso admitir um terceiro domínio. O que este contém coincide com as ideias, por não poder ser percebido pelos sentidos, e também com as coisas, por não necessitar de um portador a cujo conteúdo de consciência pertenceria. (FREGE, 2002, p. 27).

Tal nível de existência não é algo espacialmente perceptível e passível de medição, como fazemos com objetos físicos quando desejamos estudar suas propriedades, e, também, não é obtido por estudos fisiológicos de nosso cérebro ou são ideias subjetivas. Há uma estrutura comum que permite nosso conhecimento. Escreve Frege no artigo *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892) que apesar de toda a multiplicidade de entendimento de uma mesma palavra, em uma mesma língua, pelos seus usuários, e "[...] apesar de toda a multiplicidade das línguas, a humanidade possui um tesouro comum de pensamento.". (FREGE, 2009, p. 115, nota 14 do autor)

Dessa maneira, o pensamento contido no teorema de Pitágoras, por exemplo, pode ter diferentes expressões linguísticas, sem que, com isso, se perca sua objetividade nas representações individuais ou, no caso da Matemática, obtemos o resultado de uma demonstração ou operação aritmética sem a interferência dos sinais que os expressam e independente das vontades do sujeito.

Veremos a seguir que na relação entre conceito e objeto para expressar um pensamento, podemos concatenar também dois conceitos, tal que um conceito, por ser insaturado, pode ser completado por outro conceito.

1.8. Conceito de conceito

Veremos nesta seção que além de poder ser saturado por objetos, um conceito pode ser saturado por outro conceito. A saturação de um conceito por outro gera, como veremos, o conceito de conceito.

Observadas as características lógicas do pensamento nas seções anteriores, podemos melhor compreendê-lo e identificar a relação entre os elementos que o constituem em sua análise. Conceito e objeto só podem ser analisados quando vinculados um ao outro no contexto de uma proposição, pois é nesse âmbito que um pensamento é expresso e o significado lógico de tais termos são expressos com mais propriedade.

Escreve Frege em *Sobre o Sentido e a Referência* (1892): "O que eu denomino de objeto só pode ser mais precisamente discutido quando vinculado ao conceito e à relação.". (FREGE, 2009, p. 139). Sobre esse vínculo, ainda nos diz em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): "Quanto a um conceito, a questão é sempre a de saber se algo cai ou não sob ele, e o quê. Quanto a um nome próprio, questões como esta são desprovidas de sentido.". (FREGE, 1980, p. 243, § 51)

Frege usa o termo "cai sob" (*fällt unter*) para os objetos que, quando completados à função, geram o verdadeiro. Por exemplo, o objeto expresso pelo nome "Sócrates" cai sob o conceito expresso pelo termo conceitual "*x* é um homem", pois a proposição resultante é verdadeira. O termo "não cai sob" (*fällt nicht unter*) é usado para os objetos que, quando completados à função, geram o Falso, e. g., o objeto designado "Brasília" não cai sob o conceito designado de "*x* é um homem", pois gera uma proposição falsa.

Sobre a relação entre conceito e objeto, propiciada pelos termos "cai sob" (*fällt unter*) e "não cai sob" (*fällt nicht unter*), escreve Frege no artigo *Digressões Sobre o Sentido e a Referência* (1892/1895): "No que tange ao conceito temos, pois, o caso especial em que o valor é sempre um valor de verdade. Se completarmos um nome conceitual mediante um nome próprio, obtemos uma sentença cujo sentido é um pensamento, e a que corresponde como referência um valor de verdade.". (FREGE, 2009, p. 161, grifo nosso). Nesse sentido, "Ao reconhecer este valor de verdade como verdadeiro (como o verdadeiro), julgamos que o objeto tomado como argumento *cai sob* o conceito.". (FREGE, 2009, p. 161, grifo nosso)

Podemos observar, então, no que concerne a um objeto, que não faz sentido perguntar se algo cai ou não sob ele, pois objeto é algo que não precisa ser saturado tal como ocorre com um conceito; quanto a um conceito, vários objetos podem cair sob ele, como é o caso do conceito expresso pelo termo conceitual "planetas do sistema solar", ou apenas um objeto pode cair sob ele, como é o caso do conceito expresso pelo termo conceitual "satélites da Terra"; também sob um conceito pode não cair um objeto, por exemplo, o conceito expresso pelo termo conceitual “diferente de si próprio”, pois, como se sabe, não há objeto que seja diferente de si mesmo.

A insaturação e saturação, ao mesmo tempo que relacionam objetos e conceitos, os tornam radicalmente diferentes, pois não podemos substituir uns pelos outros. Sobre isso, diz ainda em *Digressões Sobre o Sentido e a Referência* (1892/1895): “[...] objetos e conceitos são radicalmente distintos e não podem substituir uns aos outros.”. (FREGE, 2009, p.162). Nesse sentido, Frege diz que objeto é tudo aquilo que não é conceito. Sobre isso, escreve em *Função e Conceito* (1891): “Aqui só se pode dizer sucintamente: um objeto é tudo que não é uma função [isto é, um conceito], de modo que uma expressão dele não contém lugar vazio.”. (FREGE, 2009, p. 97). Portanto, ambos têm propriedades fundamentalmente opostas e se relacionam mutuamente.

Se o conceito é, como vimos, insaturado, o espaço vazio na expressão, que indica sua insaturação, pode ser ocupado também por conceitos. Nesse sentido, diz Frege em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): “Pode-se, pois, fazer um conceito cair sob outro superior ou, por assim dizer, sob um conceito de segunda ordem. Não se deve confundir esta relação com a de subordinação.”. (FREGE, 1980, § 53, p. 244). Para ilustrar esse caso, tomemos um exemplo do próprio autor, a saber, o conceito “conceitos sob os quais caem um único objeto”, sob este conceito (que é um conceito de segundo nível, pois sob ele caem apenas conceitos) cai, por exemplo, o conceito “satélite da Terra” (que é um conceito de primeiro nível, pois sob ele cai apenas o corpo celeste designado de “Lua”).

No artigo *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892) Frege usa o termo “conceito de primeiro nível” e “conceito de segundo nível”. Em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884) o autor usa “conceito de primeira ordem” e “conceito de segunda ordem” para realizar uma mesma designação. Nesse sentido, escreve ele no artigo *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892): “Em meus *Fundamentos* chamei a um tal conceito de conceito de segunda ordem (*Ordnung*), e no meu escrito *Função e Conceito*, chamei-o de segundo nível (*Stufe*), o que farei aqui.”. (FREGE, 2009, nota 30, p. 120)

A fim de distinguir esses níveis de relações entre os conceitos de primeiro nível e os conceitos de segundo nível, Frege distingue *o cai sob* (*fällt unter*) para uma relação entre objeto e conceito e *o cai em* (*falle unter*) para uma relação entre conceito de primeiro nível e de segundo nível. Escreve no artigo *Sobre o Conceito e o Objeto* (1892): “A relação de um objeto com um conceito de primeiro nível sob o qual ele cai é diferente, embora semelhante, da relação de um conceito de primeiro nível com um conceito de segundo nível.”. (FREGE, 2009, p. 121). Em seguida, ainda escreve: “Se se quisesse considerar ao mesmo tempo a distinção e a semelhança, poder-se-ia talvez dizer que um objeto cai *sob* um conceito de primeiro nível, e que um conceito cai *em* [*falle unter*] um conceito de segundo nível. Deste modo, a distinção entre conceito e objeto conserva toda sua nitidez. (FREGE, 2009, p. 121, grifo do autor)

O notável é que a possibilidade de um conceito de primeiro nível cair sob um conceito de segundo nível pode levar a contradições. Essa contradição atinge um dos axiomas do sistema de Frege, o Axioma V, apresentado na Seção 1.5, podendo ser expresso por $\{x : fx\} = \{x : gx\} \equiv \forall x\ (fx = gx)$. Em vista deste axioma, em Julho de 1902 Russell escreve uma carta para Frege apontando uma contradição em sistema a partir desse axioma. Na Carta Russell diz que ao ler o primeiro volume de *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893) encontra uma dificuldade que ele mesmo já tinha pensado: “[...] que a função poderia constituir também um elemento indefinido.”. (RUSSELL, 1967, p. 124 – 125, tradução nossa).[105] Em outras palavras, a dificuldade apontada por Russell consistia em considerar que a variável x em uma função w seja uma variável irrestrita, isto é, que pode ser substituída por qualquer elemento, inclusive por ele mesmo; sendo assim expresso $\{x : wx\}$, que se lê: para todo x, vale a função wx. Se x de w pode ser qualquer elemento, inclusive o próprio w, então w pode ser uma totalidade, uma classe de todas as classes.

Sendo assim, a dúvida de Russell sobre $\{x : wx\}$ advém com a consideração do seguinte predicado: “Seja w o predicado: ser um predicado que não pode ser predicado de si mesmo. w pode ser predicado de si mesmo? De cada resposta se segue o seu contrário.”.[106] (RUSSELL, 1967, p. 124, tradução nossa).[107] Em outras palavras, como o predicado w pressupõe a expressão $\{x : wx\}$, então podemos perguntar se ele pertence a si mesmo. Se w é predicado de si mesmo, então, pela sua propriedade definidora, w não é predicado de si mesmo. Por outro lado, se w não é predicado de si mesmo, então pela sua propriedade definidora, w é predicado de si mesmo. O que resulta, então, como podemos observar, em uma contradição.

[105] “[...] that a function, too, can act as the indeterminate element.”.
[106] Na carta Russell expressa a contradição utilizando-se da notação de Peano do seguinte modo: $w = \text{cls} \cap x \ni (x \sim\in x) \,.\supset:\, w \in w \,.=.\, w \sim\in w$, que se pode explicar do seguinte modo: se w é a classe das classes x's que não pertencem a si mesmas ($w = \text{cls} \cap \text{x} \ni (x \sim\in x)$), então w pertence a w se e somente se w não pertence a w ($w \in w .=. w - \in w$).
[107] “Let w be the predicate: to be a predicate that cannot be predicated itself. Can w be predicated of itself? From each answer its opposite follows.”.

Essa contradição ficou conhecida na Lógica por “Paradoxo de Russell”. Seu conhecimento se deve, principalmente, por ter ruído um dos axiomas mais fundamentais de Frege, o Axioma V, a partir do qual ele propunha sua definição de número, seu objeto de investigação central em *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893), sobre o qual ele se debruçou durante considerável parte de sua vida.

1.9. Conclusão

Podemos dizer que Frege pode receber o mérito de, na História da Lógica, associar, de modo explícito, pela primeira vez na História da Lógica, o conceito de função em Matemática com a noção de conceito em Lógica, propondo, com isso, um novo paradigma de esquema de análise da proposição. Para isso, Frege define conceito como um tipo de função cujo valor é sempre um valor de verdade.

A primeira ocorrência do termo “função” em Frege aparece na *Conceitografia* em 1879. Nesta obra, Frege chama por “função” a parte estável ou invariável de uma proposição quando transformamos os elementos que a constituem em variáveis e a parte que não é estável, e que substitui a variável, ele chama por “argumento”. Para expressar o conceito de função ele introduz letras cujo significado na linguagem da conceitografia é expressar generalidades. Nesse sentido, a relação função e argumento é expresso por $\Phi(A)$ e a relação entre dois argumentos por $\Phi(A,B)$.

Na ordem de exposição da *Conceitografia* (1879), na seção “Função”, Frege deriva o conceito de função a partir da análise de proposições da linguagem natural. Ele conclui a seção dizendo que o seu conceito de função é muito mais amplo que o conceito de função utilizado pelos matemáticos na Análise em Matemática. As explicitações sobre seu conceito de função e o conceito de função em Matemática é discutido por Frege no artigo *Função e Conceito* (1881).

Em *Função e Conceito* (1881) Frege deriva o conceito de função a partir da análise de equações matemáticas. Diz que chegamos à ideia de função somente quando escrevemos '*x*' para indicar indefinidamente e passamos a olhar para o que permanece em uma equação matemática. O que permanece na equação é a forma da expressão. A letra “*x*” não deve ser considerada como pertencente à função, pois esta letra só serve para indicar a espécie de complementação de que a função necessita, mostrando os lugares onde o sinal do argumento deve entrar.

Ao se escrever x para indicar indefinidamente, Frege distingue, assim, a forma, que é o que permanece ou o que é insaturado, do conteúdo da função, que é o que varia ou o que satura a função, isto é, o argumento. À função, Frege associa a noção de conceito em Lógica, já o argumento ele associa a noção de objeto. Nesse sentido, do mesmo modo que podemos falar de função e argumento, podemos falar de conceito e objeto, isto é, o conceito ou a função é algo insaturado e o objeto ou o argumento é algo saturado.

A notação utilizada por Frege é expressa utilizando-se a letra f ou F, ficando assim indicada "$f(x)$" ou "$F(x)$", cujos parênteses "( )" indicam que o "lugar" está vazio e o sinal x ocupa esse "espaço" insaturado no papel, sendo este o sinal que indica algo que venha a ocupar este lugar. O sinal f ou F expressa qualquer função indefinidamente, pois assim como por uma letra se indica um número indefinidamente quando se visa a expressar a generalidade, também se necessita de letras para indicar uma função indefinidamente. A $f(x)$ ou $f(x,y)$ expressa, assim, o conceito de função de Frege, que podemos chamar por "função proposicional de Frege".

Além da função proposicional de Frege ser aplicável ao conceito; ela pode ser aplicada às proposições. Em *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893), como vimos, ele define negação e a implicação como funções cujo valor é um valor de verdade. Ao aplicar funções aos predicados e às proposições, parece sintetizar, nessa aplicação da função, o papel das expressões dos termos predicativos (termo categoremáticos) e dos termos conectivos (termos sincategoremáticos) como valor de verdade. A distinção entre termos categoremáticos e sincategoremáticos data, com mais clareza, da Lógica Medieval, constituindo-se em modos de expressar a forma lógica, inaugurando a distinção entre a Lógica das Classes e a Lógica das Proposições.

Quando Frege diz que chegamos à ideia de função somente quando escrevemos 'x' para indicar indefinidamente e passamos a olhar para o que permanece em uma equação matemática, e define, a partir disso função para predicado e função para conectivo, ele parece generalizar o conceito de função a partir de funções matemáticas. Trata-se de uma generalização, pois o que ele chama por função são tanto equações matemáticas quanto esquemas de análise de proposições, seja no plano predicativo, seja no plano dos conectivos. Nesse sentido, escreve Peter Hylton, no artigo *Proposições, Funções e Análises* (*Propositions, functions, and analysis*) que "[...] Frege emprega explicitamente uma versão generalizada e clarificada da noção matemática.”. (HYLTON, 2005, p. 141, tradução nossa).[108] Assim, a função proposicional de Frege é uma generalização da função matemática de função aplicável em diversos domínios, seja no âmbito das equações matemáticas, seja no âmbito das proposições em geral.

Vimos, também, que a correspondência entre o conjunto de argumentos que saturam as funções e seus respectivos valores é o que Frege chama por “o percurso de valores” das funções. Ele introduz, no artigo *Função e Conceito* (1881), o conceito de percurso de valores a partir de duas funções, as funções $x^2 - 4x$ e $x(x - 4)$. Desse modo, se para todos os valores da variável x as funções têm os mesmos valores de verdade, então elas têm o mesmo percurso de valores. Com isso, podemos dizer que duas funções são iguais do ponto de vista do percurso de valores, embora uma função seja distinta da outra, pois uma é expressa assim “$x^2 - 4x$” e a outra assim “$x\ (x - 4)$”.

Mas, não podemos confundir, como vimos, a igualdade entre os valores de duas ou mais funções com a igualdade entre o percurso de valores de duas ou mais funções. Para evitar esta confusão, Frege introduz uma notação para designar o percurso de valores de uma função. Nesse sentido, o percurso de valores da função $x^2 - 4x$ recebe a seguinte designação: $\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon)$; e o percurso de valores da função $x\ (x - 4)$ é designado por $\alpha'(\alpha[\alpha - 4])$, donde segue-se que a expressão “$\varepsilon'(\varepsilon^2 - 4\varepsilon) = \alpha'(\alpha\ [\alpha - 4])$” indicam diretamente a igualdade entre percurso de valores das respectivas funções. Para indicar o percurso de valores de uma função f, ainda indefinida, Frege usa a seguinte notação: $\varepsilon' f\,(\varepsilon)$.

Estas notações nos permitem observar que os percursos de valores das funções são objetos, enquanto que as funções elas mesmas não o são. Frege associa, então, o que em Lógica se chama extensão de um conceito ao que ele chama por “percurso de valores de um conceito”. Isso quer dizer que duas ou mais funções têm o mesmo percurso de valores se e somente se elas têm a mesma extensão de conceito. Assim, se o percurso de valores de uma função é um objeto, então a extensão de conceito é também o que ele chama por “objeto”.

A extensão de conceito é condição para que Frege possa elaborar o conhecido Axioma V, um dos axiomas fundamentais para a sua definição de número, introduzido por ele em *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1893). Vimos que o Axioma V pode ser assim expresso: $\varepsilon'F(\varepsilon) = \varepsilon'G(\varepsilon) \equiv \forall x\ (Fx = Gx)$, isto é, o percurso de valores $\varepsilon' F(\varepsilon)$ é igual ao percurso de valores $\varepsilon'G(\varepsilon)$ se e somente se os objetos que substituem Fx e Gx são os mesmos para todas as

[108] “[...] Frege explicitly employs a generalised and clarified version of the mathematical notion.”.

substituições em x. Em uma linguagem mais moderna, podemos expressar o Axioma V do seguinte modo: $\{x : fx\} = \{x : gx\} \equiv \forall x\ (fx = gx)$, isto é, dois conjuntos f e g são idênticos se e somente se f e g possuem a mesma extensão, ou seja, os objetos de f e os objetos de g são os mesmos objetos.

A função proposicional de Frege, bem como o simbolismo utilizado para expressá-la, tornou-se tão estabelecida entre os lógicos do século XX, como Hilbert, Ackermann, Gödel, Carnap, Tarski, entre outros, que passou a ser um modelo para expressar a moderna predicação Lógica e analisar a estrutura interna da proposição.

Para a análise da estrutura interna da proposição são fundamentais as noções de conceito e objeto. Tais noções têm um sentido próprio na *Conceitografia* (1879) e está inserida nos seus propósitos: expressar as relações lógicas em um simbolismo desprovido de qualquer ambiguidade da linguagem natural com o propósito expressar diretamente o "conteúdo conceitual" presentes nas noções elementares da proposição.

Conceito e objeto são princípios lógico-matemáticos de análise da proposição, pois são essenciais para estabelecer os fundamentos da Aritmética. Em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884), como vimos, diz Frege: "Nesta investigação ative-me firmemente aos seguintes princípios lógicos: […] não se deve perder de vista a distinção entre conceito e objeto.". (FREGE, 1980, p. 204). Vimos que tanto o conceito (*Begriff*) quanto o objeto (*Gegenstand*) são elementos logicamente simples, e, com efeito, não podem ser definidos. Apesar de serem indefinidos, isso não quer dizer que não possam ser compreendido por nós. Podemos assinalar o que queremos dizer por objeto através de sugestões linguísticas.

Uma sugestão linguística para expressar e distinguir objeto é a expressão de um sujeito na sentença e a possibilidade da nomeação. O pronome demonstrativo ou o artigo definido são elementos linguísticos para indicar diretamente o nome de um objeto. Frege denomina de nome próprio o sinal que designa um objeto (*Gegenstand*) determinado. A referência (*Bedeutung*) é um objeto designado por um nome próprio. Já um conceito é expresso por um termo conceitual. Um termo conceitual é o modo de designar ou expressar um conceito. Um termo conceitual é indicado por um artigo indefinido e ocorre na proposição como predicado. Aqui dizemos que o conceito é a referência do termo conceitual.

A referência é o que é designado pelo sinal, seja por um nome próprio, seja por uma termo conceitual. A referência (*Bedeutung*) não pode ser confundida com objeto (*Gegenstand*), pois, para Frege, tanto nomes próprios quanto termos conceituais podem ter referência. Com isso, o termo “referência” pode ser usado tanto para designar objeto quanto conceito. Desse modo, não devemos opor, de um lado, conceito e sentido, e de outro, objeto e referência, como se poderia, erroneamente, entrever do que dissemos até agora.

Tanto o termo “conceito” quanto o termo “objeto” têm sentido e referência. O sentido (*Sinn*) é, para Frege, o modo de expressão do objeto designado e que pode ser apresentado pelo sinal. Sendo objetos e conceitos expressos por sinais, então dizemos que conceitos se opõem a objetos, mas não à referência, pois tanto conceito quanto objeto são referências de sinais que os designam (termos conceituais e nome próprios, respectivamente).

O sentido e a referência dos termos que formam uma proposição, quando conectados entre si, formam um pensamento. A natureza saturada e insaturada de objeto e conceito são fundamentais para a formação de um pensamento, pois são complementares. O pensamento (*Gedanke*) é algo que pode ser expresso pelo sentido de sentenças, passível de ser verdadeiro ou falso.

Isso quer dizer que se estivermos comprometidos com a verdade, o sentido, por si só, não nos é suficiente; é preciso, pois, ir além se quisermos expressar um pensamento. Isso ocorre, pois a busca pela verdade nos conduz da referência do nome próprio para a atribuição do predicado a ela, gerando uma proposição com sentido, e, por conseguinte, do sentido da proposição para sua referência, isto é, para a verificação do seu valor de verdade, resultando, portanto, em um pensamento.

Se o valor de verdade é a referência de uma sentença, então as sentenças são nomes próprios. Nesse sentido, um pensamento, expresso por uma sentença assertiva completa, é entendido como um nome próprio e tem como referência um valor de verdade. Assim, tanto o Verdadeiro quanto o Falso são objetos, pois estes são algo determinados, completos em si mesmos.

O pensamento não é uma coisa palpável e espacialmente perceptível. O pensamento que é algo permanente e estável. O pensamento nos permite obter, nesse sentido, um conhecimento estável e permanente e é, na visão de Frege, uma evidência da existência de um terceiro domínio, que não estão nas coisas do mundo e também não estão em nossas representações que fazemos sobre as coisas do mundo.

No plano do pensamento, conceitos e objetos estão de tais modos relacionados um ao outro que o objeto só pode ser mais precisamente discutido quando vinculado ao conceito e à relação. A relação de insaturação e saturação nos permite dizer que o objeto *cai sob* o conceito. Frege usa o termo "cai sob" para os objetos que, quando completados conceito, geram o verdadeiro, e o termo "não cai sob" para os objetos que, quando completam a função, geram o Falso.

Como o objeto é algo saturado, não faz sentido dizer que um objeto cai sob outro objeto, pois o objeto é saturado. Entretanto, faz sentido dizer que em um conceito nenhum objeto cai sob ele, por exemplo, o termo conceitual "diferente de si próprio", que, como se sabe, não há objeto que seja diferente de si mesmo.

Se o conceito é, como vimos, insaturado, o espaço vazio na expressão, que indica sua insaturação, pode ser ocupado também por conceitos. Nesse sentido, um conceito cai sob outro conceito superior. O conceito que cai sob o outro conceito é o conceito de primeiro nível e o conceito que é saturado por conceitos é o conceito de segundo nível. A fim de distinguir esses níveis de relações Frege distingue, como vimos, o *cai sob* (*fällt unter*), para uma relação entre objeto e conceito, do *cai em* (*falle unter*), para uma relação entre conceito de primeiro nível e um conceito de segundo nível.

A possibilidade de um conceito de primeiro nível cair sob um conceito de segundo nível pode levar a contradições. Vimos que em Julho de 1902 Russell escreve uma carta para Frege apontando uma contradição em sistema. Essa contradição ficou amplamente conhecida na Lógica por "Paradoxo de Russell", por ter ruído um dos axiomas mais fundamentais de Frege, o Axioma V, a partir do qual ele propunha sua definição de número.

Esse paradoxo abre caminhos para novos estudos e discussões em Lógica no que concerne, por exemplo, a natureza da função proposicional, em especial sobre a variável que nela ocorre, isto é, se se pode considerar esta variável como irrestrita ou se deve restringi-la. Essa discussão abriu novos horizontes como, por exemplo, a Teoria dos Tipos, apresentada e discutida por Russell. É o que veremos no próximo capítulo.

Capítulo II: Russell e a função proposicional

A primeira ocorrência do termo "função proposicional" parece surgir em 1903 com a publicação da obra de Bertrand Russell (1872-1970) intitulada "Os Princípios da Matemática". (1903)[109] (*The Principles of Mathematics*). Faremos, então, neste capítulo, um estudo sobre o conceito de função proposicional em Russell.

2.1. Introdução ao termo "função proposicional"

Nesta seção mostraremos como foi introduzido, pela primeira vez, o termo "função proposicional" em *Os Princípios da Matemática* (1903). Para isso, contextualizaremos, brevemente, esta obra, de modo a apresentar, sucintamente, seus propósitos centrais.

Os Princípios da Matemática (1903) foi idealizado para formar um conjunto de dois grandes volumes. O Volume I, publicado em 1903, é, segundo Russell, um estudo endereçado aos filósofos e matemáticos, com partes endereçadas mais aos primeiros que aos segundos ou em igual medida a ambos. Já o Volume II receberia, posteriormente, a colaboração de Alfred North Whitehead (1861-1947) e seria endereçado mais propriamente aos matemáticos.

Sobre a apresentação dos volumes, escreve Russell: "O presente volume [o primeiro volume], que pode ser considerado tanto como um comentário sobre, ou como uma introdução ao, segundo volume, é endereçado, em igual medida, para o filósofo e o matemático […]" (RUSSELL, 1903, p. vi, tradução nossa).[110] Em outra passagem, escreve: "O segundo volume, no qual tive a grande sorte de garantir a colaboração do Sr. A. N. D. Whitehead, será endereçado exclusivamente aos matemáticos [...]". (RUSSELL, 1903, p. vi, tradução nossa)[111], pois "[...] será estabelecido pelo raciocínio estritamente simbólico […]". (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa).[112] Entretanto, esse segundo volume acabou se

[109] Antes da publicação de *Os Princípios da Matemática* em 1903, Russell publicara dois outros trabalhos sobre fundamentos e princípios da Matemática, a saber: *Um Ensaio sobre os Fundamentos da Geometria* (1897) (*An Essay on the Foundations of Geometry*) e *Trabalho Recente sobre os Princípios da Matemática* (1901) (*Recent Work on the Principles of Mathematics*); este último livro foi reimpresso, posteriormente, sob o título "Mathematics and the Metaphysicians" e publicado no seu livro *Misticismo e Lógica e Outros Ensaios* (1918) (*Mysticism and Logic and Other Essays*), e aparece também em *The Collected Papers of Bertrand Russell* no Volume 3, publicado em 1993. Não encontramos a ocorrência do termo "função proposicional" nesses trabalhos publicados antes de *Os Princípios da Matemática.* A bibliografia completa de Russell pode ser consultada na *Stanford Encyclopedia of Philosophy* disponível neste link: http://plato.stanford.edu/entries/russell/#Bib.

[110] "The present volume, which may be regarded either as a commentary upon, or as an introduction to, the second volume, is addressed in equal measure to the philosopher and to mathematician [...]".

[111] "The second volume, in which I have had the great good fortune to secure the collaboration of Mr A. N. D. Whitehead, will be addressed exclusively to mathematicians [...]".

[112] "[...] will be established by strict symbolic reasoning [...]".

tornando, como veremos em nosso trabalho, um estudo independente e mais amplo; estudo posteriormente publicado por Russell, com colaboração de Whitehead, em três grandes volumes, reunidos sob o título "Principia Mathematica", publicados, respectiva e sucessivamente, nos anos de 1910, 1912, 1913.

Escreve Russell no Prefácio do Volume I de *Os Princípios da Matemática* (1903) que a obra consiste em dois objetivos principais: (i) "[...] a prova de que toda matemática pura trata exclusivamente de conceitos definíveis em termos de um número muito pequeno de conceitos lógicos fundamentais [...]" (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa)[113]; e (ii) "[...] que todas as suas proposições são dedutíveis a partir de um número muito pequeno de princípios lógicos fundamentais.". (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa).[114] Esses princípios lógicos fundamentais são discutidos na Parte I do Volume I da obra.

A obra é dividida em sete grandes partes, cada uma delas, por sua vez, dividida em capítulos que são, então, subdivididos em seções cujos parágrafos são numerados. A Parte I, em especial, é, como nos indica Russell (cf. 1903, p. v), a explanação dos conceitos fundamentais que os matemáticos aceitam como indefiníveis e que, por isso, adquire uma tarefa puramente filosófica. "Esta é uma tarefa puramente filosófica, e não posso me lisonjear que eu tenha feito mais do que indicar um campo vasto de investigação, e dar uma amostra dos métodos pelos quais a investigação poderá ser conduzida.". (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa)[115]

Observa Russell que os conceitos indefiníveis são obtidos por um processo de análise que não podem ser ignorados em uma investigação filosófica. "Quando, como no presente caso, os indefiníveis são obtidos principalmente como o resíduo necessário em um processo de análise, é muitas vezes mais fácil saber que deve haver tais entidades que realmente percebê-las [...]". (RUSSELL, 1903, p. v, tradução nossa)[116]

É no Capítulo II da Parte I do Volume I de *Os Princípios da Matemática* (1903), intitulado "Lógica Simbólica", que Russell introduz pela primeira vez o termo "função proposicional". Russell inicia o Capítulo II explicitando qual é o objeto da Lógica Simbólica ou da Lógica Formal, tomando estes dois termos como sinônimos. De modo geral, diz ele que

[113] "[...] the proof that all pure mathematics deals exclusively with concepts definable in terms of a very small number of fundamental logical concepts [...]".
[114] "[...] and that all its propositions are deductible from a very small number of fundamental logical principles.".
[115] "This is a purely philosophical task, and I cannot flatter myself that I have done more than indicate a vast field of inquiry, and give a sample of the methods by which the inquiry may be conducted.".
[116] "Where, as in the present case, the indefinables are obtained primarily as the necessary residue in a process of analysis, it is often easier to know that there must be such entities than actually to perceive them [...]".

a Lógica Simbólica "[...] é o estudo dos vários tipos gerais de dedução.".[117] (RUSSELL, 1903, § 11, p. 10, tradução nossa)[118]

O autor ressalta ainda que, do ponto de vista histórico, a Lógica Simbólica abrange o Silogismo de Aristóteles em todas as suas figuras, tal como suposto pela tradição escolástica; mas que é a partir do reconhecimento das inferências não silogísticas, de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) em diante, que deriva o progresso da moderna Lógica Simbólica.

Como dissemos na Seção 1.2, Leibniz é o primeiro a lançar a ideia de uma linguagem concebida cientificamente, chamada de "lingua philosophica" ou "characteristica universalis", para auxiliar o homem a pensar de modo mais claro possível, sem erros de raciocínio, onde todas as verdades poderiam ser reduzidas a um cálculo.

No sistema lógico da C*haracteristica Universalis*, Leibniz utiliza-se de letras minúsculas do alfabeto latino para expressar proposições e termos que compõem tais proposições: "Um termo é *a*, *b*, *ab*, *bcd*; tal como homem, animal, animal racional, racional visível mortal.". (LEIBNIZ, [G., VII, 218-27], 1989, p. 244, tradução nossa).[119] Nessa linguagem, o que ele chama por "termo" é tanto o sujeito quanto o predicado de uma proposição: "Se em uma proposição afirmativa universal, o sujeito é uma coisa, mas o predicado não é uma coisa nem uma definição, mas algum outro termo, então este termo é dito ser um *atributo*.". (LEIBNIZ, [G., VII, 218-27], 1989, p. 245, grifo do autor, tradução nossa).[120] Em seguida, escreve: "Eu designo uma *proposição afirmativa universal* assim: *a* é *b*, ou (todo) homem é animal. Quero que esse sempre seja um sinal de universalidade, onde *a* é o sujeito, *b* o predicado, e *é* a cópula.". (LEIBNIZ, [G., VII, 218-27], 1989, p. 244, tradução nossa)[121]

---

[117] Hoje define-se Lógica, de modo mais amplo, como o estudo de sistemas formais e não apenas como o estudo dos vários tipos de dedução. "Uma lógica, em sentido estrito, é um sistema formal.". (TASSINARI; D'OTTAVIANO, 2012, p. 159). Em linhas gerais, podemos dizer, nesse sentido, que um sistema formal é composto por um conjunto de símbolos, chamado de "alfabeto", um conjunto de expressões bem formadas com regras sintáticas bem definidas para formá-las, chamada de "fórmulas-bem-formadas", um conjunto de axiomas ou postulados e, por fim, regras de inferência que permitem gerar, dedutivamente, fórmulas no interior de um sistema formal. Nesse sentido, a dedução é apenas um elemento lógico que compõe um sistema formal. Como o significado de um sistema formal depende de uma semântica que o lógico atribui a este sistema, então temos não apenas um sistema formal, mas sistemas formais que variam de acordo com uma semântica atribuída a esse sistema formal. Portanto, podemos dizer, de acordo com os autores, que hoje "A Lógica, em sentido amplo, é uma disciplina, uma ciência, um ramo do saber, na qual se estuda diversos sistemas formais, e não se constitui, necessariamente, em apenas um sistema formal.". (TASSINARI; D'OTTAVIANO, 2012, p. 163)

[118] "[...] is the study of the various general types of deduction.".

[119] "A *term* is *a*, *b*, *ab*, *bcd*; such as man, animal, rational animal, rational visible mortal.".

[120] "If in a universal affirmative proposition, the subject is a thing but the predicate is neither a thing nor a definition but some other term, then this term is said to be an *attribute*.".

Destaca Leibniz que seu cálculo está sustentado no seguinte postulado: "É admissível assumir que uma letra pode ser equivalente a uma ou mais letras de uma só vez (então, *d* é igual a *a*) e que pode ser substituído no lugar de outra.". (LEIBNIZ, [G., VII, 218-27], 1989, p. 244, tradução nossa).[122] Por exemplo, se *c* designa homem e *ab* designa animal racional, então *c* é equivalente a *ab*, pois, como sabemos, homem é equivalente a animal racional. Isso quer dizer que as letras indicadas para expressar termos ou proposições são variáveis que podem ser substituídas por uma letra com um conteúdo equivalente.

Russell ressalta, também, que, com a publicação da obra de George Boole (1815-1864) intitulada "Uma Investigação das Leis do Pensamento" (1854) (*An Investigation of the Laws of Thought*), o assunto adquiriu um maior rigor, pois passou, com isso, a haver um desenvolvimento técnico mais considerável na História da Lógica.

Notemos que é pretensão de Boole, em *Uma Investigação das Leis do Pensamento* (1854), de que todas as operações do pensamento possam ser expressas por um sistema de signais compostos pelos seguintes elementos: 1) símbolos literais: *x*, *y*, *z*, etc., que podem expressar tanto substantivos quanto adjetivos; 2) sinais de operação: +, −, ×, que relacionam os sujeitos e os predicados; e 3) sinal de identidade: =. Os símbolos literais podem expressar não apenas indivíduos, mas, também, classes (cf. BOOLE, 1854, p. 27). Por exemplo, tanto o indivíduo "o carneiro branco" quanto a classe "carneiros brancos" podem ser expressas por *xy*, tal que *x* pode expressar, desse modo, o indivíduo carneiro ou a classe dos carneiros, e *y* pode expressar o adjetivo atribuído ao indivíduo ou a classe *x*.

Nesse sistema de sinais, a ordem dos símbolos literais *xy* não é relevante, pois eles podem ser expressos tanto por *xy* quanto por *yx*, isto é, $xy = yx$. Sobre isso, em suma, escreve Boole: "*Estamos autorizados, por conseguinte, a empregar os símbolos x, y, z, etc., no lugar dos substantivos, adjetivos e frases descritivas* […] *a lei em que a ordem na qual os símbolos se sucedem uns aos outros é indiferente*.". (BOOLE, 1854, p. 29-30, grifo do autor, tradução nossa)[123] A indiferenciação da ordem na relação entre substantivo e predicado ou entre substantivos na expressão da linguagem, proposta por Boole, indica uma abstração em relação à estrutura da linguagem comum em que a ordem da relação sujeito-predicado, pois a cópula

[121] "I designate a *universal affirmative proposition* thus: *a* is *b*, or (all) man is animal. I wish this always to be the sign of universality, where *a* is the *subject, b* the *predicate,* and *is* the *copula.*".
[122] "It is permissible to assume a letter to be equivalent to one or more letters at once (so *d* is equal to *a*) and that it can be substituted in place of the other.".
[123] "*We are permitted, therefore, to employ the symbols x, y, z, etc., in the place of the substantives, adjectives, and descriptive phrases* [...] *the law that the order in which the symbols succeed each other is indifferent*.".

"é" desaparece da notação. Essa abstração é fundamental para a constituição da função proposicional, cuja análise estamos realizando aqui.

A necessidade de determinação de um sistema de sinais é parte de um projeto maior do autor exposto em *Uma Investigação das Leis do Pensamento* (1854). Boole apresenta, logo no início da sua obra, a intenção do seu projeto: "O projeto do seguinte tratado é investigar as leis fundamentais dessas operações da mente pelas quais o raciocínio é formado […].". (BOOLE, 1854, p. 1, tradução nossa).[124] Isso significava, em outras palavras, "[...] dar expressão a elas [às leis fundamentais] na linguagem simbólica de um Cálculo, e sobre este fundamento para estabelecer a ciência da lógica e construir o seu método […]". (BOOLE, 1854, p. 1, tradução nossa).[125] Sua intenção era, então, fazer "[…] esse método em si a base de um método geral para a aplicação da doutrina matemática de Probabilidades [...]". (BOOLE, 1854, p. 1, tradução nossa)[126], isto é, um método de expressão das leis do pensamento ou do raciocínio lógico que, pela sua generalidade, pode-se ser aplicado à Matemática.

Além do destaque de Boole para o desenvolvimento técnico da Lógica, Russell aponta que os novos métodos introduzidos por Giuseppe Peano (1858-1932) tiveram uma considerável utilidade para a Filosofia e outros ramos da Matemática. Escreve Russell que, a partir desses novos métodos, "A Lógica Simbólica tornou-se agora não só absolutamente essencial para cada filósofo da lógica, mas também necessária para a compreensão da matemática em geral, e até mesmo para a prática bem-sucedida de certos ramos da matemática.". (RUSSELL, 1903, § 11, p. 10, tradução nossa)[127]

Destacamos aqui a notação utilizada por Peano para a linguagem apresentada nas "Obras Selecionadas" ["Opere Scelte"], em especial no Segundo Volume, intitulado "Lógica Matemática: Interlíngua e Álgebra da Gramática", na seção "Operação da Lógica Dedutiva". Em sua notação, ele se utiliza de letras maiúsculas do alfabeto latino para expressar classes. Diz que "[...] são A, B,…, qualquer classe desse sistema.". (PEANO, 1958, p. 3, tradução nossa).[128] Em seguida o autor introduz o conceito de identidade para expressar a identidade

[124] "The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of those operations of the mind by which reasoning is performed [...]".
[125] "[...] to give expression to them in the symbolical language of a Calculus, and upon this foundation to establish the science of Logic and construct its method [...]".
[126] "[...] that method itself the basis of a general method for the application of the mathematical doctrine of Probabilities [...]".
[127] "Symbolic Logic has now become not only absolutely essential to every philosophical logician, but also necessary for the comprehension of mathematics generally, and even for the successful practice of certain branches of mathematics.".
[128] "[...] sìano A, B, ... delle classi di questo sistema.".

entre duas classes A e B quaisquer: "O sinal = se lerá *igual*; a proposição A = B será dita *equação lógica*; A e B são os *membros* desta equação.". (PEANO, 1958, p. 3, grifo do autor, tradução nossa)[129]

Além disso, Peano introduz três símbolos de operação entre classes: a conjunção, a disjunção e a negação: (i) "O sinal ∩ se lerá *e*; a operação indicada pelo sinal ∩ é a *conjunção* da lógica; diremos também a multiplicação lógica; as classes A, B, ... dir-se-á que os *fatores* do *produto* A B...". (PEANO, 1958, p. 3, grifo do autor, tradução nossa)[130]; (ii) "O sinal ∪ lê *ou*; a operação indicada com sinal ∪ chama-se em lógica de *disjunção*; chamaremos *adição lógica*; as classes A, B,...dir-se-á os *termos* da *soma* A ∪ B ∪ C ...". (PEANO, 1958, p. 4, grifo do autor, tradução nossa)[131]; (iii) "[...] - A, ou Ā entenderemos a classe constituída por todas as entidades não pertencentes à classe A. O sinal – se lerá *não*; a operação indicada pelo sinal - é chamada *negação*.". (PEANO, 1958, p. 4, grifo do autor, tradução nossa)[132]. Introduzido tais operações na linguagem, Peano associa, mais adiante, que tais operações são funções de *x*, expressas por f(X): "Uma expressão obtida operando em uma classe X e em outras classes que são consideradas como fixas, com sinais lógicos ∪ ∩ - , dir-se-á uma função de X, e se indicará por f(X).". (PEANO, 1958, p. 7, tradução nossa).[133] Por exemplo, dada P e Q como classes fixas e X e $\overline{X}$ classes variáveis, temos a seguinte função: f(X) = P X ∪ Q $\overline{X}$.

Em seu livro intitulado "Meu Desenvolvimento Filosófico" (1959) (*My Philosophical Development*), Russell comenta que conheceu os trabalhos de Peano no *Congresso Internacional de Filosofia* realizado em Paris no ano de 1900 (portanto três anos antes da publicação de *Os Princípios da Matemática* (1903)) e que os trabalhos de Peano o incentivaram em suas próprias concepções sobre os princípios da Matemática.[134]

[129] "Il segno = si leggerà *eguale*; la proposizione A = B si dirà *equazione logica*; A e B sono i *membri* di questa equazione.".
[130] "Il segno si leggerà *e*; l'operazione indicata col segno ∩ è la *congiunzione* della logica; noi la diremo anche moltiplicazione logica; le classi A, B,... si diranno i *fattori* del *prodotto* A B.".
[131] "Il segno ∪ si leggerà *o*; l'operazione indicata col segno ∪ chiamasi in logica *disgiunzione*; noi la diremo anche *addizione logica*; le classi A, B,... si diranno i *termini* della *somma* A∪B∪C ...".
[132] "[...] - A, ovvero A intenderemo la classe formata da tutti gli enti non appartenenti alla classe A. Il segno – si leggerà *non*; l'operazione indicata dal segno - dicesi *negazione*.".
[133] "Noi diremo che una espressione logica funzione di X è sotto forma separata se è sotto la forma f(X) = P X ∪ Q $\overline{X}$ ove P e Q sono classi indipendenti da X si può sempre mettere sotto forma separata, ed in un modo solo.".
[134] Sobre a importância do Congresso e seu encontro com Peano, escreve ainda Russell no seu livro *Meu Desenvolvimento Filosófico* (1959): "Foi no Congresso Internacional de Filosofia realizado em Paris, em 1900, que me conscientizei da importância da reforma lógica para a Filosofia da Matemática. Ouvindo as discussões entre Peano, de Turim, e os outros filósofos lá reunidos, me tornei consciente disso. Eu não tinha conhecimento anterior de seu trabalho, mas impressionou-me o fato de, em toda discussão, ele mostrar mais precisão e rigor lógico que quaisquer dos presentes. Aproximei-me dele e disse-lhe: 'Desejo ler todos os seus trabalhos. O senhor tem cópias com você?' Ele tinha, e imediatamente li todos. Foram elas que incentivaram minhas próprias

Diz ele em O*s Princípios da Matemática* (1903) que se deve a Peano os principais contornos do seu trabalho. “No que se segue, os principais contornos são devido ao Professor Peano, exceto quanto às relações; mesmo naqueles casos em que eu me afastei de seus pontos de vista, os problemas considerados me foram sugeridos por sua obra.”. (RUSSELL, 1903, p. 10, tradução nossa).[135] A exceção é, então, o Cálculo das Relações, que ele atribui a Charles Sanders Peirce (1839 – 1914).[136] “O cálculo das relações é um tema mais moderno do que o cálculo de classes. Embora algumas alusões sobre isso sejam encontradas em De Morgan, o assunto foi primeiro desenvolvido por C. S. Peirce.”. (RUSSELL, 1903, p. 23, tradução nossa)[137]

Explica Russell (cf. 1903, p. 11-12) que a Lógica Simbólica ou a Lógica Formal divide-se em três grandes partes: o Cálculo das Proposições, o Cálculo das Classes e o Cálculo das Relações. O estudo de cada uma destas partes da Lógica é realizado por ele em *Os Princípios da Matemática* (1903).

O Cálculo das Proposições, em especial, envolve, como o próprio nome expressa, a noção básica de proposição. Sobre o conceito de proposição diz ele: “Uma proposição, podemos dizer, é tudo o que é verdadeiro ou o que é falso.” (RUSSELL, 1903, § 13, p. 12-13, tradução nossa)[138], por exemplo, a sentença “Sócrates é homem” é uma proposição, pois podemos dizer se ela é verdadeira ou falsa. Sendo assim, expressões como, por exemplo, “*x* é um homem”, não são proposições, pois não podemos dizer se é verdadeira ou falsa. Podemos dizer que ela se tornará uma proposição apenas quando for dado a *x* um valor determinado, pois com a determinação de *x*, podemos afirmar quem ou o que é um homem e, por conseguinte, julgar se nossa afirmação é verdadeira ou falsa.

---

concepções sobre os princípios da Matemática.”. [“It was at the International Congress of Philosophy in Paris in the year 1900 that I become aware of the importance of logical reform for the philosophy of mathematics. It was through hearing discussions between Peano of Turin and the other assembled philosophers that I became aware of this. I had not previously known his work, but I was impressed by the fact that, in every discussion, he showed more precision and more logical rigour than was shown by anybody else. I went to him and said, 'I wish to read all your works. Have you got copies with you?' He had, and I immediately read them all. It was they that gave the impetus to my own views on the principles of mathematics.”.]. (RUSSELL, 1959, p. 65, tradução nossa)

[135] “In what follows the main outlines are due to Professor Peano, except as regards relations; even in those cases where I depart from his views, the problems considered have been suggested to me by his works.”.

[136] Russell cita aqui o artigo de Peirce “Álgebra da Lógica” [“Algebra of Logic”] publicado no American Journal of Mathematics, Vol. III e VII. Este artigo é mais conhecido com o título “Sobre a Álgebra da Lógica: uma Contribuição para a Filosofia da Notação” (1885).

[137] “The calculus of relations is a more modern subject than the calculus of classes. Although a few hints for it are to be found in De Morgan, the subject was first developed by C. S. Peirce”.

[138] “A proposition, we may say, is anything that is true or that is false.”.

Notemos, então, que embora a expressão "*x* é um homem" não seja uma proposição, ela tem sua importância para a Lógica, pois essa expressão é, nas palavras do autor "uma forma esquemática permanente para qualquer classe de proposição". Sobre isso, escreve:

> Uma expressão como "*x* é um homem" não é, portanto, uma proposição, pois não é nem verdadeira nem falsa. Se nós dermos a *x* algum valor constante qualquer que seja ele, a expressão torna-se uma proposição: é assim como se fosse uma forma esquemática permanente para qualquer uma das classes inteiras de proposições. (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, tradução nossa)[139]

Podemos dizer, nesse sentido, que a expressão "*x* é um homem" é uma forma esquemática, pois abarca um conjunto de proposições que podemos expressar por "$H(x)$". Usamos a letra "*H*" para designar o predicado homem e a letra "*x*" para expressar a variável que ocorre na expressão, sendo que esta letra pode ser substituída por uma constante qualquer. Desse modo, a expressão $H(x)$ é uma classe de proposições, pois, conforme a substituição de uma constante em *x*, temos um conjunto de proposições que podem ser tanto verdadeiras quanto falsas; proposições do tipo "Sócrates é homem", "Aristóteles é homem", "Pegasus é homem", "Zeus é homem", etc. Estes exemplos de proposições têm a forma esquemática $H(x)$, isto é, são compostas por sujeito e predicado; diferente da forma esquemática $H(x, y)$, por exemplo, que são expressas por proposições do tipo "Platão e Aristóteles são homens", "Sócrates e Trasímaco são homens", etc.

No entanto, nem sempre a ocorrência do termo *x* indica uma forma esquemática como indicada acima. Há casos em que a ocorrência do termo *x* na expressão determina uma proposição. Por exemplo, seja a proposição implicativa "*x* é um homem implica *x* é mortal para todo valor de *x*"; esta sentença é verdadeira, pois seria uma sentença falsa se disséssemos que "*x* é um homem implica *x* é mortal para algum valor de *x*". Podemos observar, então, que a letra "*x*" que ocorre na proposição implicativa "*x* é um homem implica *x* é mortal para todo valor de *x*" não tem o mesmo significado que a letra "*x*" que ocorre, por exemplo, na expressão "*x* é um homem", pois a letra "*x*", nesse exemplo de proposição implicativa, não expressa uma variável no sentido próprio do termo, mas se constitui apenas como uma variável aparente na proposição.

[139] "An expression such as '*x* is a man' is therefore not a proposition, for it is neither true nor false. If we give to *x* any constant value whatever, the expression becomes a proposition: it is thus as it were a schematic form standing for any one of a whole class of propositions.".

Assim, o x na expressão "x é um homem" é uma variável real, pois há diferentes proposições para diferentes valores da variável, isto é, as diferentes proposições geradas dependem dos valores que se atribui a x na expressão considerada. Já a sentença "x é um homem implica x é mortal para todo valor de x", o x não é uma variável real, mas é uma variável aparente, pois tal sentença já é, como vimos, uma proposição, uma proposição verdadeira, não dependendo do valor de x para se tornar uma proposição.

Observa Russell que Peano notou essa sutileza sobre a noção de variável mencionada acima, distinguindo a variável real das variáveis que ocorrem apenas de modo aparente na proposição. Escreve Russell que "Peano distingue uma variável que aparece desse modo como aparente, uma vez que a proposição não depende da variável; enquanto que em 'x é um homem' existem diferentes proposições para diferentes valores da variável, e a variável é a que Peano chama por *real*.". (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, grifo do autor, tradução nossa)[140]

No Segundo Volume da Opere Scelte, na parte de Lógica Matemática, na seção *Operação da Lógica Dedutiva*, diz Peano: "Uma proposição pode expressar uma relação entre todas entidades determinadas; então se dirá *categórica*; considerada em si mesma só pode ser verdadeira ou falsa. Ou uma proposição pode conter entidades (variáveis), e se dirá *condicional* […]". (PEANO, 1958, § 4, p. 8, grifo do autor, tradução nossa).[141] Nesse sentido, exemplifica: "Assim, por exemplo, a proposição '$x^2 - 3x + 2 = 0$' é uma condição que contém o número indeterminado x; a proposição 'a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ tem raízes 1 e 2' é categórica, que se relaciona com a condicional anterior.". (PEANO, 1958, § 4, p. 8, grifo do autor, tradução nossa)[142]

Notemos que as variáveis que ocorrem nas proposições categóricas já estão previamente determinadas, mas a variáveis que ocorrem nas proposicionais condicionais dependem de um valor ainda não determinado. Nesse sentido, no exemplo dado por Peano em "$x^2 - 3x + 2 = 0$", a variável x é uma variável real, pois depende dos valores condicionais de x, já na proposição "equação $x^2 - 3x + 2 = 0$ tem raízes 1 e 2" a variável x é uma variável

[140] "Peano distinguishes a variable which appears in this way as apparent, since the proposition does not depend upon the variable; whereas in 'x is a man' there are different propositions for different values of the variable, and the variable is what Peano calls *real*.".
[141] "Una proposizione può esprimere una relazione fra enti tutti determinati; allora si dirà *categorica*; considerata in sè stessa non può essere che o vera o falsa. Oppure una proposizione può contenere enti indeterminati (variabili), e si dirà *condizionale* […]".
[142] "Così ad esempio la proposizione '$x^2 - 3x + 2 = 0$', è una condizionale, contenente il numero indeterminato x; la proposizione 'l'equazione $x^2 - 3x + 2 = 0$ ha per radici 1 e 2' è categorica, avente per soggetto la condizionale precedente.".

aparente, pois essa proposição já é uma proposição categórica, a qual podemos dizer que é verdadeira dado que os valores de x que nela ocorrem já estão previamente determinados.

Para a possibilidade de uma variável x de uma proposição condicional ser substituída por algo determinado resultando em uma proposição categórica α verdadeira, Peano usa a notação "x:α"; nesse sentido, escreve: "Se a proposição condicional α contém o ente indeterminado x, com x:α entenderemos a classe formada por todas as entidades para as quais é verdadeira a proposição α.". (PEANO, 1958, p. 8, tradução nossa).[143] Sendo que uma proposição α pode conter mais de uma variável, então Peano expressa a classe formada por todas a variáveis para as quais é verdadeira a proposição α por "(x, y, …):α". Sobre isso, diz: "[...] (x, y, ...):α entenderemos a classe formada por todas as entidades (x, y, ...) para a qual é verdadeiro o α.". (PEANO, 1958, p. 9, tradução nossa).[144] A expressão indica "(x, y, ...): α" indica, então, uma classe que, na medida que um dos elementos dessa classe é especificado, na relação com α, temos uma proposição categórica: "[...] a classe (x, y, ...):α é uma classe bem determinada, e uma proposição que afirma qualquer propriedade desta classe é categórica.". (PEANO, 1958, p. 9, tradução nossa)[145]

Assumindo que as variáveis supracitadas x, y,…, são substituíveis por números e f, φ são símbolos de função numérica, então Peano utiliza-se de tais símbolos para expressar classes de números que satisfazem equações, por exemplo, diz ele: "[...] x : [f(x) = 0] ∩ [$\varphi(x)$ = 0] representa as raízes comuns das duas equações $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = 0$.". (PEANO, 1958, p. 9, tradução nossa).[146] Tais equações são simplificadas pelo autor por símbolos expressos por α, β, tal que, dado o exemplo acima, a proposição condicional "$f(x) = 0$" pode ser expressa por "α" e "$\varphi(x) = 0$" pode ser expressa por "β". Sobre isso, diz: "α ∩ β expressa a condição que se está supondo que verificou ao mesmo tempo α e β.". (PEANO, 1958, p. 9, tradução nossa)[147]

É no contexto de distinção entre variável aparente e variável real, entre proposições condicionais e proposições categóricas, para definir o que é ou não uma proposição, que Russell introduz pela primeira vez a expressão "função proposicional". Diz ele:

[143] "Se la proposizione condizionale α contiene l'ente indeterminato x, con x: α intenderemo la classe formata da tutti gli enti per cui è vera la proposizione α.".
[144] "[...] (x, y,...): α intenderemo la classe formata da tutti gli enti (x, y,...) per cui è vera la α.".
[145] "[...] la classe (x, y, ...): α é una classe ben determinata, ed una proposizione che affermi qualche proprietà di questa classe è categorica.".
[146] "[...] x : [$f(x)$ = 0] ∩ [$\varphi(x)$ = 0] le radici comuni alle due equazioni $f(x) = 0$ e $\varphi(x) = 0$.".
[147] "α ∩ β esprime la condizione che si ha supponendo verificate ad un tempo la α e la β.".

> Vou falar de proposições exclusivamente onde não existem variáveis reais: onde existem uma ou mais variáveis reais, e para todos os valores das variáveis a expressão envolvida é uma proposição, vou chamar a expressão uma *função proposicional*. (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, grifo do autor, tradução nossa)[148]

Portanto, há ocorrência de função proposicional somente quando temos a ocorrência efetiva de variável real e não de variável aparente. Em outras palavras, a variável real é condição necessária para a existência de uma função proposicional.

Tendo em vista a definição de função proposicional e a condição para sua existência, Russell contextualiza, brevemente, o conceito de função proposicional frente aos conceitos de proposição e de classe segundo a sua perspectiva e a de seus interlocutores, passagens as quais destacamos aqui: (i) "Peano, como McColl, a princípio considerou as proposições como mais fundamentais que as classes, mas ele, ainda mais definitivamente, considerou a função proposicional em vez de proposições.". (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, tradução nossa)[149]; (ii) "O estudo das proposições genuínas é, na minha opinião, mais fundamental do que das classes; mas o estudo das funções proposicionais parece estar rigorosamente em pé de igualdade com o das classes, e de fato mal se distingue da mesma.". (RUSSELL, 1903, § 13, p. 13, tradução nossa)[150]

Mas, é no anexo de *Os Princípios da Matemática* (1903) que Russell faz a mais conhecida referência: em vias de publicar seu trabalho, ele toma conhecimento dos trabalhos de Frege. Nesse sentido, escreve:

> O trabalho de Professor Frege, que em grande parte se antecipa o meu próprio, foi em sua maior parte desconhecido para mim quando a impressão do presente trabalho começou; Eu já tinha visto o seu *Grundgesetze der Arithmtik*, mas, devido à grande dificuldade de seu simbolismo, eu não tinha conseguido entender a sua importância ou compreender seu conteúdo. (RUSSELL, 1903, p. xvi, tradução nossa)[151]

---

148 "I shall speak of propositions exclusively where there is no real variable: where there are one or more real variables, and for all values of the variables the expression involved is a proposition, I shall call the expression a *propositional function*.".

149 "The study of genuine propositions is, in my opinion, more fundamental than of classes; but the study of propositional functions appears to be strictly on a par with that of classes, and indeed scarcely distinguishable therefrom.".

150 "Peano, like McColl, at first regarded propositions as more fundamental than classes, but he, even more definitely, considered propositional function rather than propositions.".

151 "Professor Frege's work, which largely anticipates my own, was for the most part unknown to me when the printing of the present work began; I had seen his *Grundgesetze der Arithmtik*, but, owing to the great difficulty of his symbolism, I had failed to grasp its importance or to understand its contents.".

Ao dizer que Frege antecipa seu próprio trabalho, Russell reconhece, então, nos trabalhos de Frege intenções semelhantes ao seu projeto que, como vimos, consiste na prova de que toda matemática pura trata exclusivamente de conceitos definíveis em termos de um número muito pequeno de conceitos lógicos fundamentais, e que todas as suas proposições são dedutíveis a partir de um número muito pequeno de princípios lógicos fundamentais.

Reconhecendo o trabalho Frege mesmo na iminência da publicação e mesmo reconhecendo dificuldade de entender seu simbolismo, seu conteúdo e sua importância a tempo da publicação de *Os Princípios da Matemática*, Russell dedica um Apêndice de sua obra para fazer menção a Frege, dando-lhe o devido crédito de antecipá-lo. "O único método, em tão tardio estágio, de fazer justiça ao seu trabalho, seria dedicar um Apêndice a ele […]". (RUSSELL, 1903, p. xvi, tradução nossa)[152]

O Apêndice é intitulado "As doutrinas lógica e aritmética de Frege". No Apêndice diz Russell que "A palavra *Begriff* [função] é usada por Frege para significar quase a mesma coisa que a função proposicional (e.g. FuB. p.28); quando há duas variáveis o *Begriff* [função] é uma relação.". (RUSSELL, 1903, § 481, p. 507, grifo do autor, tradução nossa)[153]

No que se segue, veremos como as noções de proposição, função proposicional, classes e relações vêm à luz a partir de uma análise lógica das sentenças gramaticais da linguagem corrente.

2.2. Substantivos, adjetivos e verbos

Nessa seção estudaremos como é possível uma análise lógica dos constituintes das sentenças gramaticais e como tal análise não está, na concepção de Russell, distante dos princípios da Matemática, isto é, das noções elementares de proposição, função proposicional, classes e relações.

O nosso ponto inicial é a análise que Russell faz sobre a gramática no Capítulo IV da Parte I de *Os Princípios da Matemática* (1903), intitulado "Nomes próprios, adjetivos e verbos", em particular, a análise sobre a relação sujeito-predicado.

Diz Russell que o estudo da gramática pode nos aproximar e não nos afastar de um estudo da Lógica da proposição. Sobre isso, escreve: "O estudo da gramática, na minha opinião, é capaz de jogar muito mais luz sobre questões filosóficas do que é comumente

[152] "The only method, at so late a stage, of doing justice to his work, was to devote an Appendix to it [...]".
[153] "The word *Begriff* is used by Frege to mean nearly the same thing as *propositional function* (e.g. FuB. p.28); when there are two variables, the *Begriff* is a relation.".

suposto por filósofos.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[154] e que “Em geral, a gramática parece-me trazer-nos muito mais perto de uma lógica correta do que as opiniões atuais dos filósofos [...]”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa).[155] Escreve ainda que “A correção da nossa análise filosófica de uma proposição pode, portanto, ser utilmente marcada pelo exercício de atribuir o significado de cada palavra na sentença que expressa a proposição.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[156], pois “[...] toda palavra que ocorre em uma sentença deve ter algum significado: um som perfeitamente sem sentido não poderia ser empregado de forma mais ou menos fixa em que a linguagem emprega palavras.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa).[157] Assim, “No presente capítulo, certas questões que estão a ser discutidas pertencem ao que pode ser chamado de gramática filosófica.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[158]

Em sua análise, Russell destaca, inicialmente, três partes da gramática: substantivos, adjetivos e verbos. Partindo de uma classificação não de palavras, mas de ideias (“O que desejamos obter é uma classificação, não de palavras, mas de ideias [...]”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[159], isto é, de uma análise mais lógica que uma análise gramatical, ele analisa cada uma dessas partes destacadas na gramática da língua bem como a relação entre elas.

Entre os substantivos, existem aqueles que são primitivos, isto é, os nomes próprios que nomeiam matéria, tempo e espaço; e existem aqueles que são derivados, isto é, que advém de adjetivos e verbos, por exemplo, o substantivo “humanidade” advém do adjetivo “humano”, o substantivo “apreensão” advém do verbo “apreender”.

Os substantivos primitivos ou os nomes próprios designam um objeto em particular e quando ocorrem na proposição, exercem a função de sujeito e não a função do que é dito sobre o sujeito, isto é, não exercem a função de atributo. “Um nome próprio, quando ocorre em uma proposição, é sempre, pelo menos de acordo com uma das formas possíveis de

[154] “The study of grammar, in my opinion, is capable of throwing far more light on philosophical questions than is commonly supposed by philosophers.”.
[155] “On the whole, grammar seems to me to bring us much nearer to a correct logic than the current opinions of philosophers [...]”.
[156] “The correctness of our philosophical analysis of a proposition may therefore be usefully checked by the exercise of assigning the meaning of each word in the sentence expressing the proposition.”.
[157] “[...]every word occurring in a sentence must have some meaning: a perfectly meaningless sound could not be employed in the more or less fixed way in which language employs words.”.
[158] “In the present chapter, certain questions are to be discussed belonging to what may be called philosophical grammar.”.
[159] “What we wish to obtain is a classification, not of words, but of ideas [...]”.

análise (onde existem várias), o sujeito que a proposição ou alguma proposição constituinte subordinada é sobre, e não o que é dito sobre o sujeito.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 43, tradução nossa)[160]

Os substantivos derivados advêm de adjetivos e verbos. Destaca Russell que a derivação aqui não é uma derivação no sentido etimológico, mas uma derivação no sentido lógico, isto é, uma derivação de noções e não propriamente relacionada à origem e derivações históricas das ou entre as palavras. “Não estou falando de uma derivação etimológica, mas de uma [derivação] lógica.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa).[161] O substantivo derivado, na medida que não faz referência a um sujeito em particular, como o nome próprio o faz, indica que ele é propriamente conceito e não uma indivíduo. Sobre isso, em resumo, exemplifica Russell: “[...] humanidade é um conceito, não uma coisa.”. (RUSSELL, 1903, § 48, p. 45, tradução nossa).[162] Sendo assim, os substantivos derivados não são, por definição, nomes próprios, pois eles dizem algo sobre um sujeito que é designado por um nome próprio. O que é dito sobre um nome próprio é expresso, então, por um substantivo derivado ou, mais propriamente, por um adjetivo.

Por definição, os adjetivos atribuem propriedades a um substantivo. Quando os adjetivos ocorrem na proposição, eles exercem a função de predicado, pois seu papel é semelhante à função de um predicado, isto é, a função de atribuir uma propriedade a um sujeito de uma proposição. Assim, Russell chama por “[...] adjetivos ou predicados todas as noções que são capazes de ser como tal, mesmo em uma forma na qual a gramática os chamaria de substantivos.”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa).[163] Sobre a distinção entre substantivo e adjetivo, escreve:

> A distinção que exigimos não é idêntica à distinção gramatical entre substantivo e adjetivo, já que um único conceito pode, segundo as circunstâncias, ser substantivo ou adjetivo: é a distinção entre os nomes próprios e gerais que requeremos, ou melhor, entre os objetos indicados por esses nomes. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[164]

[160] “A proper name, when it occurs in a proposition, is always, at least according to one of the possible ways of analysis (where there are several), the subject that the proposition or some subordinate constituent proposition is about, and not what is said about the subject.”.
[161] “I am not speaking of an etymological derivation, but of a logical one.”.
[162] “[...] humanity is a concept, not a thing.”.
[163] “[...] adjectives or predicates all notions which are capable of being such, even in a form in which grammar would call them substantives.”.
[164] “The distinction which we require is not identical with the grammatical distinction between substantive and adjective, since one single concept may, according to circumstances, be either substantive or adjective : it is the distinction between proper and general names that we require, or rather between the objects indicated by such

Desse modo, do ponto de vista estritamente gramatical, sem recorrermos a uma análise lógica das sentenças, podemos dizer que a palavra “homem”, por exemplo, de humanidade, pode ser tanto substantivo quanto adjetivo. Na sentença “O homem é mortal”, a palavra “homem” expressa um substantivo e na sentença “Sócrates é homem”, a mesma palavra “homem” expressa um adjetivo. Entretanto, se nos guiarmos pela análise lógica, isto é, pela distinção entre nomes próprios (que, do ponto de vista lógico, expressa substantivos primitivos) e nomes gerais (que do ponto de vista lógico, expressa adjetivos), a palavra “homem”, por ser um nome geral e não um nome próprio, será, do ponto de vista lógico, sempre um adjetivo, pois ela designa um conjunto de objetos e não um objeto em particular como o nome próprio comumente designa.

Sobre a relação substantivo e adjetivo, diz Russell que ela é mais ou menos equivalente a outras distinções clássicas na Filosofia: “A filosofia é familiar com um certo conjunto de distinções, todos mais ou menos equivalentes: quero dizer, as distinções de sujeito e predicado, substância e atributo, substantivo e adjetivo, *isto* e *aquilo*.”. (RUSSELL, 1903, § 47, p. 43, grifo do autor, tradução nossa)[165]

Já os verbos, estes estão, como aponta Russell, intimamente relacionados com a atribuição de valores de verdade às proposições. Nesse sentido, escreve ele: “Verbos são distinguidos por um tipo especial de conexão, extremamente difícil de definir, com a verdade e a falsidade, em virtude da qual eles distinguem uma proposição afirmada de uma única não afirmada [...]”. (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[166], por exemplo, o verbo “morrer” na proposição “César morreu” distingue esta proposição da sentença “A morte de César” na qual não há ocorrência de verbo. No caso da proposição “César morreu”, podemos atribuir um valor de verdade, enquanto que no caso da sentença “A morte de César”, não podemos atribuir um valor de verdade.

Ora, se os verbos possuem, do ponto de vista lógico, conexão com a verdade ou a falsidade através de proposições afirmativas ou negativas, e se as funções proposicionais envolvem, como vimos na seção anterior, variáveis reais cuja substituição resulta em uma proposição com valor de verdade, então podemos dizer que as funções proposicionais

names.”.

165 “Philosophy is familiar with a certain set of distinctions, all more or less equivalent: I mean, the distinctions of subject and predicate, substance and attribute, substantive and adjective, this and what.”.

166 “Verbs are distinguished by a special kind of connection, exceedingly hard to define, with truth and falsehood, in virtue of which they distinguish an asserted proposition from an unasserted one [...]”.

exercem funções semelhantes às funções que os verbos exercem nas sentenças gramaticais. Nesse sentido, escreve:

> [...] as funções proposicionais envolvem verbos. É por esta razão que tem sido necessário tratar tão longamente um assunto que pode parecer, à primeira vista, ser um pouco distante dos princípios da matemática. (RUSSELL, 1903, § 55, p. 52, tradução nossa)[167]

Os substantivos, adjetivos e verbos que, como vimos, são partes da proposição, ao se coordenarem, formam proposições como um todo, proposições as quais podemos dizer que são verdadeiras ou falsas, isto é, um pensamento. Podemos dizer que tanto as proposições quanto suas partes constituintes são objetos de pensamentos e que, portanto, merecem ser estudadas analiticamente. A cada uma dessas partes constituintes da proposição Russell chama por "termos". Escreve ele: "Qualquer que seja um objeto de pensamento, ou que possa ocorrer em qualquer proposição verdadeira ou falsa, ou que possa ser considerada como um *só*, eu chamo de um *termo*.". (RUSSELL, 1903, § 47, p. 43, grifo do autor, tradução nossa)[168]

Termos são as unidades que constituem a individualidade de algo e por isso são partes constituintes das proposições. Russell diz que a palavra "termo" pode ser usada como sinônimo das palavras "unidade", "individual" e "entidade". Diz ele: "Usarei [termo] como sinônimo com as palavras unidade, individual, e entidade. Os dois primeiros enfatizam o fato de que todo termo é um, enquanto o terceiro é derivado do fato de que todo termo tem ser, ou seja, é em algum sentido." (RUSSELL, 1903, § 47, p. 43, tradução nossa).[169] Desse modo, "Um homem, um momento, um número, uma classe, uma relação, uma quimera, ou qualquer outra coisa que pode ser mencionada, é a certeza de ser um termo e negar que tal e tal coisa é um termo deve ser sempre falso.". (RUSSELL, 1903, § 47, p. 43, tradução nossa)[170]

Diz Russell, em nota de rodapé do § 47, que sua noção de termo é uma modificação da noção de conceito extraída no artigo de George Edward Moore (1873 – 1958) intitulado "Sobre a Natureza do Julgamento" (1899) (*On the Nature of Judgment*).

[167] "Broadly speaking, classes are connected with adjectives, while propositional functions involve verbs. It is for this reason that it has been necessary to deal at such length with a subject which might seem, at first sight, to be somewhat remote from the principles of mathematics.".
[168] "Whatever may be an object of thought, or may occur in any true or false proposition, or can be counted as one, I call a term.".
[169] "I shall use as synonymous with it the words unit, individual, and entity. The first two emphasize the fact that every term is one, while the third is derived from the fact that every term has being, i.e. is in some sense.".
[170] "A man, a moment, a number, a class, a relation, a chimaera, or anything else that can be mentioned, is sure to be a term and to deny that such and such a thing is a term must always be false.".

Há algumas passagens nesse artigo de Moore que gostaríamos de destacar; são elas: (i) “É nosso objeto de protesto contra esta descrição de um conceito como uma 'abstração' de ideias.” (MOORE, 1889, p. 177, tradução nossa)[171]; (ii) “O conceito não é um fato mental, nem qualquer parte de um fato mental.”. (MOORE, 1889, p. 179, tradução nossa)[172]; (iii) “Conceitos são possíveis objetos de pensamento; mas isso não é uma definição deles.”. (MOORE, 1889, p. 179, tradução nossa)[173]; (iv) “[...] o termo ‘ideia’ é claramente cheia de ambiguidades, enquanto ‘conceito’ e seu equivalente alemão ‘Begriff’ tem sido um pouco mais apropriado para o uso em questão.”. (MOORE, 1889, p. 177, tradução nossa)[174]; (vi) “Uma proposição é composta não de palavras, nem ainda de pensamentos, mas de conceitos.”. (MOORE, 1889, p. 179, tradução nossa)[175]

Notemos que Moore distingue a noção “ideia” da noção “conceito”, atribuindo à ideia um significado psicológico, um fato psicológico, e ao conceito um significado lógico, um objeto de pensamento, que é expresso no âmbito das proposições. Assim, podemos dizer que do mesmo modo que Moore entende que uma proposição é composta por conceitos, Russell entende que uma proposição é composta por termos.

Na proposição, um termo exerce, a princípio, o papel de sujeito lógico. “Todo termo, para começar, é um sujeito lógico […]”. (RUSSELL, 1903, § 47, p. 43, tradução nossa)[176], pois é, em princípio, sobre ele que estamos falando e atribuindo adjetivos ou propriedades quando o mesmo se torna objeto de um pensamento. Nesse sentido, ainda diz ele: “Um termo é, de fato, possuidor de todas as propriedades normalmente atribuídas às substâncias ou aos substantivos.”. (RUSSELL, 1903, p. 43, tradução nossa)[177]

A individualidade de um termo garante a sua identidade e faz com que ele seja uma coisa única, uma unidade, impossibilitando-o de se transformar em outro termo. Nesse sentido, diz Russell: “O que um termo é, é, e nenhuma mudança pode ser concebida nele que não destruiria a sua identidade e faria dele outro termo.”. (RUSSELL, 1903, § 47, p. 44, tradução nossa).[178] Ao mesmo tempo que a identidade de um termo consigo mesmo o

[171] “It is our object to protest against this description of a concept as an 'abstraction' from ideas.”.
[172] “The concept is not a mental fact, nor any part of a mental fact.”.
[173] “Concepts are possible objects of thought; but that is no definition of them.”.
[174] “[...] the term ‘idea’ is plainly full of ambiguities, whereas ‘concept’ and its German equivalent ‘Begriff’ have been more nearly appropriated to the use in question.”
[175] “A proposition is composed not of words, nor yet of thoughts, but of concepts.”.
[176] “Every term, to begin with, is a logical subject [...]”.
[177] “A term is, in fact, possessed of all the properties commonly assigned to substances or substantives.”.
[178] “What a term is, it is, and no change can be conceived in it which would not destroy its identity and make it another term.”.

diferencia e garante sua individualidade, ela o diferencia de outros termos. Assim, a identidade e a diferença dos termos é fonte da unidade e da pluralidade das coisas. Desse modo, escreve ele: "Outra marca que pertence a um termo é a identidade numérica com eles mesmos e a diversidade numérica de todos os outros termos. Identidade e diversidade numérica são a fonte de unidade e pluralidade; e, assim, a admissão de muitos termos destrói o monismo.". (RUSSELL, 1903, § 47, p. 44, tradução nossa).[179] Isso indica a opção de Russell pelo pluralismo como concepção filosófica.

Em *Meu Desenvolvimento Filosófico* (1959), Russell explica, no capítulo intitulado "Conversão ao pluralismo", as razões de sua conversão à concepção pluralista. Sobre sua posição pluralista, escreve, ainda ele: "[...] há identidade e há diferença, e os complexos podem ter alguns elementos idênticos e alguns diferentes, mas não mais somos obrigados a dizer, com relação a qualquer par de objetos que possa ser mencionado, que ambos são idênticos e diferentes [...]". (RUSSELL, 1959, p. 61, tradução nossa).[180] Nesse sentido, ele aponta para uma ontologia:

> Temos, assim, um mundo de muitas coisas, com relações que não devem ser deduzidas de uma suposta 'natureza' ou essência escolástica das coisas relacionadas. Nesse mundo, tudo que é complexo e composto de coisas simples relacionadas, e a análise não mais é confrontada, a cada passo, com uma regressão infinita. (RUSSELL, 1959, p. 61, tradução nossa)[181]

O pluralismo de Russell se opõe à concepção monista de Leibniz. A concepção monista de Leibniz sustenta-se sobre o que ele chama por "mônada" (*monade*). Em sua obra intitulada "A Monadologia" (1714) (*La Monadologie*) Leibniz define, logo no início desta obra, o conceito de mônada: "A Mônada, que discutimos aqui, não é outra coisa que uma substância simples, que entra nos compostos; simples quer dizer sem partes.". (LEIBNIZ, 1900, § 1, p. 92, tradução nossa)[182]

---

[179] "Another mark which belongs to terms is numerical identity with themselves and numerical diversity from all other terms. Numerical identity and diversity are the source of unity and plurality; and thus the admission of many terms destroys monism.".

[180] "[...] there is identity and there is difference, and complexes may have some elements identical and some different, but we are no longer obliged to say of any pair of objects that may be mentioned that they are both identical and different [...]".

[181] "We thus get a world of many things, with relations which are not to be deduced from a supposed 'nature' or scholastic essence of the related things. In this world, whatever is complex is composed of related simple things, and analysis is no longer confronted at every step by an endless regress.".

[182] "La Monade, dont nous parlerons ici, n'est autre chose, qu'une substance simple, qui entre dans les composés; simple, c'est-à-dire sans partires.".

Diz Leibniz que se há, no mundo, compostos; estes compostos só existem, pois há um tipo substância simples que se agrega e forma tais compostos. “E ele [esse composto] deve ser uma substância simples; uma vez que existem compostos; porque o composto não é outra coisa, do que uma pilha, ou *aggregatum* simples.”. (LEIBNIZ, 1900, § 2, p. 93, grifo do autor, tradução nossa).[183] Assim, “[...] essas mônadas são os verdadeiros átomos da natureza e um monte de elementos de coisas.”. (LEIBNIZ, 1900, § 2, p. 93, tradução nossa).[184] Na *Teodicéia* (1710) Lebiniz (cf. 1784, p. XXXIII, e. g.) se fundamenta na existência de um “sistema de harmonia preestabelecido” que se sustenta sobre a existência de um Deus que torna possível esta harmonia. Nesse sentido, em resumo, diz Nicholas Jolley (cf. 1994, p. 5) que a teoria das mônadas é uma solução para o problema de determinar os blocos de construção fundamentais da realidade, pois as coisas do mundo são divisíveis até a unidade elementar, as mônadas, cujos constituintes elementares são harmonizados por um Deus benevolente. Podemos dizer, assim, que há uma filosofia da metafísica como substrato da ontologia leibniziana.

Russell dedicou um livro à filosofia de Leibniz; o livro recebeu o nome de “Uma Exposição Crítica da Filosofia de Leibniz” (1900) (*A Critical Exposition of the Philosophy of Leibniz*). Dentre as questões que ele discute na filosofia de Leibniz estão as seguintes: “Por que ele pensou que mônadas não podem interagir; como ele se tornou convencido da identidade dos Indiscerníveis; [...]” (RUSSELL, 2005, p. xxi, tradução nossa).[185] Sobre sua crítica o monismo, destacamos a seguinte passagem que nos parece expressar um dos pontos centrais da argumentação de Russell: “Quando chegamos à Identidade dos Indiscerníveis, veremos que o próprio Leibniz, fixando uma substância a ser definida por seus predicados, caiu no erro de confusão com a soma desses predicados […] uma vez que não haveria fundamento para opor sujeitos a predicados, se os sujeitos não eram nada mais que coleções de predicados.”. (RUSSELL, 2005, § 21, p. 59, tradução nossa).[186] Isto é, em resumo, o argumento de Russell aponta para a conclusão de que não se pode negar a existência de sujeitos, pois a existência de predicados pressupõe a existência de sujeitos sobre os quais se

[183] “Et il faut qu’il y ait des substance simples; puisqu’il y a des composés; car le composé n’est autre chose, qu'un amas, ou *aggregatum* des simples.”.
[184] “[...] ces Monades sont les véritables Atomes de la Nature et en un mont les Eléments des choses.”.
[185] “Why he thought that monads cannot interact; how he became persuaded of the Identity of Indiscernibles [...]”.
[186] “When we come to the Identity of Indiscernibles, we shall find that Leibniz himself, by holding a substance to be defined by its predicates, fell into the error of confounding it with the sum of those predicates […] since there would be no ground for opposing subjects to predicates, if subjects were nothing but collections of predicates.”.

predica algo. Portanto, toda proposição deve ser sempre reduzida a uma proposição sujeito-predicado no que concerne a relação entre os termos, o que reforça sua concepção pluralista.

Voltando à distinção dos termos no contexto das proposições, Russell, em sua análise, distingue, ainda, dois tipos de termos: as coisas (*things*) e os conceitos (*concepts*): "Entre termos, é possível distinguir dois tipos, que chamarei respectivamente *coisas* e *conceitos*.". (RUSSELL, 1903, § 48, p. 44, grifo do autor, tradução nossa)[187]

As coisas são expressas por nomes próprios. "Todas as classes, ao que parece, como números, os homens, espaços, etc., quando tomadas como termos individuais, são coisas.". (RUSSELL, 1903, § 48, p. 45, tradução nossa).[188] Assim, podemos dizer que as coisas são todos os termos individuais, expressos por nomes próprios, e, enquanto tais, aparecem na proposição exercendo o papel de sujeito.

Entre os conceitos, Russell distingue dois tipos: os indicados por adjetivos e os indicados por verbos. "Entre os conceitos, novamente, dois tipos, pelo menos, devem ser distinguidos, a saber, aqueles indicados por adjetivos e aqueles indicados por verbos.". (RUSSELL, 1903, § 48, p. 44, tradução nossa).[189] Por exemplo, como vimos anteriormente, na proposição "Sócrates é homem", a palavra "é" expressa o verbo e a palavra "homem" expressa o adjetivo. Ambos são termos que indicam conceitos, sendo que o primeiro, como vimos, relaciona um nome próprio a um adjetivo, associando a eles um valor de verdade, e o segundo, um predicado com o papel de atribuir uma propriedade geral a algo ou alguém. Diz o autor que "O primeiro tipo [adjetivos] muitas vezes será chamado de predicados ou de classe-conceitos; os últimos [verbos] são sempre ou quase sempre relações.". (RUSSELL, 1903, § 48, p. 44, tradução nossa)[190]

O verbo pode relacionar, em uma afirmação, tanto o sujeito ao predicado, quanto relacionar dois sujeitos. O primeiro caso são proposições como, por exemplo, "Sócrates é homem" e o segundo caso envolvem proposições como, por exemplo, "*A* é maior que *B*". No primeiro tipo de proposição temos apenas um sujeito e um predicado cujo verbo "ser" relaciona ou atribui a propriedade "homem" ao sujeito "Sócrates". Neste caso, então, o verbo relaciona sujeito e predicado e o predicado ocorre quando destacamos na proposição apenas

[187] "Among terms, it is possible to distinguish two kinds, which I shall call respectively things and concepts.".
[188] "All classes, it would seem, as numbers, men, spaces, etc., when taken as single terms, are things.".
[189] "Among concepts, again, two kinds at least must be distinguished, namely those indicated by adjectives and those indicated by verbs.".
[190] "The former kind will often be called predicates or class-concepts; the latter are always or almost always relations.".

um sujeito. No segundo tipo, na proposição "*A* é maior que *B*", podemos destacar, em nossa análise, dois sujeitos, os sujeitos *A* e *B*, e, nesse caso, teremos não mais uma relação entre sujeito e predicado, mas uma relação entre dois sujeitos, *A* e *B*, ambos relacionados pela expressão "é maior que", onde ocorre, também, o verbo "ser".

Assim, o verbo expressa relações, seja entre sujeito e predicado, seja entre sujeitos em uma proposição. Podemos dizer, também, que verbos se distinguem de predicados; nesse sentido, diz Russell: "Predicados, então, são conceitos, exceto verbos, que ocorrem em proposições que têm apenas um termo ou sujeito.". (RUSSELL, 1903, § 48, p. 45, tradução nossa)[191]

Os adjetivos são chamados de "predicados" ou "classe-conceito" (*classe-concept*). No entanto, diz Russell que "[...] é necessário distinguir entre as palavras predicado e classe-conceito.". (RUSSELL, 1903, § 57, p. 54, tradução nossa).[192] O termo "classe-conceito" são os conceitos que dão origem às classes. A palavra "classe" denota o conteúdo dos conceitos, isto é, os termos reunidos sob a classe-conceito. Sobre isso, escreve: "Uma classe é uma certa combinação de termos, uma classe-conceito é muito próxima a um predicado, e os termos cuja combinação forma a classe são determinados pela classe-conceito.". (RUSSELL, 1903, §57, p. 55, tradução nossa).[193] Por exemplo, na proposição "Sócrates é homem", a classe-conceito é "homem" a qual reúne o termo "Sócrates" e demais outros, por exemplo, "Platão", "Aristóteles", "Fulano", "Ciclano", etc., cujo conteúdo das reuniões desses termos forma a classe dos homens.

O termo classe-conceito, embora apareça na proposição como predicado, e nesse sentido se aproxime da noção de predicado, ele se difere do predicado, pois nem sempre aparece como predicado, por exemplo, na proposição "Todo homem é mortal", os termos "homem" e "mortal" são classe-conceitos, embora apenas "mortal" exerça o papel de predicado lógico. Assim, "O conceito-classe difere pouco, se é que difere, do predicado, enquanto a classe, em oposição à classe-conceito, é a soma ou conjunto de todos os termos que têm o dado predicado.". (RUSSELL, 1903, §57, p. 54-55, tradução nossa)[194]

---

[191] "Predicates, then, are concepts, other than verbs, which occur in propositions having only one term or subject.".
[192] "[...] it necessary to distinguish between the words predicate and class-concept.".
[193] "A class is a certain combination of terms, a class-concept is closely akin to a predicate, and the terms whose combination forms the class are determined by the class-concept.".
[194] "The class-concept differs little, if at all, from the predicate, while the class, as opposed to the class-concept, is the sum or conjunction of all the terms which have the given predicate.".

Russell faz, ainda, uma distinção entre "o conceito de uma classe" do que ele chamou acima de "classe-conceito". Sobre isso, escreve: "Assim, será necessário distinguir o conceito de uma classe de uma classe-conceito.". (RUSSELL, 1903, §67, p. 67, tradução nossa).[195] A classe-conceito é, mais precisamente, o conceito em si mesmo que, segundo ele, não tem significado. Se tomarmos como exemplo o conceito de homem, a classe-conceito é expressa pela palavra "homem", já o conceito de uma classe denota a classe composta por todos os homens, sendo expresso por "homens" ou "todos os homens", no plural. Em resumo, escreve: "Desse modo, homem é a classe-conceito, os homens (o conceito) é o conceito de classe, e homens (o objeto denotado pelo conceito homens) são a classe.". (RUSSELL, 1903, §67, p. 67, tradução nossa)[196]

Embora Russell considere essa distinção inicialmente confusa, ele entende ser necessário um esforço do lógico sobre a linguagem para fazê-la: "É, sem dúvida, confuso, num primeiro momento, usar a classe-conceito e conceito de uma classe em diferentes sentidos, mas tantas distinções são necessárias que algum esforço de linguagem parece inevitável.". (RUSSELL, 1903, §67, p. 67, tradução nossa)[197]

Russell considera que a classe pode ser definida e estudada sob duas perspectivas: sob a perspectiva dos objetos que a constituem, isto é, do ponto de vista extensional, e sob a perspectiva do conceito que a determina, isto é, do ponto de vista intencional. Desse modo, diz ele que "*Classe* pode ser definida extensionalmente ou intensionalmente.". (RUSSELL, 1903, §71, p. 67, grifo do autor, tradução nossa).[198] Sobre isso, ele ainda diz que "Os filósofos têm geralmente considerado o último [a intensão] como mais fundamental, enquanto a Matemática tem sido desenvolvida para lidar especialmente com o primeiro [a extensão].". (RUSSELL, 1903, §66, p. 67, tradução nossa)[199]

Como o plano de análise de Russell é lógico-matemática, a classe deve ser estudada do ponto de vista mais extensional que intensional. Nesse sentido, diz ele que "[...] apesar de todo o tratamento simbólico ter que trabalhar em grande parte com a classe-conceito e

[195] "Thus it will be necessary to distinguish the concept of a class from a class-concept.".
[196] "Thus man is the class-concept, men (the concept) is the concept of the class, and men (the object denoted by the concept men) are the class.".
[197] "It is no doubt confusing, at first, to use class-concept and concept of a class in different senses but so many distinctions are required that some straining of language seems unavoidable.".
[198] "Class may be defined either extensionally or intensionally.".
[199] "Philosophers have usually regarded the latter as more fundamental, while Mathematics has been held to deal specially with the former.".

intensão, classes e extensão são logicamente mais fundamentais para os princípios da Matemática [...]". (RUSSELL, 1903, §79, p. 67, tradução nossa)[200]

O plano de análise extensional evita confusões propiciadas pelas noções psicológicas que o plano de análise intensional pode trazer para o estudo dos princípios da Matemática. A análise extensional, ao visar os objetos designados pelos termos, permite-nos *denotar* com mais precisão cada termo. Como diz Russell e como já citamos "[...] toda palavra que ocorre em uma sentença deve ter algum *significado*: um som perfeitamente sem sentido não poderia ser empregado da forma mais ou menos fixa em que a linguagem emprega palavras.". (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, grifo nosso, tradução nossa).[201] Então, o estudo do significado ou da denotação é, também, uma preocupação de Russell, e merece uma apresentação geral em nosso trabalho. É o que veremos na próxima seção.

2.3. A denotação

Veremos, brevemente, como o estudo da denotação contribui para a descrição do significado lógico dos termos ou das expressões denotativas, constituindo-se em uma teoria das descrições definidas e veremos, em particular, qual é a importância da função proposicional na constituição dessa teoria.

Russell dedica todo um capítulo de *Os Princípios da Matemática* (1903) ao estudo da denotação, o Capítulo V, intitulado "Denotação". Escreve ele que a possibilidade da descrição do significado "[...] é devido a uma relação lógica entre alguns conceitos e alguns termos, em virtude dos quais tais conceitos denotam lógica e inerentemente tais termos. É este sentido de denotar que está aqui em questão.". (RUSSELL, 1903, § 56, p. 53, tradução nossa).[202] Tomemos como exemplo a proposição "Qualquer número finito é ou par ou ímpar"; tal proposição é verdadeira, mas a expressão "qualquer número finito" não é nem verdadeira ou falsa. Para a descrição do significado desta expressão, torna-se necessário determinar sua relação com outros termos que ocorrem na proposição que, no exemplo citado, são os números par ou ímpar. Nesse sentido, "Um conceito denota quando, se ocorre em uma

[200] "[…] although any symbolic treatment must work largely with class-concepts and intension, classes and extension are logically more fundamental for the principles of Mathematics [...]".

[201] "[...] every word occurring in a sentence must have some meaning: a perfectly meaningless sound could not be employed in the more or less fixed way in which language employs words.".

[202] "But the fact that description is possible - that we are able, by the employment of concepts, to designate a thing which is not a concept - is due to a logical relation between some concepts and some terms, in virtue of which such concepts inherently and logically denote such terms. It is this sense of denoting which is here in question.".

proposição, a proposição não é sobre o conceito, mas sobre um termo conectado de um certo modo peculiar com o conceito.". (RUSSELL, 1903, § 56, p. 53, tradução nossa).[203] Isso quer dizer que a conexão entre um conceito e outro termo, resultando em uma proposição, é, como vimos, na seção anterior, expresso pela relação entre sujeito e predicado.

Sobre os predicados, escreve Russell que: "Predicados são distinguidos dos outros termos por uma série de propriedades muito interessantes, destacando-se a sua ligação com o que chamo de *denotação*.". (RUSSELL, 1903, § 48, p. 45, grifo do autor, tradução nossa).[204] O estudo da denotação dos predicados dá origem a uma série de noções, como as noções de "todo", "nenhum" e "algum". Sobre isso, diz Russell, que "O estudo destas várias noções é absolutamente vital para qualquer filosofia da matemática; e é por conta delas que a teoria dos predicados é importante."[205]. (RUSSELL, 1903, § 48, p. 45, grifo do autor, tradução nossa).[206] É notável que essas noções de quantificação, destacas por Russell em 1903 em *Os Princípios da Matemática*, já tinham sido desenvolvidas por Frege em 1879 na *Conceitografia*.

A discussão sobre a denotação é realizada, com mais propriedade, no artigo intitulado "Da Denotação" (1905) (*On Denoting*). Diz Russell que o artigo *Da Denotação* (1905) apresenta novas teses sobre a teoria da denotação se comparada com as teses que foram apresentadas por ele sobre esse assunto em *Os Princípios da Matemática* (1903). Nesse sentido, escreve ele neste artigo: "Discuti este assunto em Principles of Mathematics, cp. V, e § 476. A teoria aí defendida é aproximadamente a mesma que a teoria de Frege, e é bastante diferente da teoria que será defendida neste artigo.". (RUSSEL, 1992, p. 4, nota 1). A novidade do *Da Denotação* (1905) em relação *Os Princípios da Matemática* (1903) é que Russell já tinha plena consciência dos trabalhos de Frege.

No Apêndice de *Os Princípios da Matemática* (1903), Russell aponta as principais semelhanças e diferenças entre sua concepção e a de Frege até então. Dentre as semelhanças de concepção entre eles está a ideia sobre denotação: "A distinção entre sentido (*Sinn*) e indicação (*Bedeutung*) é mais ou menos, embora não exatamente, equivalentes a minha distinção entre um conceito como tal e o que o conceito denota.". (RUSSEL, 1903, § 476, p.

---

[203] "A concept denotes when, if it occurs in a proposition, the proposition is not about the concept, but about a term connected in a certain peculiar way with the concept.".
[204] "Predicates are distinguished from other terms by a number of very interesting properties, chief among which is their connection with what I shall call *denoting*.".
[205] É notável que essas noções de quantificação destacas por Russell em 1903 em *Os Princípios da Matemática* já tinham sido desenvolvidas por Frege em 1879 na *Conceitografia*.
[206] "The study of these various notions is absolutely vital to any philosophy of mathematics; and it is on account of them that the theory of predicates is important.".

502, tradução nossa)[207]. Mas, tais semelhanças deixam de existir com a publicação do seu artigo *Da Denotação* (1905).

Podemos dizer que o principal tema em discussão no artigo *Da Denotação* (1905) é a denotação de expressões que envolvem expressões ou descrições definidas, por exemplo, "a tual presidente do Brasil", e, também, a denotação de expressões que envolvem expressões ou descrições vazias, por exemplo, no caso da expressão "O atual rei da França"; tal expressão é vazia de conteúdo, pois a França é uma república e, portanto, não tem rei. Sobre o significado das expressões denotativas, escreve Russell logo no início do seu artigo: "Entendo por 'expressão denotativa' qualquer uma das seguintes expressões: um homem, algum homem, qualquer homem, cada homem, todos os homens, o atual reis da Inglaterra, o atual rei da França [etc.] [...]". (RUSSELL, 1992, p. 3)

Para determinar o significado das expressões denotativas, Russell analisa sua estrutura interna, isto é, a sua forma. "Por conseguinte, uma expressão é denotativa unicamente devido a sua *forma*.". (RUSSELL, 1992, p. 3, grifo do autor). Para isso, ele parte da noção de variável como um conceito fundamental presente nos esquemas da função proposicional. Nesse sentido, escreve ele: "Minha teoria, exposta brevemente, é a que se segue. Tomo a noção de *variável* como fundamental; uso '$C(x)$' para significar uma proposição na qual x é um constituinte, onde x, a variável, é essencial e totalmente indeterminada.". (RUSSELL, 1992, p. 4, grifo do autor)

Em sua análise Russell considera, então, os seguintes esquemas de enunciados: (i) C(tudo) que significa "$C(x)$ é sempre verdadeira", podendo ser, também, assim expresso: (x) $C(x)$[208]; (ii) C(nada) que significa "'$C(x)$ é falsa' é sempre verdadeira", que pode, também, ser assim expresso: $\sim(x)\ C(x)$; e (iii) C(algo) que significa "É falso que '$C(x)$ é falsa' é sempre verdadeira", o que é equivalente a dizer que "$C(x)$ não é sempre falsa" ou "$C(x)$ é algumas vezes verdadeira", ou seja: $\exists x\ C(x)$. Observa o autor, ainda, que a expressão "$C(x)$ é sempre verdadeira" pode ser assumida com característica fundamental e indefinível, pois é a partir dela que são definidas as outras relacionadas acima. Assim, todas as proposições seriam interpretadas a partir do esquema da função proposicional "$C(x)$ é sempre verdadeira" através da articulação de suas noções denotativas mais primitivas: as noções "tudo", "nada" e "algo".

[207] "The distinction between meaning (*Sinn*) and indication (*Bedeutung*) is roughly, though not exactly, equivalent to my distinction between a concept as such and what the concept denotes.".

[208] Utilizamo-nos aqui da mesma notação que Russell usa no *Principia Mathematica* (1910, 1912, 1913), principalmente porque apresentaremos esta notação na próxima seção e, também, porque Wittgenstein utiliza a notação do *Principia* no *Tractatus* (1921).

"Logo, *tudo*, *nada* e *algo* (que são as mais primitivas das expressões denotativas) [...]". (RUSSELL, 1992, p. 4, grifo do autor)

Podemos tomar como outro exemplo a proposição "Todos os homens são mortais". Essa proposição é assim expressa por Russell a partir do esquema de análise proposto acima: "C(todos os homens) significa 'se x é humano, então C(x) é verdadeira' é sempre verdadeira". Em outros termos, se toda vez que x for humano, então x é mortal, ou seja: $(x)\ H(x) \supset M(x)$, tal que o símbolo "$\supset$" denota implicação lógica. Sobre isso, escreve Russell no artigo: "[...] o que se expressa na lógica simbólica dizendo-se que 'todos os homens são mortais' significa "'x é humano' implica 'x é mortal' para qualquer valor de x". De modo mais geral, dizemos: C(todos os homens) significa 'se x é humano, então C(x) é verdadeira' é sempre verdadeira.". (RUSSELL, 1992, p. 5)

Observemos que a sua análise, ao tomar a noção de variável como fundamental, centra-se no aspecto formal das proposições, de modo que a função proposicional, onde a variável ocorre, torna-se um esquema de análise fundamental sobre as proposições com o propósito de tornar sua significação lógica mais precisa. Notemos também que as expressões indicadas acima foram analisadas no contexto das proposições. Isso expressa um princípio de que as expressões e os termos devem ser analisados no contexto de aplicação da proposição, não de quaisquer proposições, mas de proposições quantificadas. Se os termos ou expressões descritivas devem ser analisados por Russell no contexto de aplicação de proposições quantificadas, então elas não têm significação própria, isto é, elas não têm significação fora do contexto de análise de proposições quantificadas. Isso quer dizer que apenas as proposições quantificadas como um todo tem significação. Nesse sentido, escreve: "A expressão *per se* não tem significado, porque em qualquer proposição na qual ela [a expressão] ocorre, a proposição, inteiramente expressa, não contém a expressão, que foi desmembrada.". (RUSSELL, 1992, p. 11). Em outras palavras "[...] uma expressão denotativa é essencialmente *parte* de uma sentença, e não tem, como muitas palavras simples, qualquer significação por conta própria.". (RUSSELL, 1992, p. 10, grifo do autor)

Essa conclusão não está em convergência com as ideias propostas por Frege sobre a distinção entre sentido e referência. Vimos na Seção 1.6 que a cada termo conceitual e nome próprio corresponde um sentido e uma referência. Desse modo, quando Russell diz no artigo *Da Denotação* (1905) que uma expressão denotativa não tem significação (*meaning*) por conta própria, ele parece se opor à concepção fregeana de que expressões que têm sentido e referência. Apropriando-nos da terminologia fregeana para expressar o que Russell quer dizer, podemos dizer que expressões podem ter referência, como as expressões bem definidas, mas não tem sentido, pois não tem significação própria. Apenas proposições quantificadas podem ter significação (*meaning*) própria, pois somente com base em proposições quantificadas podemos fixar uma propriedade básica da entidade descrita, isto é, a unicidade desta entidade e atribuir um predicado a esta entidade.

Uma das consequências da teoria da denotação em *Da Denotação* (1905) que nos parece relevante apontar aqui, por envolver a noção de função proposicional como substrato elementar e fundamental de análise da forma lógica, é sua contribuição não apenas para a Lógica e para a Matemática, como pudemos notar até aqui, mas para a Teoria do Conhecimento. Sobre isso, diz Russell: “O objeto de denotação é de grande importância, não só para a lógica e a matemática, mas também para a teoria do conhecimento.”. (RUSSEL, 1992, p. 3). Essa contribuição está pautada pela distinção entre o que o autor chama em *Da Denotação* (1905) de “conhecimento de trato” (*acquaintance*) e “conhecimento acerca de” (*knowledge about*).

O conhecimento de trato de algo é o conhecimento resultante de uma investigação científica efetiva dos seus elementos constituintes, por exemplo, o conhecimento em Química resultante de uma investigação sobre os elementos constituintes de uma determinada substância. Portanto, o conhecimento de trato “[...] é conhecido por nós somente através de descrição.”. (RUSSELL, 1992, p. 3) que são apresentadas por uma teoria científica. Já o conhecimento acerca de é obtido apenas pela determinação do significado lógico dos termos que compõem uma proposição e que nos permitem expressar as propriedades desse algo. Por exemplo, não temos conhecimento de trato sobre a mente de uma pessoa, mas podemos ter conhecimento das propriedades que a caracterizam através de uma análise denotativa dos termos que compõem as proposições que elaboramos a partir das propriedades que extraímos de uma observação sobre a mente de uma pessoa.

Assim, enquanto o conhecimento de trato é um conhecimento efetivo dos elementos constituintes de algo, donde podemos elaborar funções proposicionais desse algo em uma teoria científica, o conhecimento acerca de algo não nos permite acessar seus elementos constituintes, mas nos permite elaborar apenas funções proposicionais acerca de algo, pois temos acesso apenas aos fenômenos de suas propriedades. “Portanto, apesar de podermos formar funções proposicionais $C(x)$, que devem conter tal ou qual partícula material, ou a mente de fulano de tal, ainda assim não temos conhecimento de trato das proposições que afirmam essas coisas, que sabemos que devem ser, porque não podemos apreender as entidades reais concernidas.”. (RUSSELL, 1992, p. 14)

Podemos dizer, em suma, que o propósito da denotação consiste em analisar e determinar o significado lógico dos termos que compõem uma proposição. Notemos que essa análise proposta por Russell em *Da Denotação* (1905) se constitui como uma teoria das descrições. Esta teoria contém, em essência, a articulação entre pelo menos três funções proposicionais, tal que uma fixa a propriedade básica da entidade descrita (“todo”, “nenhum” ou “algum”), a outra estabelece a sua unicidade e a outra atribui um predicado a esta entidade. Segundo Peter Hylton, a “[...] atenção de Russell está focada nas formas lógicas das proposições. A análise das sentenças contendo descrições definidas é um paradigma aqui: a sentença tem a forma sujeito-predicado, mas a análise de acordo com a teoria das descrições revela que ela expressa uma proposição que é uma quantificação existencial.”. (HYLTON, 2003, p. 224, tradução nossa)[209]

A determinação da denotação das partes constituintes de uma proposição quantificada e da proposição como um todo contribui, assim, para o estudo da formalização de uma proposição, pois, para determinar o significado das expressões em geral, torna-se necessário a análise de sua forma. Nisso a função proposicional é determinante como um esquema de análise logico-matemática, apontando, inclusive, para reflexões em terno de uma teoria do conhecimento. No campo da Lógica Matemática, em especial, o artigo *Da Denotação* (1905) traz um destacado refinamento da linguagem lógico-matemático. Diz o próprio Russell que a sua teoria das descrições, apresentada acima, é considerada a sua mais importante contribuição para a Lógica. “Foi depois aceita de modo geral e veio a ser considerada minha mais importante contribuição para a lógica.”. (RUSSELL, 1959, p. 83, tradução nossa).[210] Segundo Nicholas Griffin que “Com ‘Da Denotação’ a análise se tornou mais sofisticada e mais linguística.”. (GRIFFIN, 2003, p. 25, tradução nossa).[211] Podemos dizer que essa sofisticação da linguagem aponta para a transição de *Os Princípios da Matemática* (1903) para uma das principais obras de Russell e uma das principais obras do século XX em Lógica Matemática: o *Principia Mathematica* (1910).

[209] “[...] Russell’s attention is focused on the logical forms of propositions. The analysis of sentences containing definite descriptions is a paradigm here: the sentence has subject–predicate form, but analysis in accordance with the theory of descriptions reveals that it expresses a proposition which is an existential quantification.”.
[210] “It was afterwards generally accepted, and came to be thought my most important contribution to logic.”.
[211] “With ‘On Denoting’, analysis became more sophisticated and more linguistic.”.

A seguir analisaremos a passagem de *Os Princípios da Matemática* (1903) para o *Principia Mathematica* (1910), centrando nossa análise no conceito de função proposicional.

2.4. Funções proposicionais

Nesta seção analisaremos a noção de função proposicional em *Os Princípios da Matemática* (1903), extraída de enunciados propriamente matemáticos que envolvem a noção "tal que". Em seguida explicitaremos a passagem de *Os Princípios da Matemática* (1903) para *Principia Mathematica* (1910, 1912 e 1913) centrando nossa análise no conceito de função proposicional.

Diz Russell, em *Os Princípios da Matemática* (1903), que "Muitas vezes, é necessário reconhecer como classe um objeto não definido por meio de uma proposição sujeito-predicado. A explicação para essa necessidade deve ser buscada na teoria das asserções e *tal que* [*such that*].". (RUSSELL, 1903, §80, p. 83, grifo do autor, tradução nossa).[212] Em outra passagem, ele ainda diz: "Finalmente, nós precisamos lembrar que classes são derivadas, por meio da noção *tal que*, de outras fontes que não as proposições sujeito-predicado e seus equivalentes.". (RUSSELL, 1903, §77, p. 79, grifo do autor, tradução nossa)[213]

Se Russell introduz, como vimos na Seção 1, o termo e o conceito de função proposicional no Capítulo II de *Os Princípios da Matemática* (1903), intitulado "Lógica Simbólica", ele dedica todo o Capítulo VII da Parte I da mesma obra ao estudo desse conceito, cujo título do capítulo não poderia ser outro senão "Função Proposicional". Neste capítulo, o autor discute como o conceito de função proposicional está relacionado à noção "tal que", termo comumente utilizado nos enunciados matemáticos e, também, utilizado por Peano em seus trabalhos.

Aponta Russell que a noção "tal que" é, em princípio, usada nas proposições para definir o que é frequentemente passível de definição. Segundo ele, Peano usa essa noção, em particular, para definir o conceito de classe na proposição "os *x*'s tal que *x* é um *a* são a classe *a*". Nessa sentença, a expressão "os *x*'s", que aparece antes de *tal que* é a classe propriamente dita, e a expressão "*x* é um *a*" é o conceito, a classe-conceito. Sobre isso, diz: "[...] é de se observar que a classe como obtida a partir da forma *tal que* é a classe, tomada em extensão e

[212] "It is often necessary to recognize as a class an object not defined by means of a subject-predicate proposition. The explanation of this necessity is to be sought in the theory of assertions and *such that*.".
[213] "Finally, we must remember that classes are to be derived, by means of the notion of *such that*, from other sources than subject-predicate propositions and their equivalents.".

como muitos, enquanto que *a* em '*x* é um *a*' não é a classe, mas a classe-conceito.". (RUSSELL, 1903, § 80, p. 83, tradução nossa)[214]

Notemos que o que vem depois de *tal que* especifica ou determina a classe ou o tipo de classe. No caso da proposição "os *x*'s tal que *x* é um *a* são a classe *a*" a expressão "*x* é um *a*" é uma relação entre *x* e *a* que determina os *x*'s que compõem a classe *a*. Essa relação é expressa por ele por "*xRa*". Nesse sentido, diz Russell: "É claro que há uma relação que cada uma destas proposições tem para o *x* que ocorre nela, e que a relação em questão é determinada quando *a* é dada. Vamos chamar a relação *R*.". (RUSSELL, 1903, § 80, p. 82, tradução nossa).[215] Russell nos dá um exemplo disso na linguagem comum, diz ele: "[...] os filhos de Israel são uma classe definida por uma certa relação com Israel, e a classe só pode ser definida como os termos tal que eles têm essa relação" (RUSSELL, 1903, p. 83, tradução nossa)[216], ou seja, o tipo de relação de filiação com Israel vai determinar a classe dos filhos de Israel.

Russell diz que o que vem depois do *tal que* é equivalente à noção exercida pela função proposicional. "*Tal que* é aproximadamente equivalente a *quem* ou o *que*, e representa a noção geral de satisfação de uma função proposicional.". (RUSSELL, 1903, § 83, p. 83, grifo do autor, tradução nossa).[217] Assim, sendo que, como vimos, o que vem depois de *tal que* determina a classe ou o tipo de classe, então diz ele: "Deve-se considerar, penso eu, que cada função proposicional, que não é nula, define uma classe, que é denotada por '*x*'s tal que ϕx'.". (RUSSELL, 1903, § 80, p. 88, tradução nossa)[218]

Desse modo, quando substituímos *x* por um valor determinado na expressão "ϕx" introduzimos uma nova noção para o cálculo proposicional, a saber: a noção de verdade. Sobre isso, escreve: "Quando consideramos os *x'*s tais que ϕx, onde ϕx é uma função proposicional, estamos introduzindo uma noção [...] quero dizer, a noção de *verdade*." (RUSSELL, 1903, § 83, p. 88, grifo do autor, tradução nossa).[219] A noção de verdade está,

[214] "[...] it is to be observed that the class as obtained from such that is the genuine class, taken in extension and as many, whereas the *a* in '*x* is an *a'* is not the class, but the class-concept.".
[215] "It is plain that there is a relation which each of these propositions has to the *x* which occurs in it, and that the relation in question is determinate when *a* is given. Let us call the relation *R*.".
[216] "[...] the children of Israel are a class defined by a certain relation to Israel, and the class can only be defined as the terms such that they have this relation.".
[217] "*Such that* is roughly equivalent to *who* or *which*, and represents the general notion of satisfying a propositional function.".
[218] "It must be held, I think, that every propositional function which is not null defines a class, which is denoted by '*x'*s such that ϕx'.".
[219] "When we consider the *x*'s such that Φx, where ϕx is a propositional function, we are introducing a notion […] I mean the notion of truth.".

então, associada, também, à noção de função proposicional. Assim, a determinação de x na função proposicional ϕx resulta não apenas uma proposição, mas também o valor de verdade a ela associada.

Quanto à função proposicional "É de se observar que, de acordo com a teoria de funções proposicionais aqui defendida, o ϕ em ϕx não é uma entidade separada e distinta, ela vive nas proposições da forma ϕx e não pode sobreviver a análise." (RUSSELL, 1903, § 85, p. 88, tradução nossa).[220] Nesse sentido, a função proposicional deve ser interpretada não como um conceito puro, isto é, apenas do ponto de vista intensional, expresso, neste caso, apenas por ϕ, mas, também, de modo extensional, isto é, como uma função tal que o x associado a ϕ é a variável que é substituível pelas constantes, isto é, pelos possíveis elementos de uma classe, cujo resultado final é uma proposição.

Embora a função proposicional tenha uma importância central em *Os Princípios da Matemática* (1903) para determinar uma classe ou um tipo de classe, Russel, motivado pelos problemas suscitados pelos paradoxos, centra-se, temporariamente, no método da substituição, apresentada e discutida por ele nos seguintes trabalhos: "Sobre a Teoria da Substituição das Classes e Relações" (1906), (*On the Substitutional Theory of Classes and Relations*), "Lógica Matemática Baseada na Teoria dos Tipos" (1908) (*Mathematical Logic Based on the Theory of Types*), entre outros trabalhos, inclusive trabalhos não publicados. (Cf. CAREY; ONGLEY, 2009, p. 225)

Em *Lógica Matemática Baseada na Teoria dos Tipos* (1908) encontramos uma definição do método da substituição: "Se p é uma proposição, e a um constituinte de p, seja 'p/a ; x' denota a proposição que resulta da substituição de x por a onde quer que a ocorra em p. Então p/a, que chamaremos uma *matriz*, que pode tomar o lugar da função, seu valor para o argumento x é p/a ; x, e seu valor para o argumento a é p.". (RUSSELL, 1908, p. 238, grifo do autor, tradução nossa)[221]. Segundo Carey e Ongley o método da substituição sustenta-se na "técnica da definição contextual" que se baseia no seguinte resultado obtido em *Da Denotação* (1905) que vimos na Seção 3: um termo ou uma expressão denotativa é essencialmente *parte* de uma sentença e, portanto, ela não tem significação própria; só tem significação se examinada no contexto de sua aplicação na proposição.

[220] "It is to be observed that, according to the theory of propositional functions here advocated, the ϕ in ϕx is not a separate and distinguishable entity it lives in the propositions of the form ϕx, and cannot survive analysis.".

[221] "If p is a proposition, and a a, constituent of p, let 'p/a ; x' denote the proposition which results from substituting x for a wherever a occurs in p. Then p/a, which we will call a *matrix*, may take the place of a function; its value for the argument x is p/a ; x, and its value for the argument a is p.".

O método da substituição é parte da tentativa de Russell para solucionar contradições lógicas. Russell identifica a importância da dissolução de contradições já em *Os Princípios da Matemática* (1903), no Apêndice B, com o esboço de uma primeira solução que se aprimorou em seus trabalhos posteriores: a doutrina dos tipos. “A doutrina dos tipos é aqui apresentada, timidamente, como proporcionando uma possível solução para a contradição; mas ela exige, em todo caso, ser transformada em alguma forma sutil antes que possa responder a todas as dificuldades.”. (RUSSELL, 1903, § 497, p. 523, tradução nossa)[222]

Tendo em vista a relevância da necessidade de dissolução de contradições no interior da Lógica, Russell fecha esta obra com as seguintes palavras:

> A totalidade de todos os objetos lógicos ou de todas as proposições envolve, ao que parece, uma dificuldade lógica fundamental. Qual pode ser a solução completa da dificuldade, eu não consegui descobrir; mas como isso afeta os próprios fundamentos do raciocínio, eu sinceramente recomendo seu estudo com atenção de todos os estudantes de lógica.”. (RUSSELL, 1903, § 500, p. 528, tradução nossa)[223]

Ele aponta, com isso, para a necessidade de trabalhos futuros no campo da Lógica Matemática na dissolução de contradições.

Não entraremos aqui no mérito das limitações do método da substituição por fugir aos propósitos de nosso trabalho. Mas, parece-nos relevante observar que um dos motivos da dificuldade de Russell para solucionar as contradições é sua convicção de que as variáveis que ocorrem na função proposicional devem ser ilimitadas, isto é, que a variável pode ser substituída por qualquer entidade.[224] Nesse sentido, escrevem Carey e Ongley “Um motivo importante por trás da doutrina é a convicção de Russell que as variáveis da lógica deve ser ilimitada, ou seja, autorizadas a variar sobre o que quer existe ao invés de ser dividido em tipos.”. (CAREY; ONGLEY, 2009, p. 225, tradução nossa)[225]

---

[222] “The doctrine of types is here put forward tentatively, as affording a possible solution of the contradiction; but it requires, in all probability, to be transformed into some subtler shape before it can answer all difficulties.”.

[223] “The totality of all logical objects, or of all propositions, involves, it would seem, a fundamental logical difficulty. What the complete solution of the difficulty may be, I have not succeeded in discovering; but as it affects the very foundations of reasoning, I earnestly commend the study of it to the attention of all students of logic.”.

[224] Estudaremos o conceito de variável ilimitada na Seção 5, intitulada “O conceito de variável”. Nesta seção, o que chamamos aqui de “variável ilimitada” será introduzida pelo termo “variável irrestrita”.

[225] “An important motive behind the doctrine is Russell's conviction that the variables of logic must be unrestricted, that is, allowed to range over whatever there is rather than be divided into types.”.

Sobre a ocorrência de variáveis ilimitadas em funções proposicionais, escreve Russell em *Lógica Matemática Baseada na Teoria dos Tipos* (1908): "Assim, uma variável nunca pode ser restrita sem um certo campo de valores[226] se a função proposicional em que a variável ocorre permanece significativa quando a variável está fora desse campo de valores.". (RUSSELL, 1908, p. 235, grifo nosso, tradução nossa).[227] Nesse mesmo contexto, ainda escreve ele: "Este princípio deve ser levado em conta no desenvolvimento de tipos lógicos, o qual veremos brevemente a seguir". (RUSSELL, 1908, p. 238, tradução nossa).[228] Mesmo admitindo uma doutrina dos tipos, Russell não põe em questão a natureza ilimitada das variáveis da Lógica.

Pode-se encontrar esse princípio já em *Os Princípios da Matemática* (1903): "O x em ϕx, onde ϕx é uma função proposicional, é uma variável irrestrita; mas o ϕx em si mesmo é restrito a classe que podemos chamar ϕ.". (RUSSELL, 1903, § 88, p. 91, tradução nossa).[229] Continua ele: "Ao tornar nosso x sempre uma variável sem restrições, podemos falar da variável, que é conceitualmente idêntica em Lógica, Aritmética, Geometria, e todas as outras disciplinas formais.". (RUSSELL, 1903, § 88, p. 91, tradução nossa).[230] Isso quer dizer que a variável irrestrita, devido a sua não restrição, alcança uma forma ampla, sem restrição de um conteúdo específico. Assim, "[...] em toda proposição da matemática pura, quando inteiramente afirmada, as variáveis têm um campo absolutamente irrestrito: qualquer entidade concebível pode ser substituída por qualquer uma de nossas variáveis sem prejudicar a verdade de nossa proposição.". (RUSSELL, 1903, § 88, p. 91, tradução nossa)[231]

Mas, na medida em que Russell não encontra na teoria da substituição uma solução para as contradições na Lógica, ele volta, exclusivamente, para as variáveis e funções proposicionais. Ao se focar nestes dois elementos de análise da forma das proposições, Russell tinham um plano mais claro do sistema lógico a ser usado. Esse sistema lógico

[226] O que os autores chamam de campo de valores (*range*) é o que, em geral, os matemáticos chamam de "domínio de uma função ϕ".

[227] "Thus a variable can never be restricted within a certain range if the propositional function in which the variable occurs remains significant when the variable is outside that range.".

[228] "This principle is to be borne in mind in the development of logical types, to which we shall shortly proceed.".

[229] "The x in ϕx, where ϕx is a propositional function, is an unrestricted variable; but the ϕx itself is restricted to the class which we may call ϕ."

[230] "By making our x always an unrestricted variable, we can speak of the variable, which is conceptually identical in Logic, Arithmetic, Geometry, and all other formal subjects.".

[231] "[...] in every proposition of pure mathematics, when fully stated, the variables have an absolutely unrestricted field: any conceivable entity may be substituted for any one of our variables without impairing the truth of our proposition.".

aparece estruturado e definido em sua obra intitulada "Principia Matemática"[232] (1910; 1912; 1913), escrito em colaboração com Alfred North Whitehead (1861-1947). Sobre isso, escreve Grattan-Guinnes no artigo "Matemática em e por trás do Logicismo de Russell": "Durante 1906 Russell abandonou a teoria da substituição e se voltou para variáveis e funções proposicionais; em breve, ele e Whitehead tinham um plano claro do sistema lógico a ser usado.". (GRATTAN-GUINNES, 2003, p. 66, tradução nossa)[233]

O *Principia* (1910; 1912; 1913) é considerado pelo próprio Russell sua obra mais consolidada, pelo tempo que ele e Whitehead se dedicaram a ela. "De 1900 a 1910, Whitehead e eu dedicamos quase todo o nosso tempo à obra que veio a chamar-se *Principia Mathematica*.". (RUSSELL, 1980, p. 56)

Diz Russell em seu livro *Meu Desenvolvimento Filosófico* (1959) que "O principal objetivo de *Principia Mathematica* foi mostrar que toda Matemática pura deriva de premissas puramente lógicas e usa apenas conceitos definíveis em termos lógicos." (RUSSELL, 1959, p. 74, tradução nossa).[234] Diz ainda, neste contexto, que tanto ele quanto Whitehead contribuíram mutuamente para a obra de modo que é difícil encontrar uma linha que delimite precisamente o esforço de cada uma das partes. A obra foi escrita de 1900 a 1910, o manuscrito foi entregue à Cambridge Universty Press em 1910 e o terceiro volume foi publicado apenas em 1913.

No Prefácio do *Principia* (1910), diz Russell (cf. 1910, p. v) que esta sua obra trata dos princípios da Matemática e seu tema surge de um conjunto de dois diferentes estudos centrais para a Lógica Moderna. Por um lado, a partir dos trabalhos dos analistas e geômetras no sentido de formalizar e sistematizar os axiomas, em que um dos alcances e expressão maior era, até então, os trabalhos de Georg Cantor (1845 - 1918) para a Teoria de Conjuntos. De outro lado, a contribuição de Peano e seus seguidores com a adaptação técnica e abrangência da Lógica como instrumento matemático para lidar com os princípios da Matemática.

Dessa combinação de estudos surgem dois resultados: (i) o método de demonstração que permite o questionamento das proposições que antes eram assumidas como axiomas, de modo que o questionamento ou considera tais axiomas como desnecessários ou se exige demonstrá-los pela sua necessidade lógica; (ii) surgimento, como consequência do método de

[232] Designaremos esta obra a partir de agora apenas de *Principia*.
[233] "During 1906 Russell abandoned the substitutional theory and went back to variables and propositional functions; soon he and Whitehead had a clear plan of the logical system to be used.".
[234] "The primary aim of *Principia Mathematica* was to show that all pure mathematics follows from purely logical premisses and uses only concepts definable in logical terms.".

demonstração, de importantes resultados, com ampliação, sistematização e rigor lógico em diversos campos da Matemática. Assim, como consequência "[...] o escopo da matemática é ampliado tanto pela adição de novos temas quanto uma extensão para trás em campos até então abandonadas à filosofia.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. v, tradução nossa)[235]

Explicam Whitehead e Russell (cf. 1910, p. v) no Prefácio ao *Principia* (1910) que originalmente as ideias contidas ali [no *Principia*] eram para compor o segundo volume de *Os Princípios da Matemática* (1903).[236] Entretanto, com o avanço dos estudos, o tema de estudo se tornou muito mais amplo do que ele havia pressuposto no início, e isso o motivou, portanto, a escrever um livro independente, mas agora em colaboração com seu colega Whitehead, o que resultou no *Principia* (1910) propriamente dito.

No *Principia* (1910) a definição de função proposicional aparece como um dos conceitos mais elementares logo no início da obra, no Capítulo I, intitulado "Explanações Preliminares das Ideias e Notações". Definem os autores:

> Seja ϕx uma sentença contendo uma variável x e tal que ela se torna uma proposição quando a x é dado algum significado determinado fixo. Então, ϕx é chamada de "função proposicional"; ela não é uma proposição, já que, devido à ambiguidade de x, ela não assere em absoluto. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 15, tradução nossa)[237]

Nesse sentido, dizem, ainda, os autores na seção do *Principia* (1910) intitulada "A Natureza das Funções Proposicionais" que "Por uma 'função proposicional', queremos significar algo que contém uma variável x, e expressa uma proposição logo que um valor é atribuído a x. Isto quer dizer que difere de uma proposição unicamente pelo fato de que é ambígua: contém uma variável cujo valor é atribuído.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 41, tradução nossa)[238]

---

[235] "[...] the scope of mathematics is enlarged both by the addition of new subject and by a backward extension into provinces hitherto abandoned ot philosophy.".

[236] *Os Princípios da Matemática* (1903) não é considerada uma obra madura e consolidada pelo próprio Russell. Nesse sentido, escreve ele no seu livro *Meu Desenvolvimento Filosófico* (1959) que "*The Principal of Mathematics*, que terminei a 23 de maio de 1902, resultou numa espécie de rascunho grosseiro e imaturo do trabalho subsequente, do qual, entretanto, diferia, por entrar em controvérsia com outras Filosofias da Matemática.". (RUSSELL, 1980, p. 56)

[237] "Propositional functions. Let ϕx be a statement containing a variable x and such that it becomes a proposition when x is given any fixed determined meaning. Then ϕx is called a "propositional function"; it is not a proposition, since owing to the ambiguity of x it really makes no assertion at all.".

[238] "By a 'propositional function' we mean something which contains a variable x, and expresses a proposition as soon as a value is assigned to x. That is to say, it differs from a proposition solely by the fact that it is ambiguous: it contains a variable of which the value is unassigned.".

A função proposicional se assemelha a uma função matemática, pois ela é uma relação que associa cada valor da variável x a uma proposição. Mas, a diferença da função proposicional para a função matemática é que a primeira resulta em proposições e a segunda resulta, principalmente, em números. Dizem os autores que a função proposicional "Concorda com a função ordinária da matemática no fato de conter uma variável não atribuída; onde ela difere no fato de que os valores da função são proposições. Assim, por exemplo, 'x é um homem' ou '$\sin x = 1$' é uma função proposicional.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 41, tradução nossa)[239]

Russell não considerava funções proposicionais como uma espécie de funções matemáticas, mas tomou funções proposicionais como o tipo fundamental de função de que os tipos mais usuais de função, tais como "sin x"... são derivadas. Escreve ele: "Função proposicional é o tipo fundamental do qual os tipos mais usuais de função, como 'sin x' ou 'log x' ou 'o pai de x' são derivados. Estas funções derivadas são consideradas depois, e são chamadas de 'funções descritivas'.". (Russell, 1960, p. 15, tradução nossa)[240]

As funções descritivas descrevem um certo termo pelo significado de sua relação com o valor que substitui a variável na função. Por exemplo, a função matemática x^2 relaciona o número que substitui a variável x com o número que resulta desta substituição na referida variável. "Funções desse tipo sempre significam 'o termo tem tal e tal relação com x'. Por esta razão, elas podem ser chamadas de funções *descritivas*, porque elas *descrevem* um determinado termo pelo significado de sua relação com o seu argumento.". (Russell, 1960, p. 232, tradução nossa, grifo do autor)[241]

Os argumentos são, como podemos entrever em nossa análise, os valores que se atribuem à variável x. Mas, argumento pode ser, também, a própria variável x, por exemplo, a variável x é o argumento da função ϕx, nesse sentido, dizem os autores: "Seja ϕx uma função proposicional cujo argumento é x; então podemos afirmar ϕx sem atribuir um valor para x." (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 96, tradução nossa).[242] Já no caso em que uma constante

[239] "It agrees with the ordinary function of mathematics in the fact of containing an unassigned variable; where it differs is in the fact that the values of the function are propositions. Thus e.g. 'x is a man' or '$\sin x = 1$' is a propositional function.".
[240] "Propositional function are the fundamental kind from which the more usual kinds of function, such as 'sin x' or 'log x' or 'the father of x' are derived. These derived function are considered later, and are called 'descriptive functions'.".
[241] "Functions of this kind always mean 'the term having such and such a relation to x'. For this reason they may be called *descriptive* functions, because they *describe* a certain term by means of its relation to their argument.".
[242] "Let ϕx be a propositional function whose argument is x; then we may assert ϕx without assigning a value to x.".

é chamada de “argumento”, a constante *a*, por exemplo, podemos dizer que o argumento *a* substitui a variável *x* na função ϕx, isto é, o objeto *a* é argumento para esta função.

Ademais, não apenas os objetos do tipo *a* e variáveis são chamados de argumento, mas também tudo o que substitui a variável na função, sejam proposições ou mesmo funções. No primeiro caso, dizem os autores: “Vamos dar o nome de uma *função de verdade* para uma função $f\,(p)$ cujo argumento é uma proposição e cujo valor de verdade depende apenas do valor de verdade de seu argumento.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 121, grifo do autor, tradução nossa).[243] Já o caso em que função é chamada de “argumento”, ocorre no contexto em que temos funções de funções, isto é, quando funções cujos argumentos são funções: “[...] uma consideração direta dos tipos de funções que têm funções como argumentos e os tipos de funções que têm outros argumentos que funções mostrarão [...]”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 50, tradução nossa)[244]

Notemos que a função ϕx só tem um significado bem definido se os argumentos ϕa, ϕb, ϕc, etc., estão bem definidos e não são ambíguos como o é, por exemplo, a própria variável *x*. Em outras palavras, dizem os autores que “[...] a função não pode ser definida até que seus valores sejam definidos.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 41-42, tradução nossa).[245] Os termos “*x*” *e* “ϕ” que ocorrem na expressão “ϕx”, cujo valor não é especificado, denotam ambiguamente os argumentos ϕa, ϕb, ϕc, etc., onde tais argumentos são os vários e possíveis valores de ϕx. “Quando dizemos que ‘ϕx’ denota ambiguamente um ϕa, ϕb, ϕc, etc., queremos dizer que ‘ϕx’ significa um dos objetos ϕa, ϕb, ϕc, etc., embora não definitivo, mas um indeterminado.” (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 41, tradução nossa)[246]. Dizem os autores que “É esse tipo de ambiguidade que constitui a essência da função.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1968, p. 39, tradução nossa)[247]

Nesse sentido, é o conceito de variável, que, como afirmam os autores, constitui a essência da função proposicional, pois lhe confere sua natureza essencialmente ambígua. É o conceito de variável que analisaremos a seguir.

---

[243] “We shall give the name of a *truth-function* to a function $f(p)$ whose argument is a proposition and whose truth-value depends only upon the truth-value of its argument.”.
[244] “[...] a direct consideration of the kinds of functions which have functions as arguments and the kinds of functions which have arguments other than functions will show [...]”
[245] “[...] the function cannot be definite until its values are definite.”.
[246] “When we say that ‘ϕx’ ambiguously denotes ϕa, ϕb, ϕc, etc., we mean that ‘ϕx’ means one of the objects ϕa, ϕb, ϕc, etc., though not a definite one, but an undetermined one.”.
[247] “It is this kind ambiguity that constitutes the essence of a function.”.

2.5. O conceito de variável

Apresentaremos, nesta seção, o conceito de variável. Veremos que as noções de variável irrestrita e real são importantes para compreendermos o conceito de função proposicional, distinguindo este conceito de outras expressões e até mesmo de proposições onde ocorrem variáveis.

A primeira noção elementar que Whitehead e Russell introduzem no Capítulo I do *Principia*, intitulado *"*Explanações Preliminares das Ideias e Notações", é o conceito de variável e, também, junto com ele, o conceito de constante.

Whitehead e Russell (cf. 1968, p. 4-5) salientam características associadas ao uso do termo variável, entre as quais destacamos: (i) a variável é ambígua e indefinida em sua denotação; e (ii) uma variável preserva sua identidade em diferentes ocorrências no mesmo contexto de modo que muitas variáveis podem ocorrer em conjunto, ao mesmo tempo, sem que haja destituição de sua identidade.

Dizem, ainda, Whitehead e Russell (cf. 1910, p. 4) que a variável pode ser ou um conjunto prévio e convencionalmente atribuído de valores ou pode ter um conjunto de valores quaisquer de objetos que torna significativa a sentença no contexto em que ela ocorre. Quando o conjunto de possíveis valores da variável está convencionalmente estabelecido, temos o que os autores chamam de "variável restrita"; e quando o conjunto de possíveis valores da variável não está convencionalmente estabelecido, temos o que eles chamam de "variável irrestrita".

O conceito de variável restrita é mais utilizado na Matemática e o conceito de variável irrestrita é mais utilizado na Lógica Matemática. Dizem Whitehead e Russell (cf. 1910, p. 4) que na Matemática a variável serve, geralmente, de suporte para possíveis quantidades e números indeterminados, enquanto que na Lógica Matemática a variável pode ser, de acordo com as circunstâncias ou o contexto de aplicação na linguagem formal idealizada pelo lógico, qualquer conjunto de entidades, proposições, funções, classes ou relações.

A constante é o conceito relativo e oposto à variável. Podemos dizer que a constante é um valor determinado, por oposição à variável lógico-matemática que, como vimos acima, é indeterminada, pois indica a possibilidade de determinação de valores que um termo (o termo *x*, por exemplo) pode assumir em uma expressão. No caso de funções proposicionais, a constante que substitui a variável na função é, como dissemos na seção anterior, chamada pelos autores de "argumento". Podemos dizer, que argumento é, portanto, nesse caso, o objeto que substitui a variável na função tornando seu significado determinado.

No *Principia* (1910), e usualmente nos manuais de Lógica Contemporânea, ambos, variáveis e constantes, são expressos pelos autores por letras singulares. Nesse sentido, como apontam os autores, o que diferencia as variáveis e as constantes, no plano notacional, é a convenção adotada na linguagem, de modo que uma letra singular adotada para uma, por definição, não pode ser usada para outra, a não ser que se aponte a mudança de significado da letra pela sua necessidade no decorrer do uso que o lógico faz da linguagem.

No *Principia* (cf. 1910, p. 5), em particular, receberão, convencionalmente, significados de variáveis: (i) letras minúsculas do alfabeto ordinário, exceto "*p*" e "*s*" que no contexto das definições de produtos e somas de classes serão usados como constantes (cf. *40); essas letras minúsculas do alfabeto ordinário são variáveis cujos valores são proposições quaisquer e são chamadas de "letras proposicionais"; (ii) as letras maiúsculas do alfabeto ordinário, que expressam variáveis para relações e são chamadas apenas de "letras maiúsculas", a exceção são letras "*B*", "*C*", "*D*", "*E*", "*F*", "*I*" e "*J*", que, como veremos, expressam constantes; (iii) as letras "*f*", "*g*", "ϕ", "ψ", "χ", "θ" e (cf. *33) "*F*", estas letras expressam variáveis que designam funções quaisquer e são chamadas de "letras funcionais".

Por conseguinte, receberão, convencionalmente, significado de constante as seguintes letras: (i) as letras minúsculas "*p*" e "*s*" do alfabeto ordinário; (ii) as letras maiúsculas do alfabeto ordinário "*B*", "*C*", "*D*", "*E*", "*F*", "*I*" e "*J*"; (iii) as letras gregas minúsculas "ε", "ι", e, em uma certa altura da obra, as letras "η", "θ", "ω"; estas letras expressam variáveis cujos valores são classes; elas são chamadas apenas de "letras gregas"; e (iv) letras gregas maiúsculas. As letras minúsculas do alfabeto ordinário que não são "*p*", "*q*", "*r*", "*s*", "*f*", e "*g*", (que são usadas como variáveis cujos valores não são funções, classes ou relações) são chamadas de "letras latinas minúsculas".[248]

Mas, embora as constantes sejam fixadas ou determinadas previamente acima na notação, dizem os autores que, a princípio, todas as letras são variáveis, a não ser que seja definida como constante e passe a ser usada como tal na notação após a definição na ordem das razões da linguagem: "[...] o leitor só precisa se lembrar que todas as letras representam variáveis, a menos que tenham sido definidas como constantes em algum lugar no livro.".

[248] A notação usada por Russell no *Principia* (1910) é semelhante à notação utilizada por Wittgenstein no *Tractatus* (1921).

(WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 06, tradução nossa)[249]. Isso significa que, em princípio, todas as letras são variáveis, pois são as variáveis que melhor expressam a possibilidade de substituição da constante ou do conteúdo na notação lógica.

Essa explicitação sobre o conceito de variável, permite-nos entender uma distinção realizada pelos autores entre o conceito de função proposicional e o valor ambíguo desta função. Dizem eles que "É praticamente necessário distinguir a função em si mesma de um valor indeterminado da função.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 42, tradução nossa)[250]. Nesse sentido, escrevem eles: "Quando queremos falar da função proposicional correspondente a 'x está machucado', vamos escrever '$\hat{x}$ está machucado'. Assim, '$\hat{x}$ está machucado' é a função proposicional e 'x está machucado' é um valor ambíguo dessa função.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 15, tradução nossa)[251]

Para melhor entendermos a distinção acima, podemos observar que outras letras poderiam ser usadas no lugar de x, por exemplo, a letra y, para denotar a ambiguidade da função proposicional "$\hat{x}$ está machucado", tal que podemos dizer que as expressões "x está machucado" e "y está machucado" são valores ambíguos de "$\hat{x}$ está machucado". Nesse sentido, quando substituímos x ou y por a, por exemplo, dizemos que "a está machucado" é um valor não ambíguo de "$\hat{x}$ está machucado". Sobre essa distinção, em resumo, dizem eles: "Mais genericamente, ϕx é um valor ambíguo da função proposicional $\phi \hat{x}$, e quando uma significação definitiva a substitui x, ϕa é um valor não ambíguo de $\phi \hat{x}$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 6, tradução nossa)[252]. Essa distinção notacional aparece com muita frequência no decorrer do *Principia* (1910).

A variável x, associada à expressão da função proposicional $\phi \hat{x}$, traz consigo uma coleção de valores que esta expressão pode assumir ao substituirmos a variável x pelas constantes contidas na coleção de objetos constantes abrangidos por essa variável. Nesse sentido, dizem os autores que:

> […] correspondente a toda função proposicional $\phi \hat{x}$, há um campo ou coleção de valores que consiste de todas as proposições (verdadeira ou falsa)

[249] "[...] the reader need only remember that all letters represent variables, unless they have been defined as constants in some previous place in the book.".
[250] "It necessary practically to distinguish the function itself from an undetermined value of the function.".
[251] "When we wish to speak of the propositional function corresponding to 'x is hurt', we shall write '$\hat{x}$ is hurt'. Thus '$\hat{x}$ is hurt' is the propositional function and 'x is hurt' is an ambiguous value of that function.".
[252] "More generally, ϕx is an ambiguous value of the propositional function $\phi \hat{x}$, and when a definite signification a is substituted for x, ϕa is an unambiguous value of $\phi \hat{x}$.".

> que podem ser obtidas, dando cada determinação possível x em ϕx. Um valor de x para o qual ϕx é verdadeiro dir-se-á 'satisfazer' $\phi\hat{x}$. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 15-16, tradução nossa)[253]

Em relação ao campo ou à coleção de valores, que consiste de todas as proposições (verdadeiras ou falsas) que podem ser obtidas, dando cada determinação possível x em ϕx, há, como apontam os autores (cf. 1910, p. 16) três casos que podem ser notados e simbolizados: ou (i) todas as possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras; ou (ii) algumas das possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras; ou (iii) nenhuma das possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras.

O primeiro caso é simbolizado por "$(x) \,.\, \phi x$" (lê-se: "para todo x, tal que ϕ de x") e o segundo por "$(\exists x) \,.\, \phi x$" (lê-se: "existe ao menos um x, tal que ϕ de x"). Estas expressões denotam, como apontam os autores, ideias primitivas, e portanto não definíveis. Nesse sentido, "$(x) \,.\, \phi x$" está associado à ideia de que "ϕx é verdadeiro para todos os valores possíveis de x" ou, de outro modo, podemos dizer: "para todos os casos que x assume um valor fixo a, ϕa é verdadeiro"; e "$(\exists x) \,.\, \phi x$" está associado à ideia de que "ϕx é verdadeiro para ao menos um valor possível de x" ou, de outro modo, podemos dizer: "em ao menos um caso que x assume um valor fixo a, ϕa é verdadeiro". O ponto que aparece em ambas as notações serve, neste caso, para separar os conceitos, os conceitos "todos" e "alguns" de um lado e o conceito de função proposicional de outro.[254]

Quando nenhuma das possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras (o caso (iii)) temos que não existe ao menos um caso em que as possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional seja verdadeira. Notemos que o caso (iii) é a negação do caso (ii), e vice-versa. Então, se (ii) é expresso por "$(\exists x) \,.\, \phi x$", tal como vimos, então (iii) é expresso por "$\sim(\exists x) \,.\, \phi x$" ou por "$(x).\sim\phi x$", o que dá no mesmo. O sinal "$\sim$" é o sinal de negação. A expressão "$\sim(\exists x) \,.\, \phi x$" (que se lê: "não ocorre que, para algum x, tenhamos ϕ de

[253] "[...] corresponding to any propositional function $\phi\hat{x}$, there is a range, or collection, of values, consisting of all the propositions (true or false) which can be obtained by giving every possible determination x in $\phi\hat{x}$. A value of x for which ϕx is true will be said to 'satisfy' $\phi\hat{x}$.".

[254] Cada um destes casos correspondem ao que chamamos hoje em Lógica de "quantificadores lógico". Como é sabido entre os lógicos, é muito usual em Lógica o símbolo "$\exists$" para expressar o quantificador "alguns", mas não é usual o símbolo "(x)" para expressar o quantificador "todos", sendo mais usual o símbolo "$\forall$" .

x") está, portanto, associada à ideia de que "ϕx é falso para todos os valores possíveis de x" ou, de outro modo, podemos dizer: "para todos os casos que x assume um valor fixo a, ϕa é falso", expresso por $(x) . \sim\phi x$.

Notemos que os símbolos "$(x) \,.\, \phi x$", "$(\exists x) \,.\, \phi x$" e "$\sim(\exists x) \,.\, \phi x$" (ou "$(x) \,.\, \sim\phi x$") detonam proposições definidas, com variáveis aparentes, cujo significado não é ambíguo ou indeterminado. A variável x associada a esses símbolos não tem o valor ambíguo que, por definição, se atribui, por exemplo, à variável x em ϕx, pois a variável x está previamente determinada pelos *escopos* expressos por "todos" ou "alguns" ou "nenhum". Portanto, há uma distinção entre a variável que ocorre associada aos campos expressos por "todos" ou "alguns" ou "nenhum" e a variável associada apenas à função. Sobre isso, escrevem os autores: "O x que ocorre em '$(x) \,.\, \phi x$' ou '$(\exists x) \,.\, \phi x$' é chamado (seguindo Peano) 'variável aparente'." (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 17, tradução nossa).[255] Já a variável associada à função é, como já dissemos, uma variável real.

Os autores chamam de "escopo de x"[256] um conjunto de valores que x assume ou que determina x dentre os possíveis valores de x, a saber: "todos os valores", "alguns valores" ou "nenhum valor". Já os possíveis valores de x, os autores chamam de "campo de valores" (*range*). Nesse sentido, escrevem: "O *campo de valores* de x na '$(x) \,.\, \phi x$' ou '$(\exists x) \,.\, \phi x$' estende-se sobre o campo completo dos valores de x para o qual ϕx tem significado, e consequentemente o significado de '$(x) \,.\, \phi x$' ou '$(\exists x) \,.\, \phi x$' envolve a suposição de que tal campo é determinado.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 17, grifo nosso, tradução nossa).[257] Em outra passagem, ainda escrevem eles: "Além do '*campo de valores*' de x em '$(\exists x) \,.\, \phi x$' '$(x) \,.\, \phi x$' ou que é o campo dos valores que x pode ter, vamos falar do '*escopo*' de x, ou seja, a função de que todos os valores ou algum valor está sendo afirmado.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 17, grifo do autor, tradução nossa)[258]

A seguir deteremos nossa análise ao conteúdo do campo de valores de x associado às funções proposicionais, que são as classes, e às possíveis relações das funções proposicionais com os elementos deste conteúdo, que são as relações.

[255] "The x which occurs in '$(x) \,.\, \phi x$' or '$(\exists x) \,.\, \phi x$' is called (following Peano) an 'apparent variable'.".
[256] O que os autores chamam de "escopo de x" é comumente chamado em matemática de "contradomínio de uma função ϕ.".
[257] "The range of x in '$(x) \,.\, \phi x$' or '$(\exists x) \,.\, \phi x$' extends over the complete field of the values of x for which ϕx has meaning, and accordingly the meaning of '$(x) \,.\, \phi x$' or '$(\exists x) \,.\, \phi x$' involves the supposition that such a field is determinate.".
[258] "Besides the '*range*' of x in '$(x) \,.\, \phi x$' or '$(\exists x) \,.\, \phi x$' which is the field of the values that x may have, we shall speak of the '*scope* ' of x, meaning the function of which all values or some value are being affirmed.".

2.6. Classes e relações

Apresentaremos aqui, em linhas gerais, os conceitos de classes e relações no *Principia* (1910). Mostraremos como estes conceitos estão vinculados logicamente ao conceito de função proposicional.

Whitehead e Russell definem classe e relação também no Capítulo I do *Principia*, intitulado *"Explanações Preliminares das Ideias e Notações"*, após as definições que apresentamos acima, de variável e função proposicional.

O conceito de classe é assim definido por eles:

> Uma classe (que é o mesmo que uma *multiplicidade* ou *agregado*) são todos os objetos que satisfazem alguma função proposicional. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 24, grifo dos autores, tradução nossa)[259]

Notemos que a função proposicional é, na definição de classe, um conceito anterior ao conceito de classe na ordem das definições do *Principia* (1910). Isso quer dizer que os autores concebem a função proposicional como um conceito logicamente anterior. Enquanto conceito logicamente anterior, podemos dizer que função proposicional é condição lógica para as classes, pois pressupõe a definição desta. Nesse sentido, dizem os autores que "Toda função proposicional determina, assim, uma classe [...]" (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 24, tradução nossa)[260]; e em outra passagem, ainda escrevem: "As características de uma classe é que ela consiste de todos os termos que satisfazem alguma função proposicional, de modo que cada função proposicional determina uma classe [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 196, tradução nossa).[261] Assim, "Se α é a classe composta de objetos que satisfazem $\phi\hat{x}$, diremos que α é a classe *determinada* por $\phi\hat{x}$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 24, grifo dos autores, tradução nossa)[262]

Quanto à notação utilizada, escrevem: "A classe determinada pela função $\phi\hat{x}$ será representada por $\hat{z}(\phi z)$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 24, tradução nossa)[263], onde a letra "*z*" é uma letra arbitrária, pois qualquer outra letra poderia ser usada na instanciação

---

[259] "A class (which is the same as a *manifold* or *aggregate*) is all the objects satisfying some propositional function.".
[260] "Every propositional function thus determines a class [...]".
[261] "The characteristics of a class are that it consists of all the terms satisfying some propositional function, so that every propositional function determines a class […]".
[262] "If α is the class composed of the objects satisfying $\phi\hat{x}$, we shall say that α is the class *determined* by $\phi\hat{x}$.".
[263] "The class determined by the function $\phi\hat{x}$ will be represented by $\hat{z}(\phi z)$.".

ocupada pela letra "z" na notação "$\hat{z}(\phi z)$". Assim, se α é a classe composta de objetos que satisfazem $\phi\hat{x}$, então temos $\alpha = \hat{z}(\phi z)$.

Notemos que uma mesma classe pode ser determinada por diferentes funções proposicionais. "É óbvio que a mesma classe de objetos terá muitas funções determinantes.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 24, tradução nossa).[264] Por exemplo, "*x* é o mais ilustre discípulo de Platão" e "*x* é o grande filósofo de Estagira" determinam a mesma classe, a saber, a classe unitária composta pelo filósofo Aristóteles. Desse modo, pode-se especificar, na notação, apenas a classe determinada pela função e não as funções associadas a ela, pois isso torna a notação mais simplificada, já que teríamos uma notação complexa se quiséssemos expressar todas as funções proposicionais que determinam uma classe, pois, como dissemos, muitas funções proposicionais podem determinar uma mesma classe. Assim, para simplificar a notação de classe, os autores representam apenas a classe, e a notação para representar a classe é, como já apresentamos, brevemente, na Seção 5, letras gregas minúsculas, as letras "α", "β", "γ", "δ", etc., que expressam variáveis cujos valores são classes.

Embora uma classe seja definida como todos os objetos que satisfazem uma função proposicional, há situações em que nenhum objeto satisfaz uma função proposicional; neste caso, dizemos que a classe é vazia, pois a função resulta em uma proposição falsa para todos os objetos considerados. Nesse sentido, dizem os autores: "[...] se a função proposicional é uma que é sempre falsa, a classe será *nula*, i. e. não terá membros.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 24, grifo dos autores, tradução nossa).[265] Por exemplo, a função proposicional "*x* é o elemento que não é idêntico a si mesmo", resulta em uma proposição falsa para todos os objetos considerados, pois, pelo princípio da identidade, todo objeto é idêntico a si mesmo.

No caso de classes não-nulas, dizemos que "*x* é um membro de α" é verdadeira. Tal expressão recebe, convencionalmente entre os matemáticos, a seguinte notação, que é devida, como apontam os autores (cf. 1910, p. 25-26), aos trabalhos de Peano: $x \in \alpha$. A letra "∈" é uma letra grega que deriva da palavra grega "ἐστί" cuja palavra é uma variação do verbo "ser" (εἶναι). A expressão "$x \in \alpha$" é equivalente a dizer que "*x* é um α" que é o mesmo que dizer "*x* pertence a α" ou "*x* pertence à classe α". E se dizemos que "*x* pertence à classe α", então dizemos que, conforme a notação de classe apresentada acima, $x \in (\phi\alpha)\alpha$ ou seja, "*x* é um

[264] "It is obvious that the same class of objects will have many determining functions.".
[265] "[...] though if the propositional function is one which is always false, the class will be *null*, i. e. will have no members.".

membro da classe determinada por $\phi\alpha$ " o que é o mesmo que dizer "x satisfaz a $\phi\alpha$ ", que é equivalente a dizer "ϕx é verdadeira".

Dizem Whitehead e Russell que "Uma classe é determinada completamente quando seus membros são conhecidos, ou seja, não pode haver duas classes diferentes que têm os mesmos membros." (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 26, tradução nossa).[266] Desse modo, para garantir que não haja duas classes diferentes compostas pelos mesmos objetos, é importante garantir a unicidade de uma classe, isto é, torna-se necessário garantir que uma classe α qualquer seja única. Então, os autores definem primeiramente a equivalência entre funções proposicionais (já que são as funções proposicionais que determinam as classes) e depois definem, a partir da equivalência entre funções proposicionais, a igualdade entre classes, igualdade que as tornam únicas e as mesmas. Tendo isso em vista, temos as seguintes definições que podem ser assim apresentadas:

(i) Duas funções proposicionais ϕx e ψx são formalmente equivalentes se, e somente se, elas têm os mesmos elementos. Isso quer dizer que se x é um membro da classe determinada por $\phi\hat{x}$, então satisfaz ϕx, portanto x também satisfaz ψx, então x é um membro da classe determinada por $\psi\hat{x}$; por outro lado, se x é membro da classe determinada $\psi\hat{x}$, então satisfaz ψx, portanto x também satisfaz ϕx, então x é um membro da classe determinada $\phi\hat{x}$. Nesse sentido, escrevem os autores: "Então, se ϕx, ψx são formalmente funções fortemente equivalentes, elas determinam a mesma classe [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 25, tradução nossa).[267] Assim, "Quando duas funções são formalmente equivalentes, digamos que elas têm a mesma extensão.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 196, tradução nossa).[268] O símbolo de equivalência é expresso pelos autores por "≡".

(ii) duas classes α e β, determinadas respetivamente pelas funções proposicionais ϕx e ψx, são iguais se, e somente se, as funções proposicionais ϕx *e* ψx são formalmente equivalentes. Sobre isso, escrevem: "Assim, se ϕx, ψx são funções formalmente equivalentes, elas determinam a mesma classe [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 26, tradução nossa)[269]

---

[266] "A class is wholly determinate when its membership is known, that is, there cannot be two different classes having the same membership.".
[267] "Thus if ϕx, ψx are formally equivalent function, they determine the same class [...]".
[268] "When two functions are formally equivalent, we shall say that they have the same extension.".
[269] "Thus if ϕx, ψx are formally equivalent functions, they determine the same class [...]".

A equivalência entre funções, definida, como vimos, do ponto de vista extensional, permite-nos dizer que “[...] qualquer função de uma variável pode ser substituída por uma função equivalente à *forma* ‘$x \in \alpha$’.” (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 26, grifo nosso, tradução nossa)[270]. Isso quer dizer que $x \in \alpha$ é equivalente a qualquer função de uma variável e, sendo assim, a função $x \in \alpha$ pode ser usada para expressar o conjunto das funções de uma variável x que pertence a uma classe α. Portanto, a função proposicional $x \in \alpha$ pode ser usada para expressar a *forma* das funções de uma variável.

Semelhantemente ao conceito de classe, o conceito de relação está, também, vinculado ao conceito de função proposicional, sendo determinado por este. Assim como se definiu a classe, a relação é definida extensionalmente. Desse modo, seja a função $\phi(x, y)$; escrevem os autores que:

> Qualquer função $\phi(x,y)$ determina uma relação R entre x e y. Se considerarmos uma relação como uma classe de pares, a relação determinada por $\phi(x, y)$ é a classe de pares (x, y) para os quais $\phi(x,y)$ é verdadeira. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 27, tradução nossa)[271]

A relação determinada pela função proposicional $\phi(x,y)$ será denotada por $\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$. A função proposicional $\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$, condição para a definição de relação, é uma relação entre pares de termos, x e y, cuja ordem é importante, ou seja, é um par ordenado.

Na definição, a função $\phi(x,y)$ é um par ordenado, e nesse sentido, a função $\phi(x,y)$ é diferente da função $\phi(y,x)$. Por exemplo, seja ϕ a relação de “ser maior que”, então, a função $\phi(x,y)$ quer dizer que “x é maior que y” e a função $\phi(y,x)$ quer dizer que “y é maior que x”, o que não significa a mesma coisa, pois se a primeira é verdadeira, a segunda é falsa, e vice-versa. Assim, dizem os autores que “Tal par tem um sentido, ou seja, o par (x, y) é diferente do par (y, x), a menos que $x = y$. Vamos chamá-lo de um ‘par com sentido’, para distingui-lo da classe consistindo de x e y. Também pode ser chamado de um *par ordenado*[272].”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 27, grifo nosso, tradução nossa).[273] Assim, dizem os autores que:

---

[270] “[...] any function of one variable can be replaced by an equivalent function of the form ‘$x \in \alpha$’.”.

[271] “Any function $\phi(x, y)$ determines a relation R between x and y. If we regard a relation as a class of couples, the relation determined by $\phi(x, y)$ is the class of couples (x, y) for which $\phi(x, y)$ is true.”.

[272] Em Matemática se define par ordenado como uma relação entre dois elementos a e b, tal que a é o primeiro elemento e b é o segundo elemento. (Cf. LIPSHUTZ, 1998, p. 64)

[273] “Such a couple has a sense, i.e. the couple (x, y) is different from the couple (y, x), unless $x = y$. We shall call it a 'couple with sense' to distinguish it from the class consisting of x and y. It may also be called an ordered couple.”.

> A relação, como usaremos a palavra, será entendida em extensão: pode ser considerada como a classe dos pares (x, y) para que a mesma função dada $\psi(x, y)$ seja verdadeira. Sua relação com a função $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ é como que a da classe com sua função determinante. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 211, tradução nossa)[274]

Nesse sentido, escrevem assim os autores que “Podemos considerar uma relação, no sentido em que é necessário para os nossos propósitos, como uma classe de pares; ou seja, o par (x, y) é para ser um da classe de pares que constituem a relação R, se x tem a relação R com y.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 27, tradução nossa)[275]

Para expressar uma relação em geral, e não uma relação em particular, os autores usam uma letra maiúscula do alfabeto, geralmente S ou R. Com isso, podemos expressar a função proposicional $\phi(x,y)$ por “x tem a relação R com y”, que pode ser simbolizado por “xRy”[276] ou “$R(x,y)$”. Notação esta bastante usual nos manuais de Lógica.

Na definição de relação apresentada acima, os autores definem apenas relações entre dois termos, chamada de “relação diádica” ou “relação dual”. Pode-se, entretanto, definir outros tipos de relações, relações de mais de dois termos, chamadas em geral de “relações múltiplas”. Para cada caso, quando as relações entre os termos são especificadas, podemos chamar as relações de “relações triplas” ou “relações triádicas”, “relações quádruplas” ou “relações tetrádicas”, etc. As relações múltiplas são mais usadas na Geometria. Mas como os propósitos iniciais dos autores se centram mais em uma análise algébrica das proposições, eles se limitam mais às relações diádicas, relações que são chamadas por eles apenas de “relações”, para simplificar. “Tais relações [as relações múltiplas] não nos dizem respeito, até que cheguemos à Geometria. Por enquanto, as únicas relações que estamos preocupados são as relações duplas.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 27, tradução nossa)[277]

De modo semelhante ao que foi definido para as classes, para garantir que não haja duas relações diferentes compostas pela mesma classe de pares de objetos, é importante

---

[274] “A relation, as we shall use the word, will be understood in extension: it may be regarded as the class of couples (x,y) for which some given function $\psi(x,y)$ is true. Its relation to the function $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ is just like that of the class to its determining function.”.

[275] “We may regard a relation, in the sense in which it is required for our purposes, as a class of couples; i.e. the couple (x, y) is to be one of the class of couples constituting the relation R if x has the relation R to y.”.

[276] Notemos que a notação “xRy” está mais próxima da linguagem natural que “R (x,y)”, pois xRy são relações do tipo “x é igual a y”, “x é maior que y”, etc., onde R aparece entre x e y, assim como ocorre nas sentenças da linguagem natural.

[277] “Such relations will not concern us until we come to Geometry. For the present, the only relations we are concerned with are dual relations.”.

garantir que uma relação R qualquer seja única. Nesse sentido, sejam duas relações, expressas por $\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$ e $\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)$ e determinadas, respectivamente, pelas funções proposicionais $\phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$; define-se que: as relações $\hat{x}\hat{y}\phi(x,y)$ e $\hat{x}\hat{y}\psi(x,y)$ são as mesmas se, e somente se, as funções proposicionais $\phi(x,y)$ e $\psi(x,y)$ são formalmente equivalentes. Com isso, define-se, então, o conceito de igualdade entre relações, garantindo, assim, a unicidade das relações. “[...] i.e., duas funções de duas variáveis determinam a mesma relação quando, e somente quando, as duas funções são formalmente equivalentes.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 27, tradução nossa)[278]

Se duas funções, ϕ e ψ, de duas variáveis, x e y, determinam a mesma relação, que podemos expressar por xRy, então a função xRy expressa um conjunto de relações formalmente equivalentes de duas variáveis. Assim, semelhantemente ao que dissemos sobre as classes, a função xRy expressa a forma das relações de duas variáveis. Nesse sentido, dizem os autores: “[...] qualquer função de duas variáveis é formalmente equivalente a uma função da *forma xRy*; portanto, em funções extensionais de duas variáveis, a variação das relações pode substituir variação de funções de duas variáveis.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 28, grifo nosso, tradução nossa)[279]

Podemos expressar a equivalência formal entre funções proposicionais, reunidas em torno de um tipo de forma, por exemplo, $x \in \alpha$ e xRy, também, com relações triádicas, tetráticas, etc. Generalizando, podemos utilizar um símbolo para funções com n variáveis para expressar a forma de funções extensionais de n variáveis. Assim, a relação de equivalência entre funções, além de garantir a unicidade das classes e das relações, é, também, condição para expressar a forma geral de uma função proposicional.

Na próxima seção veremos que a função proposicional, além de determinar, como vimos, classes e relações, é, também, condição lógica para as proposições.

2.7. Proposições

Veremos, nesta seção como Whitehead e Russell definem proposição e como as funções proposicionais são condição lógica para as proposições. Em particular, veremos como

---

[278] “[...] i.e., two functions of two variables determine the same relation when, and only when, the two functions are formally equivalent.”.
[279] “[...] any function of two variables is formally equivalent to some function of the form *xRy*; hence, in extensional functions of two variables, variation of relations can replace variation of functions of two variables.”.

a função proposicional gera proposições mais complexas a partir de proposições consideradas mais simples.

Inicialmente Whitehead e Russell caracterizam no *Principia* (1910), no item “Ideias Primitivas e Proposições”, na Seção “A Teoria da Dedução”, o que eles chamam de “proposições elementares”. Dizem os autores que “Por proposição 'elementar' queremos dizer que não envolve quaisquer variáveis ou, em outra linguagem, que não envolvem palavras como ‘todos’, ‘alguns’, ‘o’ ou equivalentes para tais palavras.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, *1, p. 95, tradução nossa). Nesse sentido, a proposição “Isso é vermelho”, é, então, um exemplo de proposição elementar. As letras *p*, *q*, *r*, *s* são usadas para denotar proposições elementares.

Notemos que as ideias primitivas, por serem primitivas, não podem ser decompostas em ideias mais elementares. Sendo assim, não podem ser definidas, apenas explicitadas pelas suas características essenciais, isto é, características que determinam algo enquanto tal e o diferencia de todas as demais coisas. Dizem os autores que “As ideias primitivas são *explicadas* por meio de descrições destinadas a chamar a atenção para salientar para leitor o que é significativo; mas as explicações não constituem definições, porque elas realmente envolvem as ideias que se explicam.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, *1, p. 95, grifo do autor, tradução nossa).[280] Assim, proposições elementares, por serem ideias primitivas, não podem ser definidas pelos lógicos, mas apenas caracterizadas na sua essência.

Para uma exposição mais completa da noção de proposição, consideramos relevante incorporar os acréscimos realizados por Russell[281] na Segunda Edição do *Principia* publicada em 1927, pois tais acréscimos trazem novos elementos sobre a importância da função proposicional para a determinação das proposições, em especial, caracteriza a função de proposição como função de verdade (*truth-function*).

Os acréscimos realizados constam apenas na apresentação da Segunda Edição do *Principia* (1927) intitulada “Introdução à Segunda Edição” e nos apêndices A, B e C. “Pareceu preferível, portanto, afirmar em uma introdução as principais melhorias que parecem desejáveis. Algumas destas são dificilmente abertas para questionamento; outras são, por enquanto, uma questão de opinião.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xiii, tradução

[280] “The primitive ideas are e*xplained* by means of descriptions intended to point out to the reader what is meant; but the explanations do not constitute definitions, because they really involve the ideas they explain.”.

[281] Segundo Bernard Linsky (cf. 2003, p. 375), as apresentações e os apêndices desta edição são propriamente autoria de Russell, assim como o foram na primeira edição do *Principia* (1910), apesar dos detalhes técnicos terem sido contribuição expressiva de Whitehead.

nossa).[282] Observa Russell, também no início desta apresentação, que embora tenha havido acréscimos, o texto como um todo da Primeira Edição do *Principia* (1910) conserva-se inalterado nesta Segunda Edição, exceto erros de impressão e demais erros menores. “A principal razão para esta decisão [de se manter o texto da Primeira Edição inalterado] é que qualquer alteração das proposições teria implicado alteração das referências, o que teria significado um grande trabalho.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xiii, tradução nossa).[283] A Segunda Edição do *Principia* (1927) de nossa consulta é a que foi reimpressa e publicada em 1963.

Podemos dizer que esses acréscimos são resultados, principalmente, do impacto das ideias de Wittgenstein sobre o pensamento de Russell. Comenta Alasdair Urquhart que “Na segunda edição do *Principia Mathematica*, Russell também (como Ramsey, fortemente influenciado pelo *Tractatus* por Wittgenstein) tentou uma reformulação do PM [*Principia Mathematica*] em termos extensionais [...]”. (URQUHART, 2003, p. 303, tradução nossa).[284] Sobre o impacto das ideias do filósofo, escreve Russell, mais tarde, em *Meu Desenvolvimento Filosófico* (1959): “As doutrinas de Wittgenstein influenciaram-me profundamente. Cheguei a pensar que em muitos pontos fui longe demais ao concordar com ele, mas devo primeiramente explicar quais eram os pontos em questão.”. (RUSSELL, 1959, p. 112, tradução nossa).[285] Nesse sentido, ainda diz ele: “O impacto de Wittgenstein sobre mim deu-se em duas etapas: a primeira antes da Primeira Guerra Mundial; a segunda, imediatamente após a guerra, quando ele me enviou o manuscrito de seu *Tractatus*. Suas doutrinas posteriores, como aparecem em seu *Philosophical Investigations*, não me influenciaram como um todo.”. (RUSSELL, 1959, p. 112, tradução nossa)[286]

Logo no início da Introdução à Segunda Edição, Russell faz referência a Wittgenstein: “Há outro percurso, indicado por Wittgenstein por razões filosóficas. Isto é, assumir que as funções de proposição são sempre função de verdade, e que a função só pode ocorrer em uma

---

[282] “It seemed preferable, therefore, to state in an introduction the main improvements which appear desirable. Some of these are scarcely open to question; others are, as yet, a matter of opinion.”.
[283] “The chief reason for this decision is that any alteration of the propositions would have entailed alteration of the references, which would have meant a very great labour.”.
[284] “In the second edition of *Principia Mathematica*, Russell too (like Ramsey, strongly influenced by Wittgenstein’s *Tractatus*) attempted a reworking of PM in extensional terms [...]”.
[285] “Wittgenstein's doctrines influenced me profoundly. I have come to think that on many points I went too far in agreeing with him, but I must first explain what were the points at issue.”.
[286] “Wittgenstein's impact upon me came in two waves: the first of these was before the First World War; the second was immediately after the War when he sent me the manuscript of his *Tractatus*. His later doctrines, as they appear in his *Philosophical Investigations*, have not influenced me at all.”.

proposição por meio de seus valores. […] Como isso é possível, é mostrado no *Tractatus Logico-Philosophicus*.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xiv, tradução nossa)[287]. No Apêndice C há, também, a seguinte referência ao filósofo: “A notação para funções é uma ilustração do princípio de Wittgenstein, que um símbolo lógico deve, em certos aspectos formais, assemelhar-se ao que ele simboliza.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 664, tradução nossa)[288]

Não é nosso propósito aqui analisar quais foram esses novos acréscimos na Introdução à Segunda Edição e, também, seu impacto no sistema lógico da Primeira Edição do *Principia* (1910). Apenas destacaremos algumas dessas alterações na medida em que elas se tornarem necessárias para nossa exposição.

Na Introdução à Segunda Edição, Russell classifica as proposições em dois tipos: as proposições atômicas e as proposições moleculares. Proposições atômicas podem ser definidas negativamente ou positivamente. No caso da primeira definição, escrevem os autores na Introdução à Segunda Edição do *Principia* (1927):

> Proposições atômicas podem ser definidas negativamente como proposições que não contém partes que são proposições, e não contendo as noções “todo” ou “algum”. Assim, “este é vermelho”, “este é mais cedo do que aquilo” são proposições atômicas. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xv, tradução nossa)[289]

Assim, proposições atômicas não são unidades decomponíveis em unidades menores que possam ser proposições; assim, “este é vermelho”, por exemplo, é uma proposição atômica, pois não pode ser decomposta em proposições menores. Nesse sentido, proposições atômicas não são, na visão dos autores, proposições como, por exemplo, “Todos os homens são mortais” ou “Alguns animais são carnívoros”, cujas noções de “todo” ou “algum” envolvem relações entre classes, pois tais proposições podem ser decompostas em uma proposição mais simples, as proposições “Homens são mortais” e “Animais são carnívoros”, respectivamente.

---

[287] “There is another course, recommended by Wittgenstein for philosophical reasons. This is to assume that functions of proposition are always truth-function, and that a function can only occur in a proposition through its values. [...] How this is possible is shown in *Tractatus Logico-Philosophicus*.”.

[288] “The notation for functions is an illustration of Wittgenstein's principle, that a logical symbol must, in certain formal respects, resemble what it symbolizes.”.

[289] “Atomic propositions may be defined negatively as propositions containing no parts that are propositions, and not containing the notions ‘all’ or ‘some’. Thus ‘this is red’, ‘this is earlier than that’, are atomic propositions.”.

No caso do segundo tipo de definição de proposição atômica, isto é, de uma definição positiva, dizem os autores:

> Proposições atômicas também podem ser definidas positivamente - e este é o melhor caminho - como proposições dos seguintes tipos: $R_1 (x)$, que significa "x tem o predicado R_1"; $R_2 (x, y)$ [ou xR_2y], que significa, que significa "x tem a relação R_2 (em intensão) com y"; $R_3 (x, y, z)$, que significa "x, y, z têm a relação triádica R_3 (em intensão)"; $R_4 (x, y, z, w)$, ou seja, "x, y, z, w, tem a relação tetrádica R_4 (em intenção)", e assim por diante *ad infinitum*, ou pelo menos tanto quanto possível. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xv, tradução nossa)[290]

Esta definição estabelece que as proposições atômicas resultam dos seguintes de tipos de funções proposicionais, $R_1 (x)$, $R_2 (x, y)$, $R_3 (x, y, z)$, $R_4 (x, y, z, w)$, etc., que, conforme a substituição das variáveis x, y, z, w, etc., por valores constantes a, b, c, d, etc, temos, respectivamente, os seguintes tipos de proposições $R_1 (a)$, $R_2 (a,b)$, $R_3 (a, b, c)$, $R_4 (a, b, c, d)$, etc. Cada uma destes tipos de proposições resultantes correspondem a tipos de funções, funções com uma, duas, três ou mais variáveis.

Os x's são chamados pelos autores de "indivíduos" ou "particulares" e os R's são chamados de "universais". Nesse sentido, dizem os autores "Termos que podem ocorrer em qualquer tipo de proposição atômica são chamados de 'indivíduos' ou 'particulares'; termos que ocorrem como os R's ocorrem são chamados de 'universais'.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xix, tradução nossa).[291] Desse modo, "Um 'indivíduo' é algo que pode ser objeto de uma proposição atômica.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xix, tradução nossa)[292]

As proposições atômicas além de serem determinadas pelas funções $R_1 (x)$, $R_2 (x, y)$, $R_3 (x, y, z)$, $R_4 (x, y, z, w)$, etc., sendo expressas, conforme a determinação das variáveis na função, por $R_1 (a)$, $R_2 (a,b)$, $R_3 (a, b, c)$, $R_4 (a, b, c, d)$, etc., elas podem ser expressas, também, pelas letras minúsculas do alfabeto latino: p, q, r, s, t. Podemos dizer, por exemplo, que $p = R_1 (a)$, $q = R_2 (a,b)$, $r = R_3 (a, b, c)$, $t = R_4 (a, b, c, d)$, etc. Genericamente, temos: $p = f_1 (x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $q = f_2 (x_1, x_2, \ldots x_n)$.

[290] "Atomic propositions may also be defined positively - and this is the better course - as propositions of the following sorts: $R_1(x)$, meaning 'x has the predicate R_1'; $R_2(x,y)$ [or xR_2y], meaning 'x has the relation R_2 (in intension) to y'; $R_3(x, y, z)$, meaning 'x,y,z have the triadic relation R_3 (in intension)'; $R_4 (x,y,z,w)$, meaning 'x,y,z,w, have the tetradic relation R_4 (in intension); and so on *ad infinitum*, or at any rate as long as possible.".

[291] "Terms which can occur in any form of atomic proposition are called 'individuals' or 'particulars'; terms which occur as the R's occur are called 'universals'.".

[292] "An 'individual' is anything that can be subject of an atomic proposition.".

Já as proposições moleculares são definidas como contendo em suas partes as proposições atômicas, mas não se limitando a elas, pois adquirem novos elementos. Nesse sentido, sejam *p*, *q*, *r*, *s*, *t*, proposições atômicas; podemos introduzir, como fazem os autores, uma ideia primitiva, a regra *p* | *q*, que se lê: "*p* é incompatível com *q*", cujo significado é: *p* | *q* é verdadeiro se e somente se ou *p* ou *q* ou ambos forem falsos, ou seja, é verdadeiro se e somente se pelo menos um deles, *p* ou *q*, for falso. Pode-se definir, a partir de *p* | *q*, outras proposições, as proposições compostas pela negação, soma lógica ou disjunção, a conjunção, ou implicação. Exemplos de definição: $\sim p \,.\!=.\, p \mid p$ (Df.), $p \supset q \,.\!=.\, p \mid \sim q$ (Df.).

Assim, temos um conjunto de proposições geradas pela regra *p* | *q*, por exemplo, as proposições $\sim p$, $p \supset q$, que não se limitam às proposições atômicas *p* e *q*. Esse conjunto de proposições mais abrangentes são as proposições moleculares. Sobre isso, dizem os autores: "Essa regra gera um conjunto de novas proposições para fora do conjunto original de proposições atômicas. Todas as proposições assim geradas (excluindo as proposições atômicas originais) serão chamados de 'proposições moleculares'.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xvii, tradução nossa)[293]

O significado da barra "|" é conhecido atualmente em Lógica por "conectivo de Sheffer" ou "barra de Sheffer", nome que se refere ao lógico Henry Sheffer (1882 — 1964). Sheffer provou, em 1903, que podia definir, como pudemos observar acima, expressões apenas com uma operação binária primitiva, onde todas as outras seriam derivadas dela. Russell, fiel como o é às suas referências, faz a seguinte menção de reconhecimento ao trabalho de Scheffer: "O aperfeiçoamento mais definitivo resultante do trabalho em lógica matemática durante os últimos quatorze anos é a substituição, na Parte I, Seção A, de um indefinível '*p* e *q* são incompatíveis' (ou, em alternativamente, '*p* e *q* são ambos falso') pelos dois indefiníveis 'não-*p*' e '*p* ou *q*'. Isto é devido ao Dr. H. M. Sheffer.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xii, tradução nossa)[294]

A junção das proposições atômicas e moleculares forma o que os autores chamam de "proposições elementares". "Proposições atômicas e moleculares juntas são 'proposições

[293] "This rule generates assemblage of new propositions out of the original assemblage of atomic propositions. All the propositions so generated (excluding the original atomic propositions) will be called 'molecular propositions'.".
[294] "The most definite improvement resulting from work in mathematical logic during the past fourteen years is the substitution, in Part I, Section A, of the one indefinable '*p* and *q* incompatible' (or, alternatively, '*p* and *q* are both false') for the two indefinable 'not-*p*' and '*p* or *q*'. This is due to Dr H. M. Sheffer.".

elementares'.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xvii, tradução nossa)[295]. Nesse sentido, dizem os autores que "[...] as proposições elementares são proposições atômicas, juntamente com tudo o que pode ser gerado a partir delas por meio da barra aplicada a qualquer número finito de vezes. Esta é uma coleção definida de proposições.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xvii, grifo nosso, tradução nossa).[296] Assim, as proposições elementares são as proposições geradas a partir de uma aplicação finita de barras sobre as proposições atômicas.

Essa aplicação de regras é expressa pelos autores por uma certa função, a função proposicional F (p, q, r, …), chamada pelos autores de "função de proposições". Ela é chamada de função de proposição, pois seus argumentos são proposições.

> As leis da lógica, no que concerne às proposições elementares, são todas as afirmações que resultam de que, quaisquer que sejam as proposições elementares p, q, r, ..., uma certa função F (p, q, r, ...), cujos valores são proposições moleculares, construídas através da *barra*, é sempre verdadeira. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. xviii, grifo nosso, tradução nossa)[297]

Isso quer dizer que a função de proposições F (p, q, r, …) é uma função de verdade construída a partir do significado da barra. Por exemplo, a proposição molecular $\sim p$ é construída através da proposição $p \mid p$, e a proposição molecular $p \supset q$ é construída a partir da proposição $p \mid \sim q$. A função F (p, q, r, ...) expressa, então, a conexão entre as proposições gerando novas conexões a partir da função barra, dada previamente.

Podemos observar, então, que as funções de proposições são funções de verdade, pois "[...] as funções particulares de proposições que teremos ocasião de construir ou a considerar explicitamente são todas as funções de verdade.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 8, tradução nossa).[298] Desse modo, a função de proposição $f(p)$, por exemplo, pode ser definida do seguinte modo: "Podemos chamar uma função $f(p)$ uma 'função de verdade' quando o seu argumento p é uma proposição, e o valor de verdade de $f(p)$ depende apenas do valor de verdade de p.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 8, tradução nossa)[299]. Dizem os autores

[295] "Atomic and molecular propositions together are 'elementary propositions'.".
[296] "[...] elementary propositions are atomic propositions together with all that can be generated from them by means of the stroke applied any finite number of times. This is a definite assemblage of propositions.".
[297] "The laws of logic, so far as elementary propositions are concerned, are all assertions to the effect that, whatever elementary propositions p, q, r, ... may be, a certain function F (p, q, r, ...), whose values are molecular propositions, built up means of the stroke, is always true.".
[298] "[...] the particular functions of propositions which we shall have occasion to construct or to consider explicitly are all truth-functions.".
[299] "We may call a function $f(p)$ a 'truth-function' when its argument p is a proposition, and the truth-value of $f(p)$ depends only upon the truth-value of p.".

que “Este fato está intimamente ligado com uma característica da matemática, a saber, que a matemática está sempre preocupada com extensões em vez de intenções.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 8, tradução nossa)[300]

Ademais, não apenas a barra, mas também a negação, a conjunção, disjunção ou implicação são funções de proposições. Os autores chamam a negação de “função contraditória”, a soma lógica de “função disjuntiva”, o produto lógico de “função conjuntiva”, e a implicação lógica de “função implicativa”. “Elas são (1) a Função Contraditória, (2) a Soma Lógica ou Função Disjuntiva, (3) o Produto Lógico ou Função Conjuntiva, (4) a Função Implicativa.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 6, tradução nossa)[301]

“A função contraditória com o argumento *p*, onde *p* é qualquer proposição, é a proposição que é a contraditória de *p*, ou seja, a proposição afirmando que *p* não é verdade.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 6, tradução nossa)[302]. Então, para o *p* verdadeiro, a função contraditória associa o *p* falso, e vice-versa. A notação é simbolizada por “~*p*”. “Esta [a função contraditória] é denotada por ~*p*. Assim ~*p* é a função contraditória com *p* como argumento e significa a negação da proposição *p*. Será também referida como a proposição não-*p*. Assim ~*p* significa não-*p*, que significa a negação de *p*.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 6, tradução nossa)[303]

“A soma lógica é uma função proposicional com dois argumentos, *p* e *q*, é a proposição afirmando *p* ou *q* disjuntivamente, isto é, afirmando que, pelo menos uma das duas, *p* e *q*, é verdadeiro.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 6, tradução nossa).[304] Em outras palavras, a soma lógica ou a função disjuntiva associa os possíveis valores de verdade de *p* e *q* à condição disjuntiva de que ao menos a proposição *p* ou a proposição *q* é verdadeira, podendo ocorrer que ambas podem ser verdadeiras, sendo falsa no caso em que ambas são falsas. Essa função é simbolizada por “*p* v *q*” (lê-se: “*p* ou *q*”).. “Esta [a soma lógica] é denotada por *p* v *q*. Assim *p* v *q* é a soma lógica com *p* e *q* como argumentos. É também

[300] “This fact is closely connected with a characteristic of mathematics, namely, that mathematics is always concerned with extensions rather than intesions.”.
[301] “They are (1) the Contradictory Function, (2) the Logical Sum, or Disjunctive Function, (3) the Logical Product, or Conjunctive Function, (4) the Implicative Function.”.
[302] “The Contradictory Function with argument *p*, where *p* is any proposition, is the proposition which is the contradictory of *p*, that is, the proposition asserting that *p* is not true.”.
[303] “This is denoted by ~*p*. Thus ~p is the contradictory function with p as argument and means the negation of the proposition p. It will also be referred to as the proposition not-*p*. Thus ~*p* means not-*p*, which means the negation of *p*.”.
[304] “The Logical Sum is a propositional function with two arguments *p* and *q* and is the proposition asserting *p* or *q* disjunctively, that is, asserting that at least one of the two *p* and *q* is true.”.

chamada a soma lógica de *p* e *q*. Por consequência, *p* v *q* significa que pelo menos *p* ou *q* é verdadeira, não excluindo o caso em que ambos são verdadeiros.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 6, tradução nossa)[305]

“O produto lógico é uma função proposicional com dois argumentos, *p* e *q*, e é a proposição afirmando *p* e *q* conjuntivamente, ou seja, afirmando que ambos *p* e *q* são verdadeiras.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 6, tradução nossa).[306] Em outras palavras, o produto lógico ou a função conjuntiva associa os possíveis valores de verdade das proposições *p* e *q* à condição conjuntiva de que as proposições *p* e *q* são ambas verdadeiras, sendo que o produto lógico é falso quando ao menos uma das proposições é falsa, inclusive o produto lógico é falso quando ambas as proposições são falsas. O produto lógico é simbolizado por “*p* **.** *q*” (lê-se: *p* e *q*).

“A função implicativa é a função proposicional com dois argumentos, *p* e *q*, e é a proposição que não-*p* ou *q* é verdadeira, ou seja, é a proposição ~ *p* v *q*.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7, tradução nossa).[307] A função implicativa associa os valores de verdade de ~ *p* e *q* à condição de que ao menos uma delas é verdadeira, podendo ocorrer que ambas sejam verdadeiras. Se ~ *p* e *q* são ambas falsas, isto é, se *p* é verdadeira e *q* é falsa, então a implicação é falsa. A implicação pressupõe, então, as funções contraditórias e disjuntivas. “Neste sentido, a proposição ~ *p* v *q* será citada como declarando que *p* implica *q*.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7, tradução nossa).[308] Mas, tendo em vista a importância da implicação para a lógica, simboliza-se a implicação com um símbolo especial. “A ideia contida nesta função proposicional é tão importante que requer um simbolismo que com simplicidade direta representa a proposição como conectando *p* e *q* sem a intervenção de ~ *p*.” (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7, tradução nossa).[309] Assim, “O símbolo empregado por ‘*p* implica *q*’, i.e, por ‘~ *p* v *q*’ é ‘*p* ⊃ *q*’. Este símbolo pode também ser lido ‘se *p*, então *q*’.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7, tradução nossa)[310]

---

[305] “This is denoted by *p* v *q*. Thus *p* v *q* is the logical sum with p and q as arguments. It is also called the logical sum of *p* and *q*. Accordingly *p* v *q* means that at least *p* or *q* is true, not excluding the case in which both are true.”.

[306] “The Logical Product is a propositional function with two arguments *p* and *q*, and is the proposition asserting *p* and *q* conjunctively, that is, asserting that both *p* and *q* are true.”.

[307] “The Implicative Function is a propositional function with two arguments *p* and *q*, and is the proposition that either not-*p* or *q* is true, that is, it is the proposition ~ *p* v *q*.”.

[308] “In this sense the proposition ~ *p* v *q* will be quoted as stating that *p* implies *q*.”.

[309] “The idea contained in this propositional function is so important that it requires a symbolism which with direct simplicity represents the proposition as connecting *p* and *q* without the intervention of ~ *p*.”

[310] “The symbol employed for ‘*p* implies *q*’ i.e. for ‘~ *p* v *q*’ is ‘*p* ⊃ *q*’. This symbol may also be read ‘if *p*, then *q*’.”

Em especial, podemos encontrar a implicação, composta pela ideia "se, então", associada ao processo de inferência. Sobre a inferência, exemplificam os autores: "O processo de inferência é como o seguinte: a proposição '*p*' é afirmada, e uma proposição '*p* implica *q*' é afirmada, e então como sequência a proposição '*q*' é afirmado.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7, tradução nossa)[311]

O processo de inferência ocorre em um conjunto e sequência de proposições, tal que se extrai uma proposição final de proposições iniciais. As proposições finais são chamadas de "premissas" e a proposição final é chamada de "conclusão". Para que a inferência seja correta é necessário que a relação entre a premissa e a conclusão seja de tal forma que se a premissa for verdadeira a conclusão é necessariamente verdadeira. A relação entre a premissa e a conclusão é expressa pelo símbolo " $\vdash$", chamado pelos autores de "sinal de asserção", relação a qual expressa o processo de inferência.

Desse modo, a inferência $p, p \supset q \vdash q$, exemplificada acima como um processo de inferência, é diferente da implicação $p \supset q$. Em $p \supset q$ temos uma relação binária entre proposições, sem que haja relação de inferência entre p e q, em $p \supset q \vdash q$ a relação de implicação envolve uma relação de inferência entre elas. A primeira implicação recebe o nome de "implicação material" ou simplesmente "implicação" e a segunda recebe o nome de "implicação formal". Um discurso que envolva a implicação formal é chamado em lógica de "argumento".

Nesse sentido, argumento é um conjunto finito de proposições tal que se conclui uma proposição de outras proposições, as premissas. Um argumento baseado em uma inferência correta, é um argumento válido. Se a lógica é, como vimos na Seção 1, o estudo dos vários tipos gerais de dedução, ela vai se ocupar com os tipos gerais de argumentos válidos. Não analisaremos estes argumentos aqui, mas destacamos sua importância para a Lógica.

A partir da equivalência material, pode-se definir o conceito de equivalência, pois a "Equivalência em sua origem é apenas implicação mútua [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7, tradução nossa)[312]. Então, definem os autores: "Duas proposições p e q são ditas ser 'equivalentes' quando p implica q e q implica p. Esta relação entre p e q é denotada por '$p \equiv q$'. Então, '$p \equiv q$' significa '$(p \supset q) \,.\, (q \supset p)$'." (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 7,

[311] "The process of inference is as follows: a proposition '*p*' is asserted, and a proposition '*p* implies *q*' is asserted, and then as a sequel the proposition '*q*' is asserted.".
[312] "Equivalence in its origin is merely mutual implication [...]".

tradução nossa).[313] De outro modo, duas proposições *p* e *q* são equivalentes quando elas têm o mesmo valor de verdade, isto é, se ambas são verdadeiras ou se ambas são falsas. Nesse sentido, dizem, ainda, os autores: "[...] uma proposição *p* ocorre em qualquer proposição *f* (*p*), com a qual teremos a oportunidade de lidar, o valor de verdade de *f* (*p*) dependerá, não da proposição particular *p*, mas apenas de seu valor de verdade; isto é, se $p = q$, teremos $f\,(p) = f\,(q)$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 8, tradução nossa)[314]

De modo semelhante à implicação formal, podemos ter, também, a equivalência formal, isto é, podemos ter equivalência que envolve uma implicação formal mútua, por exemplo, entre tipos gerais de argumentos. As equivalências entre proposições e argumentos são fundamentais para a Lógica, pois permitem ao lógico criar classes de equivalência entre proposições e argumentos, tomando-as uma pelas outras para melhor explicitar o raciocínio.

Ademais, podemos dizer que se as funções proposicionais são fundamentais para gerar proposições a partir de outras proposições, elas são, também, fundamentais para compreendermos as propriedades análogas que há entre as classes e relações e as proposições moleculares. "Ambas, classes e relações, têm propriedades análogas à maioria dessas proposições que resultam da negação e da soma lógica.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 27, tradução nossa)[315]

No caso da negação, definem os autores do seguinte modo: "[...] a *negação* da classe α é a classe de termos de tipo adequado que não são membros dela, ou seja, a classe $\hat{x}\,(x \sim\in \alpha)$. Chamamos isso de classe "-α" (leia-se "não-α") [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 27, grifo dos autores, tradução nossa)[316]. A definição é, de acordo com a notação, assim expressa: $- \alpha = \hat{x}\,(x \sim \in \alpha)$ (Df.), tal que $x \in -\alpha \,.\equiv.\, x \sim \in \alpha$ (Df.). Podemos dizer, então, que a negação da classe α, expressa por $-\alpha$, é o complemento de α; desse modo, a negação de *a* é tudo que não é α. Notemos que a classe $-\alpha$, expressa pela função proposicional $x \in -\alpha$, é equivalente à proposição $\sim p$.

[313] "Two propositions *p* and *q* are said to be 'equivalent' when *p* implies *q* and *q* implies *p*. This relation between p and q is denoted by '$p \equiv q$'. Thus '$p \equiv q$' stands for '$(p \supset q) \,.\, (q \supset p)$'.".

[314] "[...] a proposition *p* occurs in any proposition $f(p)$ which we shall ever have occasion to deal with, the truth-value of $f(p)$ will depend, not upon the particular proposition *p*, but only upon its truth-value; i.e. if $p = q$, we shall have $f(p) = f(q)$."

[315] "Both classes and relations have properties analogous to most of those of propositions that result from negation and the logical sum.".

[316] "[...] the negation of class α is the class of terms of suitable type which are not members of it, i.e. the class $\hat{x}(x \sim\in \alpha)$. We call this class "- α" (read "not - α") [...]".

Já "[...] a *soma lógica* de duas classes α e β é a classe de termos que são membros de um ou de outro; nós denotamos por $\alpha \cup \beta$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 27, grifo dos autores, tradução nossa)[317]. A definição é, de acordo com a notação, assim expressa: $\alpha \cup \beta = \hat{x}$ $(x \in \alpha \,.\, \mathrm{v} \,.\, x \in \beta)$ (Df.), tal que $x \in \alpha \cup \beta \,.\equiv.\, x \in \alpha \,.\, \mathrm{v} \,.\, x \in \beta$, isto é, dizer que "$x$ é um membro da soma lógica de α e β" é equivalente a dizer que "x é um membro de α ou x é um membro de β". Assim, a soma lógica de duas classes, $\alpha \cup \beta$, é definida pelas funções proposicionais $x \in \alpha$ e $x \in \beta$, equivalente a $p \mathrm{~v~} q$.

Semelhantemente, definem os autores que "O *produto lógico* de duas classes α e β é a parte comum, ou seja, a classe de termos que são membros de ambos. Este é representado por $\alpha \cap \beta$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 27, grifo dos autores, tradução nossa)[318]. A definição é, de acordo com a notação, assim expressa: $\alpha \cap \beta = \hat{x}$ $(x \in \alpha .\, x \in \beta)$ (Df.), tal que $x \in \alpha \cap \beta \,.\equiv.\, x \in \alpha \,.\, x \in \beta$, isto é, dizer que "$x$ é um membro do produto lógico de α e β" é equivalente a dizer que "x é um membro de α e x é um membro de β". Assim, o produto lógico de duas classes $\alpha \cap \beta$, definido pelas funções proposicionais as $x \in \alpha$ e $x \in \beta$, é equivalente a $p \,.\, q$.

Já a inclusão é assim definida: "Uma classe α é dita estar incluída ou contida em uma classe β se todos os membros de α são membros da β, i. e., se $x \in \alpha \,.\supset_x.\, x \in \beta$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 28, tradução nossa).[319] De acordo com a notação, a definição de inclusão é assim expressa: $\alpha \subset \beta = x \in \alpha \,.\supset_x.\, x \in \beta$ (Df.), tal que se $x \in \alpha \subset \beta \,.\equiv.\, x \in \alpha \subset x \in \beta$, isto é, dizer que "$x$ é um membro da implicação de α e β" é equivalente a dizer que "se x é um membro de α, então x é um membro de β". Assim, a inclusão de duas classes, expressa por $\alpha \subset \beta$, definida pelas funções proposicionais $x \in \alpha$ e $x \in \beta$, é equivalente a $p \supset q$.

Assim, podemos observar que a Lógica Simbólica é constituída de duas partes principais que podem se coordenar: a teoria das classes e das relações, por um lado, e a teoria das proposições, por outro. A teoria das proposições pode ser construída sem o uso da teoria das classes e das relações, mas estas não podem ser construídas sem aquela. Nesse sentido, dizem os autores que

---

[317] "[...] the logical sum of two classes α and β is the class of terms which are members of either; we denote it by $\alpha \cup \beta$.".

[318] "The logical product of two classes α and β is their common part, i.e. the class of terms which are members of both. This is represented by $\alpha \cap \beta$.".

[319] "A class α is said to be included or contained in a class β if all members of α are members of β, i. e., se $x \in \alpha \,.\supset_x.\, x \in \beta$.".

> [...] na teoria das classes deduzimos uma proposição de outra por meio de princípios que pertencem à teoria das proposições, enquanto que na teoria das proposições em nenhuma parte exigimos a teoria de classes. Assim, em um sistema dedutivo, a teoria das proposições necessariamente precede a teoria de classes. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1963, p. 90, tradução nossa)[320]

Portanto, podemos dizer que a teoria das proposições antecede, logicamente, a teoria das classes e das relações, e pode-se dizer, também, que as proposições, em especial as proposições atômicas, são as unidades lógicas mais elementares.

A busca pelas unidades elementares do mundo através da análise da linguagem aparece nos textos reunidos sob o livro intitulado "A Filosofia do Atomismo Lógico" (1918) (*The Philosophy of Logical Atomism*); textos correspondentes às oito conferências pronunciadas por Russell em Londres, na Gordon Square, em 1918. Nestes textos são marcantes a influência das ideias de Wittgenstein do *Tractatus Logico-Philosophicus* (1921) no pensamento de Russell. Influência que teve início em 1911, ano do primeiro contato entre ambos, logo após a publicação da Primeira Edição do *Principia* (1910), quando Wittgenstein procura Russell em Cambridge. É sobre a Filosofia do Atomismo Lógico que veremos na próxima seção.

2.8. O Atomismo Lógico

Faremos, nesta seção, uma breve apresentação sobre a importância da função proposicional para a Filosofia do Atomismo Lógico. Veremos como a função proposicional se constitui, no interior desta filosofia, como um esquema que expressa a decomposição de um enunciado complexo em partes constituintes mais elementares que os descrevem.

Publicado em 1918, *A Filosofia do Atomismo Lógico* antecede a Segunda Edição do *Principia* que, como sabemos, foi publicada quase dez anos depois, em 1927. Russell inicia o primeiro texto de sua conferência proferida em 1918 em Londres, fazendo referência às ideias de Wittgenstein: "O que se segue [é o texto] de um curso de oito conferências pronunciadas em Londres, nos primeiros meses de 1918, [que] diz respeito, de modo muito amplo, à explicação de certas ideias que aprendi com meu amigo e anteriormente meu aluno Ludwig Wittgenstein.". (RUSSELL, 1992, p. 53).

---

[320] "[…] in the theory of classes we deduce one proposition from another by means of principles belonging to the theory of propositions, whereas in the theory of propositions we nowhere require the theory of classes. Hence, in a deductive system, the theory of propositions necessarily precedes the theory of classes.".

Mas, mesmo reconhecendo no filósofo a origem de suas ideias, Russell enfatiza que as ideias expostas são opiniões mais suas que propriamente do filósofo. “As coisas que vou dizer nestas conferências são principalmente minhas próprias opiniões pessoais e não reivindico que sejam mais do que isso.”. (RUSSELL, 1992, p. 53)

A Filosofia do Atomismo Lógico proposto por Russell recebe esta designação, pois advém da intenção de se chegar, através da análise lógica, ao que é mais simples logicamente, isto é, ao que ele chama por “átomo lógico”. Sobre isso, diz o autor: “A razão pela qual chamo minha doutrina de atomismo *lógico* é porque os átomos aos quais desejo chegar como a espécie de último resíduo da análise são átomos lógicos e não átomos físicos.”. (RUSSELL, 1992, p. 53, grifo do autor).

Como indica o próprio Russell (cf. p. 118) em *Meu Desenvolvimento Filosófico* (1959) o princípio de atomicidade é enunciado por Wittgenstein no aforismo 2.0201 do *Tractatus* (1921). Este aforismo diz o seguinte: “Todo enunciado sobre complexos pode-se decompor em um enunciado sobre as partes constituintes desses complexos e nas proposições que os descrevem.”. Diz ainda Russell que

> Este princípio pode ser visto como encarnando a crença na análise. Na época em que Wittgenstein escreveu o *Tractatus*, ele acreditava […] que o mundo consiste em quantidades simples de várias propriedades e relações. As propriedades simples e as relações simples de simples são “fatos atômicos” e as asserções delas são “proposições atômicas”. (RUSSELL, 1959, p. 118, tradução nossa)[321]

No entender de Russell (1992, p. 55), a análise lógica deve buscar a determinação do significado lógico das proposições, isto é, o objetivo da análise lógica deve consistir em passar da vagueza dos enunciados para a sua precisão e clareza. Por exemplo, em um simples enunciado aparentemente simples e óbvio como “Existe um número de pessoas neste recinto, neste momento”, quando nos perguntamos, por exemplo, pelo significado de “existe”, pela quantidade indicada pela expressão “um número de pessoas”, e qual a indicação espacial e temporal de, respectivamente, “neste recinto” e “neste momento”, percebemos que o que nos pareceria, aparentemente, tão óbvio, tem um grau de vagueza que não havíamos notado em um primeiro momento.

[321] “This principle may be taken as embodying the belief in analysis. At the time when Wittgenstein wrote the *Tractatus* he believed […] that the world consists of a number of simples with various properties and relations. The simple properties and simple relations of simples are ‘atomic facts’ and the assertions of them are 'atomic propositions'.”.

Nesse sentido, Russell entende que uma verdadeira filosofia deve abandonar o campo da vagueza para o campo da precisão e da clareza através da análise lógica dos enunciados. “O processo do sadio filosofar consiste, em minha mente, principalmente em passar daquelas coisas óbvas, vagas, definida, que verificamos através da reflexão e da análise estar envolvida na coisa vaga [...]”. (RUSSELL, 1992, p. 55). Assim, a Filosofia do Atomismo Lógico deve, através da análise lógica, buscar a precisão e a clareza dos enunciados; para isso ela deve chegar ao que é mais simples logicamente, isto é, ao atomismo lógico.

Russell sugere que essas proposições simples, precisas e claras, são verdades que podem ser premissas lógicas. “As proposições precisas as quais chegamos podem ser *logicamente* premissas para o sistema que construímos a partir delas, mas elas não são premissas para a teoria do conhecimento.”. (RUSSELL, 1992, p. 55, grifo do autor). A primeira verdade que Russell chama por “verdade evidente” é a de que o mundo contém fatos. Diz ele: “[...] o mundo contém *fatos*, que são os que são, não importando o que decidimos pensar acerca deles, e que existem também *crenças*, que se referem aos fatos e que por referência aos fatos são ou verdadeiras ou falsas.”. (RUSSELL, 1992, p. 56, grifo do autor).

Entende o autor que essa verdade é evidente por si mesma, pois todos podem notar, independente do que pensamos ou independe de qualquer premissa adotada por uma teoria do conhecimento. Ao contrário da verdade evidente de que o mundo contém fatos, as premissas da teoria do conhecimento variam de homem para homem. Observa Russell, que não há um consenso entre filósofos da teoria do conhecimento assim como há um consenso sobre a premissa de que o mundo contém fatos. Isso significa que a premissa do Filosofia do Atomismo Lógico é algo objetivo, o que dispensa a importância do sujeito do conhecimento, tendo em vista o grau de subjetividade em torno das premissas de uma teoria do conhecimento.

Assim, torna-se importante perceber a distinção entre o que conhecemos (o fato) e o que é deduzido a partir de uma teoria (do conhecimento) já completa. “É importante perceber a diferença entre aquilo do qual nosso conhecimento é, de fato, derivado e aquilo do qual o deduziríamos se já tivéssemos conhecimento completo. Estas são coisas bastante diferentes.”. (RUSSELL, 1992, p. 55). Sendo assim, “É importante observar que os fatos pertencem ao mundo objetivo. Não são criados por nossos pensamentos ou crenças […].”. (RUSSELL, 1992, p. 57). De modo semelhante, diz Wittgenstein, no aforismo 4.1121 do *Tractatus* (1921), que o grau de subjetividade da Teoria do Conhecimento a coloca próxima da Filosofia da Psicologia: “A teoria do conhecimento é a filosofia da psicologia.”.

Além de o mundo conter fatos, estes são expressos por uma sentença que diz que uma coisa tem uma propriedade ou que uma coisa tem uma relação com outra coisa. Diz Russell: “[...] aquelas coisas que chamo fatos, que são as espécies de coisas que expressamos por uma sentença, e que estas, assim como as cadeiras e mesas particulares, fazem parte do mundo real.”. (RUSSELL, 1992, p. 57). Ainda diz ele: “Expressamos um fato, por exemplo, quando dizemos que uma certa coisa tem uma determinada propriedade, ou que tem uma certa relação com outra coisa; mas a coisa que tem a propriedade ou a relação não é o que chamo um ‘fato’”. (RUSSELL, 1992, p. 57)

O fato mais simples que se pode chegar pela análise lógica são fatos em que há uma qualidade que se atribui a uma coisa particular, por exemplo, o fato expresso pelo enunciado “Isto é branco”. O fato mais simples que vem em seguida são os que os fatos que relacionam duas coisas, por exemplo, “Isto está à esquerda daquilo”. Pode-se encontrar, também, fatos simples que relacionam três, quatro e mais coisas. Isso é expresso, como vimos na seção anterior, pelo seguinte simbolismo: R_1 (a), R_2 (a,b), R_3 (a, b, c), R_4 (a, b, c, d), etc. Nesse sentido, diz Russell: “Temos uma hierarquia de fatos – fatos nos quais temos uma coisa e uma qualidade, duas coisas e uma relação, três coisas e uma relação, quatro coisas e uma relação, e assim por diante. Toda hierarquia constitui o que chamo fatos *atômicos*, e estes são a mais simples espécie de fatos.”. (RUSSELL, 1992, p. 70, grifo do autor)

A relação entre uma coisa particular e uma propriedade ou entre coisas em um fato é, como vimos na seção anterior, expressa pelos seguintes de tipos de funções proposicionais, R_1 (x), R_2 (x, y), R_3 (x, y, z), R_4 (x, y, z, w), etc., que, conforme a substituição das variáveis x, y, z, w, etc., por valores constantes a, b, c, d, etc, temos, respectivamente, os seguintes tipos de proposições R_1 (a), R_2 (a,b), R_3 (a, b, c), R_4 (a, b, c, d), etc. Cada uma destes tipos de proposições resultantes correspondem a tipos de funções, funções com uma, duas, três ou mais variáveis.

Desse modo, a função proposicional é assim definida por Russell em *A Filosofia do Atomismo Lógico* (1918): Uma *função proposicional é simplesmente qualquer expressão que contém um constituinte indeterminado, ou vários constituintes indeterminados, e que se torna uma proposição assim que os constituintes indeterminados são determinados*.”. (RUSSELL, 1992, p. 95, grifo do autor). A variável que ocorre na função proposicional expressa o constituinte indeterminado que nela ocorre: “Um constituinte indeterminado numa função proposicional é chamado uma variável.”. (RUSSELL, 1992, p. 97, grifo do autor)

Vimos na Segunda Edição do *Principia* (1927), que as proposições atômicas além de serem determinadas pelas funções proposicionais $R_1(x)$, $R_2(x, y)$, $R_3(x, y, z)$, $R_4(x, y, z, w)$, etc., sendo expressas, conforme a determinação das variáveis na função, por $R_1(a)$, $R_2(a,b)$, $R_3(a, b, c)$, $R_4(a, b, c, d)$, etc., elas podem ser expressas, também, pelas letras minúsculas do alfabeto latino: p, q, r, s, t. Podemos dizer, por exemplo, que $p = R_1(a)$, $q = R_2(a,b)$, $r = R_3(a, b, c)$, $t = R_4(a, b, c, d)$, etc. Genericamente, temos a seguinte expressão para proposições atômicas: $p = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ e $q = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n)$.

Embora os fatos sejam elementos logicamente simples, eles não são todos parecidos. Há, como nota Russell, espécies de fatos. “Existem fatos particulares, tal como ‘isto é branco’; a seguir existem fatos gerais, tais como ‘todos os homens são mortais’.” (RUSSELL, 1992, p. 58). Além disso, há outra distinção de fatos apresenta pelo autor: os fatos positivos, por exemplo, “Sócrates está vivo”, e um fato negativo, por exemplo, “Sócrates não está vivo”.

Nota Russell que “[...] a distinção entre fatos particulares e gerais é uma distinção da maior importância.”. (RUSSELL, 1992, p. 58). Se existissem apenas fatos particulares, nos perderíamos das particularidades do mundo, pois, como sabemos, há infinidade de fatos particulares. Observa o autor que mesmo supondo que fôssemos capazes de registrar todos os particulares, não teríamos, ainda, uma descrição completa do universo, a menos que acrescentássemos, também, a seguinte afirmação: “Estes que registrei são todos os fatos particulares que existem”. Mas, esta afirmação não é mais a expressão de um fato particular, mas a expressão de um fato geral, pois diz que “são todos os fatos”, mesmo que estes sejam particulares. Assim, afirmações sobre fatos gerais são de suma importância para uma descrição completa do mundo, condição para a Lógica e as ciências em geral, pois não existe ciência do particular, embora a descrição do particular seja importante na elaboração e confirmação de uma teoria que, em essência, é um conjunto de enunciados gerais que correspondem a fatos gerais do mundo.

No caso da Lógica, os fatos são tão gerais que não existe menção aos fatos particulares. “Esta é uma das características das proposições lógicas, a de que elas não mencionam nada. Tal proposição é: ‘Se uma classe é parte de outra, um termo que é membro da primeira é também um membro da outra’.”. (RUSSELL, 1992, p. 58). Isso quer dizer que o objeto da Lógica são as formas. Assim, as palavras presentes nos enunciados da lógica são, por natureza, “[...] palavras que expressam simplesmente uma forma ou conexão, não mencionando qualquer constituinte particular da proposição na qual elas ocorrem.”. (RUSSELL, 1992, p. 58).

A forma é expressa pelas variáveis que ocorrem nas proposições ou nas funções proposicionais. Isso significa que não há proposições lógicas sem o uso de variáveis. Sobre isso, escreve Russell

> Agora quero chegar à questão das proposições *completamente* gerais e das funções proposicionais. Significo por estas proposições as proposições e as funções proposicionais que contêm somente variáveis e nada além. Isto engloba toda a lógica. Toda proposição lógica constitiu-se total e unicamente de variáveis, embora não seja verdadeiro que toda proposição que se constitui total unicamente de variáveis seja lógica. (RUSSELL, 1992, p. 101, grifo do autor)

Assim, a proposição “Sócrates ama Platão”, por exemplo, torna-se, com o uso de variáveis, generalizável através do seguinte processo sucessivo de generalização: 1) “Sócrates ama Platão”, 2) “*x* ama Platão”, 3) “*x* ama *y*”, 4) “*xRy*”.

Nesse processo de generalização chega-se à forma mais geral de proposições que relacionam dois indivíduos quaisquer; forma expressa, como sabemos, por *xRy.* Sobre isso, escreve Russell:

> Quando chegamos a *xRy*, chegamos a um esquema consistindo unicamente de variáveis, não contendo nenhuma constante, chegamos ao puro esquema das relações duais, e é claro que qualquer proposição que expressa uma relação dual pode ser derivada de *xRy* por designação de valores a *x*, *R* e *y*. De tal modo que esta é, como poderíamos dizer, a forma pura de todas aquelas proposições. (RUSSELL, 1992, p. 101)

Esta forma Russell chama por “a forma de uma proposição”. Diz o autor que “A forma de uma proposição é aquela que é comum a duas proposições quaisquer das quais uma pode ser obtida a partir da outra substituindo-se os componentes originais por outros constituintes. Quando tenhamos chegado àquelas fórmulas que somente contêm variáveis, como *xRy*, estamos a caminho daquelas de coisas que podemos afirmar na lógica.”. (RUSSELL, 1992, p. 102)

Desse modo, as proposições gerais, que por natureza são proposições da Lógica, são possíveis com o uso de variáveis que expressam a forma das proposições. Isso quer dizer que toda proposição lógica é, por essência, proposição acerca de formas. Nesse sentido, escreve Russell: “[...] penso que é *possível que* as proposições lógicas possam ser interpretadas como sendo proposições acerca de formas.”. (RUSSELL, 1992, p. 102, grifo do autor).

Com isso, a função proposicional, na medida em que contém uma variável, expressa a forma de uma proposição, isto é, constitui-se em um esquema que expressa proposições gerais que correspondem a fatos gerais no mundo.

> […] uma função proposicional em si mesma não é nada: é simplesmente um esquema. Portanto, no inventário do mundo, que é o que estou tentando alcançar, chega-se à questão: o que existe realmente no mundo que corresponde a essas coisas? Obviamente está claro que temos as *proposições gerais*, no mesmo sentido em que temos as proposições atômicas. (RUSSELL, 1992, p. 98, grifo do autor)

Vinculadas às funções proposicionais tem-se a ocorrência de uma proposição ser sempre verdadeira, algumas vezes ser verdadeira e nunca ser verdadeira. Isso quer dizer que a função proposicional é, no plano da forma das proposições, condição para o necessário, possível e o impossível.

Diz o autor que “A única coisa que realmente podemos fazer com uma função proposicional é afirmar que ela é sempre verdadeira, ou que algumas vezes é verdadeira, ou que nunca é verdadeira.”. (RUSSELL, 1992, p. 95, grifo do autor). Por exemplo, a função proposicional “se *x* é um homem, *x* é mortal” gera uma proposição sempre verdadeira, mesmo que o que substitui *x* não seja homem, pois se *x* for homem, então *x* será mortal. Já a função proposicional “*x* é um homem” gera proposições algumas vezes verdadeira, pois depende de quem ou o que substitui *x* na função. Por fim, “*x* é um unicórnio” nunca é verdadeira, pois unicórnios não existem; então qualquer coisa que substitua *x* nessa função gera uma proposição falsa.

Essa relação de “sempre ser verdadeiro”, “algumas vezes ser verdadeiro” e “nunca ser verdadeiro”, vinculadas a uma função proposicional, gera as relações de necessidade, possibilidade e impossibilidade, respectivamente. “Podemos chamar uma função proposicional *necessária*, quando ela é sempre verdadeira; *possível*, quando ela é algumas vezes verdadeira; *impossível*, quando ela nunca é verdadeira.”. (RUSSELL, 1992, p. 95, grifo do autor)

Nesse sentido, a função proposicional “se *x* é um homem, *x* é mortal”, por exemplo, é necessária, pois se *x* for homem, então, será, necessariamente, mortal. Já a função proposicional "*x* é um homem" é acidental, abrindo a possibilidade para o verdadeiro e para o falso, pois depende do valor de *x*, ao contrário do primeiro caso que, independente do valor de *x*, a função proposicional é sempre verdadeira devido à relação de necessidade colocada pela condicional. Por fim, a função proposicional "*x* é um unicórnio" não se abre para possibilidade e muito menos para a necessidade, pois ela é impossível.

Assim, a função proposicional é um esquema que expressa a condição para o necessário, possível e o impossível no que concerne as coisas no mundo e suas propriedades e relações. Diz Russell que essa conclusão é importante, pois "Em toda a filosofia tradicional aparece um título de 'modalidades', que discute o *necessário*, o *possível* e o *impossível* como as propriedades das proposições, ao passo que de fato são propriedades das funções proposicionais. As proposições são apenas verdadeiras ou falsas.". (RUSSELL, 1992, p. 96, grifo do autor). Em outra passagem: "Penso que é importante perceber que toda a teoria da modalidade se aplica unicamente às funções proposicionais, não às proposições.". (RUSSELL, 1992, p. 96). No *Tractatus* (1921), encontramos uma passagem semelhante: "Certa, possível, impossível: temos aqui o indício daquela gradação de que precisamos na teoria da probabilidade.". (4.464). "Apenas na falta da certeza usamos probabilidade - Com efeito, quando não conhecemos completamente um fato, mas sabemos *algo* sobre sua forma.". (5.156, grifo do autor)

Até agora tratamos das relações de necessidade, possibilidade e impossibilidade, vinculados a uma função proposicional, na condição de substituição de uma variável que ocorre na função proposicional por indivíduos que compõem as classes e relações ou por proposições em funções de proposições. Mas, podemos observar, também, que as variáveis que ocorrem nas funções proposicionais podem ser substituídas também por funções. É o que veremos na próxima seção.

2.9. Funções de funções e paradoxos

Veremos nessa seção que as variáveis que ocorrem nas funções, por serem variáveis irrestritas, podem ser substituídas também por funções, resultando em funções cujos argumentos são funções. Embora isso seja possível, veremos que podem surgir paradoxos decorrentes dessa substituição em certos tipos de funções, em particular de funções que envolvem a si mesmas como argumento. Analisaremos, com isso, como as funções proposicionais estão relacionadas ao surgimento desses paradoxos e quais princípios os autores propõem para evitá-los.

As variáveis que ocorrem nas funções proposicionais, por serem variáveis irrestritas, podem ser substituídas também por funções. Nesse sentido, podemos ter expressões como, por exemplo, a expressão "$\phi(\psi\hat{x})$" que designa funções cujos argumentos são também funções, isto é, a função $\psi\hat{x}$ é argumento para a função ϕ. A princípio podemos usar, sem restrições, funções cujos argumentos são funções, já que a variável que ocorre na função é, como dissemos, irrestrita.

Entretanto, em alguns casos, surgem paradoxos daí decorrentes. Um exemplo conhecido de paradoxo que envolve função proposicional é apresentado pelos autores do seguinte modo:

> Seja *w* a classe de todas as classes que não são membros de si mesmas. Então, qualquer que seja a classe *x*, "*x* é um *w*" é equivalente a "*x* não é um *x*". Assim, dando a *x* o valor *w*, "*w* é um *w*" é equivalente a "*w* não é um *w*". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 63, tradução nossa)[322]

Como o conjunto *w* é a classe de todas as classes que não são membros de si mesmas, então qualquer que seja a classe *x*, esta classe está contida em *w*, pois a classe *w* envolve todas as classes, inclusive ela mesma. Agora, se atribuímos a *x* o valor *w*, o que é possível, pois *x* pode ser qualquer classe, inclusive o próprio *w*, então se *w* é um membro de *w*, então *w* não é um membro *w*; por outro lado, se *w* não é um membro de *w*, então *w* é um membro *w*. Portanto, *w* é um membro de *w* equivale a dizer que *w* não é um membro de *w*; resultando em uma contradição.

Em outras palavras, esse paradoxo pode ser, também, assim expresso: seja R o conjunto de todos os elementos x, tal que ocorre que todos os elementos x têm a propriedade de não pertencem a si mesmos, que pode ser assim expresso: $R = \{x/\ x\in x\}$. Ora, se R é o conjunto de todos os conjuntos, então podemos perguntar: $R\in R$? A pergunta faz sentido, pois sendo R o conjunto de todos os conjuntos, então podemos perguntar se R, que também é um conjunto, pertencem a si mesmo. Se $R\in R$, então R satisfaz a propriedade definidora de R, a saber: $x\in x$, então $R\in R$. Por outro lado, se $R\in R$, então $R\in R$, pois R satisfaz a propriedade definidora de R, a saber: $x\in x$. Assim, $R\in R$ se e somente se $R\in R$, uma contradição.

---

[322] "Let *w* be the class of all those classes which are not members of themselves. Then, whatever class *x* may be, '*x* is a *w*' is equivalent to '*x* is not an *x*'. Hence, giving to *x* the value *w*, '*w* is a *w*' is equivalent to '*w* is not a *w*'.".

Essa contradição ficou conhecida na Lógica como o "Paradoxo de Russell", depois que Russell encontrou uma contradição nesse sentido no sistema axiomático proposto por Gottlob Frege (1848 – 1925) em sua obra intitulada "As Leis Básicas da Aritmética" (1903). Após tomar conhecimento da publicação do primeiro volume de *As Leis Fundamentais da Aritmética* de Frege, publicado em 1893, Russell escreve, em Julho de 1902, uma carta dirigida para Frege apontando uma contradição no seu sistema axiomático. A carta chega ao conhecimento de Frege quando o segundo volume de *As Leis Fundamentais da Aritmética* (1903) já estava na gráfica para publicação. Frege reconhece o apontamento de Russell e procura, no Apêndice da obra, eliminar a inconsistência encontrada por Russell. Mas, posteriormente, Frege reconheceu que sua solução não funcionava.

Notemos que a propriedade definidora de R, $x \in x$, é uma função proposicional que podemos expressar por $\phi(x,x)$. Então, a propriedade definidora do conjunto $R = \{x / x \in x\}$ é determinada pela função proposicional $\phi(x,x)$. Ao perguntarmos se $R \in R$, nossa pergunta pressupõem a função $\phi(\phi)$, que é uma função de si mesma.

Outro exemplo de paradoxo dado pelos autores é o conhecido Paradoxo de Epimênides ou o Paradoxo do Mentiroso, paradoxo este que é geralmente enunciado em termos da linguagem comum, mas que não por isso não possa ser formalizado. O Paradoxo de Epimênides é assim apresentado pelos autores:

> A contradição mais antiga do tipo em questão é a *Epimênides*. Epimênides de Creta disse que todos os cretenses são mentirosos, e todas as outras afirmações feitas por cretenses eram certamente mentira. Foi isto uma mentira? A forma mais simples desta contradição é oferecida pelo homem que diz: "Eu estou mentindo"; se ele está mentindo, ele está falando a verdade, e vice-versa. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 63, grifo do autor, tradução nossa)[323]

Em outras palavras, a afirmação de Epimênides de Creta que diz "todos os cretenses são mentirosos, e todas as outras afirmações feitas por cretenses eram certamente mentira", permite-nos colocar a seguinte questão: se todos os cretenses são mentirosos e se Epimênides é Cretense, então sua afirmação de que todos os cretenses são mentirosos é verdadeira ou é falsa? Sua afirmação é verdadeira, pois todos os cretenses são mentirosos, mas sua afirmação

[323] "The oldest contradiction of the kind in question is the *Epimenides*. Epimenides the Cretan said that all Cretans were liars, and all other statements made by Cretans were certainly lies. Was this a lie? The simplest form of this contradiction is afforded by the man who says 'I am lying'; if he is lying, he is speaking the truth, and vice versa.".

é, também, falsa, pois Epimênides é cretense e, como todo cretense, sempre profere afirmações falsas. Então, a afirmação de Epimênides de que todos os cretenses são mentirosos é verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Portanto, esta afirmação de Epimênides é uma contradição.

Notemos, nos exemplos dados, que o conjunto $R = \{x/\ x \in x\}$ e a afirmação de Epimênides de Creta envolvem totalidades de classes. No primeiro caso, o conjunto R é a totalidade dos x, tal que $x \in x$; já no segundo caso, a totalidade é expressa pelo enunciado de que "todos os cretenses são mentirosos e todas as outras afirmações feitas por cretenses eram certamente mentira". Em ambos os casos, o conjunto total define os elementos que os constituem, inclusive inclui ele mesmo, isto é, o conjunto total, pois, por ele ser um conjunto total, ele deve incluir a si mesmo como elemento, o que constitui uma espécie de círculo vicioso, resultando em um paradoxo.

Nesse sentido, dizem os autores que "Uma análise dos paradoxos a serem evitados mostra que todos eles resultam de um certo tipo de círculo vicioso. Os círculos viciosos em questão surgem de se supor que uma coleção de objetos pode conter membros que só podem ser definidos por meio da coleção como um todo.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 39, tradução nossa).[324] Então, se o conjunto que estamos considerando é o conjunto de todos os conjuntos que têm uma determinada propriedade, então ele mesmo, que também é um conjunto, é elemento de si mesmo. Isso gera uma autorreferência ou um círculo vicioso, pois o conjunto total passa a ser elemento de si mesmo. Dizem os autores que é preciso evitar tais totalidades, já que elas podem levar a contradições, como nos exemplos dados acima.

O princípio que permite evitar essas totalidades, os autores chamam de "princípio do círculo vicioso". Sobre esse princípio, escrevem eles:

> Os princípios que nos permite evitar totalidade ilegítima podem ser expressos da seguinte maneira: "O que quer envolva todos de uma coleção não deve ser um da coleção"; ou, pelo contrário: "Se, fornecida uma certa coleção tida como um total, ela teria membros apenas definíveis em termos desse total, então a dita coleção não tem total". Vamos chamar isso de "princípio do círculo vicioso", porque nos permite evitar os círculos viciosos envolvidos na suposição de totalidades ilegítimas. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 40, tradução nossa)[325]

[324] "An analysis of the paradoxes to be avoided shows that they all result from a certain kind of vicious circle. The vicious circles in question arise from supposing that a collection of objects may contain members which can only be defined by means of the collection as a whole.".

[325] "The principles which enables us to avoid illegitimate totality may be stated as follows: 'Whatever involve all of a collection must not be one of the collection'; or, conversely: 'If, provided a certain collection had a total, it

O princípio do círculo vicioso consiste, então, em afirmar, em outras palavras, que a totalidade não deve ser entendida como uma coleção ou um conjunto, pois tais totalidades, por resultar em contradição, não tem significado lógico. Para ter significado lógico, uma proposição deve ser verdadeira ou falsa e não verdadeira e falsa, como a contradição expressa. Então, se fornecida uma certa coleção tida como um total, a dita coleção não deve ser um total, pois caso contrário, cairemos em um círculo vicioso e, portanto, chegaremos a proposições contraditórias, isto é, sem significado, constituindo, portanto, um paradoxo.

Os paradoxos podem envolver diversos objetos como proposições, classes, números, etc., desde que eles estejam relacionados, nesse caso, com a noção de totalidade. Nesse sentido, dizem os autores: "Os paradoxos da lógica simbólica concernem a vários tipos de objetos: proposições, classes, números cardeais e ordinais, etc. Todos esses tipos de objetos, como veremos, representam a totalidade ilegítima, e são portanto capazes de dar origem a falácias do círculo vicioso". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 40, tradução nossa)[326]

Em particular, os autores se interessam, no desenvolvimento de sua teoria, por uma análise "[...] que reduz afirmações que são verbalmente relativas a classes e relações com afirmações que são relativas à função proposicional [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 40, tradução nossa)[327]. Assim, os autores se debruçam mais sobre classes, relações e função proposicional, pois seus propósitos consistem em realizar mais uma análise lógico-matemática que propriamente uma análise matemática, já que em uma análise matemática seus interesses seriam mais pelos objetos matemáticos como números cardeais e ordinais, por exemplo. Dizem os autores, nesse sentido, em especial no que concerne aos paradoxos, que "[...] aqueles [paradoxos] que mais aproximadamente concernem ao matemático estão todos concernidos com a função proposicional.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1968, p. 38, tradução nossa)[328]

---

would have members only definable in terms of that total, then the said collection has no total'. We shall call this the 'vicious-circle principle', because it enables us to avoid the vicious circles involved in the assumption of illegitimate totalities.".

[326] "The paradoxes of symbolic logic concern various sorts of objects: propositions, classes, cardinal and ordinal numbers, etc. All these sorts of objects, as we shall show, represent illegitimate totality, and are therefore capable of giving rise to vicious-circle fallacies.".

[327] "[…] which reduces statements that are verbally concerned with classes and relations to statements that are concerned with propositional function [...]".

[328] "[...] that more nearly concern the mathematician are all concerned with propositional function.".

Apresentaremos no que se segue o argumento dos autores de que os mesmos tipos de funções não podem ser argumentos uma para outra. Em outras palavras, uma dada função requer um argumento de um certo tipo.

Consideremos duas funções, as funções $\phi\hat{z}$ e $\psi\hat{z}$, tal que há um argumento a que torna ambas as funções significativas na substituição por a, resultando ϕa e ψa. Se ambas as funções $\phi\hat{z}$ e $\psi\hat{z}$ são significativas para um indivíduo, o argumento a, elas não podem ser significativas para uma função, caso uma função venha substituir z nas funções $\phi\hat{z}$ e $\psi\hat{z}$, pois tais funções são funções de um certo tipo, isto é, são funções do tipo que recebem como argumento apenas indivíduos. Sobre isso, dizem os autores que "[...] se $\psi\hat{z}$ é outra função de tal modo que há argumentos a de que tanto 'ϕa' e 'ψa' são significativas, então $\psi\hat{z}$ e qualquer derivado dela não pode significativamente ser argumento para $\phi\hat{z}$.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 50, tradução nossa)[329]

Em vista disso concluem os autores que "[...] quando uma função pode ocorrer significativamente como argumento, algo que não é uma função [indivíduos, por exemplo] não pode ocorrer significativamente como argumento.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 50, tradução nossa).[330] E, inversamente, "[...] quando algo que não é uma função [indivíduos, por exemplo] não pode ocorrer significativamente como argumento, uma função pode ocorrer de forma significativa.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 50, tradução nossa).[331] Portanto, funções requerem argumentos de um certo tipo, em particular, funções do tipo ϕx requerem argumentos do tipo a, e funções do tipo $\phi(\psi x)$, requerem, necessariamente argumentos do tipo ψx.

Dizem os autores que "Um 'tipo' é definido como o campo de valores de significância de alguma função.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 168, tradução nossa).[332] Como vimos na Seção 2.5, o campo de valores (*range*) de significância é definido como os possíveis valores de x, em outras palavras, é o que os matemáticos chamam de domínio de uma função ϕ. Então, se as funções ϕx e ψx têm o mesmo *range*, isto é, se um argumento qualquer do *range* da função ϕx é argumento do *range* da função ψx, e se este argumento é significativo para ambas as funções, isto é, se este argumento torna tais funções uma proposição com valor

[329] "[...] if $\psi\hat{z}$ is another function such that there are arguments a with which both 'ϕa' and 'ψa' are significant, then $\psi\hat{z}$ and anything derived from it cannot significantly be argument to $\phi\hat{z}$.".
[330] "[...] when a function can occur significantly as argument, something which is not a function cannot occur significantly as argument.".
[331] "[...] when something which is not a function can occur significantly as argument, a function cannot occur significantly.".
[332] "A 'type' is defined as the range of significance of some function.".

de verdade, então ambas as funções têm os mesmos argumentos, ou seja, têm o mesmo campo de valores (*range*) de significância, o que quer dizer que tais função são do mesmo tipo. Nesse sentido, dizem

> […] um princípio importante que segue da teoria de tipos, a saber, que, se houver qualquer argumento *a* para que ambas "ϕa" e "ψa" sejam significativa, então o *range* de argumentos para que "ϕx" seja significativa é o mesmo que o *range* de argumentos para que "ψx" seja significativa.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 99, tradução nossa)[333]

Como consequência desta definição, ainda escrevem eles: "Disso se segue que dois tipos que têm um membro comum coincidem, e que dois tipos diferentes são mutuamente exclusivos." (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 168, tradução nossa).[334] Em outras palavras e de modo geral, podemos dizer que funções que têm o mesmo campo de valores são funções do mesmo tipo e funções que não têm o mesmo campo de valores são funções de tipos diferentes e mutuamente excludentes.

Com isso, criamos classes de funções de mesmo tipo, classes que podemos dividir, visto que temos campos de valores cujos argumentos são indivíduos e campos de valores cujos argumentos são funções. Tomando como base as classes de funções que têm como campo de valores indivíduos, pela sua simplicidade, e assumindo as classes de funções que têm como campo de valores funções como argumentos como um grau a menos de simplicidade, podemos, passo a passo construir, nesse sentido, uma hierarquia de classes de funções, e de proposições resultantes destas funções. Essa conclusão aponta para uma hierarquia de funções, e de proposições resultantes destas funções, do mais simples ao mais complexo, das funções que têm como argumento indivíduos, às funções que têm como argumento funções, em uma espécie de teoria dos tipos de funções, e de proposições resultantes destas funções.

Assim, tendo em vista o princípio do círculo vicioso e a análise de inspeção direta sobre o significado de funções que têm como argumentos funções, e funções que têm como argumentos indivíduos, os autores concluem do primeiro caso que funções totais não podem

---

[333] "[…] of an important principle which follows from the theory of types, namely that, if there is any one argument *a* for which both 'ϕa' and 'ψa' are significant, then the range of arguments for which 'ϕx' is significant is the same as the range of arguments for which 'ψx' is significant.".
[334] "From this it follows that two types which have a common member coincide, and that two different types are mutually exclusive.".

ser argumentos de si mesmas e que funções devem ter certos tipos de argumentos. Sobre isso, dizem os autores:

> Somos assim levados a concluir, tanto do princípio do círculo vicioso quanto de inspeção direta, que a função para a qual um dado objeto *a* pode ser um argumento é incapaz de ser argumento para outra [do mesmo tipo que ela], e que elas não têm termo em comum com a função para a qual elas podem ser argumentos. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 51, tradução nossa)[335]

Em outras palavras, funções do tipo ϕx, que têm a como argumento, não podem ser argumento de funções do mesmo tipo que ela, isto é, de funções que também têm a como argumento, por exemplo, a função ψx. As funções ϕx e ψx são funções do mesmo tipo e têm o mesmo tipo de argumento como termo em comum, isto é, são funções que recebem apenas indivíduos como argumento.

Visto que ϕx tem como argumento apenas indivíduos e $\psi(\phi x)$ tem como argumento necessariamente funções, então as funções ϕx e $\psi(\phi x)$ não têm termos em comum entre elas, pois são tipos diferentes de funções; a primeira, como dissemos, recebe como argumento indivíduos, e a segunda recebe como argumento funções. Há, então, como dissemos, tipos de argumentos para tipos de funções, o que aponta para uma hierarquia de funções e uma teoria dos tipos. É sobre a hierarquia das funções, e de proposições decorrentes destas funções, para uma espécie de teoria dos tipos que deteremos nossa análise na próxima seção.

2.10. Hierarquia das funções

Analisaremos, nesta seção, a possibilidade de uma hierarquia das funções, com apontamento para, também, uma hierarquia das proposições, decorrente de uma hierarquia das funções, com vistas ao desenvolvimento de uma teoria dos tipos de funções, evitando assim possíveis círculos viciosos e consequentes paradoxos.

Iniciaremos nossa análise a partir da noção de variável aparente para mostrar como a eliminação sucessiva destas variáveis nas proposições nos permite obter funções proposicionais originais e subjacentes a cada uma das proposições nas quais tais variáveis ocorrem. Tais funções originais e subjacentes são tipos de funções básicas que nos permitem construir uma hierarquia de tipos de funções, condição para uma teoria dos tipos de funções.

---

[335] "We are thus led the conclusion, both from the vicious-circle principle and from direct inspection, that the function to which a given object *a* can be an argument are incapable of being arguments to each other, and that they have no term in common with the function to which they can be arguments.".

Vimos na Seção 2.5 que, por exemplo, na sentença "x é um homem implica x é mortal para todo valor de x", que formalmente podemos expressar por "$(x) \,.\, H(x) \supset M(x)$", o x é uma variável aparente, pois tal sentença já é uma proposição como um todo, uma proposição verdadeira, não dependendo do valor de x para se tornar uma proposição. Mas, há casos em que a variável aparente não aparece explicitamente, onde a linguagem não indica sua presença; um exemplo indicado pelos autores é na proposição "*A* é mortal", que, segundo os autores, tem o seguinte significado: "há um tempo em que *A* vai morrer"; apontam eles que o "tempo" ocorre como variável aparente. Nesse sentido, dizem os autores: "A presença das palavras *todos* ou *alguns* em uma proposição indica a presença de uma variável aparente; mas frequentemente uma variável aparente está realmente presente onde a linguagem não indica de uma só vez sua presença.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 52, grifo do autor, tradução nossa)[336]

Já os casos mais claros em que não temos variáveis aparentes são, como vimos, expressões do tipo "x é um homem", pois tal expressão não é uma proposição, ela depende do valor real da variável que nelas ocorrem. Em outras palavras, em expressões do tipo "x é um homem", há diferentes proposições para diferentes valores da variável x, isto é, temos diferentes proposições geradas que dependem dos valores que se atribuem a x na expressão considerada.

No caso de expressões que envolvem variáveis reais, torna-se evidente a ocorrência de funções proposicionais, pois tais funções envolvem, necessariamente, como vimos na Seção 1, variáveis reais. Mas, no caso de proposições em que temos ocorrências de variáveis aparentes, temos, também, ocorrência de funções proposicionais, mas como uma ocorrência subjacente a tais proposições ou como fonte delas. Nesse sentido, dizem os autores que "[...] é óbvio que a função proposicional cujos valores não contêm variáveis aparentes são a fonte de proposições contendo variáveis aparentes, no sentido em que a função ϕx é fonte da proposição $(x).\ \phi x$ [...]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 53, tradução nossa)[337]

Sendo funções proposicionais fontes de proposições, podemos, com isso, eliminar as variáveis aparentes nas proposições e obter funções proposicionais subjacentes a cada uma das proposições nas quais tais variáveis ocorrem. Essa eliminação pode ser sucessiva até

[336] "The presence of the words all or some in a proposition indicates the presence of an apparent variable; but often an apparent variable is really present where language does not at once indicate its presence.".

[337] "[...] it is obvious that propositional function whose values do not contain apparent variables are the source of propositions containing apparent variables, in the sense in which the function $\phi\hat{x}$ is source of the proposition $(x).\ \phi x$.".

chegar à função proposicional original, que serve de base para o tipo de proposição em questão. Dizem os autores, com isso, que “Assim, devemos chegar no final em uma função de tantas variáveis quantos são estágios para alcançá-las a partir da nossa proposição original, e esta função será tal que os seus valores não contêm variáveis aparentes.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 53, tradução nossa)[338]

Os autores chamam essa última função, que está subjacente às proposições que contêm uma ou mais variáveis aparentes, de “função matriz”. “Podemos chamar esta função a *matriz* da nossa proposição original e de quaisquer outras proposições e funções a serem obtidas transformando alguns dos argumentos para a função em variáveis aparentes.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 53, grifo do autor, tradução nossa)[339]. Por exemplo, seja a função matriz $\phi(x, y)$, tal função pode ser derivada de (y). $\phi(x, y)$, de (x). $\phi(x, y)$, e (x, y). $\phi(x, y)$, por exemplo, tal que a primeira é uma função de x, a segunda é uma função de y e a terceira não contém variáveis reais, apenas aparentes. É notável que podemos tanto derivar funções matriz de proposições quanto gerar proposições a partir de funções matriz. Desse modo, concluem os autores “É, assim, claro que todas as proposições e funções possíveis são obtidas de matrizes pelo processo de transformar os argumentos para as matrizes em variáveis aparentes.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 53, tradução nossa).[340] A partir do conceito de função matriz, os autores podem dividir as funções, e proposições que decorrem delas, em tipos.

Inicialmente, eles usam letras como a, b, c, x, y, z, w, para designar objetos que não são proposições e funções. “Tais objetos nós chamaremos de *indivíduos*. Tais objetos serão constituintes de proposições ou funções, e serão constituintes genuínos, no sentido de que eles não desaparecem em análise [...]”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 53-54, grifo do autor, tradução nossa)[341]. Desse modo, as primeiras matrizes são as formas ϕx, $\psi(x, y)$, $\chi(x, y, z...)$, etc., onde os argumentos são apenas indivíduos. Funções matriz, cujos argumentos são todos indivíduos, e funções decorrentes destas funções matriz são chamadas, pelos os autores, de “funções de primeira-ordem”. “Chegamos, assim, a uma certa coleção de funções de x,

[338] “Thus we must arrive at last at a function of as many variables as there have been stages in reaching it from our original proposition, and this function will be such that its values contain no apparent variables.”.
[339] “We may call this function the *matrix* of our original proposition and of any other propositions and functions to be obtained by turning some of the arguments to the function into apparent variables.”.
[340] “It is thus plain that all possible propositions and functions are obtainable from matrices by the process of turning the arguments to the matrices into apparent variables.”.
[341] “Such objects we shall call *individuals*. Such objects will be constituents of propositions or functions, and will be genuine constituents, in the sense that they do not disappear on analysis [...]”.

caracterizada pelo fato de que elas não envolvem variáveis, exceto indivíduos. Tais funções chamaremos de 'funções de *primeira-ordem*'.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 54, grifo do autor, tradução nossa)[342]

Os autores introduzem uma notação para expressar funções de primeira-ordem. Eles denotam funções de primeira-ordem, com apenas um indivíduo indeterminado, por "$\phi!\hat{x}$", tal que a função "$\phi!\hat{x}$" expressa a função de primeira-ordem em si mesma e a função $\phi!x$ expressa o valor ambíguo dessa função. Assim, funções de primeira-ordem do tipo $\phi!x$ significam quaisquer valores para quaisquer funções que envolvem um indivíduo. Os autores chamam de "predicado" qualquer função de primeira-ordem do tipo $\phi!x$. Podemos ter, também, funções de primeira-ordem que envolvem dois ou mais indivíduos em uma relação; por exemplo uma relação ψ entre dois indivíduos, a saber, a função de primeira-ordem $\psi!\hat{x}\hat{y}$, onde $\psi!xy$ expressa o valor ambíguo dessa função.

Notemos que a função "$\phi!x$", por exemplo, é uma função que não contém apenas x como variável, mas a própria função, a função em si mesma, é, também, uma variável, uma variável de função, expressa por "$\phi!\hat{z}$". Desse modo, na função "$\phi!x$" temos duas variáveis, a variável de função, expressa por "$\phi!\hat{z}$", a variável de argumento, expressa, como vimos, por "x". O mesmo podemos dizer para funções de dois, três ou mais argumentos. Podemos chamar $\phi!\hat{z}$ de "variável funcional", pois é uma variável de função.

A variável funcional é uma variável que não expressa um indivíduo, mas é uma variável que expressa um tipo de função. Desse modo, seja $\phi!x$, se a é um indivíduo determinado, então $\phi!a$ é uma função de uma variável do tipo $\phi!\hat{z}$. Tomemos outro caso: seja "$\phi!x$ implica um $\psi!y$", se a e b são indivíduos determinados, então "$\phi!a$ implica um $\psi!b$" é uma função g de duas variáveis $\phi!\hat{z}$ e $\psi!\hat{z}$; e assim sucessivamente. Portanto, a variável funcional $\phi!\hat{z}$ pode ser variável de outra função, por exemplo, a função g, como acima indicado. Nesse sentido, concluem os autores: "Somos assim levados a um conjunto de novas matrizes, $f(\phi!\hat{z})$, $g(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z})$, $F(\phi!\hat{z}, x)$, e assim por diante.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 54, tradução nossa)[343]

As matrizes $f(\phi!\hat{z})$, $g(\phi!\hat{z}, \psi!\hat{z})$, $F(\phi!\hat{z}, x)$ contêm funções de primeira-ordem como argumento e, como todas as matrizes, elas não contêm variáveis aparentes. Os autores chamam de "matrizes de segunda ordem" as matrizes que têm funções de primeira-ordem

[342] "We thus arrive at a certain collection of functions of x, characterized by the fact that they involve no variables except individuals. Such functions we will call '*first-order* functions'.".
[343] "We are thus led to a whole set of new matrices, $f(\phi!\hat{z})$, $g(\phi!\hat{z}, \psi\hat{z})$, $F(\phi!\hat{z}, x)$, and so on.".

entre os seus argumentos. "Nós daremos o nome de *matrizes de segunda-ordem* a tais matrizes que têm funções de primeira-ordem entre os seus argumentos, e não têm argumentos exceto as funções de primeira-ordem e indivíduos. (Não é necessário que elas tenham indivíduos entre os seus argumentos).". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 55, grifo do autor, tradução nossa).[344] Assim, as matrizes de segunda-ordem contêm, necessariamente, funções de primeira-ordem como argumento, mas podem conter, também indivíduos. As matrizes de segunda-ordem podem conter indivíduos, pois elas implicam o que vem antes delas, em um estágio inferior na hierarquia, isto é, a segunda-ordem pressupõe a ordem anterior a ela.

As matrizes de segunda-ordem darão origem, assim, a novas funções, tal que podemos transformar seus argumentos em variáveis aparentes. Então, por exemplo, a partir da matriz $g(\phi!\hat{z},\ \psi!\hat{z})$, podemos obter a função $(\phi).\ g\ (\phi!\hat{z},\ \psi\hat{z})$, que é uma função de $\psi!\hat{z}$. A partir da matriz $F(\phi!\hat{z},\ x)$, podemos obter, por exemplo, $(x).\ F(\phi!\hat{z},\ x)$, que é uma função de $\phi!\hat{z}$. E a partir desta mesma matriz $F(\phi!\hat{z},\ x)$, podemos obter $(\phi).\ F\ (\phi!\hat{z},\ x)$, que é uma função de x. Nesse sentido, as funções relacionadas às matrizes de segunda-ordem, os autores chamam de "funções de segunda-ordem". "Nós daremos o nome de *funções de segunda-ordem* tal como são matrizes de segunda-ordem ou são derivadas de tais matrizes, transformando alguns dos argumentos em variáveis aparentes.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 55, grifo do autor, tradução nossa).[345] Assim, temos novas classes de funções: funções de segunda-ordem, que têm como argumento, necessariamente, funções de primeira-ordem. Os autores chamam também as funções de segunda-ordem de "funções predicativas das funções de primeira-ordem".

Quanto à notação, a matriz $f\,!(\hat{\phi}\ !\hat{z})$ é a função de segunda-ordem em si mesma e $f\,!(\phi!\hat{z})$ é qualquer valor dessa função. Como vimos no caso da função matriz de primeira-ordem $\phi!x$, a função matriz de segunda-ordem $f\,!(\phi!\hat{z})$ é uma função de um argumento, o argumento $\phi!\hat{z}$. Mas, podemos ter funções matriz de segunda-ordem de dois ou mais argumentos, por exemplo, $f!(\phi!\hat{z},\ x)$, $g!(\phi!\hat{z},\ \psi\hat{z})$, $F!(\phi!\hat{z},\ \psi\hat{z},\ \chi!\hat{z})$. No caso da função $f!(\phi!\hat{z},\ x)$, em particular,

---

[344] "We will give the name of second-order matrices to such matrices as have first-order functions among their arguments, and have no arguments except first-order functions and individuals. (It is not necessary that they should have individuals among their arguments).".

[345] "We will give the name of *second-order functions* to such as either are second-order matrices or are derived from such matrices by turning some of the arguments into apparent variables.".

um dos argumentos é uma função de primeira-ordem e outro é um indivíduo, o que é possível, pois, como dissemos, a segunda-ordem pressupõe as ordens anteriores a ela.

Na sucessão da hierarquia de funções, podemos ter, também, matrizes de terceira-ordem, cujas funções, e funções delas decorrentes, conterão, necessariamente, funções de segunda ordem como argumento. Para isso, consideramos as as funções de segunda-ordem como variáveis funcionais, inserindo-as como argumento para funções de ordem superiores a elas na hierarquia, funções estas que são chamadas de “funções de terceira-ordem”. Desse modo, a hierarquia de funções segue indefinidamente. Assim, dizem os autores que “Se a variável de ordem mais elevada que ocorre em uma função, quer como argumento ou como variável, é uma função da enésima ordem, então a função em que ocorre é da ordem n + 1.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 56, tradução nossa)[346]

Embora seja possível a sucessão de funções na hierarquia de funções, tal sucessão é finita, pois o número de argumentos e de variáveis aparentes em uma função deve ser finita para que a função tenha significado, resultando em uma proposição. Funções com argumentos infinitos não teriam significado neste sistema, pois não conseguiríamos determinar todos os seus argumentos para determinar seu significado. Nesse sentido, se a ordem das funções matriz na hierarquia é definida passo a passo, como os autores procuram fazer, não pode haver processo de ‘prosseguir para o limite’. Assim, não é possível funções de uma ordem infinita na hierarquia. Sobre isso, dizem os autores: “Uma vez que as ordens das funções são apenas definidas passo a passo, não pode haver processo de ‘prosseguir para o limite’, e funções de uma ordem infinita não podem ocorrer.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 56, tradução nossa)[347]

Como funções proposicionais geram proposições, cabe observar que uma hierarquia análoga pode ser desenvolvida para as proposições, com base na hierarquia gerada pelas funções matriz. “A hierarquia proposicional pode, assim, ser derivada da hierarquia funcional, e podemos definir uma proposição da enésima ordem como uma que envolve uma variável aparente da ordem de n - 1 na hierarquia funcional.” (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 57, grifo do autor, tradução nossa).[348] Desse modo temos, por exemplo, as seguintes definições:

[346] “If the highest order of variable occurring in a function, whether as argument or as apparent variable, is a function of the nth order, then the function in which it occurs is of the n + 1th order.”.
[347] “Since the orders of functions are only defined step by step, there can be no process of 'proceeding to the limit', and functions of an infinite order cannot occur.”.
[348] “The propositional hierarchy can, therefore, be derived from the functional hierarchy, and we may define a proposition of the nth order as one which involves an apparent variable of the n - 1th order in the functional hierarchy.”.

(i) “Proposições que não contêm funções e variáveis aparentes podem ser chamadas *proposições elementares*.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 57, grifo do autor, tradução nossa).[349] Por exemplo, as proposições p, $\sim q$, $p \vee q$, $p \supset q$, $p \,.\, q$, etc.;

(ii) “Proposições que não são elementares, que não contêm funções, e sem variáveis aparentes exceto indivíduos, podem ser chamadas de *proposições de primeira ordem*.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 57, grifo do autor, tradução nossa)[350], por exemplo, as proposições Ha, aRb, $(a) \,.\, \phi(a)$; $(\exists b) \,.\, \psi(b)$, etc.

Os autores se limitam a algumas definições, não entrando em detalhes na análise dos tipos de proposições e sua hierarquia, pois, segundo eles, a hierarquia das proposições não é útil na prática. “A hierarquia proposicional nunca é requerida na prática, e é apenas relevante para a solução de paradoxos; portanto, não é necessário entrar em mais detalhes quanto aos tipos de proposições.”. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 57, tradução nossa)[351]

Voltando à hierarquia das funções, vimos que cada tipo de função na hierarquia requer um argumento de determinado tipo. Desse modo, funções de primeira-ordem envolvem apenas indivíduos; funções de segunda-ordem devem conter como argumento, necessariamente, funções de primeira-ordem e podem conter como argumento indivíduos; funções de terceira-ordem devem conter como argumento, necessariamente, funções de segunda-ordem e podem conter funções de primeira-ordem e, também, indivíduos. Portanto, a hierarquia de funções determina tipos de argumentos para tipos de funções, necessidade essa que vimos na análise por inspeção direta na Seção 2.9. Observamos, também, que funções de ordem superior implicam o que vem antes delas, em um estágio inferior na hierarquia, isto é, funções de ordem superior pressupõem ordens anteriores a ela na hierarquia.

Além da hierarquia de funções determinar tipos de argumentos para tipos de funções, torna-se necessário garantir que a totalidade se restrinja a uma certa ordem na hierarquia, de modo que não faça qualquer referência à totalidade superior a ela na hierarquia, pois isso resultaria em um círculo vicioso, o que, pelo princípio do círculo vicioso, deve ser evitado para não incorrermos em paradoxos. Para evitar totalidades e respeitar o cumprimento do princípio do círculo vicioso, os autores lançam mão de um princípio, o Axioma da Redutibilidade. É o que veremos na próxima seção.

[349] “Propositions which contain no functions and no apparent variables may be called *elementary propositions*.”.
[350] “Propositions which are not elementary, which contain no functions, and no apparent variables except individuals, may be called *first-order propositions*.”.
[351] “The propositional hierarchy is never required in practice, and is only relevant for the solution of paradoxes; hence it is unnecessary to go into further detail as to the types of propositions.”.

2.11. O Axioma da Redutibilidade

Nesta seção apresentaremos a importância do Axioma da Redutibilidade para evitar totalidades e respeitar o cumprimento do princípio do círculo vicioso. Veremos que a equivalência entre funções, garantida pelo Axioma da Redutibilidade, forma um conjunto de funções reunidas sob a relação de equivalência, reduzindo-as a uma ordem dada, excluindo desta ordem qualquer função que não seja a elas equivalente, que são as funções de ordem superiores a elas.

Além da hierarquia de funções determinar tipos de argumentos para tipos de funções, torna-se necessário garantir que a totalidade deve se restringir a uma certa ordem na hierarquia. Torna-se necessário garantir, por exemplo, que nenhuma das funções que são valores possíveis de $\phi\hat{z}$ deve ser restrita às funções do mesmo tipo que ela, que são equivalentes a ela, de modo que não faça qualquer referência à totalidade da função *f*, superior a ela na hierarquia, pois isso resultaria em um círculo vicioso, o que, pelo princípio do círculo vicioso, deve ser evitado para não incorrermos em paradoxos.

Por exemplo, seja a identidade expressa por "*x* é idêntico a *y*". Para definirmos tal identidade, temos que garantir que a definição seja válida para todos os casos de *x* e *y*, ou seja, "(ϕ) ϕx é equivalente a ϕy", pois se ela for válida para apenas alguns casos, a identidade se torna falsa, já que ela não poder ser verdadeira em alguns casos em não em outros. Mas, como propor uma definição total tomando como princípio o princípio do círculo vicioso? Para evitar totalidades e respeitar o cumprimento do princípio do círculo vicioso, os autores lançam mão do Axioma da Redutibilidade.

> O axioma da redutibilidade é a suposição de que, dada qualquer função $\phi\hat{x}$, há uma função predicativa formalmente equivalente, i. e., há uma função *predicativa* que é verdade quando ϕx é verdadeira e falsa quando ϕx é falsa. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 58-59, grifo do autor, tradução nossa)[352]

Como vimos na Seção 2.6, duas funções proposicionais ϕx e ψx são formalmente equivalentes se, e somente se, elas têm os mesmos argumentos, ou seja, se e somente se elas têm a mesma extensão ou o mesmo campo de valores.

---

[352] "The axiom of reducibility is the assumption that, given any function $\phi\hat{x}$, there is a formally equivalent *predicative* function, i. e. there is a predicative function which is true when ϕx is true and false when ϕx is false.".

Nesse sentido, voltando ao exemplo da definição da identidade, se x é idêntico a y, então "(ϕ) ϕx é equivalente a ϕy". A equivalência entre ϕx e ϕy garante que todos os valores de ϕx e ϕy devem se limitar à primeira-ordem, pois seus argumentos são indivíduos, e a equivalência forma um conjunto de funções de primeira-ordem. Assim, quando dizemos ϕx é equivalente a ϕy para todos os valores de ϕ, estamos limitando a função à primeira-ordem, já que estão excluídas desta ordem quaisquer funções que não sejam a elas equivalentes, como funções de ordem superiores a elas. A palavra "todo", referente à totalidade da identidade entre x e y se limita a todos os elementos da primeira-ordem, não podendo, assim, fazer uma referência a ordem que lhe é superior. Portanto, o Axioma da Redutibilidade, como o próprio nome diz, reduz a totalidade a certos tipos de funções ou a ordens na hierarquia de funções. Em resumo, dizem os autores: "Se desejamos falar de 'todos os valores de ϕ' devemos nos limitar a funções de uma ordem. Podemos limitar ϕ a predicados, ou a funções de segunda ordem, ou a funções de qualquer ordem que quisermos.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 59-60, tradução nossa)[353]

Ao restringirmos, com o Axioma da Redutibilidade, a validade total de uma propriedade a uma ordem, obtemos uma hierarquia de diferentes graus dessa propriedade. Em particular, no que concerne ao exemplo supracitado da propriedade de identidade, obtemos diferentes graus da propriedade de identidade. Neste caso, podemos dizer, então, que "todos os predicados de x pertencem y" "todas as propriedades de segunda ordem de x pertencem y" e assim por diante.

Na hierarquia de diferentes graus da propriedade de identidade, cada afirmação superior implica a afirmação inferior, isto é, a afirmação de que "todas as propriedades de segunda ordem de x pertencem y" implica na afirmação de que "todos os predicados de x pertencem y". Nas palavras dos autores "Cada uma dessas afirmações implica todos os seus antecessores […]". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 60, tradução nossa)[354], pois a afirmação de ordem superior, para que exista, pressupõe, necessariamente, a afirmação de ordem inferior a ela.

Entretanto, a implicação inversa, de que a afirmação inferior implica na afirmação superior, só pode ser evitada com a inserção do Axioma da Redutibilidade. Sobre isso, dizem os autores:

---

[353] "If we wish to speak of 'all values of ϕ' we must confine ourselves to functions of one order. We may confine ϕ to predicates, or to second-order functions, or to functions of any order we please.".

[354] "Each of these statements implies all its predecessors [...]".

> Mas não podemos, sem a ajuda de um axioma, argumentar, inversamente, que se todos os predicados de *x* pertencem a *y*, todas as propriedades de segunda ordem de *x* também deve pertencer a *y*. Assim, não podemos, sem a ajuda de um axioma, ter a certeza de que *x* e *y* são idênticos se eles têm os mesmos predicados. (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 60, tradução nossa)[355]

Assim, voltando ao Paradoxo de Russell, temos, como vimos, o conjunto $R = \{x/ x{\in}x\}$. Pelo Axioma da Redutibilidade, a função $x{\in}x$, vinculada à proposição "$(x)\ .\ x{\in}x$", é equivalente a todas as funções que têm o mesmo campo de valores (*range*), isto é, o conjunto total R se reduz a todas as funções que têm o mesmo campo de valores (*range*). Sendo campo de valores (*range*), neste caso, composto de indivíduos, então a função $x{\notin}x$ se reduz à função de primeira ordem.

Portanto, a totalidade expressa por R é uma totalidade que se reduz à função de primeira ordem. Logo, pelo Axioma da Redutibilidade, o conjunto total R deve ser assim expresso: $R = \{x \in A\ /\ x{\in}x\}$, tal que A expressa a primeira ordem a qual o conjunto total R se refere, isto é, a proposição "$(x)\ .\ x{\in}x$" é verdadeira para a totalidade do conjunto A, de primeira ordem, e não para a totalidade de x, o que implicaria todos os x possíveis em todas as ordens possíveis. Se considerássemos este x total, sem restrição, a pergunta por $R{\in}R$ faria sentido, cuja resposta, como vimos, implica em paradoxo. Mas, com a restrição do conjunto R ao conjunto A, não podemos perguntar se $R{\in}R$, pois o conjunto R já não é mais, por definição, o conjunto de todos os conjuntos.

Em resumo, vimos que para evitar totalidades e respeitar o cumprimento do princípio do círculo vicioso, os autores lançam mão do Axioma da Redutibilidade. A equivalência entre funções, garantida pelo Axioma da Redutibilidade, forma conjunto de funções reunidas sob a relação de equivalência, reduzindo-as a uma ordem dada, excluindo desta ordem qualquer função que não seja a elas equivalentes, que são as funções de ordem superiores a elas. Portanto, temos uma hierarquia de tipos de função matriz cujos argumentos são restritos, pelo Axioma da Redutibilidade, as funções de determinados tipos. A teoria dos tipos surge, então, como uma proposta para evitar possíveis paradoxos decorrentes de totalidades.

---

[355] "But we cannot, without the help of an axiom, argue conversely that if all the predicates of *x* belong to *y*, all the second-order properties of *x* must also belong to *y*. Thus we cannot, without the help of an axiom, be sure that *x* and *y* are identical if they have the same predicates.".

2.12. Conclusão

A função proposicional é vista por Russell como um importante instrumento de análise lógico-matemática. Russell compara a função proposicional com uma forma esquemática permanente para qualquer classe de proposições. Nesse sentido, escreve ele em seu livro intitulado "Introdução à Filosofia da Matemática" (1919) que "Uma função proposicional isoladamente pode ser tomada como mero esquema, mero invólucro, um receptáculo vazio para o significado e não como algo já significativo.". (RUSSELL, 1963, p. 155, tradução nossa).[356] Tal forma esquemática é condição lógica para as proposições e, também, para as classes e relações.

O conceito de função proposicional de Russell advém, como ele mesmo aponta, da distinção entre variável aparente e variável real, realizada por Peano; distinção contida, respectivamente, em proposições categóricas e proposições condicionais. Notamos que o conceito de função proposicional já se encontrava, de certo modo, latente na linguagem de Peano quando o mesmo introduz a notação "x:α". Nesta notação, quando uma variável x de uma proposição condicional é substituída por algo determinado, resulta em uma proposição categórica α verdadeira. Sendo que uma proposição α pode conter mais de uma variável, então, como vimos, Peano expressa a classe formada por todas a variáveis para as quais é verdadeira a proposição α por "(x, y, …):α".

Vimos na Seção 2.4 que, para Russell, a função proposicional se diferencia da função matemática, pois a primeira resulta em proposições e a segunda resulta, principalmente, em números. Vimos, também, na Seção 2.5, que Whitehead e Russell (cf. 1910, p. 4) dizem que na Matemática a variável serve, geralmente, de suporte para possíveis quantidades e números indeterminados, enquanto que na Lógica Matemática a variável pode ser, de acordo com as circunstâncias ou o contexto de aplicação na linguagem formal idealizada pelo lógico, qualquer conjunto de entidades, proposições, funções, classes ou relações. Isso quer dizer que, no entender de Russell, o domínio das entidades sobre as quais as variáveis que ocorrem na função proposicional variam é mais amplo que o domínio das entidades sobre as quais as variáveis da função matemática ordinária variam.

Nesse sentido, diz Hylton, em *Proposições, Funções e Análises*, que o conceito de função proposicional de Russell expressa uma entidade estruturada enquanto que a função

[356] "A propositional function standing all alone may be taken to be a mere schema, a mere shell, an empty receptacle for meaning, not something already significant.".

matemática não. Sobre isso, diz “Funções proposicionais suportam uma relação estrutural particular para as proposições que são os seus valores: a proposição compartilha a estrutura de qualquer função proposicional da qual é o valor.”. (HYLTON, 2005, p. 143, tradução nossa)[357] Essa estrutura é facilmente observável quanto tomamos, segundo Hylton, duas proposições diferentes, *Rab* e *Rba*, por exemplo, como resultantes da mesma estrutura $\psi(x,y)$. “Duas proposições que são ambas valores de uma dada função proposicional, para diferentes argumentos, tem algum aspecto de sua estrutura em comum, e que a estrutura também é constituída pela função proposicional.”. (HYLTON, 2005, p. 143, tradução nossa)[358]

No entender de Hylton isso contrasta com o conceito de função matemática, pois não faz sentido dizer que dois objetos resultantes da substituição na função matemática tenham a mesma estrutura tal como foi dito em relação à proposição. “[...] não há sentido plausível de ‘estrutura’ em que uma função matemática, e um objeto que é o valor dessa função para algum argumento, compartilha uma estrutura.”. (HYLTON, 2005, p. 143, tradução nossa).[359] Isso ocorre, pois não é parte da definição de função matemática estruturá-la como se estrutura uma função proposicional, pois ela não estrutura partes de proposições, mas se refere a números, cuja única ordem são pares ordenados. “Uma função matemática não é pensada naturalmente como uma entidade estruturada (se fosse, então a representação da teoria de conjunto de uma função como um conjunto de pares ordenados seria manifestamente inadequada).”. (HYLTON, 2005, p. 143, tradução nossa).[360] Por exemplo, enquanto que a função proposicional $\psi(x,y)$ agrega possíveis entidades x e y resultando, por exemplo, na proposição *Rab*, que é o resultado da conexão de a e b, em uma função matemática, por exemplo, $x + y = 12$, tal que se substituirmos x por 5 e y por 7, então temos como resultado o número 12; este número, observa Hylton, não é claramente uma conexão ou agregado de 5 e 7 ou mais complexo que 5 e 7 como enxergamos no caso de uma proposição, que é um complexo, ou um agregado, resultado da relação entre suas partes.

Embora a função proposicional se assemelhe a uma função matemática, pois ela é uma relação que associa cada valor da variável x a uma proposição, ela se diferencia da função

---

[357] “Propositional functions bear a particular structural relation to the propositions which are their values: a proposition shares the structure of any propositional function of which it is the value.”.
[358] “Two propositions which are both values of a given propositional function, for different arguments, have some aspect of their structure in common, and that structure is also shared by the propositional function.”.
[359] “[…] there is no plausible sense of ‘structure’ in which a mathematical function, and an object which is the value of that function for some argument, shares a structure.”.
[360] “A mathematical function is not naturally thought of as a structured entity (if it were, then the set-theoretic representation of a function as a set of ordered pairs would be grossly inadequate).”.

matemática, pois a primeira resulta em proposições e a segunda resulta, principalmente, em números. Desse modo, a função proposicional "Concorda com a função ordinária da matemática no fato de conter uma variável não atribuída; onde ela difere no fato de que os valores da função são proposições. Assim, por exemplo, '*x* é um homem' ou 'sin *x* = 1' é uma função proposicional.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1910, p. 41, tradução nossa)[361] Assim, Russell não considerava funções proposicionais como uma espécie de funções matemáticas, mas tomou funções proposicionais como o tipo fundamental de função de que os tipos mais usuais de função, tais como "sin *x*"... são derivadas. "Função proposicional é o tipo fundamental do qual os tipos mais usuais de função, como 'sin *x*' ou 'log *x*' ou 'o pai de *x*' são derivados. Estas funções derivadas são consideradas depois, e são chamadas de 'funções descritivas'.". (Russell, 1960, p. 15, tradução nossa)[362]

As funções descritivas descrevem um certo termo pelo significado de sua relação com o valor que substitui a variável na função. Por exemplo, a função matemática x^2 relaciona o número que substitui a variável *x* com o número que resulta desta substituição na referida variável. "Funções desse tipo sempre significam 'o termo tem tal e tal relação com *x*'. Por esta razão, elas podem ser chamadas de funções *descritivas*, porque elas *descrevem* um determinado termo pelo significado de sua relação com o seu argumento.". (Russell, 1960, p. 232, tradução nossa, grifo do autor)[363]

Assim, enquanto Russell distingue função proposicional de função matemática, a função proposicional de Frege é uma generalização da função matemática, de função aplicável em diversos domínios, seja no âmbito das equações matemáticas, seja no âmbito das proposições em geral. Mas, se pudéssemos estabelecer uma semelhança entre ambas as concepções, diríamos que tanto para Frege quanto para Russell a função proposicional é o esquema de análise mais simples e irredutível da proposição, pois expressa sua forma lógica mais elementar

O conceito de função proposicional só é possível enquanto forma esquemática com o conceito de variável que nela ocorre, a variável real. A variável real expressa a possibilidade

[361] "It agrees with the ordinary function of mathematics in the fact of containing an unassigned variable; where it differs is in the fact that the values of the function are propositions. Thus e.g. '*x* is a man' or 'sin *x* = 1' is a propositional function.".
[362] "Propositional function are the fundamental kind from which the more usual kinds of function, such as 'sin *x*' or 'log *x*' or 'the father of *x*' are derived. These derived function are considered later, and are called 'descriptive functions'.".
[363] "Functions of this kind always mean 'the term having such and such a relation to *x*'. For this reason they may be called *descriptive* functions, because they *describe* a certain term by means of its relation to their argument.".

de substituição na função proposicional, possibilidade esta que constitui sua essência e é condição para a sua forma esquemática. Essa possibilidade de substituição resulta em proposições e não, por exemplo, em números, como ocorre com as funções matemáticas. Podemos dizer que essa possibilidade de substituição expressa pela variável na função proposicional é condição para a forma lógica.

Em *A Filosofia do Atomismo Lógico* (1918), diz Russell que "[...] a distinção entre fatos particulares e gerais é uma distinção da maior importância.". (RUSSELL, 1992, p. 58). As afirmações sobre fatos gerais são de suma importância para uma descrição completa do mundo, condição para a Lógica e as ciências em geral, pois não existe ciência do particular, embora a descrição do particular seja importante na elaboração e confirmação de uma teoria que, em essência, é um conjunto de enunciados gerais que correspondem a fatos gerais do mundo. No caso da Lógica, os fatos são tão gerais que não existe menção aos fatos particulares. "Esta é uma das características das proposições lógicas, a de que elas não mencionam nada. Tal proposição é: 'Se uma classe é parte de outra, um termo que é membro da primeira é também um membro da outra'.". (RUSSELL, 1992, p. 58)

Isso quer dizer que o objeto da Lógica são as formas. Assim, as palavras presentes nos enunciados da lógica são, por natureza, "[...] palavras que expressam simplesmente uma forma ou conexão, não mencionando qualquer constituinte particular da proposição na qual elas ocorrem.". (RUSSELL, 1992, p. 58). A forma é expressa pelas variáveis que ocorrem nas proposições ou nas funções proposicionais. Isso significa que não há proposições lógicas sem o uso de variáveis. "[...] as funções proposicionais que contêm somente variáveis e nada além. Isto engloba toda a lógica. Toda proposição lógica se constitiui total e unicamente de variáveis, embora não seja verdadeiro que toda proposição que se constitui total unicamente de variáveis seja lógica. (RUSSELL, 1992, p. 101, grifo do autor). Vimos também que o estudo da função proposicional é fundamental para a determinação do significado dos termos que ocorrem na proposição, isto é, para o estudo da denotação.

O propósito do estudo da denotação consiste em analisar e determinar o significado lógico dos termos que compõem uma proposição. Essa análise proposta por Russell em *Da Denotação* (1905) se constitui como uma teoria das descrições. Esta teoria contém, em essência, a articulação entre pelo menos três funções proposicionais, tal que uma fixa a propriedade básica da entidade descrita ("todo", "nenhum" ou "algum"), a outra estabelece a sua unicidade e a outra atribui um predicado a esta entidade. (cf. PINTO, 2001, p. 26). Nesse sentido, Russell se volta para as formas lógicas das proposições, onde a análise das sentenças é realizada a partir das descrições definidas, cuja análise é realizada a partir dos conceitos de variável, funções proposicionais e quantificação lógica.

O estudo da denotação contribui, assim, para a descrição do significado lógico dos termos ou das expressões denotativas, constituindo-se em uma teoria das descrições definidas. Para determinar o significado das expressões denotativas, Russell analisa sua estrutura interna, isto é, a sua forma. Para isso, ele parte da noção de variável como um conceito fundamental presente nos esquemas da função proposicional. A determinação da denotação das partes constituintes de uma proposição quantificada e da proposição como um todo contribui, assim, para o estudo da formalização de uma proposição, pois, para determinar o significado das expressões em geral, torna-se necessário a análise de sua forma. Nisso a função proposicional é determinante como um esquema de análise logico-matemática, apontando, inclusive, para reflexões em torno de uma teoria do conhecimento.

O conceito de variável real, atrelado à função proposicional, traz consigo uma coleção ou um campo de valores que esta expressão pode assumir ao substituirmos a variável *x* pelas constantes contidas no campo abrangido pelo escopo dessa variável. Essa possibilidade de valores, expresso pela variável, nos autoriza a dizer, com isso, que “todos” ou “alguns” ou “nenhum” *x* tem a propriedade expressa por funções proposicionais. “As sentenças contendo palavras como ‘todos’, ‘todas’, ‘todo’, ‘toda’, ‘o’, ‘a’, ‘alguns’, ‘algumas’ requerem uma função proposicional para sua interpretação”. (RUSSELL, 1963, p. 158, tradução nossa).[364] Nesse sentido, “Expressões da Lógica tradicional, tais como ‘todo *A* é *B’*, são funções proposicionais: *A* e *B* são determinados como classes definidas antes que tais expressões sejam verdadeiras ou falsas [...].”. (RUSSELL, 1963, p. 156, tradução nossa)[365]

Diz ainda Russell que “Há, em última análise, apenas duas coisas que podem ser feitas com uma função proposicional: uma é afirmar que ela é verdadeira em *todos* os casos; outra é afirmar que ela é verdadeira em pelo menos um caso, ou em *alguns* casos”. (RUSSELL, 1963, grifo do autor, grifo do autor, p. 153)[366], pois “Todos os outros usos das funções

[364] “Sentences involving such words as ‘all’, ‘every’, ‘a’, ‘the’, ‘some’ require prepositional functions for their interpretation.”.
[365] “Expressions of traditional logic such as ‘all *A* is *B*’ are propositional functions: *A* and *B* have to be determinedas definite classes before such expressions become true or false.”.
[366] “There are, in the last analysis, only two things that can be done with a propositional function: one is to assert that it is true in *all* cases, the other to assert that it is true in at least one case, or in *some* cases [...]”.

proposicionais podem ser reduzidos a esses dois". (RUSSELL, 1963, p. 158, tradução nossa).[367] Assim, as proposições contendo as palavras "todos", "todas", "todo", "toda", "o", "a", "alguns", "algumas", "nenhum", "nenhuma", podem ser todas reduzidas ou sintetizadas, com o uso de funções proposicionais, à proposições envolvendo apenas as palavras "todos" e "alguns". As palavras "o" e "a" são casos e, portanto, podem têm o mesmo significado que "alguns", que quer dizer "ao menos um". A palavra "nenhum" pode ser reduzida a "todos", pois, como vimos na Seção 3, a palavra "nenhum", que quer significa "não existe ao menos um" ou "não existe um", expressa por "$\sim(\exists x) \,.\, \phi x$", tem o mesmo significado que "não existe algo, qualquer que seja este algo", expresso por "$(x) \,.\, \sim\phi x$"; então, $\sim(\exists x) \,.\, \phi x$ tem o mesmo significado que $(x) \,.\, \sim\phi x$. Vimos, também, que podemos sintetizar todos os usos de funções proposicionais em dois casos, *todos* e *alguns*, mas, também, podemos definir um caso a partir de outro, isto é podemos definir o conceito de "alguns" a partir do conceito de "todos", $(\exists x) \,.\, \phi x \,.\, \equiv \,.\, \sim (x) \,.\, \sim\phi x$ (Df), ou o conceito de "todos" a partir do conceito de "alguns", $(x) \,.\, \phi x \,.\, \equiv \,.\, \sim (\exists x) \,.\, \sim \phi x$.

É notável, também, que a variável real diferencia, precisamente, o conceito de função proposicional do conceito de proposição. Vimos na Seção 1 que é no contexto de distinção entre variável real e variável aparente, introduzidos no contexto de definição de proposição, que surge pela primeira vez o termo "função proposicional". Nesse contexto, torna-se claro que em proposições não há ocorrência de variável real, podendo ocorrer variáveis aparentes, e funções proposicionais são possíveis com o conceito de variável real. Sobre a importância da distinção do conceito de proposição do conceito de função proposicional, escreve Russell: "Para o raciocínio claro, em muitas direções bem diversas, o hábito de manter as funções proposicionais claramente separadas das proposições é da mais alta importância, e a incapacidade em fazê-lo no passado foi uma desgraça para a Filosofia.". (RUSSELL, 1963, p. 166, tradução nossa)[368]

Embora proposições e funções proposicionais sejam distintos conceitualmente, podemos observar uma intrínseca relação entre elas. Vimos que Russell classifica as proposições em dois tipos: as proposições atômicas e as proposições moleculares. Proposições atômicas são proposições que não decomponíveis em proposições mais simples, resultantes da

---

[367] "All the other uses of propositional functions can be reduced to theses two.".

[368] "For clear thinking, in many very diverse directions, the habit of keeping propositional functions sharply separated from propositions is of the utmost importance, and the failure to do so in the past has been a disgrace to philosophy.".

substituição de variáveis por valores constantes em funções proposicionais. Já as proposições moleculares são definidas como contendo em suas partes as proposições atômicas, mas não se limitando a elas, pois adquirem novos elementos, proposições obtidas pelas seguintes funções: a negação, a conjunção, a disjunção ou a implicação. Nesse sentido, tais proposições moleculares são obtidas por uma aplicação finita de regras sobre proposições elementares, regra expressa por função proposicional, a função de proposições $F\ (p, q, r, \ldots)$, que é uma função de verdade. A função de verdade faz corresponder para cada valor de verdade das proposições atômicas ou moleculares um valor de verdade correspondente em uma proposição resultante.

Vimos, também, que as funções proposicionais são fundamentais para compreendermos as propriedades análogas que há entre as proposições expressas no nível das classes e relações e as proposições moleculares. Assim, podemos dizer que a função proposicional é condição para as proposições atômicas, e gera, na condição de função de proposições, proposições moleculares a partir de proposições atômicas, permitindo, com isso, passo a passo, gerar proposições mais complexas a partir de proposições mais simples. Assim, funções proposicionais são formas esquemáticas permanentes para qualquer classe de proposições, sejam de proposições atômicas, geradas com a atribuição de valores para uma variável na função, sejam em proposições moleculares, pela atribuição de valores às variáveis proposicionais nas funções de proposições $F\ (p, q, r, \ldots)$.

Encontramos o conceito de função proposicional presente tanto nos enunciados da linguagem corrente quanto nos enunciados da linguagem matemática. Em uma análise lógica sobre gramática da linguagem corrente, em particular da relação sujeito-predicado, observa Russell que os verbos estão conectados às noção de funções proposicionais, pois o verbo é condição para que o enunciado gramatical se torne uma proposição. O verbo garante a asserção do enunciado e o consequente valor de verdade, verdadeiro ou falso, dela decorrente. Conectados aos verbos estão os termos que, enquanto objetos do pensamento, formam unidades afirmativas como um todo, as proposições. No caso dos enunciados matemáticos uma das fontes para derivar a noção de função proposicional é, como vimos, o estudo sobre as afirmações que envolvem a noção “tal que”, noção geralmente presente nos enunciados matemáticos. O que aparece depois de *tal que* nos enunciados matemáticos exerce o papel de função proposicional.

Analisando enunciados matemáticos torna-se claro que funções proposicionais são condição lógica para as classes e relações, pois as antecedem logicamente. Tal ordem das razões lógicas reafirma a posição de não se considerar as classes como o "equipamento final do mundo". Nesse sentido, diz Russell "A primeira coisa é perceber-se o porquê de as classes não poderem ser consideradas parte do equipamento final do mundo. É difícil explicar precisamente o que se quer dizer com essa afirmação, mas uma consequência nela implicada pode ser usada para elucidar seu significado.". (RUSSELL, 1963, p. 182, tradução nossa)[369]

O que torna evidente a separação conceitual entre classe e função proposicional, sendo esta condição para aquela, é que uma mesma classe pode ter mais de uma função proposicional como condição de sua determinação. Quando a isso diz Russell "[...] se uma classe pode ser definida por uma função proposicional, pode igualmente ser bem definida por qualquer outra que seja verdadeira quando a primeira for verdadeira e falsa quando a primeira for falsa." (RUSSELL, 1963, p. 176, tradução nossa).[370] Então, como exemplificado na Seção 5, "*x* é o mais ilustre discípulo de Platão" e "*x* é o grande filósofo de Estagira" determinam a mesma classe, a saber, a classe unitária composta pelo filósofo Aristóteles. Assim, diz o autor que "Por essa razão a classe não pode ser mais identificada com tal função proposicional do que com qualquer outra – e, dada uma função proposicional, há sempre muitas outras que são verdadeiras quando ela é verdadeira e falsas quando ela é falsa.". (RUSSELL, 1963, p. 183, tradução nossa).[371] A possibilidade de funções terem a mesma classe leva Russell a definir o conceito de equivalência entre funções proposicionais ou o conceito de funções formalmente equivalentes.

Vimos que funções proposicionais são formalmente equivalentes quando tais funções têm o mesmo significado para as mesmas classes, isto é, toda vez que uma é verdadeira, a outra é verdadeira, e toda vez que uma é falsa, a outra é falsa. Notamos na Seção 5 que o conceito de equivalência entre funções reforça não apenas a necessidade de separação conceitual entre classe e função proposicional, mas, também, garante a unicidade dos conceitos de classe e relação. A equivalência entre funções garante que não é o fato de haver

---

[369] "The first thing is to realize why classes cannot be regarded as part of the ultimate furniture of the world. It is difficult to explain precisely what one means by this statement, but one consequence which it implies may be used to elucidate its meaning."

[370] "[...] if a class can be defined by one propositional function, it can equally well be defined by any other which is true whenever the first is true and false whenever the first is false.".

[371] "For this reason the class cannot be identified with any one such propositional function rather than with any other – and given a propositional function, there are always many others which are true when it is true and false when it is false.".

duas funções para a mesma classe ou para a mesma relação que teremos classes e relações distintas.

Observamos, na Seção 2.6, que a unicidade das classes ou das relações, ao pressupor, por definição, um conjunto de equivalências entre funções proposicionais, garante que possamos reunir conjuntos de funções proposicionais equivalentes sob uma mesma expressão, conjuntos que expressam uma determinada forma de um determinado tipo de função proposicional. Por exemplo, funções de uma variável x que pertence a uma classe α, são expressas pela forma $x \in \alpha$, que é o mesmo que dizer que ϕx. Outro exemplo: funções de duas variáveis, tal que x mantém uma relação R com y, são expressas pela forma xRy, que é o mesmo que ψxy. Assim, transformamos e reunimos, pelo conceito de equivalência, funções da mesma forma sob uma mesma expressão, tal que não apenas x e y são variáveis, variáveis individuais, mas também ϕ e ψ, variáveis funcionais. Nesse sentido, escreve Russell "Podemos, na verdade, transformar todos os constituintes de uma proposição em variáveis, mantendo a forma inalterada. É isso o que fazemos quando usamos um esquema como '*xRy*', que representa qualquer um membro de uma certa classe de proposições, a saber, as que afirmam as relações entre dois termos.". (RUSSELL, 1963, p. 199, tradução nossa)[372]

A definição de equivalência formal só é possível a partir da definição do conceito de classe. Isso mostra que a análise lógico-matemática é uma análise essencialmente extensional. Mas, será que devemos considerar apenas a análise extensional? Aponta Russell que, se admitíssemos apenas a análise extensional, constataríamos:

(i) "[...] ser impossível entender como pode haver uma classe como a classe nula, que não tem membro algum [...]" (RUSSELL, 1966, p. 176), pois só podemos chegar ao conceito de classe nula supondo uma propriedade de antemão para, então, constatarmos que tal propriedade suposta de antemão não possui elemento. Por exemplo, seja a propriedade "*x* não é idêntico a si mesmo"; tal propriedade não tem elementos, pois, pelo princípio da identidade, todo objeto é idêntico a si mesmo, isto é, tal propriedade é uma função proposicional que resulta em uma proposição falsa para todos os objetos considerados.

(ii) "[...] teríamos muita dificuldade em compreender como uma classe que só tem um membro não é idêntica a esse membro." (RUSSELL, 1966, p. 176), por exemplo, teríamos dificuldade em compreender como o que é expresso pelo enunciado "Luas da Terra" não é

[372] "We can, in fact, turn all the constituents of a proposition into variables, while keeping the form unchanged. This is what we do when we use such a schema as '*xRy*', which stands for any one of a certain class of propositions, namely, those asserting relations between two terms.".

idêntico ao que expresso pelo termo “Lua”; pois, como sabemos, o enunciado “Luas da Terra” expressa a classe das luas da terra, definida pela função proposicional “*x* são as luas da Terra”, o termo “Lua” designa um indivíduo, a Lua; distinção esta que se torna evidente com o conceito de função proposicional, pois nos permite compreender que é necessária a distinção entre classe e membro desta classe.

Assim, embora Russell diga que “[...] apesar de todo o tratamento simbólico ter que trabalhar em grande parte com a classe-conceitos e intensão, classes e extensão são logicamente mais fundamentais para os princípios da Matemática [...]”. (RUSSELL, 1903, §79, p. 67, tradução nossa)[373], ele diz que “Não podemos considerar as classes de modo extensional *puro* simplesmente como montes ou conglomerados.” (RUSSELL, 1966, grifo do autor, p. 176). Nesse sentido, podemos observar que o plano de análise extensional evita confusões propiciadas pelas noções abstratas e, portanto, psicológicas que o plano de análise intensional pode trazer para o estudo dos princípios da Matemática. Mas a análise intensional tem sua importância, pois faz com que as classes, por exemplo, não sejam simples montes ou conglomerados de indivíduos, com importantes perdas para uma análise lógico-matemática, por exemplo, a impossibilidade de compreensão do que seja a classe nula ou uma possível confusão entre classe e membro desta classe.

Se não podemos considerar as classes de modo extensional puro, não podemos considerar as funções proposicionais apenas do ponto de vista intensional. Do ponto de vista intensional, as funções proposicionais seriam entidades puras, ideias abstratas, expressas apenas por ϕ. Mas, a função proposicional, por ser uma função matemática, é, também, extensional, isto é, o termo ϕ, por exemplo, está relacionado à classe dos objetos que podem que substituir x em na função expressa por ϕx. “É de se observar que, de acordo com a teoria de funções proposicionais aqui defendida, o ϕ em ϕx não é uma entidade separada e distinta, ela vive nas proposições da forma ϕx e não pode sobreviver à análise.”. (RUSSELL, 1903, § 85, p. 88, tradução nossa)[374]

O conceito de variável associada à essência da função proposicional não se restringe ao conceito de variável real, mas abarca também o conceito de variável irrestrita. A variável irrestrita é um conjunto de valores quaisquer de objetos que torna significativa a sentença no

---

[373] “[…] although any symbolic treatment must work largely with class-concepts and intension, classes and extension are logically more fundamental for the principles of Mathematics [...]”.
[374] “It is to be observed that, according to the theory of propositional functions here advocated, the ϕ in ϕx is not a separate and distinguishable entity it lives in the propositions of the form ϕx, and cannot survive analysis”.

contexto em que ela ocorre, isto é, que torna significativa a função proposicional considerada. Se o conjunto de valores não são quaisquer valores, temos, por oposição, as variáveis restritas. Como a variável irrestrita implica um conjunto de valores quaisquer, seus valores podem não se apenas classes e proposições, mas, também, funções.

A possibilidade de substituir as variáveis na função proposicional por funções abre novos horizontes de análise para o estudo da função proposicional e o consequente surgimento dos paradoxos e da teoria dos tipos deles decorrentes. Os paradoxos surgem desta possibilidade de substituição de variáveis por funções, em particular de funções concernidas a conjuntos totais, cuja totalidade envolve a si mesmas.

Nesse sentido, uma análise dos paradoxos mostra que todos eles resultam de um certo tipo de círculo vicioso, decorrentes de totalidades. O princípio que permite evitar os paradoxos é, como vimos, o princípio do círculo vicioso. O princípio do círculo vicioso consiste em afirmar que a totalidade não deve ser entendida como uma coleção ou um conjunto, pois não tem significado lógico. Notamos que por detrás do círculo vicioso há funções de funções, em particular, funções que tem como argumento a si mesma.

Vimos também que funções requerem argumentos de um certo tipo, em particular, funções do tipo ϕx requerem argumentos do tipo a, e funções do tipo $\phi(\psi x)$, requerem, necessariamente argumentos do tipo ψx. Há, portanto, tipos de argumentos para tipos de funções. Um tipo é definido como o *range* de significância de alguma função. Funções que têm o mesmo campo de valores são funções do mesmo tipo e funções que não têm o mesmo campo de valores são funções de tipos diferentes e mutuamente excludentes, o que aponta para uma hierarquia de funções, e de proposições decorrentes destas funções, e consequentemente para uma teoria de tipos de funções e das proposições destas decorrentes.

Para classificar e ordenar as funções em tipos lógicos, torna-se necessário um critério. Nesse sentido, vimos que a partir eliminação sucessiva de variáveis aparentes nas proposições podemos obter funções proposicionais originais e subjacentes a cada uma das proposições nas quais tais variáveis ocorrem. Os autores chamam tais funções de “função matriz”.

A função matriz é um tipo de função básica que nos permitem construir uma hierarquia de tipos de funções, condição para uma teoria dos tipos de funções. A partir do conceito de função matriz, os autores podem dividir as funções, e proposições que decorrem delas, em tipos. Nesse sentido, em coleção de funções matriz que não envolvem variáveis exceto indivíduos são as funções de primeira-ordem, as matrizes que têm funções de primeira-ordem entre os seus argumentos são matrizes de segunda ordem. Na sucessão da hierarquia de funções, podemos ter, também, matrizes de terceira-ordem cujas funções, e funções delas decorrentes, conterão, necessariamente, funções de segunda ordem como argumento. Desse modo, a hierarquia de funções segue indefinidamente, embora tal hierarquia seja finita, pois o número de argumentos e de variáveis aparentes em uma função deve ser finita.

Além da hierarquia de funções determinar tipos de argumentos para tipos de funções, torna-se necessário garantir que a totalidade deve se restringir a uma certa ordem na hierarquia, de modo que não faça referência à totalidade superior a ela na hierarquia, pois isso resultaria em um círculo vicioso, o que, pelo princípio do círculo vicioso, deve ser evitado para não incorrermos em paradoxos. Vimos que para evitar totalidades e respeitar o cumprimento do princípio do círculo vicioso, os autores lançam mão do Axioma da Redutibilidade.

A equivalência entre funções, garantida pelo Axioma da Redutibilidade, forma conjuntos de funções reunidas sob a relação de equivalência, reduzindo-as a uma ordem dada, excluindo desta ordem qualquer função que não seja a elas equivalentes, que são as funções de ordens superiores a elas. Portanto, considerando Paradoxo de Russell, o conjunto $R = \{x \,/\, x \in x\}$, que dava condição para o paradoxo, agora é expresso por "$R = \{x \in A \,/\, x \in x\}$", tal que A é a restrição do conjunto à primeira ordem; com isso não podemos perguntar se $R \in R$, pois o conjunto R já não é mais, por definição, o conjunto de todos os conjuntos. Portanto, temos uma hierarquia de tipos de função matriz cujos argumentos são restritos a funções de determinados tipos, pelo Axioma da Redutibilidade. A teoria dos tipos surge, então, como uma proposta para evitar possíveis paradoxos decorrentes de totalidades.

Uma consequência do Axioma da Redutibilidade é o que o Axioma Esquema da Compreensão utilizado hoje em dia, por exemplo, na Teoria dos Conjuntos. Segundo este axioma, seja uma propriedade $P(x)$; para todo conjunto A, existe um conjunto B, tal que $x \in B$ se e somente se $x \in A$ e $P(x)$, o que pode ser expresso por $\forall A\ \exists B\ (x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge P(x))$. Neste postulado estamos definindo os elementos de B. A restrição de x ao conjunto A neste postulado é para evitar paradoxos, pois se x não fosse restrito a um conjunto A, estaríamos admitindo o conjunto de todos os conjuntos.

Podemos perceber, assim, que as discussões e propostas de Russell sobre contradições e fundamentação da Matemática, origem para a elaboração da Teoria dos Tipos, centra-se na análise do papel da função proposicional. Tendo em vista a relevância da necessidade de dissolução de contradições no interior da Lógica, Russell fecha *Os Princípios da Matemática* (1903) recomendando que estudantes de Lógica passassem a se preocupar com tais questões "Qual pode ser a solução completa da dificuldade, eu não consegui descobrir; mas como isso afeta os próprios fundamentos do raciocínio, eu sinceramente recomendo seu estudo com atenção de todos os estudantes de lógica.". (RUSSELL, 1903, § 500, p. 528, tradução nossa)[375] Ele aponta, com isso, para a necessidade de trabalhos futuros no campo da Lógica Matemática na dissolução de contradições. Parece, com isso, preparar o terreno para o mais eminente dos estudantes de lógica que Russell poderia ter em suas mãos: Ludwig Wittgenstein.

[375] "The totality of all logical objects, or of all propositions, involves, it would seem, a fundamental logical difficulty. What the complete solution of the difficulty may be, I have not succeeded in discovering; but as it affects the very foundations of reasoning, I earnestly commend the study of it to the attention of all students of logic.".

Capítulo III: Wittgenstein e a função proposicional

Herdeiro direto das filosofias de Russell e Frege, Ludwig Wittgenstein se diz devedor da filosofia desses pensadores logo no Prefácio do "Tractatus Logico-Philosophicus" (1921). "Desejo apenas mencionar que devo às obras grandiosas de Frege e aos trabalhos de meu amigo Bertrand Russell uma boa parte do estímulo às minhas ideias.". Tendo em vista o significado e importância do conceito de função proposicional nos trabalhos de Frege e Russell, analisaremos, neste capítulo, o significado do conceito de função proposicional no *Tractatus* de Wittgenstein.

3.1. O *Tractatus Logico-Philosophicus*

Faremos, nesta seção, uma apresentação do *Tractatus Logico-Philosophicus* de Wittgenstein. Apresentaremos, brevemente, alguns dados historiográficos acerca do contexto de publicação da obra[376] e daremos, em seguida, um panorama da mesma: apresentando seu problema central, seus propósitos, as teses centrais e comentários gerais sobre seu estilo e arquitetura.

O *Tractatus* foi a primeira e única obra de Wittgenstein publicada em vida. A obra foi publicada, originalmente, em 1921, na revista *Anais de Filosofia Natural* [*Annalen der Naturphilosophie*], sob o título "Tratado Lógico-Filosófico" (*Logisch-Philosophische Abhandlung*). Porém, ela recebeu o seu atual e mais conhecido título em latim "Tractatus Logico-Philosophicus"[377] na edição de 1922.

A edição de 1922 foi, também, publicada em alemão, mas acompanhada de sua primeira tradução, a tradução para a língua inglesa. A tradução inglesa foi assinada por Charles Kay Ogden com a colaboração de Frank Plumpton Ramsey, ambos contemporâneos a Wittgenstein na Universidade de Cambridge. A pedido dos tradutores, a tradução foi revista pelo próprio Wittgenstein.

O título latino foi uma sugestão de George Edward Moore (1873 – 1958) a Wittgenstein como uma espécie de referência ao *Tractatus Theologico-Politicus* de Baruch

---

[376] Para isso consultamos aqui as seguintes referências: 1) MARION, M. *Ludwig Wittgenstein*: uma introdução ao Tractatus Lógico-Philosophicus. São Paulo: Annablume, 2012. 2) MONK, R. *Wittgenstein*: o dever do gênio. São Paulo: Companhia das Letras, 1995. 3) PEARS, D.; MACGUINNES, B. Translators' Preface. In: WITTGENSTEIN, L. *Tractatus logico-philosophicus*. London and New York: Routledge Classics, 2002. 4) *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Bibliography: Wittgenstein's Works. Disponível no seguinte link: http://plato.stanford.edu/entries/wittgenstein/#Bib.

[377] Designaremos, a partir de agora, essa obra apenas de *Tractatus* (1921).

Spinoza (1632 – 1677), pois Moore teria encontrado, na última parte do *Tractatus* (1921), proposições com um “sabor” filosófico spinozano.

A edição inglesa de 1922 conta, ainda, com uma introdução escrita por Betrand Russell, seu professor e tutor na Universidade de Cambridge. Muito embora o texto escrito por Russell tenha sido recusado pelo próprio Wittgenstein, sob alegação deste de que Russell não teria compreendido os propósitos da obra, a aceitação de Wittgenstein ter-se-ia dado, pois sem a conhecida influência de Russell na comunidade filosófica, a publicação não teria saído em forma de livro.

Posteriormente, em 1961, é publicada uma nova edição bilíngue, com tradução de David Pears e Brian MacGuinnes. A versão do texto alemão, que aparece nesta edição da obra, pode ser considerada como uma versão mais estabelecida da obra, pois, segundo os tradutores (2002, p. vii), o texto toma como referência os comentários e sugestões de Wittgenstein, resultados das correspondências entre C. K. Ogden e Wittgenstein sobre a tradução inglesa de 1922. A edição de 1961 conta, ainda, com o mesmo texto introdutório de Bertrand Russell, publicado na edição de 1922, sem quaisquer alterações.

A tradução de nossa consulta é essa edição bilíngue de 1961 com tradução de Pears e MacGuinnes: WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. David Pears e Brian MacGuinnes. London and New York: Routledge Classics, 2002. Tomamos, também, como referência a já conhecida tradução para a língua portuguesa de Luiz Henrique Lopes dos Santos, traduzida diretamente da edição bilíngue de 1961, a saber: WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.[378] Consultamos, também, a tradução para o francês, preâmbulo e notas de Gilles Gaston Granger: WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. Gilles Gaston Granger. Éditions Gallimard, 1993.

O *Tractatus* (1921) está circunscrito por um conjunto de textos que podem nos ajudar na sua compreensão mais integral. O primeiro deles, na ordem cronológica, é o livro intitulado “Notas sobre a Lógica” (*Notes on Logic*), que é resultado de anotações taquigráficas feitas por Philip Jourdain, secretário de Russell, em um encontro entre Wittgenstein e Russell no verão de 1913. Tais anotações foram suplementadas por um manuscrito datilografado que Wittgenstein ditou alguns dias depois, quando estava em Birmingham, Inglaterra. Juntos, o

[378] A primeira tradução para a língua portuguesa do *Tractatus* (1921) foi realizada por José Arthur Giannotti e publicada em 1968. Eis a referência: WITTGENSTEIN, Ludwig. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. José Arthur Giannotti. São Paulo: Companhia Editora Nacional e Editora da Universidade de São Paulo.

manuscrito e o ditado, constituem o livro "Notas sobre a Lógica", que pode ser considerado a primeira obra filosófica de Wittgenstein.

O outro texto intitulado "Notas ditadas a G. E. Moore na Noruega" (*Notes dictated to G. E. Moore in Norway*) é resultado da visita que George Edward Moore fez a Wittgenstein na Noruega entre Março e Abril de 1914. Tais textos compõem, junto com outros textos, o livro intitulado "Cadernos de Notas: 1914 – 1916" (*Notebooks 1914 – 1916*). O *Caderno de Notas* inclui, ainda, as notas escritas durante os meses de Maio e Junho em Cracóvia, onde Wittgenstein prestou serviço para o regimento de artilharia do exército austríaco, quando a Áustria declarou guerra à Rússia.

Entre Janeiro de 1917 e Março de 1918, ainda em contexto de guerra, Wittgenstein teve tempo para reorganizar seus escritos mais ou menos sob a forma que assumiu no *Tractatus* (1921). Este seu trabalho resultou na primeira versão do *Tractatus* (1921): o manuscrito publicado sob o título "Prototractatus", cuja versão preliminar seria publicada integralmente apenas em 1971.

Após a publicação do *Tractatus* (1921), Wittgenstein se desinteressa pela Filosofia, voltando a ela em 1928 e 1929, quando encontra os membros do Círculo de Viena. O conteúdo dos textos desta época permanecem, ainda, próximos ao *Tractatus* (1921). Temos, então, os textos intitulados "Algumas Observações sobre a Forma Lógica" (1929) (*Some remarks on logical form*), "Conferência sobre Ética" (1929) (*A lecture on Ethics*), "Wittgenstein e o Círculo de Viena" (1929) (*Wittgenstein und der Wienerkreis*) e "Ditados de Wittgenstein à Waismann e Schlich" (1929) (*Dictées de Wittgenstein à Waismann et pour Schlich*).

Podemos dizer que até 1929 os textos de Wittgenstein ainda continham ideias estabelecidas pelo *Tractatus* (1921), mesmo que tais textos já estivessem no limiar para a nova fase de seu pensamento; fase que muitos estudiosos vieram a designar, porteriormente, por "Segundo Wittgenstein", em oposição às concepções até então expressas por ele em torno do *Tractatus* (1921), designadas, nesse sentido, de "Primeiro Wittgenstein". Ir além do *Tractatus* (1921) é fugir ao escopo de nosso trabalho.

No Prefácio do *Tractatus* (1921), Wittgenstein apresenta, logo de início, o tema central da obra: "O livro trata dos problemas filosóficos e mostra – creio eu – que a formulação desses problemas repousa sobre o mau entendimento da lógica de nossa linguagem.". (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131)

Obviamente, o fato de tratar de problemas filosóficos não é novidade entre os filósofos na História da Filosofia, sendo, inclusive, necessário. Mas a tese de que os problemas filosóficos repousam sobre a má compreensão da lógica de nossa linguagem era uma ideia muito viva para Wittgenstein, pois elas advinham do contato e influências diretas de Frege e Russell sobre seu pensamento.[379]

Frege logo no início de *Sobre a Justificação Científica de uma Conceitografia* (1882) (*Ueber die wissenshaftliche Berechtigung einer Begriffsschrift)*, por exemplo, diz que "Nas partes abstratas da ciência faz-se sentir continuamente a falta de um meio de evitar mal-entendidos e, ao mesmo tempo, erros no próprio pensamento. Ambos têm origem na imperfeição da linguagem.". (FREGE, p. 191, p. 1980)

De modo semelhante, diz Russell em *Os Princípios da Matemática* (1903) (*The Principles of Mathematics*): "O estudo da gramática, na minha opinião, é capaz de jogar muito mais luz sobre questões filosóficas do que é comumente suposto por filósofos.". (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa).[380] Nesta mesma passagem, ainda diz: "Em geral, a gramática parece nos trazer muito mais perto de uma lógica correta do que as opiniões atuais dos filósofos [...]". (RUSSELL, 1903, § 46, p. 42, tradução nossa)[381]

Assim, tanto Frege quanto Russell apontam, também, para uma análise crítica da linguagem, procurando captar, cada um a sua maneira, a lógica de nossa linguagem, utilizando-se, como dispositivo, instrumentos da Lógica. Segundo Anscombe no seu livro "Uma introdução do *Tractatus* de Wittgenstein" (*An introduction to Wittgenstein's Tractatus*), "[...] este dispositivo da lógica moderna ao menos é um instrumento para a clarificação do pensamento que é de uso para quem se envolve em raciocínio. E sem o desenvolvimento desta

---

[379] Em 1911 Wittgenstein viaja até Iena para discutir algumas de suas ideias com Frege. Nesse encontro, Frege, com uma idade já avançada, teria recomendado que Wittgenstein fosse estudar sob a orientação de Bertrand Russell em Cambridge. No mesmo ano, Wittgenstein, que já conhecia Russell pela leitura de algumas de suas obras, dirige-se, então, a Cambridge para conhecê-lo pessoalmente. Sobre esse encontro, resume Ray Monk: "O conselho foi mais propício do que Frege poderia ter suposto e não só provocou uma virada decisiva na vida de Wittgenstein como também teve enorme influência sobre Russell. Pois no exato momento em que Wittgenstein precisava de um mentor, Russell precisava de um protegido.". (MONK, 1995, p. 48). Após conhecer Russell e tendo já frequentado algumas de suas aulas em 1911, Wittgenstein foi, então, aceito, em Fevereiro de 1912, como membro do Trinity College, tendo Russell assumido, definitivamente, a função de seu supervisor e tutor.

[380] "The study of grammar, in my opinion, is capable of throwing far more light on philosophical questions than is commonly supposed by philosophers.".

[381] "On the whole, grammar seems to me to bring us much nearer to a correct logic than the current opinions of philosophers [...]".

parte da lógica de Frege e Russell, é inconcebível que Wittgenstein tivesse escrito o *Tractatus*.”. (ANSCOMBE, 1965, p. 16, tradução nossa)[382]

Pode-se relacionar essa posição de análise crítica da linguagem a uma tradição de crítica presente em uma corrente filosófica chamada de “Criticismo” ou “Filosofia Crítica”, que não tem origem em outro filósofo senão em Immanuel Kant (1724 - 1804).

A conhecida e influente obra escrita por Kant, a *Crítica da Razão Pura* (1781) (*Kritik der Reinen Vernunft*), que já indicava, no corpo do título, a tradição do pensamento crítico fundada por ele na História da Filosofia. Podemos dizer que em Kant a crítica se situa no âmbito da Teoria do Conhecimento e se dirige à metafísica: “Na verdade, os princípios de que se serve [os princípios da metafísica], uma vez que ultrapassam os limites de toda a experiência, já não reconhecem nesta qualquer pedra de toque. O teatro destas disputas infindáveis chama-se *Metafísica*.”. (KANT, A XII, grifo do autor).

Devido a vagueza da palavra “metafísica” – em vista de sua gama de acepções –, cabe ressaltar que quando se diz que Kant critica a metafísica, isso significa, mais precisamente, que ele se dirige aos conhecimentos que “ultrapassam os limites de toda experiência”, isto é, dirige-se à “metafísica especulativa”.

Sobre o significado da palavra “crítica”, escreve o filósofo logo no Prefácio da Primeira Edição da obra: “Por uma crítica assim, não entendo uma crítica de livros e de sistemas, mas da faculdade da razão em geral, com respeito a todos os conhecimentos a que pode aspirar, *independentemente de toda a experiência*; portanto, a solução do problema da possibilidade ou impossibilidade de uma metafísica em geral e a determinação tanto das suas fontes como da sua extensão e limites; tudo isto, contudo, a partir de princípios.”. (KANT, A XII, grifo do autor)

Nesse sentido, tendo em vista a necessidade kantiana da realização de uma crítica, torna-se, então, propósito da Filosofia de Kant realizar uma crítica sistemática à razão humana e aos conhecimentos produzidos por ela, em especial aos conhecimentos produzidos pela especulação metafísica. Diz Kant, expressando-se modo metafórico, que se deve constituir um tribunal “[...] que lhe assegure [à razão] as pretensões legítimas e, em contrapartida, possa condenar-lhe todas as presunções infundadas; e tudo isto, não por decisão arbitrária, mas em

[382] “[...] this device of modern logic at least is an instrument for the clarification of thought which is of use to anyone who engages in reasoning. And without the development of this part of logic by Frege and Russell, it is inconceivable that Wittgenstein should have written the *Tractatus*.”.

nome das suas leis eternas e imutáveis. Esse tribunal outra coisa não é que a própria *Crítica da Razão Pura*.”. (KANT, A XII, grifo do autor)

Nessa linha da tradição da Filosofia Crítica, iniciada por Kant, com repercussão na filosofia do *Tractatus* (1921), pode-se dizer que Wittgenstein também realiza uma crítica à Metafísica. Mas, a crítica de Wittgenstein dirige-se não à metafísica especulativa acerca das faculdades da razão, mas acerca dos limites da determinação dos significados das proposições, isto é, acerca dos possíveis equívocos advindos da não compreensão da lógica da nossa linguagem. Nesse sentido, escreve o filósofo no aforismo 6.53 do *Tractatus* (1921): “O método correto da filosofia seria propriamente este: nada dizer, senão o que se pode dizer; […] e então, sempre que alguém pretendesse dizer algo de metafísico, mostra-lhe que não conferiu significado a certos sinais em suas proposições.”.

Comenta David Pears, comparando os propósitos de Kant e Wittgenstein, que “Wittgenstein queria traçar os limites absolutos da linguagem, assim como Kant queria traçar os limites absolutos do pensamento.”. (PEARS, 1970, p. 31, tradução nossa).[383] Mas, a pretensão de Wittgenstein foi, propriamente, “[...] uma tentativa crítica para fixar os limites de qualquer desenvolvimento possível da linguagem, e, como tal, não se preocupou com o que é humanamente possível, ou com as limitações impostas pela estrutura da razão humana.”. (PEARS, 1970, p. 30, tradução nossa)[384]

Não é nosso propósito aqui discutir a peculiaridade do pensamento de Wittgenstein no interior da Filosofia Crítica, mas sublinhemos que a crítica de Wittgenstein dirige-se não ao plano das faculdades da razão, mas ao plano da determinação dos limites dos significados das proposições. Nesse sentido, a constituição de uma teoria do conhecimento como propósito mais fundamental para a compreensão do conhecimento humano não é pretensão de Wittgenstein no *Tractatus* (1921). Sua preocupação, coloca-se, portanto, no domínio da linguagem, em particular, da lógica da linguagem.

Assim, além das influências de Frege e Russell no *Tractatus* (1921), com menção explícita de Wittgenstein, pode-se identificar influências de outros filósofos, mesmo que não haja menção explícita e direta por parte de Wittgenstein. Tendo em vista tais influências, comenta Maslow no seu livro “Um estudo realizado no *Tractatus* de Wittgenstein” (*A study in*

[383] “Wittgenstein wanted to plot the absolute limits of language, just as Kant wanted to plot the absolute limits of thought.”.
[384] “[...] a critical attempt to fix the bounds of any possible development of language, and, as such, it was not concerned with what is humanly possible, or with the limitations imposed by the structure of the human brain.”.

Wittgenstein's Tractatus): “No fundo de suas afirmações incisivas se ouve não apenas as vozes claras de Frege e Russell, mas as vozes abafadas de Kant, Schopenhauer, Platão, e até mesmo Sto. Agostinho.”. (MASLOW, 1961, p. x, tradução nossa)[385]

Sobre as fontes, o próprio Wittgenstein diz, no Prefácio, não fazer questão de citá-las. Diz ele: “[...] o que escrevi aqui não tem, no pormenor, absolutamente nenhuma pretensão de originalidade; e também não indico fontes, porque me é indiferente que alguém mais já tenha, antes de mim, pensado o que pensei.”. (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131). Sabe-se que Wittgenstein, engenheiro de formação, mas com preocupações fundamentalmente filosóficas, não conhecia a fundo a História da Filosofia, muito embora tenha abordado muitos problemas filosóficos com profundidade e originalidade.

Assumindo como pressuposto a análise crítica sobre a lógica da linguagem para a compreensão mais estabelecida sobre o que se pode ou não dizer e expressar com mais clareza no âmbito da linguagem, evitando com isso, possíveis problemas de ordem filosófica, Wittgenstein lança, então, no Prefácio do *Tractatus* (1921), uma das primeiras e principais teses da obra: “O limite [para a expressão do pensamento] só poderá, pois, ser traçado na linguagem, e o que estiver além do limite será simplesmente um contra-senso.”. (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131)

O limite a que Wittgenstein se refere é, como indicado, o limite da expressão dos pensamentos, pois os pensamentos se expressam no âmbito da lógica da linguagem, sendo esta condição para os pensamentos, que é inseparável da lógica da linguagem. Nesse sentido, pensamento e linguagem estão de tal modo vinculados que linguagem sem pensamento torna-se um mero conjunto de sinais sem sentido, e pensamento sem linguagem é impossível de ser expresso, pois a linguagem é condição *sine qua non* para a expressão de todos os pensamentos.

Tendo em vista a tese de que o limite para a expressão do pensamento só poderá ser traçado na linguagem, o autor apresenta o propósito ou grande objetivo da obra ainda no Prefácio:

> O livro pretende, pois, traçar um limite para o pensar, ou melhor – não para o pensar, mas para a expressão dos pensamentos [...]. (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131)

[385] “In the background of his pithy pronouncements one hears not only the clear voices of Frege and Russell but the muffled voices of Kant, Schopenhauer, Plato, and even St. Augustine. And this conflict is reflected even in Wittgenstein's vocabulary.”.

A estrutura lógica de nossa linguagem é condição para a expressão de todos os pensamentos tal que nada se pode dizer para além desse limite da linguagem. Isso significa que se o limite só pode ser traçado na linguagem, então só podemos pensar aquilo que pode ser expresso na linguagem, isto é, só podemos pensar o que se pode dizer claramente com a linguagem. Por outro lado, o que não se pode dizer claramente com a linguagem está para além do limite do que é expresso na linguagem.

O além do limite expresso na linguagem, Wittgenstein chama por "contra-senso" (*Unsinnig*). O contra-senso é o que não pode ser dito ou expresso na linguagem, pois está para além do limite de sua expressão. Sobre isso, escreve no Prefácio: "O limite só poderá, pois, ser traçado na linguagem, e o que estiver além do limite será simplesmente um contra-senso.". (WITTGENSTEIN, p. 131). Diante do contra-senso, o que nos resta é se calar, pois a linguagem não permite dizer algo sobre o que não pode ser expresso por ela, pois escapa ao seu limite. O silêncio, então, é o melhor caminho, neste caso, pois ao se tentar dizer o que não pode ser dito, corre-se o risco de cair em problemas filosóficos, cuja formulação desses problemas repousa sobre o mau entendimento da lógica de nossa linguagem. É, então, sobre o que pode e não pode ser dito que Wittgenstein resume o sentido geral de sua obra: "Poder-se-ia talvez apanhar todo o sentido do livro com estas palavras: o que se pode em geral dizer, pode-se dizer claramente; e sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.". (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131)

Assim, se os problemas filosóficos repousam sobre a má compreensão da lógica de nossa linguagem, com a tese de que o limite das expressões dos pensamentos só poderão ser traçados na linguagem e, com isso, o que estiver além do limite será simplesmente um contras-senso, então a expectativa de Wittgenstein, com o *Tractatus* (1921), é expressar os pensamentos de modo claro e elucidativo com base no bom entendimento da lógica de nossa linguagem. Isso leva Wittgensetin a uma pretensão nada modesta, expressa ainda no Prefácio do *Tractatus* (1921): ele pretende ter estabelecido a verdade dos pensamentos e, com isso, ter resolvido, ao menos no essencial, todos os problemas em Filosofia. Sobre isso, escreve: "Por outro lado, a *verdade* dos pensamentos aqui comunicada parece-me intocável e definitiva. Portanto, é minha opinião que, no essencial, resolvi de vez os problemas.". (WITTGENSTEIN, 2001, grifo do autor, p. 133)

Muito embora a obra carregue consigo essa pretensão consolidada e definitiva, isso não impediu que ela gerasse muitas interpretações e problemas de interpretação, presentes em uma extensa bibliografia, e se tornasse, com isso, uma das obras filosóficas mais discutidas no século passado, com repercussões relevantes nas discussões filosóficas ainda hoje entre comentadores, historiadores da filosofia e lógicos.

Sobre o estilo do *Tractatus* (1921), comenta Maslow: "O estilo obscuro do *Tractatus* abre possibilidades para inúmeras interpretações.". (MASLOW, 1961, p. xiii, tradução nossa).[386] Em outra passagem, diz: "O obstáculo mais formidável para a compreensão do *Tractatus* reside, como pode ser visto até mesmo em suas primeiras sentenças, no estilo obscuro de apresentação de Wittgenstein.". (MASLOW, 1961, p. ix, tradução nossa)[387]. Nesse sentido, ainda escreve Maslow que "Embora o *Tractatus* tenha um peculiar charme poético, suas afirmações aforismáticas, enigmáticas e concisas não são propícias para clarear o entendimento.". (MASLOW, 1961, p. ix, tradução nossa)[388]. Ainda sobre o estilo da obra, diz Gilles-Gaston Granger que "Este breve livro não é apenas um dos textos que definem a filosofia contemporânea, é também uma obra de arte que atinge a concisão incisiva da linguagem e a cadência muitas vezes poética do estilo filosófico.". (GRANGER, 1993, p. 9, tradução nossa).[389]

O *Tractatus* (1921) torna-se, então, um campo de muitas teses interpretativas, discutindo-se, inclusive sua estrutura aparentemente estabelecida. Nesse sentido, mesmo que o *Tractaus* (1921) seja, nas palavras de Mathieu Marion (cf. 2012, p. 12), uma obra "selada com sete selos", cuja estrutura pareça expressar uma rigidez de consolidação e de algo definitivo, até mesmo a sua arquitetura, aparentemente estática, foi e é objeto de discussão entre os estudiosos.

A sequência de afirmações do *Tractatus* (1921) não se constitui como um sistema axiomático, pois em sistemas axiomáticos se admitem conjuntos primitivos de afirmações (axiomas) e conceitos primitivos onde, por regras de inferência, isto é, por deduções lógicas, geram-se teoremas no interior do sistema proposto e se constrói toda o sistema da obra. Sobre

---

[386] "The obscure style of the *Tractatus* opens possibilities for numerous interpretations.".
[387] "The most formidable obstacle to understanding the *Tractatus* lies, as can be seen even from its first few sentences, in the obscure style of Wittgenstein's presentation.".
[388] "Although the *Tractatus* has a peculiar poetic charm, its terse, cryptic, aphoristic pronouncements are not conducive to clear understanding.".
[389] "Ce bref ouvrage n'est pas seulement un des textes marquants de la philosophie contemporaine, il est aussi une œuvre d'art qui frappe par la concision incisive de la langue et la cadence souvent poétique du style philosophique.".

isso, diz Anscombe: “O *Tractatus* não é apresentado em uma ordem de demonstração de premissas.”. (ANSCOMBE, 1965, p. 18, tradução nossa).[390] Assim, embora a estrutura axiomática seja amplamente utilizada nas obras de lógica e matemática no início do século XX, o *Tractatus* (1921) não segue, portanto, essa estrutura. As sequências de afirmações no *Tractatus* (1921) é constituído por um conjunto de afirmações chamadas de “afirmações aforismáticas” ou “aforismos”.[391]

Na obra, os aforismos são enumerados. Wittgenstein explicita a enumeração dos aforismos em nota de rodapé, logo na entrada do primeiro aforismo. Escreve ele:

> Os decimais que numeram as proposições destacadas indicam o peso lógico dessas proposições, a importância que têm em minha exposição. As proposições n.1, n.2, n.3, etc. são observações relativas à proposição nº n; as proposições n.m.1, n.m.2, etc. são observações relativas à proposição nº n.m; e assim por diante. (WITTGENSTEIN, 2001, grifo do autor, p. 135)

Nesta sequência enumerativa, a obra contém 7 teses principais, que podem ser consideradas como “portas” de entrada da obra, as quais são enumeradas de 1 a 7. Como diz o Wittgenstein acima, a divisão em notação decimal indica o “peso lógico” dos aforismos e coloca as 7 proposições como centrais, sendo que o restante das proposições podem ser entendidas como elucidações na sequência decimal apresentada pelo autor na obra.

Embora a sequência enumerativa das proposições pareça deixar claro, ao menos em linhas gerais, a ordem de importância das proposições, as relações intrínsecas entre elas são bastante complexas e discutíveis, cuja estrutura merece atenção de estudiosos. É notável, por exemplo, que o próprio Wittgenstein não respeita a ordem proposta por ele; por exemplo, as proposições 2.01 e 3.001 não são, na sequência, comentários de 2.0 e 3.00, respectivamente, pois tais proposições simplesmente não existem, como se pode verificar por uma simples conferência na obra.

Arley Ramos Moreno, em seu artigo “O Sistema de Numeração do *Tractatus*” (*Le Systéme de Numérotation du Tractatus*), faz uma análise detalhada sobre a estrutura da numeração do *Tractatus* (1921). Em resumo, Moreno (1978, p. 259) diz no artigo que o

[390] “The *Tractatus* is not presented in an order of demonstration from premise.”.
[391] A palavra “aforismo” devriva do grego “aphorismos” que significa “definição”. O substantivo grego “aphorismo” deriva do verbo grego “aphorizein” que significa “delimitar” e “separar”. Este verbo é composto pelo prefixo “apó” que significa “afastado”, “separado” ou “proveniente, derivado de”, mais o radical “horos” que significa “fronteira”, “limite”, e o radical “ehorizein” que significa “limitar”. No latim temos o substantivo “aphorismus”. Então, pode-se dizer que, etimologicamente, aforismo é uma sentença concisa que delimita ou separa algo de algo, podendo se caracterizar por uma definição.

sistema de numeração apresenta dois níveis que ele chama por "os números simples", a saber: "1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7", que são a sucessão dos números inteiros positivos em representação decimal; e o que ele chama por "números compostos", formados por números inteiros positivos, mais a adição de um ponto e mais os números naturais, incluindo o zero, os quais tem a seguinte forma: "N.nm...". As proposições indicadas pelos números compostos são chamadas por Moreno de "pseudo-proposições".

Moreno (1978, p. 261-262) entende que existe uma distinção explícita entre as pseudo-proposições e separa-as, então, em dois níveis numéricos, a saber: as pseudo-proposições com o zero, que ele chama por "nível zero", e as pseudo-proposições sem o zero, que ele chama por "nível comentário". Ele chama por "comentário" as pseudo-proposições que esclarecem outras peseudo-proposições.

Além dos comentários, existem os aforismos que são "[...] aqueles que são e podem ser objeto de esclarecimento filosófico, i. e., de comentários.". (MORENO, 1978, p. 262, tradução nossa).[392] Sendo que os aforismos sempre podem ser objeto de comentários e dado que todas as proposições são passíveis de comentários, então todas as proposições são aforismos no *Tractatus* (1921): "[...] todas as pseudo-proposições são aforismos; isto significa que todas podem ser comentadas.". (MORENO, 1978, p. 263, tradução nossa)[393] e "[...] todas as pseudo-proposições com função comentário exercem sucessivamente a função aforismo.". (MORENO, 1978, p. 263, tradução nossa)[394]

Tendo isso em vista, é possível, segundo Moreno (cf. 1978, p. 268-279) "[...] identificar um movimento lógico entre os números do sistema de numeração, um movimento que assume diferentes formas no nível zero e no nível comentário [...]". (MORENO, 1978, p. 268, tradução nossa).[395] Nesse sentido, "O sistema de numeração dá uma direção do movimento lógico do discurso e sugere várias formas complementares possíveis.". (MORENO, 1978, p. 277, tradução nossa)[396], isto é, "A direção é dada pela sequência natural de números simples; as vias complementares são ramificações sucessivas com sucessivos graus de possível esclarecimento - estas ramificações são dadas pelos números compostos e os

[392] "[...] celles qui son et qui sont et qui peuvent être l'objet des éclaircissements philosophiques, i.e. des commentaires.".
[393] "[...] toutes les pseudo-propositions sont des aphorismes; cela veut dire que toutes peuvent être commentées.".
[394] "[...] toutes les pseudo-propositions à fonction commentaire exercent sucessivement la fonction aphorisme.".
[395] "[...] de dégager un mouvement logique entre les numéros du système de numérotation, mouvement qui prend des formes différentes dans le niveau zéro et dans le niveau commentaire […] ".
[396] "Le système de numérotation donne une direction au mouvement logique du discours et suggère plusieurs voies complémentaires possibles.".

caminhos são dados pela sucessão que a saída dos números forma.”. (MORENO, 1978, p. 277, tradução nossa)[397]

Sendo assim, a arquitetura do *Tractatus* (1921) pode comportar, como aponta Moreno, três interpretações quanto ao seu movimento lógico, a saber: (i) o movimento contínuo, “[...] que não comporta interrupção entre os pontos numéricos; cada ponto está ligado a outro.” (MORENO, 1978, p. 277, tradução nossa)[398]; (ii) o movimento cíclico, “[...] que é logicamente equivalente para o mesmo ponto numericamente de nível superior.”. (MORENO, 1978, p. 277, tradução nossa)[399], formando, com isso, um percurso circular, ou seja, pelo retorno do movimento lógico a um mesmo ponto numérico, sendo este a origem de diferentes séries numéricas sucessivas; (iii) e o movimento linear, que “[...] não retorna logicamente para o mesmo ponto numérico, o que conduz a outros pontos numéricos.”. (MORENO, 1978, p. 277, tradução nossa)[400], isto é, retorna ao ponto numérico de uma série que já está aberta, sendo que um não é origem do outro, pois o movimento é sempre linear.

Moreno diz que o movimento linear, em especial, é o movimento que “[...] permite o progresso geral do discurso, por meio do nível do comentário.”. (MORENO, 1978, p. 278-279, tradução nossa).[401] Nesse caso, o argumento pode ser definido como a passagem de um número ao seu sucessor imediato na mesma série, o que condiz mais aproximadamente com o nível do comentário. Argumenta Moreno que o nível do comentário é a realização da atividade filosófica que mais se aproxima da concepção wittgensteiniana, pois “[...] para Wittgenstein, a filosofia não é constituída por ‘proposições filosóficas’, mas ‘esclarecimentos’ de proposições; ela deve basear-se em proposições e tentar elucidar logicamente.” (MORENO, 1978, p. 262, tradução nossa).[402] Escreve Wittgenstein no *Tractatus* (1921): “O fim da filosofia é o esclarecimento lógico dos pensamentos. A filosofia não é uma teoria, mas uma atividade. Uma obra filosófica consiste essencialmente de elucidações. O resultado da filosofia não são ‘proposições filosóficas’, mas é tornar proposições claras.”. (4.112). Assim,

---

[397] “La direction est donnée par la suite naturelle des numéros simples; les voies complémentaires sont des ramifications successives aux successifs degrés possibles d'éclaircissement - ces ramifications sont données par le numéros composés et les voies à suivre sont données par la succession que les suites de ces numéros forment.”.
[398] “[...] qui ne comporte pas d’interruption entre les points numériques; chaque point est lié à d’autres.”.
[399] “[...] qui revient logiquement sur un même point numérique de niveau supérieur.”.
[400] “[...] qui ne revient pas logiquement sur un même point numérique, et qui conduit à d'autres points numériques.”.
[401] “[...] permet la progression générale du discours, par el moyen du niveau commentaire.”.
[402] “[...] la Philosophie n’est pas constituée par de ‘propositions philosophiques’, mais par des ‘éclaircissements’ des propositions; elle doit partir des propositions et essayer de les élucider logiquement.”.

para Moreno, o movimento linear condiz mais com o que Wittgenstein entende por filosofia e com o propósito de uma obra filosófica, isto é, com os propósitos do *Tractatus* (1921).

Por outro lado, Marckus Aenishänslin em seu artigo "A Estrutura Ciclica do *Tractatus* de Wittgenstein" (*La Strucure Cyclique du Tractatus de Wittgenstein*), sustenta a tese do movimento circular. Nesse caso, haveria um modelo estrutural de argumentação no *Tractatus* (1921) que percorre um princípio de movimento circular. "A estratégia específica *Tractatus* é caracterizada pelo princípio de que conecta teses entre elas por movimentos cíclicos.". (AENISHÄNSLIN, 1978, p. 244, tradução nossa).[403] Em linhas gerais, diz Aenishänslin que os aforismos, na sequência decimal, formam um movimento cíclico, cujos aforismos na subsequência do movimento formam um subcirculo que são explicitações dos aforismos anteriores na sequência. Por exemplo, seja o aforismo 4; segue do aforismo 4 os aforismos 4.001, 4.002 e 4.003. Uma nova sequência decimal surge em seguida, a leitura da tese 4.01 e seus números sucessivos: 4.01,...,4.06. Em seguida inicia-se a última sequência de aforismos antes de iniciar o aforismo 5, os aforismos 4.1, 4.2,..., 4.5. O que o autor argumenta é que o início e o fim de uma sucessão, como as apresentadas acima, é a tese 4, o que forma um movimento cíclico, porém não linear, como é visto por Moreno (1978).

Formam-se, portanto, três subcírculos no interior do aforismo 4 antes de apontar, na sequência, para o aforismo 5. "O curso de leitura através do *Tractatus* articula finalmente em um sistema de ciclos e de sub-ciclos. A forma do itinerário característico do *Tractatus* é cíclica. Este itinerário traça uma única linha de curso contínuo e fechado através de todo o *Tractatus*.". (AENISHÄNSLIN, 1978, p. 245, tradução nossa).[404] Assim, o princípio do movimento circular aponta para a tese de que o *Tractatus* (1921) é, assim como um círculo, uma obra fechada sobre si mesma, sem necessidade de certificação externa.

Assumiremos, aqui, a interpretação de Moreno (1978), por entendermos que o movimento chamado por ele de "movimento linear", que não retorna logicamente para o mesmo ponto numérico, conduzindo a outros pontos numéricos, é o movimento que parece melhor expressar a ordem das razões no *Tractatus* (1921) e a atividade de elucidação filosófica, no sentido de apontar para novas explicitações.

---

[403] "La stratégie propre au *Tractatus* se caractérise par le principe qui relie les thèses entre elles par des mouvements cycliques.".
[404] "Le parcours de lecture à travers le *Tractatus* s'articule finalement en un système de cycles et de sous-cycles. La forme de l'itinéraire caractéristique du *Tractatus* est cyclique. Cet itinéraire trace une seule ligne de parcours continue et close à travers tout le *Tractatus*.".

Nesse sentido, embora a verdade dos pensamentos no *Tractatus* (1921) tenha a pretensão de ser "intocável e definitiva", e por isso possa ser interpretada como uma obra fechada em si mesma, ela é resultado do exercício de elucidação filosófica que encontra no próprio *Tractatus* (1921) um meio para alcançar a verdade dos pensamentos. Como já citado, para Wittgenstein, "Uma obra filosófica consiste essencialmente de elucidações. O resultado da filosofia não é 'proposições filosóficas', mas é tornar proposições claras.". (4.112)

É parte central da tentativa de elucidação filosófica do *Tractatus* (1921) analisar os aspectos formais da lógica da linguagem, isto é, analisar a essência da proposição, representada pela forma proposicional. Pode-se dizer, então, que o *Tractatus* (1921) é em grande parte uma tentativa de analisar os aspectos formais da linguagem para mostrar o que há de essencial em proposições que tenham sentido e não sejam meramente uma série de ruídos e marcas como o é o sinal simplesmente. Nesse sentido, diz Maslow que "[...] o principal problema do *Tractatus* é mostrar os pré-requisitos necessários de um simbolismo ideal para que todas as nossas línguas atuais devem ser respeitadas tanto quanto praticamente possível a fim de servir o seu propósito fundamental de ser um meio de conhecimento.". (MASLOW, 1961, p. xv, tradução nossa)[405]. Desse modo, o *Tractatus* (1921) de Wittgenstein "[...] restringe a investigação aos pré-requisitos formais ou lógicos de qualquer língua possível, de todos os simbolismos possíveis.". (MASLOW, 1961, p. xv, tradução nossa).[406] Isso quer dizer que o *Tractatus* (1921) elucida e determina, em particular, como a forma lógica está presente ou é exibida por todas as proposições da linguagem em geral.

Assim, o *Tractatus* (1921) não é um estudo sobre o significado linguístico das proposições das línguas naturais, realizado no campo da Linguística ou da Filologia, pois não é um conhecimento da causa dos fatos da língua. Diz Maslow que "A clarificação final do nosso pensamento, a realização de suas condições formais, é uma questão para a atividade filosófica e não para as proposições significativas.". (MASLOW, 1961, p. xvi, tradução nossa).[407] Desse modo, analisa, também, Granger que "O *Tractatus* visa não dizer o que é a realidade do mundo, mas delimitar o que é pensável, isto é, exprimível na linguagem. Apenas proposições da ciência, verdadeiras ou falsas, satisfariam este requisito." (GRANGER, 1993,

[405] "[...] the main problem of the *Tractatus* is to show the necessary prerequisites of an ideal symbolism, to which all our actual languages must conform as far as practically possible in order to serve their fundamental purpose of being a medium of knowledge.".

[406] "[...] restricts his investigation to the formal or logical prerequisites of any possible language, of all possible symbolisms.".

[407] "The final clarification of our thought, the realization of its formal conditions, is a matter for philosophic activity and not for significant propositions.".

p. 9, tradução nossa)[408], pois, continua Granger, "O discurso do filósofo apenas pode manifestar o correto funcionamento da linguagem e mostrar a natureza ilusória do seu uso quando se pretende ir além de uma descrição dos fatos.". (GRANGER, 1993, p. 9, tradução nossa)[409]

Nesse caminho de elucidação das proposições, o *Tractatu*s (1921) deve servir como um meio, isto é, como uma escada, e não como um fim em si mesmo. Sobre isso escreve Wittgenstein em uma de suas passagens mais conhecidas do *Tractatus* (1921): "Minhas proposições elucidam dessa maneira: quem me entende acaba por reconhecê-las como contra-sensos, após ter escalado através delas – por elas – para além delas (Deve, por assim dizer, jogar fora a escada após ter subido por ela).". (6.54)

As proposições ou aforismos do *Tractatus* (1921) são contrassensos, pois os pré-requisitos formais de todos os simbolismos possíveis não podem ser expressos pela proposição. A forma lógica é apenas exibida pelas proposições, mas não pode ser expressa por proposições. Isso quer dizer que a forma lógica de todos os simbolismos possíveis não pode se tornar objeto de enunciação de outra proposição que diga algo sobre ela, isto é, ela não é objeto de uma metalinguagem cuja linguagem objeto seria ela própria. Escreve Wittgenstein que "A proposição não pode representar a forma lógica, esta forma se espelha na proposição. O que se espelha na linguagem esta não pode representar. O que *se* exprime na linguagem, *nós* não podemos exprimir por meio dela. A proposição *mostra* a forma lógica da realidade. Ela a exibe.". (4.121, grifo do autor)

Assim, todo o *Tractatus* (1921), está situado no plano da metalinguagem e é, portanto, um contra-senso. Sendo assim, ele não é mais do que uma escada que deve ser descartada após ter atingido o alvo que é a forma lógica de que toda possível linguagem é formada. Mas, embora todo o *Tractatus* (1921) seja um contra-senso, Wittgenstein considera que o que é dito e mostrado, isto é, os aspectos formais de todo simbolismo possível, foi definitivamente mostrado no *Tractatus* (1921), pois tais aspectos formais são uma verdade intocável e definitiva. "Por outro lado, a verdade dos pensamentos aqui comunicados parece-me intocável e definitiva. Portanto, é minha opinião que, no essencial, resolvi de vez os problemas.". (WITTGENSTEIN, 2001, p. 133)

---

[408] "Le *Tractatus* a pour but non de dire ce qu'est la réalité du monde, mais de délimiter ce qui en est pensable, c'est-à-dire exprimable dans un langage. Et seules les propositions de la science, vraies ou fausses, satisferaient à cette exigence.".

[409] "Le discours du philosophe ne peut que rendre manifeste le fonctionnement correct du langage et montrer le caractère illusoire de son usage lorsqu'il prétend aller au-delà d'une description des faits.".

Mas, mesmo que o *Tractatus* (1921) seja objeto de discussão, permita mais de uma interpretação e seja reconhecidamente um contrassenso, o “peso lógico” das teses principais pode dar ao leitor um guia para uma visão panorâmica da obra, servindo como um parâmetro inicial de interpretação da obra como um todo. Desse modo, os aforismos 1 (“O mundo é tudo que é o caso”) e 2 (“O que é o caso, o fato, é a existência de estados de coisas”) fazem referência direta à ontologia: o mundo, o fato e a existência de estados de coisas. Já o aforismo 3 (“A figuração lógica dos fatos é o pensamento.”), ainda fazendo referência à ontologia, é a passagem do mundo ao pensamento sobre o mundo. O aforismo 4 (“O pensamento é a proposição com sentido.”) refere-se claramente a uma investigação sobre a linguagem tal que as proposições com sentido são a formulação dos pensamentos. O aforismo 5 (“A proposição é uma função de verdade das proposições elementares. (A proposição elementar é uma função de verdade de si mesma.)”) e o aforismo 6 (“A forma geral da função de verdade é: [p, ξ, N(ξ)]. Isso é a forma geral da proposição.”) são estudos da estrutura interna das proposições na linguagem. Por fim, o aforismo 7 (“Sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar”) resume o significado expressivamente filosófico, e conforme diz Wittgenstein no Prefácio expressa todo o sentido da obra: “[...] o que se pode em geral dizer, pode-se dizer claramente; e sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.”. (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131)

O movimento linear do *Tractatus* (1921) parte, portanto, de uma investigação ontológica para a análise da lógica de nossa linguagem, encontrando nos limites da linguagem o que pode ou não ser expresso por ela. Limites estes que se localizam no limiar entre a ontologia e a linguagem, como expresso pelo seguinte modelo:

Ontologia		Linguagem
3	:	4
2	:	5
1	:	6
	7	

Este pequeno modelo, retirado por nós de *O Sistema de Numeração do Tractatus* de Moreno (cf. 1978, p. 281), parece sintetizar, com clareza, os lugares dos aforismos de abertura do *Tractatus* (1921) e suas equivalências conceituais entre o plano antológico e o plano da linguagem. O sinal ":" expressa essa equivalência conceitual.

Nesse sentido, o aforismo 3, dizendo que a figuração lógica dos fatos do mundo é o pensamento, equivale a dizer, no plano da linguagem, que o pensamento é a proposição com sentido, expresso pelo aforismo 4.

O aforismo 2, referindo-se ao estado de coisas da realidade, equivale à disposição dos elementos constituintes da proposição e como a relação entre tais elementos formam proposições mais elementares e proposições mais complexas a partir destas proposições mais elementares, isto é, a proposição é uma função de verdade das proposições elementares, expresso no aforismo 5. O aforismo 1, fazendo referência a totalidade de fatos e estados de coisas de que o mundo é formado, corresponde, na linguagem, à estrutura interna das proposições na linguagem, que é a forma geral da função de verdade, cuja natureza toca o mundo através da forma de afiguração que a proposição tem em comum com os fatos e os estados de coisas que constituem o mundo.

Já o aforismo 7, "Sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar", é o limiar do que se pode ou não dizer com a linguagem, ou seja, é o limite das expressões dos pensamentos. Esse aforismo final expressa, segundo Wittgenstein, todo o sentido do *Tractatus* (1921). Como já citado: "Poder-se-ia talvez apanhar todo o sentido do livro com estas palavras: o que se pode em geral dizer, pode-se dizer claramente; e sobre aquilo de que não se pode falar, deve-se calar.". (WITTGENSTEIN, 2001, p. 131)

A partir de investigações detalhadas de nossa linguagem, uma das conclusões gerais de Wittgenstein no *Tractatus* (1921) é a de que a proposição é uma figuração da realidade, isto é, a proposição é um modelo da realidade (cf. 4.01). Como modelo, nossa linguagem toca a realidade (2.1515) e, mais do que isso, nossa linguagem espelha o mundo (cf. 5.511), inferindo-se, com isso, que a essência da linguagem reflete a essência do mundo. Nessa relação entre o mundo e a linguagem há, então, um conceito que tem particular importância para a relação entre ontologia e linguagem: o conceito de figuração lógica dos fatos realizado pela proposição. Este conceito estudaremos na Seção 3.9.

Embora o movimento de exposição dos aforismos do *Tractatus* (1921) faça o caminho da ontologia para a linguagem, seguindo uma ordem das razões, o percurso da investigação de Wittgenstein, antes da confecção do *Tractatus* (1921), partiu da linguagem para a ontologia, pois um dos seus pressupostos iniciais, e provavelmente de investigação, é a premissa de que a visão do mundo só é possível com a análise da lógica de nossa linguagem. Sobre isso, diz Max Black em *Um Compêndio ao Tractatus de Wittgenstein* (*A Compnanion to Wittgenstein's Tractatus*) que “A visão do ‘mundo’ estabelecida nas seções anteriores do livro [os aforismos 1 e 2 do *Tractatus*] é quase inevitavelmente sugerida por investigações detalhadas de Wittgenstein da essência da linguagem e contribui poderosamente, por sua vez, para a unidade orgânica de toda a obra.”. (BLACK, 1970, p. 27, tradução nossa)[410]

De modo semelhante, nossa investigação sobre o tema da função proposicional no *Tractatus* (1921) parte do estudo da lógica da linguagem para a ontologia. Nossa questão da determinação do significado da função proposicional encontra lugar na questão interpretativa da determinação do significado da variável proposicional, a qual situa-se, em um primeiro momento, mais no âmbito da linguagem que no âmbito da ontologia; muito embora tais âmbitos estejam organicamente relacionados no *Tractatus* (1921), já que a nossa linguagem espelha o mundo, refletindo sua essência.

Não seguiremos, então, a ordem das razões do movimento linear da arquitetura do *Tractatus* (1921), já que esse movimento acompanha, assim entendemos, a ordem de numeração do *Tractatus* (1921). O movimento linear parece ser importante para compreender a arquitetura da obra e pode ser um meio para analisar e interpretar outros temas e questões no *Tractatus* (1921), como temas relacionados à ontologia e à figuração, por exemplo.

É nesse contexto da passagem do mundo ao pensamento sobre o mundo, no aforismo 3 e suas proposições adjacentes, que encontramos elementos para uma discussão inicial sobre o tema da função proposicional no *Tractatus* (1921). Nesse contexto, Wittgenstein tenta tornar clara a essência da linguagem apresentando um simbolismo para expressar tal essência e introduz o termo “variável proposicional” (*Satzvariable*). Termo este que mais se aproxima, a nosso ver, do conceito de função proposicional.

Mas, antes de analisarmos propriamente a noção de variável proposicional, discutiremos conceitos que antecedem e parecem introduzi-la. São estes conceitos que estudaremos na próxima seção antes de iniciarmos a discussão, propriamente dita, sobre o conceito de variável proposicional.

---

[410] “The vision of ‘the world’ set forth in the earlier sections of the book is almost inevitably suggested by Wittgenstein's detailed investigations of the essence of language and contributes powerfully, in its turn, to the organic unity of the whole work.”

3.2. Símbolos ou expressões

Apresentaremos, nesta seção, o significado do que Wittgenstein chama por "símbolo" (*Symbol*) ou "expressão" (*Ausdruck*), introduzido a partir do aforismo 3.31. Veremos que o símbolo ou a expressão são os traços essenciais para a caracterização ou para a determinação do sentido das proposições.

Inicialmente, podemos dizer que, para Wittgenstein, uma proposição tem sentido se ela pode ser verdadeira ou falsa. A determinação do valor de verdade de uma proposição depende de sua concordância ou discordância com os fatos da realidade. Se há concordância com os fatos da realidade, a proposição é verdadeira, se há discordância com tais fatos, então a proposição é falsa. "Na concordância ou discordância de seu sentido (*Sinn*) com a realidade consiste sua verdade ou falsidade.". (2.222)

A proposição por si só, sem relação com a realidade, não tem sentido, sendo apenas uma possibilidade de expressão do sentido. O conteúdo da proposição é, pois, importante para a expressão do seu sentido. "Na proposição, portanto, ainda não está contido seu sentido, mas sim a possibilidade de exprimi-lo. ('O conteúdo da proposição' significa o conteúdo da proposição dotada de seu sentido).". (3.13)

As proposições são formadas por partes que a compõem e que são fundamentais para a determinação do seu sentido, constituindo-se em sua essência, pois fazem parte de sua natureza mais fundamental. A busca pela essência da proposição é um dos propósitos centrais do *Tractatus* (1921). Observa Black, desse modo, que "Ao longo do livro, Wittgenstein tenta tornar clara a essência da linguagem, ou qualquer simbolismo equivalente.". (BLACK, 1970, p. 150, tradução nossa)[411]

Sendo assim, dada uma proposição qualquer, podemos encontrar nela traços que são essenciais para a caracterização de seu sentido e traços que são casuais. Desse modo, escreve Wittgenstein: "A proposição possui traços essenciais e casuais. São casuais os traços que derivam da maneira particular de produzir o sinal proposicional. Essenciais, os que, por si sós, habilitam a proposição a exprimir seu sentido.". (3.34)

Os traços essenciais são elementos que caracterizam o sentido de uma proposição sem os quais não seria possível exprimir o seu sentido. Sendo assim, podemos dizer que esses traços estão presentes em todas as proposições com sentido. Por outro lado, os traços causais

[411] "Throughout the book, Wittgenstein is trying to get clear about the essence of language, or any equivalent symbolism.".

são os elementos de cada proposição em particular, que, por serem particulares de uma proposição, não estão presentes, em comum, em todas as proposições com sentido. Os traços causais não atingem a essência da proposição e, portanto, não são importantes para a caracterização de seu sentido.

Wittgenstein designa os traços essenciais da proposição de "símbolo" (*Symbol*) ou "expressão" (*Ausdruck*), tomando-as como sinônimos. Escreve ele que "A cada parte da proposição que caracteriza o sentido dela, chamo uma expressão (um símbolo). (A própria proposição é uma expressão).". (3.31). Desse modo, por definição, tudo o que caracteriza o sentido da proposição é uma expressão ou símbolo, inclusive a própria proposição.

Por exemplo, sejam as proposições "A rosa é uma flor" e "The rose is a flower"; elas são diferentes do ponto de vista dos traços casuais que são o som e a escrita, elementos estes que são particulares de cada língua. Independentemente dessas características particulares de cada proposição, relativas a uma determinada língua, o que interessa para o seu sentido são os símbolos que caracterizam o sentido da proposição.

Em outro exemplo, sejam as proposições "Rosa é uma flor", "Rosa é rosa" e a "A rosa é"; no primeiro caso, o sinal "é" expressa um verbo de ligação, ou uma cópula entre o sujeito "Rosa" e o predicado "uma flor"; no segundo caso, o sinal "é" expressa uma relação de identidade; e no terceiro caso, o sinal "é" expressa o significado de existência, como se disséssemos "A rosa existe". "Assim, a palavra 'é' aparece como cópula, como sinal de igualdade e como expressão de existência [...]". (3.323). Cada um dos significados da palavra "é" são chamados de "símbolo" ou "expressão", pois são os traços essenciais que determinam o sentido da proposição. Já a escrita e o som da palavra "é" são os traços casuais das proposições supracitadas, pois são particulares ou acidentais.

Mas, se substituirmos, na proposição supracitada, o artigo definido "a" pelo artigo definido "o", resultando na proposição "O rosa é uma planta", ou o artigo indefinido "uma" pelo artigo indefinido "um", resultando na proposição "A rosa é um planta", nada parece mudar, significativamente, na determinação do sentido da proposição, a não ser no prejuízo da compreensão do seu sentido. Isso ocorre, pois esses elementos não são traços essenciais para a caracterização do sentido da proposição. Eles apenas acompanham os traços que dão sentido para a proposição, isto é, tais elementos são secundários e mudam em função dos traços essenciais que são, como vimos, os símbolos.

Wittgenstein chama estes elementos casuais que ocorrem na proposição de “sinal” (*Zeichen*). O sinal é a palavra escrita ou sonora que é sensivelmente perceptível no símbolo. Tais características do sinal não são essenciais para a determinação do sentido da proposição. Enquanto a expressão é tudo o que caracteriza o sentido da proposição, “O sinal é aquilo que é sensivelmente perceptível no símbolo.”. (3.32)

Em suma, pode-se dizer que um símbolo é um sinal com sentido e “Dois símbolos diferentes podem ter, portanto, o sinal (escrito ou sonoro, etc.) em comum – designam, nesse caso, de maneiras diferentes.”. (3.321), como é, por exemplo, o caso da palavra “é”, cujo mesmo sinal apresenta diferentes sentidos ou diferentes símbolos conforme o contexto de aplicação desse sinal.

Diz Maslow que o “Sinal tomado apenas como uma ocorrência física real não tem sentido; ele adquire significado ou sentido (torna-se um símbolo) apenas em um determinado uso [...]”. (MASLOW, 1961, p. 60, tradução nossa).[412] Desse modo, “Uma marca material torna-se um símbolo apenas depois de se atribuir a ela as regras da sua *utilização*, a sua gramática [...]”. (MASLOW, 1961, p. 60, grifo nosso, tradução nossa)[413]

Neste caso, a noção de uso do símbolo no sinal torna-se um parâmetro para a determinação do significado e do sentido do símbolo, pois permite reconhecer, na gramática da Lógica, se o símbolo está sendo ou não utilizado corretamente no sinal. Sobre isso, escreve Wittgenstein que “Para reconhecer o símbolo no sinal, deve-se atentar para o uso significativo.”. (3.326)

Caso o símbolo não esteja sendo aplicado corretamente, ele não tem significado (no caso de símbolos que compõem uma proposição) ou sentido (no caso de proposições) e, portanto, não tem serventia para a sintaxe lógica da gramática. Desse modo, diz Wittgenstein que “Se um sinal *não tem serventia*, não tem significado. Este é o sentido do lema de Occam. (Se tudo se passa como se um sinal tivesse significado, então ele realmente tem significado).”. (3.328, grifo do autor)

Na sintaxe lógica, ao se criar uma notação, esta deve excluir possíveis equívocos existentes na linguagem, como, por exemplo, o emprego do mesmo sinal para símbolos diferentes (o sinal “é” expressando diferentes símbolos no exemplo supracitado), pois são confusões deste tipo que levam, facilmente, como aponta Wittgenstein, a problemas

[412] “Sign taken merely as an actual physical occurrence is meaningless, and it acquires meaning or sense (becomes a symbol) only in a certain use [...]”.
[413] “A material mark becomes a symbol only after we assign to it the rules of its usage, its grammar [...]”.

filosóficos. "Assim nascem facilmente as confusões mais fundamentais (de que toda a filosofia está repleta).". (3.324). Deve-se empregar, assim, "Uma notação, portanto, que obedeça à gramática *lógica* – à sintaxe lógica.". (3.325, grifo do autor)

No interior da sintaxe lógica, pode-se identificar o significado e o sentido dos símbolos quando, ao tornarmos cada parte da proposição uma possibilidade de substituição por outras partes, essa substituição determina o sentido dessa proposição. Sobre isso, diz Wittgenstein: "[...] o essencial no símbolo é, em geral, o que têm em comum todos os símbolos que podem cumprir o mesmo fim.". (3.3411). Por exemplo, seja a proposição "A rosa é uma flor", se substituirmos a palavra "rosa" pela palavra "cravo" teremos uma proposição com sentido, a proposição "O cravo é uma flor". O mesmo podemos verificar quando substituímos a palavra "flor" pela palavra "planta", o que resulta, também, em uma proposição com sentido, a proposição "A rosa é uma planta". Cada uma destas substituições mudam o sentido da proposição.

A seguir analisaremos, em detalhes, a possibilidade de substituição de símbolos por outros símbolos na proposição. Veremos que essa possibilidade de substituição caracteriza o que Wittgenstein chama de "variáveis proposicionais" (*Satzvariable*).

3.3. Variáveis proposicionais

Introduziremos, nesta seção, o conceito de variável proposicional. Veremos que a possibilidade de substituição de símbolos por outros símbolos na proposição, resultando em novas proposições com sentido, é representada por variáveis, chamadas por "variável proposicionais" (*Satzvariable*).

Seja a proposição "A rosa é uma flor", como exemplificado na seção anterior. Se tornarmos os símbolos "rosa" e "flor" substituíveis por outros símbolos equivalentes de tal modo que, como vimos, essa substituição caracterize o sentido de outras proposições resultantes desta substituição, a possibilidade de substituição dessas expressões indica a possibilidade de composição de novas proposições.

Podemos representar esta possibilidade de substituição por variáveis. Escreve Wittgenstein que "A expressão é, pois, representada [*dargestellt*][414] por uma variável, cujos

[414] A palavra "Dargestellt", no texto, deriva do verbo "darstellen". Este verbo é geralmente traduzido em português pela palavra "apresentar" ou "expor", cujo substantivo "Darstellung" é traduzido por "apresentação" ou "exposição". Entretanto, a língua alemã distingue representação, no sentido de apresentar ou expor algo, de representação, relacionado a nossa representação mental e subjetiva de um objeto. A representação, nesse segundo sentido, é expressa pela palavra "Vorstellung" que, em geral, é traduzida para o português por

valores são as proposições que contêm a expressão (No caso-limite, a variável torna-se constante, a expressão torna-se proposição.).”. (3.313). Wittgenstein chama essa possibilidade de substituição na proposição por “variável proposicional” (*Satzvariable*). Diz ele: “Chamo uma tal variável de ‘variável proposicional’.”. (3.313). A variável proposicional é, então, a variável cujo valor, resultante de sua substituição por expressões, é uma proposição com sentido. As expressões que substituem as variáveis são chamadas de “constantes”.

Por exemplo, seja a proposição “Esta cadeira é preta”; se designarmos preto por “P” e cadeira por “c”, temos a seguinte expressão: “c é P”, o que pode ser expresso, também, por “$P(c)$”. Se representarmos a expressão “cadeira”, que expressamos por “c”, por uma variável, que chamamos de variável x, então temos $P(x)$. A variável x em $P(x)$ pode ser substituída pelas expressões “a”, “b”, “c”, etc., resultando nas proposições $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$, etc.

Outro exemplo, é o caso de proposições cujas constantes são outras proposições que as compõem. Podemos citar aqui a proposição expressa por “$p \mid q$”, cujo significado da barra “|” é, como visto na Seção 2.7 do Capítulo II, o Conectivo de Sheffer. Neste caso, os sinais “p” e “q” são variáveis que expressam a possibilidade de substituição de expressões de proposições (por exemplo os sinais p, q, r, s, t, etc.), pois, como dito no aforismo 3.31, a própria proposição é uma expressão.

Mas, podemos, também, transformar em variável o predicado da proposição $P(a)$. Neste caso, “f” é a variável para os predicados que são atribuídos à expressão a, tal que representamos por “$f(a)$”. A partir de $f(a)$ temos uma classe de proposições, composta pela expressão a e expressões representadas por predicados f quaisquer atribuídos à expressão a, a saber, a classe de proposições, composta por $N\,(a)$ $P(a)$, $Q(a)$, etc.

Ademais, podemos, também, transformar em variável todas as expressões que ocorrem na proposição $P(c)$, isto é, tanto a expressão “c” quanto a expressão “P”, que representamos por “$f(x)$”. Neste caso, a partir de $f(x)$ temos uma classe de proposições que tem uma expressão representada pela variável x e uma expressão representada pela variável f, a saber, a classe de proposições $N(a)$, $N(b)$, … $P(a)$, $P(b)$,..., $Q(a)$, $Q(b)$... etc.

“representação”. Mas, como em português esta distinção não é clara, isto é, não existem palavras para designar e separar tais distinções, então, a melhor palavra em português para traduzir “Dastellung” é, também, a palavra “representação”, embora não devamos nos esquecer da importância desta distinção na língua alemã e sua consequente importância para filosofia dos filósofos de língua alemã, em especial, como se pode observar, para Wittgenstein. A palavra “representação” é, também, a utilizada por Santos (2001) na tradução do *Tractatus* (1921) para o português.

Notemos que a variável proposicional $f(x)$ determina a classe de proposições que relacionam um sujeito a um predicado, mas não determina a classe de proposições que relacionam, por exemplo, duas expressões "s" e "p", como no caso da proposição "Sócrates é discípulo de Platão", que pode ser formalizada pelas seguintes expressões "$D(s,p)$". Nesse sentido, podemos, também, representar por variável apenas uma das expressões ou todas as expressões que ocorrem na proposição $D(s,p)$. Se transformarmos em variável todas as expressões que nela ocorrem, podemos representar tais expressões pelas seguintes variáveis: $\phi(x,y)$. Assim, a variável $f(x)$ e a variável $\phi(x,y)$ determinam diferentes classes de proposições. A primeira determina, como vimos, a classe de proposições $P(a)$, $P(b)$,.., $Q(a)$, $Q(b)$ … etc., e a segunda, determina a classe de proposições $R(a,b)$, $R(b,c)$,.., $S(a,b)$, $S(b,c)$... etc.

Já a variável proposicional $p|q$ determina uma classe de proposições que relaciona duas proposições p e q quaisquer que podem ser substituídas, como indicado acima, pelas proposições p, q, r, s, t, etc., gerando, por exemplo, as seguintes proposições: $p|p$, $p|{\sim}q$. Como visto na Seção 2.7 do Capítulo II, $p|p$ é equivalente a uma proposição p com uma negação lógica (expressa na linguagem do *Tractatus* (1921) por "$\sim p$") e $p|{\sim}q$ é equivalente com implicação lógica entre p e q (expressa por no *Tractatus* (1921) por "$p \supset q$"). A variável proposicional $p|q$ torna possível, desse modo, um conjunto de novas proposições que pertence à classe de proposições determinadas por $p|q$.

Assim, temos diferentes classes de proposições representadas por diferentes tipos de variáveis. Se na notação transformarmos em variável apenas uma parte que representa seu traço essencial, então temos, como vimos, determinadas classes de proposições, mas se transformarmos em variável todas as partes da proposição que representam seus traços essenciais, então temos outra classe de proposições. Nesse sentido, escreve Wittgenstein: "Se transformarmos em variável uma parte constituinte de uma proposição, há uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável assim originada.". (3.315). E, além disso, "Se transformarmos em variáveis, porém, todos os sinais cujo significado foi arbitrariamente determinado, ainda assim continua a haver uma tal classe de proposições.". (3.315). Sobre isso, ainda escreve "Em geral, essa classe depende ainda do que nós, segundo uma convenção arbitrária, queremos significar com partes daquela proposição.". (3.315)

A classe de proposições depende, então, diretamente de uma decisão arbitrária tomada pelo lógico em sua notação. Essa decisão arbitrária, depende de nosso interesse quando realizamos nossa análise. Mas, esta decisão arbitrária não é meramente acidental, pois a própria notação, ao representar, através de variáveis, as expressões das proposições, expressa as possibilidades de escolha que dependem da essência do símbolo representada por ela. "Em nossas notações, é certo que algo é arbitrário, mas *isto* não é arbitrário: *se* já determinamos algo arbitrariamente, então algo mais deve ser o caso. (Isso depende da *essência* da notação).". (3.342, grifo do autor)

Desse modo, se a decisão arbitrária consiste em fixar P como constante e x como variável em $P(x)$, então os valores possíveis que a variável proposicional pode assumir são as expressões representadas pela variável "x". Em $f(a)$, os valores possíveis que a variável proposicional pode assumir são apenas as expressões representadas pela variável "f". No caso de $f(x)$, os valores possíveis que a variável proposicional pode assumir são tanto as expressões representadas pela variável x quanto as expressões representadas pela variável f. Em $\phi(x,y)$, os valores possíveis que a variável proposicional pode assumir são tanto as expressões representadas pela variável ϕ quanto as expressões representadas pelas variáveis x e y. E no caso de $p|q$, os valores que possíveis que as variáveis podem assumir são as expressões de proposições representadas pelas variáveis de proposições "p" e "q". Assim, a variável fixa os tipos de valores que a variável proposicional pode assumir tal que a fixação dos desse possíveis valores é a própria variável. Nesse sentido, diz Wittgenstein que "Os valores que a variável proposicional pode assumir são fixados. A fixação dos valores *é* a variável.". (3.316, grifo do autor)

A fixação da variável apenas especifica, no nível sintático, os tipos de proposições de uma classe de proposições. Em outras palavras, essa fixação é sintática e não propriamente semântica. Escreve Wittgenstein que "A fixação tratará, pois, apenas de símbolos, não do significado deles. E *apenas* isso é essencial para a fixação, *que ela seja apenas uma descrição de símbolos e nada enuncie sobre o que é designado*.". (3.317, grifo do autor). Podemos dizer, então, que a fixação dos valores que a variável proposicional assume, determina uma classe de proposições e os tipos de proposições que compõem aquela classe determinada. Escreve Wittgenstein que "A fixação dos valores da variável proposicional é a *especificação das proposições* cuja marca comum é a variável. A fixação é uma descrição dessas proposições.". (3.317, grifo do autor).

Toda variável que fixa uma determinada forma que as proposições podem assumir, é uma variável proposicional. O contexto em que a variável ocorre, bem como a expressão representada por ela, que é o contexto da proposição, é importante para a determinação do seu significado enquanto variável. Como já citado, diz Wittgenstein que “A expressão só tem significado [*Bedeutung*] na proposição. Toda variável pode ser concebida como variável proposicional. (inclusive o nome variável).”. (3.314). Com isso, se toda variável é uma variável proposicional, então só podemos determinar seu significado no contexto da proposição, isto é, a variável proposicional não é uma representação isolada de uma expressão, mas pressupõe uma proposição constituída por expressões para que ela tenha significado enquanto variável dessa expressão.[415]

A fixação da variável gera uma marca comum de uma classe de proposições que são todos os valores da proposição originada. As variáveis, por se constituírem como uma fixação de possíveis valores, são como que uma marca comum de todas as proposições da classe de proposições que ela determina. Essa marca comum de uma classe de proposições, que é a variável, nos conduz ao conceito de forma proposicional. É o que veremos a seguir.

3.4. A forma proposicional

Veremos, nesta seção, que a variável é condição para a forma proposicional, sem a qual não poderíamos falar em forma das proposições, pois, como veremos, toda forma proposicional é uma variável.

Na seção anterior vimos que a variável fixa os valores de uma proposição, pois determina uma classe de possíveis proposições e específica as proposições que resultam da substituição das possíveis expressões na variável. As variáveis, por se constituírem como uma fixação de possíveis valores, são como que uma marca comum de todas as proposições da classe de proposições que ela determina. Como já citado, “A fixação dos valores da variável proposicional é a *especificação das proposições* cuja marca comum é a variável. A fixação é uma descrição dessas proposições.”. (3.317, grifo do autor).

As variáveis, ao se caracterizarem como uma marca comum de classes de proposições, constituem-se como uma forma das proposições. Parece ser isso que Wittgenstein quer dizer no seguinte aforismo: “O que designa no símbolo é aquilo que é comum a todos os símbolos pelos quais ele pode ser substituído de acordo com as regras da sintaxe lógica.”. (3.344)

---

[415] Se toda variável pode ser concebida como variável proposicional, então utilizaremos, a partir de agora, apenas o termo “variável” para nos referirmos à variável proposicional.

Sendo que os símbolos ou as expressões substituem as variáveis proposicionais na proposição, resultando em uma proposição com sentido, então podemos dizer que tais expressões assinalam uma forma (*Form*) e um conteúdo (*Inhalt*).

Os símbolos ou as expressões assinalam uma forma, pois são representados pela variável que expressa a forma proposicional; e assinalam um conteúdo, pois substituem as variáveis nas variáveis, determinando-as, resultando em uma proposição com sentido. Sobre isso, escreve Wittgenstein "A expressão assinala uma forma e um conteúdo.". (3.31).

No artigo "Algumas Observações sobre a Forma Lógica" (1929) (*Some Remarks on Logical Form*) Wittgenstein diz que "Toda proposição tem um conteúdo e uma forma. […] Isso quer dizer, se nós substituirmos as variáveis por constantes da proposição.". (WITTGENSTEIN, 2012, p. 162, tradução nossa).[416] Desse modo, se as expressões assinalam uma forma e um conteúdo, então representá-las por variáveis proposicionais significa exibir a forma proposicional da proposição.

Vimos, pois, na Seção 3.2, que as expressões são as partes da proposição que caracterizam o seu sentido; como a proposição é composta por essas partes essenciais que a caracterizam, então toda proposição é composta por expressões, isto é, toda proposição tem algo em comum que é a expressão. Em outras palavras, a expressão é o que há de comum em uma classe de proposições. Nesse sentido, escreve Wittgenstein que "A expressão pressupõe as formas de todas as proposições em que pode aparecer. É a marca característica comum de uma classe de proposições.". (3.311).

A forma proposicional é, então, exibida por todas as proposições. Se a forma proposicional é exibida pelas proposições, isso significa que ela não é ou não pode ser expressa pela proposição. Se ela não pode ser expressa por proposições, então ela não pode se tornar objeto de enunciação de outra proposição que diga algo sobre ela, isto é, ela não é objeto de uma metalinguagem cuja linguagem objeto seria ela própria, isto é, a forma lógica da proposição. Assim, escreve Wittgenstein que "A proposição não pode representar [*darstellen*] a forma lógica, esta forma se espelha na proposição. O que se espelha na linguagem esta não pode representar. O que *se* exprime na linguagem, *nós* não podemos exprimir por meio dela. A proposição *mostra* a forma lógica da realidade. Ela a exibe."

[416] "Every proposition has a content and a form. […] That is to say, if we substitute variables for the constants of the proposition.".

(4.121, grifo do autor). Assim, “O que *pode* ser mostrado não *pode* ser dito.”. (4.1212, grifo do autor)

As expressões estão de tal modo conectadas que a relação entre elas já está prevista pela forma da proposição. Isso quer dizer que não se pode quebrar essa ligação sem quebrar a forma lógica da proposição. Sobre isso, diz Wittgenstein em *Algumas Observações sobre a Forma Lógica* (1929): “Devemos eventualmente atingir a conexão final dos termos, a conexão imediata que não pode ser quebrada sem destruir a forma proposicional como tal.”. (WITTGENSTEIN, 2012, p. 162, tradução nossa).[417]

Dado este vínculo profundo da conexão entre os símbolos e a forma lógica da proposição, diz Wittgenstein no *Tractatus* (1921) que “Há uma e apenas uma análise completa da proposição.”. (3.25). Ainda diz ele: “A proposição exprime de uma maneira determinada, claramente especificável, o que ela exprime: a proposição é articulada.”. (3.251). A articulação presente em uma proposição já está, assim, prevista nas combinações expressa pela forma lógica da proposição. Assim, além de articulada, toda proposição é completamente analisada. (3.21)

A forma lógica da proposição é encontrada no que Wittgenstein chama por “conceito formal” (*formalen Begriffen*). O conceito formal é uma variável, tal que a variável designa o conceito formal. “A expressão conceito formal, portanto, é uma variável proposicional em que apenas esse traço característico é constante.”. (4.126). “A variável proposicional designa o conceito formal e seus valores designam os objetos que caem sob esse conceito.”. (4.127). Assim, “Toda variável é o sinal de um conceito formal. Pois toda variável representa uma forma constante, que todos os seus valores possuem e que pode ser entendida como propriedade formal desses valores.”. (4.1271)

Wittgenstein introduz o conceito formal para separá-lo do conceito propriamente dito. “Introduzo essa expressão para deixar claro o que funda a confusão entre os conceitos formais e os conceitos propriamente ditos, que perpassa toda a antiga lógica.”. (4.126). O conceito propriamente dito recebe um nome que designa as coisas em geral que tem a mesma propriedade em comum; por exemplo, o nome genérico “objeto” designa todas as coisas que têm uma propriedade em comum que a caracteriza e que por isso podem ser chamado de objeto. Já o conceito formal é expresso por uma variável, por exemplo, a variável “*x*”, pode

[417] “We must eventually reach the ultimate connection of the terms, the immediate connection which cannot be broken without destroying the propositional form as such.”.

representar a expressão “objeto”. Escreve, então, Wittgenstein que “[...] o nome variável ‘*x*’ é o sinal propriamente dito do pseudoconceito *objeto*. Onde quer que a palavra ‘objeto’ (‘coisa’, etc.) seja usada corretamente, será expressa na ideografia pelo nome variável.”. (4.1272)

Se o conceito formal não pode ser expresso por uma proposição que diga algo sobre suas características, ele pode ser mostrado na própria simbolização de uma conceitografia. Diz Wittgenstein que “Que algo caia sob um conceito formal como seu objeto não pode ser expresso por uma proposição. Isso se mostra, sim, no próprio sinal desse objeto.” (4.126). Então, os sinais $f(x)$, $\phi(x,y)$ e $p|q$, por exemplo, mostram o conceito formal e expressam conceitos propriamente ditos.

Desse modo, se os conceitos formais não podem ser expressos, então eles “[...] não podem, como os conceitos propriamente ditos, ser representados por uma função. Pois suas notas características, as propriedades formais, não são expressas por funções.”. (4.126). Por exemplo, o conceito “cadeira”, cujo sinal designa todas as cadeiras, pode ser expresso por $C(x)$, sendo que o sinal $C(x)$ é a expressão do conceito formal que não pode ser senão mostrado, e não expresso, por um simbolismo; o que pode ser expresso é o conceito “cadeira”.

Dizer que o conceito formal existe, isto é, tornar o conceito formal objeto de enunciação, qualquer enunciação que seja, é um contra-senso. Diz Wittgenstein que “A questão da existência de um conceito formal é um contra-senso. Pois nenhuma proposição pode responder a uma tal questão. (Portanto, não se pode perguntar, p. ex.: 'Há proposições sujeito-predicado não analisáveis?').”. (4.1274)

Os conceitos formais são mostrados na conceitografia por variáveis, pois são as variáveis que, como vimos, mostram a forma da proposição. Desse modo, não são propriamente as funções que mostram os conceitos formais, mas as variáveis proposicionais. Nesse sentido, a função, que é representada por uma variável, a variável f, exibe um conceito formal e os indivíduos são, também, representados por variáveis, as variáveis x, y, z, etc, também exibem um conceito formal. Veremos, mais adiante, que as variáveis proposicionais p, q, r, etc., também exibem conceitos formais, pois são variáveis. Assim, escreve Wittgenstein que “Todas elas [as palavras ‘complexo’, ‘fato’, ‘função’, ‘número’, etc.] designam conceitos formais e são representadas na ideografia por variáveis, não por funções ou classes. (Como acreditavam Frege e Russell).”. (4.1272)

Como o conceito formal é mostrado em uma conceitografia por variáveis, pois são as variáveis que, como vimos, mostram a forma da proposição, então a função, que é representada por uma variável, a variável *f*, exibe um conceito formal. É o conceito de função que estudaremos na seção seguinte.

3.5. Funções

Veremos que a função é representada por uma variável, cuja substituição das expressões nas variáveis resulta em uma proposição com sentido. Introduziremos aqui, mais detidamente, as expressões chamadas por “nomes” (*Name*). Veremos que os nomes são argumentos que substituem uma variável na função, tal que as funções são articulações de nomes, chamada por “funções de nomes” (*Funktion der Namen*).

O modo como Wittgenstein concebe a proposição é, como diz ele próprio no *Tractatus* (1921), semelhante ao modo como usam Frege e Russell, isto é, como uma função das expressões nela contidas. Escreve ele: “A proposição, concebo-a – à maneira de Frege e Russell – como função das expressões nela contidas.”. (3.318). Nesse sentido, podemos dizer que a função é uma variável que representa expressões das proposições, cuja substituição nas variáveis por expressões resulta em uma proposição com sentido.

Nas funções, as variáveis “f” e “ϕ” representam, respectivamente, expressões que designam predicados ou relações, e as variáveis proposicionais “x”, “y”, “z”, etc., representam expressões e que designam indivíduos. Essas expressões representadas por variáveis proposicionais são o que Wittgenstein chama por “nomes” (*Name*). Sobre isso, diz o autor: “Os nomes são símbolos simples, indico-os por meio de letras isoladas (‘x’, ‘y’, ‘z’).”. (4.24). “Os sinais simples empregados na proposição chamam-se nomes.”. (3.202). Assim, nomes são sinais empregados da proposição que representam expressões.

O nome tem um objeto que é seu significado. Diz Wittgenstein que “O nome [*Name*] significa o objeto. O objeto é seu significado [*Bedeutung*]”. (3.203). O nome mantém, desse modo, uma relação com o objeto, a relação de nomeação, cujo significado é o próprio objeto do mundo. Mas, se os sinais empregados da proposição representam expressões, então nomes designariam apenas indivíduos ou, também, predicados e relações? Em outras palavras, os objetos nomeados são apenas indivíduos ou são, também predicado e relações?

No *Caderno de Notas* (1914 – 1916) diz Wittgenstein que “Relações e propriedades são também objetos.”. (WITTGENSTEIN, p. 61e, 1961, tradução nossa).[418] Mathieu Marion (cf. 2012, p. 76) aponta que em *Algumas Observações sobre a Forma Lógica* (1929) há um trecho que, também, vai ao encontro do *Caderno de Notas*, a saber: “Poder-se-ia pensar – e eu mesmo pensava outrora – que um enunciado que exprime o grau de uma qualidade seria analisável em um produto lógico de enunciados quantitativos simples e em um enunciado suplementar que os completasse.”. (WITTGENSTEIN, 2012, p. 167)[419]

Sobre este trecho do *Caderno de Notas* comenta Marion em *Introdução ao Tractatus Logico-Philosofhicus* que Wittgenstein “[...] comenta claramente que uma propriedade – a saber, a ‘qualidade’ da qual falam os ‘enunciados quantitativos simples’ – entra na composição das proposições elementares. Além disso, ao dizer: ‘Eu mesmo pensava outrora’, Wittgenstein só pode estar se referindo ao Tractatus!”. Assim, se consideramos o que Wittgenstein diz antes e depois do *Tractatus* (1921), nomes designam objetos que são indivíduos, predicados e relações. É essa interpretação que assumiremos em nossa Tese.

Mas, mesmo que nomes designem os objetos como os indivíduos, predicados e relações, significado de um nome não pode ser dado isoladamente como uma mera atribuição de um sinal a algo. O significado de um nome deve ser verificado no contexto da proposição. É nesse sentido que Wittgenstein anuncia um de seus princípios fundamentais: “Só a proposição tem sentido [*Sinn*]; e só no contexto da proposição que um nome tem significado [*Bedeutung*]”. (3.3)

Segundo este princípio, os objetos não têm sentido, pois eles não podem ser descritos ou enunciados por uma proposição. Os objetos só podem ser nomeados. Diz Wittgenstein que “Os objetos, só posso *nomeá-los*. Sinais substituem-nos. Só posso falar sobre eles, não posso *enunciá-los*.” (3.23, grifo nosso). A proposição não tem significado [*Bedeutung*] como dizemos que os nomes têm, mas dizemos que ela tem sentido [*Sinn*], pois a proposição descreve situações e não nomeia objetos. “Situações podem ser descritas, não nomeadas.”. (3.144). Usando a metáfora de Wittgenstein, “Nomes são como pontos, proposições são como flechas, elas têm sentido.”. (3.144). Explorando essa metáfora, podemos dizer que as proposições, como flechas, apontam para a realidade, procurando atingi-la, e nomes, como

[418] “Relations and properties, etc. are objects too.”.

[419] “One might think - and I thought so not long ago -that a statement expressing the degree of a quality could be analyzed into a logical product of single statements of quantity and a completing supplementary statement.”.

pontos, são elementos soltos que só tem direção ou sentido no interior de uma reta direcionada.

Notemos que Wittgenstein movimenta, aqui, o que se chama por "Princípio do Contexto de Frege", mas com diferenças em alguns dos pontos centrais. Sobre este princípio, diz Frege em *Os Fundamentos da Aritmética* (1884): "[...] deve-se perguntar pelo significado [*Bedeutung*] das palavras no contexto da proposição, e não isoladamente.". (FREGE, 1980, p. 204). Há semelhanças com o princípio do contexto de Frege quanto à necessidade de se determinar o significado do nome somente no contexto em que ele ocorre, isto é, na proposição.

Mas, a diferença fundamental entre Wittgenstein e Frege é que para este não apenas proposições têm sentido, mas também nomes tem sentido. Como vimos na Seção 1.6, Frege, no artigo *Sobre o Sentido e a Referência* (1892), diz que "É, pois, plausível pensar que exista, unido a um sinal (nome, combinação de palavras, letras), além daquilo por ele designado, que pode ser chamado de sua referência (*Bedeutung*), ainda o que eu gostaria de chamar de o sentido (*Sinn*) do sinal, onde está contido o modo de apresentação do objeto.". (FREGE, 2009, p. 131). Pode-se observar tanto o nome quanto proposições têm sentido, pois dizer que um sinal tem sentido, significa que é possível, embora não seja necessário, que um sinal apresente um objeto.

Um objeto, para Frege, é tudo o que é saturado e, nesse sentido, pode ser tanto o que pode ser designado por um nome quanto o pode ser referido por uma proposição. No caso de uma proposição, sua referência são seus possíveis valores de verdade, o verdadeiro e o falso. Mas, uma proposição, no entender de Frege, pode ter sentido e não ter referência, como os são as sentenças da literatura, por exemplo. Diz ele "A sentença, analisando um exemplo: 'Ulisses profundamente adormecido foi desembarcado em Ítaca' tem, obviamente, um sentido. Mas, assim como é duvidoso que o nome 'Ulisses, que aí ocorre, tenha uma referência, assim também é duvidoso que a sentença inteira tenha uma.". (FREGE, 2009, p. 131)

Assim, para Frege proposições e nomes tem sentido e podem ter referência. Enquanto que para Wittgenstein nomes não têm sentido, apenas proposições têm sentido. O significado dos nomes é determinado apenas no contexto das proposições. Sobre essa comparação, em resumo diz Anscombe: "A concepção de Wittgenstein de 'sentido' pode ser chamada a mesma que a de Frege, se tivermos o cuidado de acrescentar que Wittgenstein teve diferentes teses sobre ela: pois ele afirmou que os nomes não tinham sentido, mas apenas a referência; [...]"

(ANSCOMBE, 1965, p. 17, tradução nossa)[420] e afirmou, também, que "[...] proposições nenhuma [têm] referência, mas apenas sentido; e também que uma proposição não poderia ter um sentido sem ser verdadeira ou falsa.". (ANSCOMBE, 1965, p. 17, tradução nossa)[421]

Se para Wittgenstein os objetos só podem ser nomeados, e não descritos por uma proposição, então eles não podem ser decompostos por elementos mais simples ou definidos a partir de elementos mais simples. "O nome não pode ser desmembrado por meio de uma definição: é um sinal primitivo" (3.26). Em outra passagem diz: "Nomes não podem ser dissecados por definições (Nenhum sinal que tenha significado isoladamente, por si só).". (3.262). As definições dizem o que uma coisa é, ou seja, decompõem sinais da esquerda, que nomeiam o que está por definir, em elementos mais primitivos, descritos por proposições, que são os sinais da direita. Assim, nomes são sinais primitivos que não podem ser definidos.

Embora os nomes não possam ser definidos, eles podem ser explicitados por proposições. "Uma proposição só pode dizer *como* uma coisa é, não *o que* ela é.". (3.221, grifo nosso). Dizer como uma coisa é, significa, nesse sentido, explicitá-la, defini-la. Wittgenstein diz que uma explicitação é possível por meio de elucidações [*Erläuterungen*]. Como dissemos na Seção 1, a Filosofia consiste essencialmente de elucidações (4.112), isto é, consiste em explicitar através de proposições a natureza lógica dos seus elementos constituintes.

No caso dos nomes, a elucidação consiste na análise do emprego dos nomes no contexto das proposições. Os modos como o sinal é empregado, mostra características de sua natureza. Sobre isso, diz o autor: "O que não vem expresso nos sinais, seu emprego mostra. O que os sinais escamoteiam, seu emprego denuncia.". (3.262). A análise dos empregos dos nomes no contexto das proposições permite que possamos extrair características que são próprias aos nomes.

Analisando o emprego dos nomes, pode-se dizer que "[...] o nome propriamente dito é o que todos os símbolos que designam o objeto tem em comum.". (3.3411). Sendo assim, dada uma proposição, a proposição "A rosa é uma flor", por exemplo, os símbolos "rosa" e "cravo" cumprem, ambas, o mesmo fim, a saber: o de sujeito na proposição; e os símbolos "flor" e "planta" também cumprem o mesmo fim: o de predicado na proposição. Portanto, o

[420] "Wittgenstein's conception of 'sense' may be called the same as Frege's, if we are careful to add that Wittgenstein had different theses about it: for he held that names had no sense but only reference, and propositions no reference but only sense; [...]".
[421] "[...] proposition could not have a sense without being either true or false.".

papel do sujeito é o que há de essencial nos símbolos "rosa" e "cravo" e o papel de predicado é o que há de essencial nos símbolos "flor" e "planta".

Pode-se observar, assim, que os nomes formam as proposições mais elementares. "A proposição elementar consiste em nomes. É uma vinculação, um encadeamento de nomes.". (4.22). Na análise das proposições chegamos, então, às unidades mais elementares que a compõem e que caracterizam o seu sentido. "É óbvio que devemos, na análise das proposições, chegar a proposições elementares, que consistem em nomes em ligação imediata.". (4.221). Mas, "Levanta-se aqui a questão: como se origina a liga proposicional?" (4.221), isto é, como é possível o encadeamento ou a ligação entre nomes no interior da proposição?

Em 4.24 diz Wittgenstein que "[...] a proposição elementar [é] como uma função dos nomes: 'fx', $\phi(x,y)$, etc". A função de nomes forma a proposição elementar, pois a função de nomes é constituída por variáveis proposicionais, as quais, na condição de variáveis, podem ser, como vimos, substituídas, por constantes ou expressões. Nesse sentido, as letras "f" e "ϕ" são, também, variáveis que podem ser substituídas, respectivamente, por uma propriedade determinada ou por uma relação determinada, e as letras isoladas "x", "y", "z", podem ser substituídas por nomes, pois essas letras indicam nomes, resultando, como sabemos, em uma proposição com sentido; proposição a qual pode ser expressa pelas letras "p", "q", "r", etc. "[...] indico-as [as proposições elementares] por meio das letras p, q, r.". (4.24)

As proposições p, q, r, são, então, resultado da substituição dos nomes nas variáveis que os representam na função. Quando o nome substitui a variável na função, ele é designado de "argumento" (*Argument*). Nesse sentido, seja uma proposição p, expressa pela função fx, e *s*uponha que um argumento a substitua uma variável na função fx; se o argumento a tem a propriedade f, então dizemos que a proposição p é verdadeira, caso contrário, se o argumento a não tem a propriedade f, dizemos que a proposição p é falsa.

A relação entre os argumentos que substituem a variável e o valor de verdade ou o valor falso resultante é o que Wittgenstein chama da "função de verdade" (*Wahrheitsfunktion*) da proposição elementar. Como o valor de verdade ou de falsidade surge no interior dos elementos da própria função das proposições elementares e não de proposições já dadas, então ele diz que "A proposição elementar é uma função de verdade de si mesma.". (5), isto é, sua função de verdade não depende de um elemento exterior à proposição para a determinação de seu valor de verdade, ela surge a partir da função que a caracteriza.

O conceito de função de verdade (*Wahrheitsfunktion*) parece direcionar a análise lógica das proposições para o conceito de tautologia, ao invés da análise recair, como em Frege e Russell, na relação entre valores de verdade de funções a partir da substituição na variável que ocorre na função. O conceito de tautologia será introduzido na Seção 3.8. Notemos, ademais que Russell utiliza o termo “função de verdade” na Segunda Edição do *Principia Mathemaica* (1927) por influência do *Tractatus* (1921). Diz Peter Hylton (cf. 2005, p. 138-139) *Funções, Operações e Sentido no Tractatus de Wittgenstein* (*Functions, Operations, and Sense in Wittgenstein's Tractatus*), que o conceito de função de verdade é um novo elemento em relação à noção de valor de verdade, que podemos chamar também de “verofuncional”, introduzida por Frege e Russell.

A verdade ou a falsidade de uma proposição elementar está relacionado ao sentido completo que ela tem por natureza. Isso quer dizer que a proposição não é desarticulada, mas articulada. “A proposição não é uma mistura de palavras. - (Como o tema musical não é uma mistura de sonas.). A proposição é articulada.”. (3.14). Então, no contexto da proposição, os nomes estão direcionados, pois estão inseridos em uma proposição com sentido, o que permite dispô-los de uma determinada maneira e não de outra. “O sinal proposicional consiste em que seus elementos, as palavras [nomes], nele estão, uns para os outros, de uma determinada maneira”. (3.14)

A articulação das proposições é possível porque ela expressa o pensamento. “Na proposição o pensamento exprime-se sensível e perceptivelmente.”. (3.1). “O pensamento é a proposição com sentido.”. (4). O pensamento fornece ao sinal proposicional a articulação necessária entre seus elementos constituintes, os nomes, articulando-os de uma determinada maneira e não de outra. Nesse sentido, assim como um tema musical é a articulação entre as notas que o constitui e essa articulação é condição para a melodia da música, os nomes do sinal proposicional são articulados de tal modo que os objetos designados pelos nomes são objetos do pensamento expressos na proposição. “Na proposição, o pensamento pode ser expresso de modo que aos objetos do pensamento correspondam elementos do sinal proposicional.”. (3.2)

Assim, ocorre a articulação na proposição elementar, pois os nomes se articulam com as propriedades e relações formando uma unidade com sentido que expressam um pensamento verdadeiro ou falso. A decomposição das proposições em nomes e propriedades e relações tornam as proposições elementares completamente analisadas. “Chamo esses elementos de 'sinais simples'; a proposição, de 'completamente analisada'.". (3.201). Desse modo, além das proposições serem passíveis de uma análise completa, isto é, de uma decomposição integral em elementos mais simples, essa decomposição é única, ou seja, não há outro modo de fazê-la. "Há uma e apenas uma análise completa da proposição.". (3.25)

A seguir veremos que podemos ter não apenas proposições cuja função de verdade surgem delas mesmas, mas proposições cuja função de verdade surgem de outras proposições mais simples que ela e que são condições para o surgimento de novas proposições.

3.6. Operações

Nessa seção veremos que a possibilidade de compor novas proposições a partir de proposições elementares é o que Wittgenstein chama por "operações" (*Operation*). As operações são condição para a Lógica das Proposições.

Suponhamos que a partir de uma proposição elementar possamos compor outras proposições, mais complexas. Por exemplo, seja uma proposição expressa por $P(x)$, cujo valor de verdade resulta da substituição da variável que nela ocorre por um argumento. Como vimos, se o argumento que substitui x satisfaz a propriedade P, então a proposição é verdadeira, caso contrário é falsa. Podemos chamar a proposição $P(x)$ simplesmente de proposição p. Se p é verdadeira, então a negação de p é falsa, e se p é falsa, então p é verdadeira. Nesse sentido, a negação de p é uma proposição mais complexa que p, pois a negação de p é gerada a partir de p.

Podemos observar que o valor de verdade da negação da proposição p depende do valor de verdade da proposição p, pois, como dissemos acima, se p é verdadeira, então a negação de p é falsa, e vice-versa. Então, a proposição que é a negação de p é uma função de verdade da proposição p. Assim, de modo geral, podemos dizer que proposições complexas, geradas das proposições elementares, são funções de verdade dessas proposições elementares que a constituem. Nesse sentido, escreve: "A proposição é uma função de verdade das proposições elementares.". (5)

Essa possibilidade de compor novas proposições a partir das funções de verdade de proposições elementares é o que Wittgenstein chama por "operação" (*Operation*). Diz ele que "A operação é o que deve acontecer com uma proposição para que dela se faça outra.". (5.23). Nesse sentido, o próprio conceito de operação deve ser suficiente para a composição de proposições a partir das funções de verdade de proposições elementares. Diz Peter Hylton em

Funções, Operações e Sentido no Tractatus de Wittgenstein que com a noção de operação "[...] Wittgenstein deve evitar quaisquer novos elementos; ele deve, portanto, dar uma explicação da composição verofuncional que não requeira, de modo relevante, novos elementos.". (HYLTON, 2005, p. 139, tradução nossa)[422]

Nessa composição de proposições a partir de operações, a estrutura de uma proposição surge a partir estrutura de proposições mais básicas que a compõem. Isso quer dizer que, como toda proposição é resultado de uma função de verdade, então a função de verdade da proposição resultante surge a partir da função de verdade das proposições elementares que a compõem. Assim, "A operação é a expressão de uma relação entre as estruturas de seu resultado e de suas bases.". (5.22), isto é, a operação expressa o modo como proposições resultam de proposições mais elementares que a compõem.

O resultado da relação entre a função de verdade de uma proposição e a função de verdade das proposições que a compõe é o que Wittgenstein chama por "operações de verdade" (*Wahrheitsoperationen*). Diz que "As funções de verdade das proposições elementares são resultados de operações que têm as proposições elementares como bases (Chamo essas operações de operações de verdade).". (5.234). "A operação de verdade é a maneira como a função de verdade resulta das proposições elementares.". (5.3). Assim, a "Negação, adição lógica, multiplicação lógica, etc., etc. são operações.". (5.2341).

Nesse sentido, dizemos que a operação de negação expressa, como dissemos, a relação entre uma proposição *p* e sua negação, tal que operação de verdade da negação consiste em que se *p* é verdadeira, então a negação de *p* é falsa, e vice-versa, isto é, a operação de negação inverte o sentido da proposição. "(A negação inverte o sentido da proposição)". (5.2341). A notação no *Tractatus* (1921) para a negação da proposição p é a proposição "~ *p*".

Desse modo, podemos dizer, também, que a operação de adição lógica expressa a relação entre proposições, por exemplo, as proposições *p* e *q*, tal que a operação de verdade da adição consiste em expressar que a adição entre *p* e *q* é verdadeira se ao menos uma proposição, *p* ou *q*, for verdadeira, sendo falsa quando *p* e *q* são ambas falsas. A notação para a adição é "*p* v *q*".

Já a operação de multiplicação lógica expressa também relações entre proposições, sendo que se assumirmos as mesmas proposições *p* e *q* como exemplo, a operação de verdade

[422] "[...] Wittgenstein must avoid any such new elements; he must, therefore, give an explanation of truth-functional compounding which does not, in the relevant sense, require new elements.".

da multiplicação consiste em expressar que a multiplicação entre *p* e *q* é verdadeira quando ambas as proposições, *p* e *q*, forem verdadeiras, sendo falsa nos demais casos. A notação para a multiplicação é "*p.q*".

Assim, a partir da função de verdade das proposições elementares surge uma nova função de verdade, que são as operações de verdades resultantes. Essa operação de verdade é, então, o resultado da relação entre as funções de verdade das proposições elementares e a nova função de verdade da proposição resultante. Tal relação constitui a natureza da operação de verdade, ou seja, é esta relação entre funções de verdade que define a operação de verdade. "É da natureza da operação de verdade que, da mesma maneira como das proposições elementares resulta sua função de verdade, de funções de verdade resulte uma nova função de verdade.". (5.3)

A nova função de verdade resultante da operação de função de verdade é, como se pode notar, uma proposição. Então, generalizando, podemos dizer, com Wittgenstein, que "Toda operação de verdade gera, a partir de funções de verdade de proposições elementares, uma nova função de verdade de proposições de verdade, uma proposição.". (5.3). Portanto, podemos concluir que "Toda proposição é o resultado de operações de verdade com proposições elementares.". (5.3), com exceção das proposições elementares que, como vimos, são funções delas mesmas.

A possibilidade de gerar novas funções de verdade, a partir de funções de verdade já dadas, permite que possamos compor operações de operações de verdade de proposições elementares. As operações de operações de verdade são resultantes de proposições elementares por aplicações sucessivas de operações sobre operações. Desse modo, podemos generalizar e dizer que "O resultado de toda operação de verdade com os resultados de operações de verdade com proposições elementares é, por sua vez, o resultado de uma operação de verdade com proposições elementares.". (5.3)

As operações de operações de verdade são aplicações de uma operação de verdade sobre outra operação de verdade. Tais aplicações podem ser sucessivas. Por exemplo, na operação de negação podemos encontrar sucessões de operações de negação "~ ~ ~ *p*" (notemos neste caso que a operação pode ter ela mesma como a base para sua operação), na operação de adição lógica podemos encontrar sucessões de operações de adição "*s* v (*r* v (*p* v *q*))", ou uma sucessão de operações diferentes "*r* . (*q* v ~ *p*)". Nesse sentido, escreve

Wittgenstein “[...] falo da aplicação sucessiva de *várias* operações a um certo número de proposições.”. (5.2521, grifo do autor).

Sendo tais proposição, proposições do tipo elementares, então a aplicação sucessiva das operações é relativa às proposições elementares. Com isso, genericamente, podemos dizer, com Wittgenstein, que “Todas as funções de verdade são resultados da aplicação sucessiva de um número finito de operações de verdade às proposições elementares.”. (5.32). Aplicações sucessivas são aplicações continuadas de uma operação ao resultado das funções de verdade das proposições elementares, isto é, às operações de verdade das proposições elementares que a constituem. “A aplicação de uma operação a seu próprio resultado, chamo de sua aplicação sucessiva.”. (5.2521)

Podemos expressar a aplicação sucessiva de várias operações do seguinte modo: seja *a* uma proposição elementar e *O* uma operação qualquer tal que *O’a* expressa a aplicação da operação *O* sobre *a*. Sendo *O* uma aplicação qualquer, podemos expressar a aplicação sucessiva de várias operações *O* sobre *a* pela seguinte série de aplicações “*a*, *O’a*, *O’O’a*,...”. Wittgenstein expressa essa série de aplicações da operação *O* sobre *a* pela seguinte expressão formal: “[*a*,*x*,*O’x*]”. “Essa expressão entre colchetes é uma variável. O primeiro termo da expressão é o início da série formal, o segundo é a forma de um termo qualquer *x* da série, e o terceiro é a forma do termo da série que se segue imediatamente a *x*.”. (5.2522). Como a expressão formal “[*a*,*x*,*O’x*]” é uma variável e como toda variável é variável (3.314), então tal expressão formal significa, também, uma variável.

A expressão formal [*a*,*x*,*O’x*], além de ser uma variável, é uma série formal e ordenada, pois é uma relação entre estruturas de proposições que resulta de uma aplicação sucessiva e ordenadas de operações sobre tais estruturas. Sobre isso, escreve Wittgenstein: “Séries ordenadas por meio de relações *internas*, chamo de séries formais.”. (4.1252, grifo do autor). Por exemplo, sejam as estruturas *xRy* e *P*(*x*). Se aplicarmos uma operação *O* sobre elas, a saber, a operação de soma, teremos *xRy* v *P*(*x*), tal que a operação de soma é uma relação entre as estruturas *xRy* e *P*(*x*). Se expressarmos *xRy* por *p* e *P*(*x*) por *q*, então a operação soma significa uma relação entre as estruturas de *p* e *q*. Agora, se aplicarmos a operação de negação sobre *p* v *q*, então teremos como resultado a proposição ~ (*p* v *q*) e teremos uma relação entre a estrutura da proposição ~ (*p* v *q*) e a estrutura da proposição *p* v *q*, relação a qual caracteriza uma relação interna.

A relação é interna, pois é uma relação entre as estruturas de proposições. Sobre isso, diz Wittgenstein: “[...] ao invés de relação entre estruturas, [digo] ‘relação interna’”. Desse modo, assim como a forma não pode ser dita, mas mostrada, a relação interna não pode, também, ser dita, mas apenas mostrada pelo simbolismo lógico. E como ela relaciona e ordena uma série de estruturas de proposições, podemos dizer que ela equivale ao conceito de operação. “A relação interna que ordena uma série equivale à operação por meio da qual um termo resulta do outro.”. (5.232). Desse modo, se aplicarmos operações sucessivamente entre estruturas de proposições, então a operação mantém relações internas entre as estruturas de seu resultado e de suas bases, ou seja, nas palavras do filósofo: “A operação é a expressão de uma relação entre as estruturas de seu resultado e de suas bases.”. (5.22)

A relação entre as estruturas de seu resultado e de suas bases, expressa por operações, gera um conjunto de proposições. Esse conjunto de proposições constitui a Lógica das Proposições. “A operação só pode intervir onde uma proposição resulta de uma outra de maneira logicamente significativa. Portanto, ali onde começa a construção lógica da proposição.”. (5.233)

Uma distinção conceitual que devemos considerar aqui, antes de concluirmos a seção, é a distinção que Wittgenstein faz entre operação e função. Diz ele: “Não se pode confundir operação e função” (5.25). Diz Hylton (cf. 2005, p. 139) parece plausível supor aqui que Wittgenstein está em desacordo com Frege e Russell.

Para Frege, como vimos na Seção 1.4, as funções são aplicáveis aos predicados e às proposições, como é o caso da negação e da implicação. No caso da aplicação da função aos predicados, o conceito é um tipo de função cujo valor é sempre um valor de verdade, e no segundo caso, o conectivo é, também, um tipo de função cujo valor é um valor de verdade. Em Russell, como vimos na Seção 2.7, a função proposicional é, também, aplicada aos aos predicados e às proposições. Mas, ele torna mais explícita esta relação de aplicação. A função proposicional, em seu sistema, é o esquema que serve como condição lógica para a Lógica das Classes e das Relações e, também, para a Lógica das Proposições.

Assim, tanto para Frege quanto para Russell as funções se aplicam a predicados e também à proposições, gerando proposições elementares e proposições mais complexas; neste último caso, funções de proposição são operações, isto é, os conectivos são tipos de funções. Tendo isso em vista, voltando a Wittgenstein, observa Hylton que “[...] é natural supor, ao insistir que as operações não são funções, que Wittgenstein está insistindo que seu tratamento de tais formas de composição é diferente da deles [do tratamento dado por Frege e Russell].". (HYLTON, 2005, p. 140, grifo do autor, tradução nossa)[423]

Wittgenstein parece se opor a Frege e Russell, pois ele distingue, conceitualmente, operação de função dizendo, principalmente, que a operação pode, como vimos, ter ela mesma como a base para sua operação, por exemplo, $\sim \sim \sim p$, expresso por N (N ($\sim p$)) – tal que N é a operação de negação –, a função não pode ter a si mesma como seu próprio argumento, pois, quando ela se coloca como argumento dela mesma, ela passa a ter outro significado.

Quando a função se coloca como argumento dela mesma, então ela não pode ser expressa como se fosse ela mesma. Isso significa que deve-se criar um simbolismo para evitar que ela seja função de si mesma, pois isso pode conduzir a um paradoxo. Por exemplo, suponha que a função $F(F(u))$ pudesse ter ela mesma como seu próprio argumento. Nesse caso, a função F seria o mesmo que a função $F(u)$, apenas com a diferença de que $F(u)$ é argumento de F. Entretanto, aponta Wittgenstein que a função externa F e a função interna F devem ter significados diferentes, pois a primeira tem como argumento uma função e a segunda tem como argumento um nome.

A diferença de significado da letra F advém de sua aplicação, já que a letra F sozinha, fora do contexto de sua aplicação, não tem significado. Isto é, "Ambas as funções têm em comum apenas a letra 'F', que sozinha, porém, não designa nada" (3.333). Sendo assim, a letra F não tem o mesmo significado e não podem ser expressas pela mesma notação. Podemos expressar a função interna por ϕ e a função externa por F. Sobre isso, escreve Wittgenstein: "[...] a função externa F e a função interna F devem ter significados diferentes [...] Isso fica claro no momento em que, ao invés de '$F(F(u))$', escrevemos '$(\exists\ \phi)$: $F(\phi u)$. $\phi u = Fx$'.". (3.333), isto é, quando expressamos a diferença de significado da função F, por notações distintas. Assim, "Uma função não pode ser seu próprio argumento, mas o resultado de uma operação pode muito bem vir a ser base dela própria.". (5.251)

A consequência desta distinção notacional é que ela evita o Paradoxo de Russell. "Liquida-se assim o paradoxo de Russell" (3.333). Como vimos, o Paradoxo de Russell surge quando admitirmos um conjunto R de todos os elementos x, tal que ocorre que todos os elementos x têm a propriedade de não pertencem a si mesmos, que pode ser assim expresso: R

[423] "[...] is natural to assume, in insisting that operations are not functions, Wittgenstein is insisting that his treatment of such ways of compounding is different from theirs.".

= $\{x/\ x \in x\}$. A propriedade definidora de R, $x \in x$, é uma função proposicional que podemos expressar por $F(x,x)$. Então, o conjunto $R = \{x/\ x \in x\}$ é determinado pela função proposicional $F(x,x)$. Ao perguntarmos se R pertence a R, nossa pergunta pressupõem a função $F(F(x,x))$, que é uma função de si mesma. Mas, se a função externa F e a função interna F tem significados e se expressarmos tais significados distintos por notações distintas, F e ϕ, tal que temos $F(\phi(x,x))$, então não temos mais uma função de si mesma e, por conseguinte, não resulta em paradoxo.

Há aqui, porém, uma dificuldade interpretativa apontada por Hylton: "[...] por um lado, Wittgenstein está claramente interessado em enfatizar a diferença entre funções e operações; ainda, por outro lado, o que ele diz sobre operações não pareça, de fato, introduzir uma noção que é significativamente diferente da de uma função.". (HYLTON, 2005, p. 140, tradução nossa)[424]

Max Black no livro *Um Compêndio ao 'Tractatus' de Wittgenstein* diz que a distinção de Wittgenstein entre função e operação é de terminologia, não havendo, do ponto de vista matemático, uma distinção significativa entre elas. Nesse sentido, Black diz que "Wittgenstein deseja fazer uma distinção entre a operação e uma função (5.251), mas a diferença entre os dois parece a princípio nada mais substancial do que uma diferença de ponto de vista (e, consequentemente, na terminologia).". (BLACK, 1970, p. 259, tradução nossa).[425] Essa diferença é terminológica, pois "Matemáticos comumente usam os termos 'função' e 'operação' indistintamente.". (BLACK, 1970, p. 259, tradução nossa)[426]

Em sua argumentação, Black cita duas definições de destacados matemáticos contemporâneos a Wittgenstein, uma definição de função e outra de operação, a saber: (i) "'Uma função é uma operação que pode ser aplicada a uma coisa (o argumento) para produzir outra coisa (o valor da função)' (Church, *Calculi*, p. I).". (BLACK, 1970, p. 259, tradução nossa)[427]; (ii) "'Como é mais comumente usado [i.e. pelos matemáticos] uma operação em um conjunto S nada mais é que uma função de valor único $f(x,y)$' [x e y são arbitrariamente

[424] "[...] on the one hand, Wittgenstein is clearly concerned to emphasize the difference between functions and operations; yet, on the other hand, what he says about operations does not seem in fact to introduce a notion which is significantly different from that of a function.".
[425] "Wittgenstein wishes to make a distinction between as operation and a function (5.251), yet the difference between the two seems at first nothing more substantial than a difference in point of view (and consequently in terminology).".
[426] "Mathematicians commonly use the terms 'function' and 'operation' interchangeably.".
[427] "'A function is an operation which may be applied to one thing (the argument) to yield another thing (the value of the function)' (Church, *Calculi*, p. I).".

membros de *S*] (Wilder, *Foundations*, p. 159).”. (BLACK, 1970, p. 259, tradução nossa).[428] Tendo em vista tais definições, correntes entre os matemáticos, Black diz que assim como $\sim p$ é uma função de verdade de p, isto é, que $\sim p$ resulta por operação de negação de p, podemos dizer que x^2 é uma certa função de x, isto é, que x^2 é derivado de x por operação de “quadratura”.

Além disso, Black diz que assim como uma função não pode ser argumento de si mesma, uma operação em si mesma também não pode ser operação de si mesma, pois não tem sentido, por exemplo, aplicar N sobre o N em si mesmo, como expresso por “$N(N)$”. Por outro lado, assim como o valor de uma função pode as vezes ser argumento de si mesma (por exemplo, o valor de 9, resultante da função x^2 para o argumento 3, pode ser argumento para essa mesma função x^2), uma operação pode ter como base o resultado de sua própria operação aplicada a uma proposição, por exemplo, $N(N(\sim p))$, tal como dissemos.

Assim, conclui Black que função e operação têm o mesmo significado e que a distinção realizada por Wittgenstein é terminológica no sentido de enfatizar o significado da operação. “A linguagem da ‘operação’ serve apenas para ‘dar destaque para’ (5.21), para enfatizar, a regra para expressar um símbolo como função de outro - ou, o que dá no mesmo, as ‘relações internas’ das coisas correlacionadas por significado da função.”. (BLACK, 1970, p. 259, tradução nossa)[429]

Mas, Peter Hylton em seu artigo *Funções, Operações e Sentido no Tractatus de Wittgenstein* discorda da posição de Black. Em sua argumentação, Hylton diz que Wittgenstein é claramente enfático em diferenciar funções e operações; sendo assim, não pode ser uma simples distinção terminológica. Se entendermos que o que Wittgenstein tem em mente quando ele diferencia “função” de “operação” é o conceito de função matemática, então Black parece ter razão, mas se entendermos que o que ele chama por “função” é a função proposicional de Russell, então não é simplesmente terminológica. Nesse sentido, diz que “[...] podemos tornar claro o sentido das observações de Wittgenstein nos 5.2s se as vermos como dirigindo em primeiro lugar contra a visão de Russell, de que as operações de verdade são funções proposicionais, em algo como o sentido de Russell dessas expressões.”.

---

[428] “‘As most commonly used [i.e. by mathematcians] an operaton in a set *S* is nothing but a single-value function *f*(*x*,*y*)’ [*x* and y being arbitrary members of *S*] (Wilder, *Foundations*, p. 159).”.

[429] “The language of ‘operation’ serves merely to ‘give prominence to’ (5.21), to emphasize, the rule for expressing one symbol as function of another - or, what comes to the same, the 'internal relations' of the things correlated by means of the function.”.

(HYLTON, 2005, p. 141, tradução nossa).[430] Desse modo, ainda diz: "[...] Russell emprega uma noção de uma função proposicional que é de fato bastante distinta de uma função matemática ordinária [...]". (HYLTON, 2005, p. 141, tradução nossa)[431]

Notemos que Russell tomou funções proposicionais como um tipo fundamental de função a partir da qual são derivadas funções descritivas tais como "sin *x*", "log *x*", "o pai de *x*", etc. Essas funções derivadas são, como vimos, funções descritivas, pois descrevem um determinado termo pelo significado de sua relação com o seu argumento; portanto elas são específicas. Sobre isso, diz Hylton "[...] ele toma funções proposicionais por reconhecida, e define as outras funções (funções descritivas) conforme o necessário [...]". (HYLTON, 2005, p. 142, tradução nossa)[432]

Vimos na Seção 2.4 e na Conclusão do Capítulo II que, para Russell, a função proposicional se diferencia da função matemática, pois a primeira resulta em proposições e a segunda resulta, principalmente, em números. Vimos, também, na Seção 2.5, que Whitehead e Russell (cf. 1910, p. 4) dizem que na Matemática a variável serve, geralmente, de suporte para possíveis quantidades e números indeterminados, enquanto que na Lógica Matemática a variável pode ser, de acordo com as circunstâncias ou o contexto de aplicação na linguagem formal idealizada pelo lógico, qualquer conjunto de entidades, proposições, funções, classes ou relações. Isso quer dizer que, no entender de Russell, o domínio das entidades sobre as quais as variáveis que ocorrem na função proposicional variam é mais amplo que o domínio das entidades sobre as quais as variáveis da função matemática ordinária variam.

Observa Hylton, em sua argumentação, como vimos na Conclusão do capítulo anterior, que a função proposicional é, para Russell, distinta do conceito de função matemática ordinária e é, justamente essa noção de função proposicional, que é, no entender de Hylton, que Wittgenstein tem em mente quando separa a função de operação. "O valor de uma função proposicional para um número de argumentos pode ser descrito como um conjunto deles, e como mais complexo do que eles, pois os contém. É esta noção russelliana

[430] "[...] we can make clear sense of Wittgenstein's remarks in the 5.2s if we see them as directed in the first instance against Russell's view that the truth-operations are propositional functions in something like Russell's sense of that expression.".
[431] "[…] Russell employs a notion of a propositional function which is in fact quite distinct from that of an ordinary mathematical function [...]".
[432] "[…] he takes propositional functions for granted, and defines other functions (descriptive functions) as needed […]".

de uma função proposicional, gostaria de afirmar, que é alvo imediato de Wittgenstein na 5.2s.”. (HYLTON, 2005, p. 144, tradução nossa)[433]

Tendo isso em vista, Hylton analisa alguns dos pontos dos aforismos entendidos por ele como cruciais, a saber:

(i) “A ocorrência da operação não caracteriza o sentido da proposição. Pois a operação não enuncia nada, apenas seu resultado o faz, e este depende das bases da operação.”. (5.25). Como dito anteriormente, no sentido de Russell, o sentido de uma proposição é resultado da substituição de um argumento ou uma proposição na função proposicional. Por exemplo, se aplicarmos *p* e *q* a uma função proposicional correspondente à conjunção, temos a seguinte proposição com sentido: *p* v *q*; ademais, se aplicarmos *p* e *q* a uma função proposicional correspondente à negação sobre *p* e depois sobre *q* e, sem seguida, aplicarmos a função proposicional correspondente à conjunção, resultando em *~p.~q*, e por fim, aplicarmos mais uma vez a função proposicional negação a esta última proposição, temos como resultado ~(*~p* . *~q*). Observa Hylton que, para Russell, o sentido da proposição *p* v *q* é diferente do sentido da proposição ~(*~p.~q*), apesar de ambas serem equivalentes. Segundo Hylton, para Wittgentsein *p* v *q* e ~(*~p.~q*), por serem equivalentes, expressam a mesma proposição, isto é, as operações que resultaram tais proposições, que no fundo são a mesma (a mesma função de verdade), não caracterizam seu sentido como o caracteriza a função proposicional por natureza. Em suma, diz Hylton: “[...] para Russell ‘*p* v *q’* deve representar uma proposição diferente dessa representada por ‘~ (*~p.~q*)’. Mas isso é precisamente o resultado que Wittgenstein quer evitar. Seu ponto de vista é que as sentenças acima expressam a mesma proposição e, portanto, que a ocorrência, por exemplo, de disjunção, não caracteriza o sentido de uma proposição.”. (HYLTON, 2005, p. 144, tradução nossa)[434]

(ii) “Pois a operação não enuncia nada, apenas seu resultado o faz, e este depende das bases da operação.”. (5.25). Sobre isso, diz Hylton (cf. 144 - 145) que a função proposicional russelliana já é, em si, por natureza, uma declaração incompleta, pois estrutura algo que é uma declaração, a proposição. Por exemplo, “*x* é um sábio” é uma declaração incompleta, pois expressa que alguém ou algo é um sábio, já uma operação não enuncia nada, pois é apenas

[433] “The value of a propositional function for a number of arguments can be described as an aggregation of them, and more complex than them, for it contains them. It is this Russellian notion of a propositional function, I wish to claim, that is Wittgenstein’s immediate target in the 5.2s.”

[434] “[...] for Russell ‘*p* v *q*’ must represent a different proposition from that represented by ‘~(*~p*. *~q*)’. But this is precisely the result that Wittgenstein wants to avoid. His view is that the above sentences express the same proposition, and hence that the occurrence of e.g. disjunction does not characterize the sense of a proposition.”.

uma relação interna entre estruturas de proposições, isto é, entre as funções de verdade de proposições, cujo resultado é uma proposição que surge dessa relação interna entre suas bases; é somente esse resultado final, que é uma proposição, que enuncia algo.

(iii) "Uma função não pode ser seu próprio argumento, mas o resultado de uma operação pode muito bem vir a ser base dela própria.". (5.251). Assumindo, como estamos assumindo, que função aqui se refere à função proposicional russelliana, então o resultado da aplicação de uma função proposicional F a um objeto a resulta, como sabemos, na proposição $F(a)$. Essa proposição $F(a)$ não pode ser um argumento para a própria função proposicional $F(\hat{x})$ que a gerou, pois $F(F(x))$ não tem sentido. A expressão $F(F(x))$ não tem sentido, pois uma função não pode ser aplicada aos seus próprios valores. "Uma função não pode ser seu próprio argumento, porque o sinal da função contém o protótipo de seu argumento e ele não pode conter a si próprio.". (3.333). Isso quer dizer que dada uma função $F(x)$, ela já contém em seu protótipo $F(x)$ a sua natureza de ser aplicável a argumentos, como é indicado pela própria notação, e não às funções. Assim, ao querer atribuir aos argumentos de uma função $F(x)$ uma função, estamos querendo atribuir algo que não lhe é próprio, pois não é parte de seu protótipo. Desse modo, diz Hylton "Se tentarmos aplicar uma função proposicional a si mesma, ou a um dos seus valores, o ponto fundamental é o mesmo: nós estamos dando à função proposicional argumentos que pressupõem, ou contêm, a função proposicional em si mesma.". (HYLTON, 2005, p. 144, tradução nossa)[435]

Observa Hylton, por fim, que se Wittgenstein tivesse utilizado, de modo mais simples e direto, a expressão verofuncional, no sentido fregeano, para se referir à operação, teria evitado tais questões interpretativas. Nesse sentido, escreve "[...] o ponto que Wittgenstein elabora por meio da noção de uma operação poderia ter sido feito de forma mais simples e perspicaz se ele tivesse dito: símbolos verofuncionais não representam funções proposicionais russelliana; em vez disso, elas representam funções fregeanas.". (HYLTON, 2005, p. 147, tradução nossa).[436] Não entraremos nos pormenores da argumentação que Hylton desenvolve no texto nesse sentido.

[435] "Whether we attempt to apply a propositional function to itself, or to one of its values, the fundamental point is the same: we are giving the propositional function arguments which presuppose, or contain, the propositional function itself.".

[436] "[...] the point that Wittgenstein makes by means of the notion of an operation could have been made more simply and perspicuously if he had said: truth-functional symbols do not stand for Russellian propositional functions; rather they stand for Fregean functions.".

Notemos que a interpretação de Hylton sobre a distinção entre função e operação nos parece mais consolidada que a posição e argumentação de Black, pois entendemos tal distinção não é apenas terminológica, mas conceitual; e quando ele se refere à função, parece que ele quer dizer a função proposicional de Russel. Isso condiz com o próprio estilo do *Tractatus* (1921) que é, como dissemos, uma obra de elucidação conceitual e não simplesmente terminológica. A nossa posição está, então, de acordo com a posição defendida por Hylton quanto à distinção entre operação e função.

A seguir veremos como a construção da Lógica das Proposições pode ser expressa por uma forma lógica mais geral, a forma geral da proposição.

3.7. A forma geral da proposição

Veremos nesta seção como as operações podem ser expressas por uma forma mais geral, a forma geral da proposição. Essa forma mais geral das proposições constitui a Lógica das Proposições, pois toda a construção lógica da proposição pode ser expressa pela forma geral da proposição.

Wittgenstein chama a forma das proposições, expressa por variáveis proposicionais, de "forma proposicional geral" (*Satzform ist eine Variable*). Nesse sentido, do mesmo modo que a variável representa as expressões, a forma geral das proposições representa as expressões, mas a forma geral das proposições representa a possibilidade de combinação de todas as expressões possíveis. Escreve o autor, desse modo, que "Ela [a expressão] é, pois, representada [*dargestellt*] pela forma geral das proposições [*allgemeine Form der Sätze*] que caracteriza. E nessa forma, com efeito, a expressão será *constante*, e tudo o mais *variável*.". (3.312, grifo do autor)

A forma geral da proposição representa o que há de essencial para a caracterização do sentido das proposições. Desse modo, escreve ele: "É claro que, na descrição da forma proposicional mais geral, *apenas* o que lhe seja essencial pode ser descrito – caso contrário, ela não seria, é claro, a mais geral.". (4.5, grifo do autor)

Diz Wittgenstein que "A forma proposicional geral é uma variável.". (4.53). Se a forma proposicional geral é uma variável e sendo que, como vimos na Seção 3.3, toda variável é uma variável proposicional (cf. 3.314), então podemos dizer que a forma proposicional geral é uma variável proposicional. Em outras palavras, como escolhemos utilizar apenas o termo variável para "variável proposicional" (cf. nota 402), então dizer que "a forma proposicional geral é uma variável" significa dizer que "a forma proposicional geral é uma variável proposicional".

Toda a construção lógica da proposição pode ser expressa por uma forma geral, a forma geral da proposição. Nesse sentido, escreve Wittgenstein: "A forma geral da função de verdade é: [*p*, ξ, *N*(ξ)]. Isso é a forma geral da proposição.". (6). Na forma geral da proposição, as proposições são expressas por *p*, isto é, *p* é a variável para o conjunto de proposições elementares. A letra grega ξ é a variável para proposições, isto é, é uma metavariável para proposições já que *p* é, como dissemos, uma variável para proposições. Por fim, a *N*(ξ) expressa a aplicação da operação de negação sobre a metavariável para proposições ξ.

A forma geral da proposição [*p*, ξ, *N*(ξ)] é uma aplicação da expressão formal [*a*,*x*,*O'x*], pois a forma geral [*p*, ξ, *N*(ξ)] representa a forma de construção de proposições a partir de proposições elementares e expressam uma série ordenada, pois é uma relação entre estruturas de proposições que resulta de uma aplicação sucessiva e ordenadas de operações sobre tais estruturas. Em [*p*, ξ, *N*(ξ)] as proposições são geradas a partir da aplicação sucessiva não de qualquer operação, mas da operação *N*, equivalente ao Conectivo de Sheffer.[437] Isso quer dizer que a aplicação sucessiva da operação de *N* gera todas as proposições na Lógica das Proposições.

A aplicação sucessiva da operação *N* indicada pela forma proposicional geral [p, ξ, N(ξ)] pode ser expressa do seguinte modo "[p, N^n (p), N^{n+1}(p)]". Isso quer dizer que o conjunto de proposições são obtidas das proposições elementares por aplicações sucessivas da operação *N*. Desse modo, se aplicarmos a operação *N* sobre uma proposição *p*, expressa por *N*(*p*), pode gerar outras operações somente a partir desta única operação *N* inicial. Podemos aplicar a operação *N* sobre mais de uma proposição, por exemplo, as proposições *p* e *q*, expresso por *N* (*p*,*q*). Sendo que a operação *N* pode ser uma aplicação sucessiva de operações sobre outras operações ou sobre ela mesma, então podemos ter, por exemplo, *N*(*N*(*p*)). Podemos, com isso, gerar, sucessivamente, novas operações a partir de operações dadas geradas pela operação *N*. Assim, "Dada a forma geral como uma proposição é construída, com isso já está dada também a forma geral como, a partir de uma proposição e por meio de uma operação, uma outra pode ser gerada.". (6.002)

---

[437] Observa, em particular, Hylton (2005, p. 140) que a operação de *N* é uma é uma versão generalizada do Conectivo de Sheffer.

Se a partir da forma geral da proposição já está dada como uma proposição pode ser gerada a partir de outra, então a forma geral da proposição é a probabilidade de um acontecimento e não de outro. Sobre isso, escreve Wittgenstein que "[...] a probabilidade é uma generalização. Ela envolve uma descrição geral de uma forma proposicional geral" (5.156). A generalização da forma geral da proposição [p, ξ, N(ξ)] expressa a possibilidade de compor novas proposições quaisquer a partir de proposições elementares quaisquer. Como qualquer generalização, ela não mostra um caso particular, mas a possibilidade de composição para todos os casos. "Não há objeto particular que seja próprio das proposições probabilísticas.". (5.1511)

A forma geral da proposição não expressa o certo nem o impossível, mas o possível, isto é, a possibilidade de composição de novas proposições a partir das proposições já conhecidas. Essa condição de possibilidade é, segundo Wittgenstein, condição para o estudo da Teoria da Probabilidade. "Certa, possível, impossível: temos aqui o indício daquela gradação de que precisamos na teoria da probabilidade.". (4.464). "Apenas na falta da certeza usamos probabilidade - Com efeito, quando não conhecemos completamente um fato, mas sabemos *algo* sobre sua forma.". (5.156, grifo do autor). Assim, podemos dizer que a forma geral da proposição [p, ξ, N(ξ)] é uma proposição probabilística, pois é o substrato de todas as outras proposições, tornando-as possíveis. "A proposição probabilística é como que um extrato de outras proposições.". (5.156)

Essa condição de servir de substrato para outras proposições caracteriza a forma proposicional geral, pois é próprio dela prever, através das relações internas entre as estruturas das proposições expressa pela forma geral, a forma de todas as proposições. "Que haja uma forma proposicional geral é demonstrado por não poder haver proposição alguma cuja forma não tivesse sido possível antever (i.e., construir).". (4.5)

Supondo que fossem dadas todas as proposições elementares, a forma geral da proposição é tão genérica que podemos construir, a partir destas proposições elementares, todas as proposições da Lógica das Proposições. "Suponhamos que me fossem dadas *todas* as proposições elementares: seria então possível perguntar simplesmente: que proposições posso construir a partir delas? Essas são *todas* as proposições e *assim* se delimitam.". (4.51, grifo do autor)

Essa descrição geral só foi possível por que apenas o que é essencial a todas as proposições foi descrito. "É claro que, na descrição da forma proposicional mais geral, *apenas* o que lhe seja essencial pode ser descrito – caso contrário, ela não seria, é claro, a mais geral.". (4.5, grifo do autor)

Assim, a forma geral da proposição [*p*, ξ, *N*(ξ)] expressa a possibilidade de mais geral de composição de novas proposições a partir das proposições já conhecidas. Esta generalidade mostra que toda proposição é bipolar, verdadeira ou falsa, é essencialmente resultante de uma combinação de expressões. As proposições elementares resultam da concatenação imediata de nomes simples, enquanto as proposições moleculares resultam de operações de verdade sobre as proposições elementares. Cada uma dos casos específicos de proposições possíveis a partir de [*p*, ξ, *N*(ξ)] mostra o seu estado. "A forma proposicional geral é: as coisas estão assim.". (4.5). Nesse sentido, enquanto a forma proposicional geral "é", pois sua forma é permanente, as proposições particulares, previstas pelo campo de possibilidade de composição de sua forma lógica, "estão", ou seja, são estados.

A operação *N*, além de gerar novas proposições a partir de proposições elementares pela sua aplicação sucessiva à proposições elementares indicada pela forma proposicional geral [p, ξ, N(ξ)], introduz o conceito "todo" a partir de proposições elementares. Desse modo, consideremos, por exemplo, a função *fx* tal que o argumento *a* substitui a variável *x* na função resultando em *fa*, o qual pode ser expresso por "(∃*x*).*fx*.*x* = *a*", o que significa que existe ao menos um *a* que tem a propriedade *f* (cf. 5.441). Assim, em linhas gerais, podemos concluir que *fa*, *Rab*, *Rabc*, etc., podem ser expressas pelo quantificador existencial "∃".

Se aplicarmos a operação *N* sobre o quantificador existencial, podemos gerar outro quantificador, o quantificador universal. Por exemplo, seja *fa*, que significa, como vimos, o mesmo que (∃*x*).*fx*.*x* = *a*, cuja estrutura é (∃*x*).*fx*. Se aplicarmos a operação *N* sobre (∃*x*).*fx*.*x* = *a*, então teremos ~ (∃*x*).*fx*.*x* = *a*, o que significa que não existe ao menos um *a* que tem a propriedade *f*, o que é o mesmo que dizer que nenhum *a* tem a propriedade *f*, o que significa que todo *a* não tem a propriedade *f*, o que pode ser expresso por "(*x*). ~ *f*(*x*). *x* = *a*". Assim, em linhas gerais, podemos aplicar operação *N* sobre uma função *fx* já que, como vimos, *fx* é a variável geral de uma proposição *p* qualquer, o que pode se expresso por *N*(ξ) = ~(∃*x*).*f*x, representado por ξ. Sobre isso, escreve Wittgenstein "Se os valores de ξ são todos os valores de uma função *fx* para todos os valores de *x*, então *N*(ξ) = ~(∃*x*).*f*x". (5.52)

Com a introdução do conceito "todo", isto é, do quantificador universal, a partir da operação de negação sobre o quantificador existencial, Wittgenstein separa o quantificador universal da função de verdade. Isso quer dizer que o quantificador universal não está atrelado à função de verdade das proposições elementares, mas atrelado à operação de verdade da operação de negação. "Separo o conceito *todo* da função de verdade.". (5.521, grifo do autor)

Veremos na seção seguinte que além de gerarmos proposições a partir de proposições mais elementares através de operações entre elas, podemos derivar uma proposição a partir des outras proposições, isto é, deduzir uma proposição a partir de outras proposições. Como a dedução envolve tautologia, isto é, proposições que são sempre verdadeiras, independentes das circunstâncias, então a Lógica nada diz sobre o mundo, isto é, ela é *a priori*. É o que veremos na próxima seção.

3.8. O apriorismo da Lógica

Veremos nesta seção que a atribuição de valor de verdade a uma proposição, permite-nos caracterizar as proposições conforme a sua valoração. Se uma proposição é sempre verdadeira, ela é uma tautologia, se ela é sempre falsa, ela é uma contradição, e se ela é verdadeira em certas circunstâncias e falsa e outras, ela é uma contingência. A tautologia e a contradição nada dizem sobre o mundo, pois são sempre verdadeiras. Veremos como a tautologia, em especial, é condição para a dedução lógica e, por conseguinte, como isso nos conduz à concepção de que a Lógica é *a priori*.

Vimos que uma proposição recebe dois valores de verdade, o verdadeiro e o falso. Esses valores são os possíveis valores de verdade que uma proposição p pode receber. Isso quer dizer que podemos atribuir às proposições todos os possíveis valores de verdade. Quanto mais complexa a proposição, maior é a possibilidade de atribuição de valores de verdade a ela, isto é, maior é a combinação de valores de verdade. Nesse sentido, com a aplicação sucessiva da operação de negação, podemos, como vimos, gerar novas proposições e, também, novas operações, por exemplo, a operação de adição, multiplicação, implicação, bicondicional.

A adição $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma proposição, a proposição p ou a proposição q, for verdadeira, sendo falsa quando as proposições p e q são ambas falsas; nesse sentido, os possíveis valores da proposição $p \vee q$ é VVVF. A multiplicação $p \, . \, q$ é verdadeira quando ambas as proposições, as proposições p e q, forem verdadeiras, sendo falsa nos demais casos; os possíveis valores da proposição $p \, . \, q$ é VFFF. A implicação $p \supset q$ é verdadeira se e somente se p é verdadeira, então q é verdadeira, isto é, quando não ocorre que p é falsa, então q é verdadeira; os possíveis valores da proposição $p \supset q$ é VVFV.

Wittgenstein chama todos valores de verdade possíveis de uma proposição de "fundamentos de valor de verdade" (*Wahrheitsgründe*) daquela proposição. "Entre as possibilidade de verdade dos argumentos de verdade da proposição, chamo aquelas que a verificam de *fundamentos de verdade da proposição*.". (5.101, grifo do autor). Assim, o fundamento de verdade da proposição p é VF, da proposição $\sim p$ é FV, da proposição $p \vee q$ é VVVF, da proposição $p \,.\, q$ é VFFF, e da proposição $p \supset q$ é VVFV.

No contexto do aforismo 5.1 Wittgenstein apresenta uma representação tabular das funções de verdade das proposições. Essa representação aparece, hoje, amplamente nos livros didáticos de Lógica. Segundo Hans-Jhann Glock "A tabela de verdade é o único dispositivo formal de Wittgenstein ter encontrado o seu caminho em manuais de lógica.". (GLOCK, 1996, p. 368, tradução nossa).[438] Diz ainda Glock que o próprio Wittgenstein sugere que Frege teria usado tabela de verdade para explicar os conectivos lógicos. Mas, na verdade, segundo o comentador, "[...] a ideia remonta a Boole, e a sugestão de usar tabelas de verdade como um procedimento de decisão mecânica foi debatido por Peirce e Schroder.". (GLOCK, 1996, p. 368, tradução nossa)[439]

Dentre os fundamentos de verdade de proposições, há dois casos que chamam a atenção por serem casos extremos. "Entre os grupos possíveis de condições de verdade, há dois casos extremos.". (4.46)

Em um dos casos, a proposição é verdadeira para todas as possibilidades de verdade das proposições elementares. Nesse caso, as condições de verdade são o que Wittgenstein chama por "tautológica". Por exemplo, a proposição $p \vee \sim p$, que pode significar, em particular, chove ou não chove. "Num dos casos, a proposição é verdadeira para todas as possibilidades de verdade das proposições elementares. Dizemos que as condições de verdade são *tautológicas*.". (4.46, grifo do autor). Quando isso ocorre dizemos que a proposição é uma tautologia. Isso quer dizer que seu fundamento de verdade é sempre verdadeiro para todas as possibilidades de atribuições de verdade das proposições elementares que a compõe.

Em outro caso a proposição é falsa para todas as possibilidades de verdade das proposições elementares. Nesse caso, as condições de verdade são o que Wittgenstein chama por "contradição". Por exemplo, a proposição $p.\sim p$, que pode significar, em particular, chove e não chove. "No segundo caso, a proposição é falsa para todas as possibilidades de verdade:

[438] "The truth-table is Wittgenstein's only formal device to have found its way into logic textbooks.".
[439] "[…] the idea goes back to Boole, and the suggestion of using truth tables as a mechanical decision procedure was mooted by Peirce and Schroder.".

as condições de verdade são *contraditórias*.". (4.46, grifo do autor). Quando isso ocorre, dizemos que a proposição é uma contradição. Isso quer dizer que seu fundamento de verdade é sempre falso para todas as possibilidades de atribuições de verdade das proposições elementares que a compõem.

Se os fundamentos de verdade da tautologia e da contradição são sempre os mesmos, independe do que ocorra, então elas dizem nada sobre o mundo. Por exemplo, o fundamento de verdade da tautologia p v $\sim p$ é sempre verdadeiro e o fundamento de verdade da contradição $p.\sim p$ é sempre falso, independente de qualquer evento no mundo, isto é, nada se sabe em relação à chuva, se choveu ou não choveu. "A tautologia não tem condições de verdade, pois é verdadeira incondicionalmente; e a contradição, sob nenhuma condição.". (4.461)

Por outro lado, uma proposição que não seja tautológica nem contraditória, pode ser, conforme o que ela diz, verdadeira ou falsa. Isso significa que essa proposição diz algo sobre o mundo. "A proposição mostra o que diz; a tautologia e a contradição, que não dizem nada.". (4.461). Embora Wittgenstein chame estas proposições apenas de proposições, em Lógica costuma-se designar as proposições que não são tautologia nem contradição de contingentes, pois elas são verdadeiras ou falsas conforme esta ou aquela situação, isto é, conforme a contingência dos fatos.

Se a tautologia e a contradição dizem nada sobre o mundo, então Wittgenstein diz que elas não têm sentido. "Tautologia e contradição não têm sentido. (Como o ponto de que partem duas flechas em direções opostas).". (4.461). Isso significa que para uma proposição ter sentido é necessário que ela diga algo sobre o mundo. Assim, a proposição com sentido, pode ser verdadeira ou falsa, conforme as condições de verdade na sua relação com o mundo. Estas proposições, ao contrário, têm sentido.

Embora a tautologia e a contradição não tenham sentido, não podemos concluir que elas sejam contrassensos, pois elas não expressam o que está para além do limite da linguagem. Desse modo, mesmo que elas não tenham sentido, elas são expressas no interior da linguagem, em acordo com suas estruturas e relações internas, pois surgem das relações internas das proposições da linguagem.

Nesse sentido, Wittgenstein compara a tautologia e a contradição com o número zero da Aritmética. "Tautologia e contradição não são, porém, contrasensos; pertencem ao simbolismo, analogamente à maneira, na verdade, como o '0' pertence ao simbolismo da aritmética.". (4.4611). Isto é, assim como o número zero é importante para toda a Aritmética, pois viabiliza a subtração de um número natural por ele mesmo, dá sentido à multiplicação de um número qualquer por zero, etc, a tautologia é importante para a Lógica, pois surge das relações internas entre as proposições da linguagem e é condição, como veremos, para a dedução lógica.

Como vimos, um exemplo de tautologia é a proposição $p \vee \sim p$. Esta proposição segue de duas proposições, as proposições p e $\sim p$. A relação "segue de" significa que a proposição $p \vee \sim p$ é uma conclusão de duas outras que a antecedem, as proposições p e $\sim p$. Sendo assim, podemos dizer que as proposições p e $\sim p$ são antecedentes e a proposição $p \vee \sim p$ é a conclusão. De modo semelhante, podemos dizer que a contradição $p.\sim p$ é a conclusão das proposições antecedentes p e $\sim p$. Mas, não apenas proposições tautológica e contraditórias podem ser concluídas de proposições que as antecedem, mas, também, as proposições contingentes. Por exemplo, das proposições p e $p \supset q$ segue a proposição q.

Assim, de modo geral podemos dizer que uma proposição conclusiva segue de proposições antecedentes apenas se as proposições antecedentes forem verdadeiras, então a proposição conclusiva será verdadeira. Isso significa que, se os fundamentos de verdade comuns das proposições antecedentes forem fundamentos de verdade da proposição conclusiva, então a proposição conclusiva segue-se de fato das proposições antecedentes. Sobre isso, escreve Wittgenstein "Se os fundamentos de verdade comuns a um certo número de proposições forem todos também fundamentos de verdade de uma determinada proposição, diremos que a verdade desta se segue da verdade daquelas.". (5.101)

Quando a verdade da conclusão segue da verdade das premissas há o que se chama por "dedução". A dedução estabelece-se na relação entre a verdade da conclusão a partir da verdade das premissas. Nesse sentido, a dedução é uma relação interna entre fundamentos de verdade das proposições antecedentes e da proposição conclusiva. Essa relação é uma relação "se...então" cujo valor de verdade é uma tautologia. Isso significa que todas as proposições deduzidas na Lógica são resultados de tautologias.

Se todas as proposições deduzidas na Lógica são resultados de tautologias e se, como vimos, toda tautologia diz nada sobre o mundo, pois ela sempre será verdadeira, então "Toda dedução acontece a priori.". (5.133), isto é, toda dedução é previamente certa e necessária. A dedução diz nada sobre a realidade, pois não depende de qualquer experiência do mundo para se constituir. Sendo assim podemos dizer que "Todas as proposições da lógica, porém, dizem o mesmo. A saber, nada.". (5.43). Sobre isso, escreve, ainda, Wittgenstein, "A lógica é anterior a toda experiência – de que algo é assim. Ela é anterior ao como, não é anterior ao quê.".

Dizer que a Lógica é anterior ao como, mas não é anterior ao quê, significa que ela é anterior à experiência do modo como as coisas acontecem no mundo. Isso significa que a Lógica não descreve este acontecimento ou aquele, isto é, não descreve as contingências do mundo. Mas a Lógica não é anterior ao quê, pois ela não antecede o mundo propriamente dito, a sua essência. Escreve Wittgenstein que "A lógica preenche o mundo; os limites do mundo são também seus limites. Na lógica, portanto, não podemos dizer: há no mundo isso, aquilo não.". (5.61)

A Lógica está presente na linguagem e se mostra no próprio simbolismo da linguagem. Nesse sentido, a linguagem é, como dissemos na Seção 3.1, o limite para as expressões do pensamento e o limite só poderá ser traçado no interior da própria linguagem. Sendo assim, dizer que a Lógica preenche o mundo, significa dizer que a Lógica traduz a essência do mundo; em outras palavras, a Lógica espelha a essência mundo na linguagem, pois é seu reflexo. (cf. 5.511)

Como o espelho reflete algo e, nesse sentido, não é a própria realidade que ele está refletindo, mas é o reflexo dela; se a Lógica da linguagem espelha o mundo, então ela não é a própria realidade, mas é o reflexo dela na linguagem. Se a Lógica é o reflexo da realidade, então podemos dizer que ela é o modelo da própria realidade e, portanto, suas proposições são o modelo da realidade. "A proposição é uma figuração da realidade. A proposição é um modelo da realidade tal como pensamos que seja.". (4.01)

Assim, a Lógica é a própria forma do mundo e, portanto, a essência do mundo. A forma da Lógica se reflete na forma lógica da linguagem. Escreve Wittgenstein que "[...] a lógica […] abrange tudo e espelha o mundo [...]". (5.511). O reflexo da lógica na linguagem se mostra no simbolismo lógico da linguagem. Diz ele que "A lógica [da linguagem] não é uma teoria, mas uma imagem especular [*Spiegelbild*] do mundo. A lógica é transcendental.". (6.13). Mas, o que significa que a lógica da linguagem é uma imagem do mundo? É o que veremos na próxima seção.

3.9. A forma de afiguração

Veremos nessa seção que a proposição constitui-se como um modelo dos fatos da realidade. No modelo a articulação entre os elementos da proposição correspondem, ponto a ponto, com aquela do fato representado. Os nomes, que formam as proposições e designam os objetos, vinculam-se com estes objetos através de uma relação afiguradora; a forma da proposição vincula-se à forma do mundo através da forma de afiguração.

Se a tautologia e a contradição não dizem algo sobre o mundo, pois são, independente dos acontecimentos do mundo, sempre verdadeiras ou sempre falsas, as proposições, por outro lado, que ora são verdadeira e ora são falsas, descrevem os acontecimentos do mundo, estando, assim, vinculadas às contingências do mundo. “A verdade da tautologia é certa; a da proposição é possível; a da contradição, impossível.”. (4.464).

As proposições que expressam o possível, que Wittgenstein chama simplesmente de proposições, descrevem a realidade, pois dela dependem para a determinação de seu valor de verdade. Se a proposição diz algo sobre o mundo, então ela procura se vincular à realidade, representando os fatos do mundo. “A proposição é uma figuração [*Bild*] da realidade. A proposição é um modelo da realidade tal como pensamos que seja.” (4.01).

A palavra alemã “Bild” significa, nesse sentido, que a proposição é um modelo da realidade. Ser modelo da realidade significa representar (*darstellen*) a realidade em um esquema lógico-matemático que seja capaz de descrever a realidade, aproximando-se o máximo possível dela. Segundo Juliet Floyd, no livro “Wittgenstein sobre Filosofia da Lógica e da Matemática” (*Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics*), os “Usos distintos de Wittgenstein desta noção [noção de *Bild*] foram simuladas, em parte, por sua observação do uso de modelos em escala em engenharia, mas ele também foi tomado especialmente com uma ideia que ele encontrou em *Os Princípios da Mecânica* de Hertz.”. (FLOYD, 2007, p. 79-80, tradução nossa)[440]

Hertz em *Os Princípios da Mecânica* (1899) escreve que “A relação de um modelo dinâmico com um sistema do qual ele é considerado o modelo é precisamente a mesma relação das imagens [*images*] que nossas mentes formam das coisas com as coisas em si.”. (HERTZ, 1899, § 428, p. 177, tradução nossa)[441] O que Hertz chama por “imagens” são os conceitos das coisas. “As imagens que aqui falo são nossos conceitos de coisas.”. (HERTZ, 1899, p.1, tradução nossa)[442]

[440] “Wittgenstein’s distinctive uses of this notion were simulated, in part, by his observation of the use of scale models in engineering, but he was also especially taken with an idea he found in Hertz’s Principles of Mechanics”.
[441] “The relation of a dynamical model to the system of which it is regarded as the model, is precisely the same as the relation of the images which our mind forms of things to the things themselves.”.
[442] “The images which we here speak of are our conceptions of things.”

Observa Hertz (cf. 1899, p. 1) que a representação das imagens que os nossos pensamentos formam das coisas ou os símbolos que criamos para fazer referência aos objetos é tal que os consequentes necessários das imagens no pensamento correspondem aos conseqüentes necessários da natureza das coisas retratadas, pois, a nossa própria experiência mostra esta conformidade. Em função dessa correspondência e de nossa experiência acumulada com a realidade, conseguimos "[...] deduzir imagens desejadas da natureza, podemos então, em um curto espaço de tempo, desenvolver, por meio delas [imagens], como por meio de modelos, as consequências que só no mundo externo surgem em um tempo relativamente longo, ou como resultado de nossa própria interposição.". (HERTZ, 1899, p. 1, tradução nossa).[443] Em outras palavras, somos capazes, por meio de modelos, prever fenômenos, pois eles são deduzidos no interior do próprio modelo.

Tendo em vista a correspondência entre o nosso pensamento e a natureza das coisas, Hertz explicita, então, dois postulados na *Introdução* de sua obra, a saber: 1) "[...] postulamos, em primeiro lugar, que todas as nossas imagens devem ser logicamente admissíveis ou, resumidamente, que devem ser admissíveis." (HERTZ, 1899, p. 2, tradução nossa)[444]; isto é, ser admissível e denotar de modo correto as coisas externas, e se a denotação estiver incorreta, isso quer dizer que suas relações essenciais contradizem tais relações externas; o que leva ao segundo postulado. 2) "[...] postulamos em segundo lugar, que as nossas imagens devem ser corretas.". (HERTZ, 1899, p. 2, tradução nossa).[445] Sua obra parte, então, destes dois postulados, os quais ele deixa explícitos na obra.

Dizem Janik e Taulmin, no livro "Viena de Wittgenstein" (*Wittgeinstein's Vienna*), que "Hertz tinha se preocupado em explicar como, em um e ao mesmo tempo, a teoria clássica da dinâmica newtoniana tanto pode formar um sistema matemático de axiomas e deduções, quanto descrever o mundo *real* da natureza, em contraste com todos os mundos logicamente concebíveis [...]". (JANIK e TOULMIN, 1996, p. 180, grifo do autor, tradução nossa)[446]

[443] "[...] deducing images of the desired nature, we can then in a short time develop by means of them, as by means of models, the consequences which in the external world only arise in a comparatively long time, or as the result of our own interposition.".
[444] "[...] we postulate in the first place that all our images shall be logically permissible or, briefly, that they shall be permissible.".
[445] "[...] we postulate in the second place that our images shall be correct.".
[446] "Hertz had been concerned to explain how, at one and the same time, the classical theory of Newtonian dynamics can both form a mathematical system of axioms and deductions, and describe the actual world of nature, as contrasted with all logically conceivable worlds; [...]".

Ainda dizem Janik e Taulmin que Wittgenstein, engenheiro de formação, não apenas conhecia a física de Hertz, mas também que os princípios teóricos da ciência funcionavam na prática, na construção de máquinas e equipamentos. (cf. JANIK e TOULMIN, 1996, p. 179). Wittgenstein faz referência a Hertz no *Tractatus* (1921) na seguinte passagem: "Deve ser possível distinguir na proposição tanto quanto seja possível distinguir na situação que ela representa. Ambas devem possuir a mesma multiplicidade (matemática) (Comparar com a 'Mecânica' de Hertz, sobre modelos dinâmicos).". (4.04)

Sobre o conceito de figuração (*Bild*), analisa Arley Ramos Moreno em seu ensaio "Wittgentsein: os labirintos da linguagem" que o "[...] emprego [de Bild] é, assim, metafórico e procura evocar a relação de representação ponto a ponto, comum à proposição e à imagem icônica.". (MORENO, 2000, p. 16). Nesse sentido, *Bild* tem relação com o conceito matemático de imagem no contradomínio de uma função matemática. Notemos que a imagem de uma função é o conjunto de elementos do contradomínio que se relacionam com o domínio da mesma função.

Mas, para que haja uma correspondência ponto a ponto entre os elementos do domínio e da imagem no contradomínio, é necessário que a função seja uma função sobrejetora. Nesse sentido, "A pertinência da metáfora reside, especificamente, na ideia de que há uma articulação lógica entre os elementos da proposição e que tal articulação corresponde, ponto a ponto, com aquela do fato representado.". (MORENO, 2000, p. 16). *Bild* não se refere, assim, à ideia empírica de imagem fotográfica ou de imagem pictórica, confusão que, segundo Moreno, ocorreu "[...] em certas interpretações dadas pelo movimento artístico conceitualista ango-saxônico às teses do Tractatus.". (MORENO, 2000, p. 16)

Desse modo, assim como a palavra "imagem" não parece ser a melhor tradução pela possível confunção supracitada, a palavra "representação" também não parece ser adequada pela frequente confusão com a representação mental. A palavra que mais parece se aproximar é "figuração"; tradução utilizada por José Arthur Giannotti e Luiz Henrique Lopes dos Santos na tradução portuguesa do *Tractatus* (1921). Em inglês Pears e MacGuinnes traduzem *Bild* por "picture" que significa "imagem", "figura", "retrato"; portanto em inglês não há, também, uma correspondência exata para o que Wittgenstein entende por *Bild*. Na tradução francesa de Granger, a palavra que aparece é "image" que significa "imagem", "reflexo", "retrato", também uma tradução aproximada do que Wittgenstein chama por "*Bild*".

Assim, a proposição é uma figuração (*Bild*) da realidade no sentido em que ela é um modelo da realidade. A relação de representação ponto a ponto é comum à proposição e à imagem. Sobre essa correspondência ponto a ponto, escreve Wittgenstein: “A figuração consiste em estarem seus elementos uns para os outros de uma determinada maneira.”. (2.14). Em outro aforismo, ainda escreve o autor: “Que os elementos da figuração estejam uns para os outros de uma determinada maneira representa que as coisas assim estão umas para as outras.”. (2.15)

O que é figurado pela figuração Wittgenstein chama por “o afigurado” (*dem Abgebildeten*). A figuração e o afigurado estão de tal modo relacionados que há algo de comum entre os elementos da figuração e o afigurado. Esse algo de comum entre eles não é uma semelhança, mas é uma identidade. Escreve Wittgenstein “Na figuração e no afigurado deve haver algo de idêntico, a fim de que um possa ser, de modo geral, uma figuração do outro”. (2.161)

Esse algo de idêntico entre a figuração e o afigurado é o que Wittgenstein chama por “forma de afiguração” (*Form der Abbildung*). “O que a figuração deve ter em comum com a realidade para poder afigurá-la à sua maneira – correta ou falsamente é sua forma de afiguração.”. (2.17). Podemos dizer, então, que a forma de afiguração é idêntica à forma da realidade. Sobre isso, escreve ainda Wittgenstein: “O que toda figuração, qualquer que seja sua forma, deve ter em comum com a realidade para poder de algum modo – correta ou falsamente – afigurá-la é a forma lógica, isto é, a forma da realidade.”. (2.18)

A seguir veremos que a correspondência entre a forma de afiguração de uma proposição e a forma do mundo significa, mais precisamente, mostrar ou especificar a essência do mundo.

3.10. A essência do mundo

Veremos nesta seção como a correspondência entre a forma da proposição, e a forma lógica do mundo, através da forma de afiguração, é a descrição da essência do mundo, e como a variável é fundamental para esta descrição.

A forma lógica da proposição pressupõe, como vimos na Seção 3.7, a variável, pois toda forma proposicional é expressa por uma variável. Sendo a linguagem o conjunto de todas as proposições (“A totalidade das proposições é a linguagem.”. (4.001)), então podemos dizer que sem a representação da variável não podemos falar em forma lógica na linguagem. As variáveis proposicionais representam, pois, como vimos na Seção 3.3, a possibilidade de substituições das expressões no interior das proposições.

Observamos, também, que a possibilidade de substituição de expressões na proposição caracteriza a natureza de toda variável, pois a variável não expressa o certo, nem o impossível, mas o possível, isto é, a possibilidade de composição a partir de constantes dadas. A variável é o substrato fixo para a composição de proposições. A fixação da variável gera uma marca comum de uma classe de proposições que são todos os valores da proposição originada. Essa marca comum de uma classe de proposições, que é a variável, conduz-nos, assim, ao conceito de forma proposicional.

A forma proposicional mostra, então, a possibilidade geral de composição de elementos que formam a proposição. Como qualquer generalização, ela não mostra um caso particular, mas a possibilidade geral de composição dos elementos que a compõem para todos os casos. Do mesmo modo, a forma da realidade é a possibilidade de concatenação entre os objetos. A concatenação dos objetos pode se dar de um modo ou de outro, porém a forma da realidade permanece a mesma.

Wittgenstein chama a concatenação dos objetos de "estados de coisas" (*Sachverhalt*). "A concatenação de coisas é uma ligação de objetos (coisas).". (2). O modo como os objetos se concatenam ele chama por "estrutura do estado de coisas" (*Struktur des Sachverhaltes*). "A maneira como os objetos se vinculam no estado de coisas é a estrutura do estado de coisas.". (2.032). A estrutura está vinculada à forma, pois é a forma que indica a possibilidade de composição de uma estrutura ou de outra. "A forma é a possibilidade da estrutura.". (2.033). Desse modo, a forma não é como o estado de coisas que, como um estado, sua configuração pode mudar conforme a sua estrutura, mas a forma é a mesma, isto é, ela é fixa.

O estado de coisas é, como o próprio nome diz, composto por coisas ou objetos que estão conectados entre si. "O estado de coisas é uma ligação de objetos (coisas).". (2.01). O que designa os objetos na linguagem são, como vimos, os nomes. "O nome significa o objeto. O objeto é seu significado [*Bedeutung*].". (3.203). O nome mantém, desse modo, uma relação com o objeto, a relação de nomeação, cujo significado é o próprio objeto que se encontra no mundo.

Os nomes, como vimos, não podem ser decompostos em elementos mais simples ou definidos a partir de elementos mais simples. "O nome não pode ser desmembrado por meio de uma definição: é um sinal primitivo" (3.26). Em outra passagem ainda diz ele: "Nomes não podem ser dissecados por definições (Nenhum sinal que tenha significado isoladamente, por si só).". (3.262). Nesse sentido, os objetos, designados pelos nomes são o que há de mais simples no mundo. "O objeto é simples.". (2.02). Por ser o que há de mais simples no mundo, os objetos constituem a substância do mundo. "Os objetos constituem a substância do mundo (*Substanz der Welt*). Por isso não podem ser compostos.". (2.0211)

Mas, apesar dos objetos serem as substâncias do mundo, isso não quer dizer que os objetos estejam isolados uns dos outros. Os objetos se concatenam, como dissemos, em estados de coisas. O modo como os objetos se concatenam no estado de coisas é a estrutura do estado de coisas, mas a possibilidade de um objeto se concatenar a um e não a outro não é a estrutura, mas o que Wittgenstein chama por "forma do objeto". "A possibilidade de seu aparecimento em estados de coisas é a forma do objeto" (2.0141). A forma do objeto é, então, o que é possível de acontecer nos estados de coisas.

Vimos que o que é possível é expresso na linguagem pela variável. Vimos na Seção 3.5 que as variáveis proposicionais "*x*", "*y*", "*z*", etc., representam os nomes. Nesse sentido, assim como a variável representa o nome tal que a substituição do nome na variável resulta em uma proposição com sentido, a forma do objeto é possibilidade do aparecimento do nome em estados de coisas. Na linguagem, o fato de os nomes substituírem as variáveis proposicionais que os representam na forma proposicional, isso quer dizer que tais nomes assinalam uma forma e um conteúdo.

Os nomes assinalam uma forma, pois são representados pelas variáveis proposicionais que expressam a forma proposicional; e assinalam um conteúdo, pois substituem as variáveis na forma proposicional, determinando-as, resultando em uma proposição com sentido. Sobre isso, escreve Wittgenstein "A expressão assinala uma forma e um conteúdo.". (3.31). Podemos dizer que nomes são expressões, pois são partes essenciais, e não causais, das proposições. Então, se os nomes assinalam uma forma e um conteúdo, representá-los por variáveis na forma das proposições, significa exibir a sua possibilidade de composição na proposição.

De modo semelhante, diz Wittgenstein que a substância do mundo determina uma forma. "A substância do mundo só *pode* determinar uma forma [...]". (2.0231). Se a substância é constituída pelos objetos do mundo, então elas são as coisas que existem no mundo, isto é, a substância é conteúdo do mundo. Mas, na medida que a substância ou o objeto do mundo se coloca na possibilidade se aparecer em estados de coisas, esta possibilidade é, como dissemos, a forma do objeto, então a substância do mundo é a forma, pois é condição para a possibilidade de estado de coisas. Sobre isso, diz o autor: “A substância é o que subsiste independente do que seja o caso. Ela é forma e conteúdo.”. (2.025)

Assim, podemos dizer que o objeto é condição para a forma lógica do mundo, pois somente havendo objetos é possível haver a possibilidade de seu aparecimento em estados de coisas, isto é, a forma do objeto. “Só havendo objetos pode haver uma forma fixa do mundo.”. (2.126). Nesse sentido, mesmo que possamos supor um mundo imaginário que difira em muito do mundo real, o mundo imaginário só é possível se existirem objetos neste mundo dese que esses objetos possam se relacionar. Se não houvesse essa possibilidade, não poderia haver mundo imaginário, pois ele não poderia ser composto por objeto algum, mesmo que esses objetos sejam imaginários.

Essa possibilidade de composição entre os objetos do mundo imaginário é a forma do mundo imaginário que, embora diferindo em muito do mundo real, tem em comum com o mundo real essa forma. “É óbvio que um mundo imaginário, por mais que difira do mundo real, deve ter algo – uma forma – em comum com ele. Essa forma fixa consiste precisamente nos objetos.”. (2.023)

A relação de um objeto com outro é necessária, pois ele não pode ser pensado sem a sua possibilidade de composição em estados de coisas com outros objetos do mundo. “[...] não podemos pensar em *nenhum* objeto fora da possibilidade de sua liga com outros.” (2.0121, grifo do autor). Então, se a forma do objeto indica a sua possibilidade de relacionar com outros objetos, então a forma do objeto, está na própria natureza do objeto. “Se as coisas podem aparecer em estados de coisas, isso já deve estar nelas.”. (2.0121). “Cada uma dessas possibilidades deve estar na natureza do objeto.”. (2.0123)

Desse modo, se é da natureza do objeto a sua forma, então supondo que fosse possível ter todos os objetos à disposição, poderíamos ter, com isso, todos os possíveis estados de coisas. “Dados todos os objetos, com isso estão dados também todos os possíveis estados de coisas” (2.0124). Assim, a forma do objeto está disposta em um espaço de possibilidades de se relacionar em estados de coisas. “Cada coisa está como que num espaço de possíveis estados de coisas. Esse espaço, posso concebê-lo vazio, mas não a coisa sem o espaço”. (2.013). Esse espaço Wittgenstein chama por “espaço lógico” (*logischen Raum*).

Apesar de podermos conceber o espaço lógico vazio, o lugar no espaço lógico surge com a existência dos fatos no mundo. “Os fatos no espaço lógico são o mundo.”. (1.13). A partir da existência dos fatos do mundo, temos os estados de coisas que constituem os fatos no mundo. Se existe o estado de coisas, existem os objetos que os constituem. Dados os objetos, com isso estão dados também todos os possíveis estados de coisas. Então, os fatos e os objetos do mundo determinam um lugar no espaço lógico. “O sinal proposicional e as coordenadas lógicas: isso é o lugar lógico.”. (3.41). Sobre isso, ainda diz: “A proposição determina um lugar no espaço lógico. A existência desse lugar é assegurada tão somente pela existência das partes constituintes, pela existência da proposição com sentido.”. (3.4).

Isso nos parecer evidenciar que a visão lógica do *Tractatus* (1921) sobre a proposição é orgânica. Desse modo, dada uma proposição elementar, já está nela todas as constantes lógicas que a constituem, pois “Onde há composição, há argumento e função, e onde eles estão, já estão todas as constantes lógicas.” (5.47). Isso significa que “[...] na proposição elementar já estão contidas todas as operações lógicas. Pois ‘*fa*’ diz o mesmo que ‘(∃ *x*).*fx*.*x*=*a*’”. (5.47). Desse modo, a proposição determina um lugar no espaço lógico, pois ela carrega consigo todas as constantes ou coordenadas lógicas.

Mas, a única constante que todas as proposições têm em comum é, como vimos, a formal geral da proposição. Esta constante está presente em todos os lugares lógicos criados no espaço lógico, pois ele é o sinal primitivo geral da lógica. Escreve Wittgenstein que “A descrição da forma proposicional mais geral é a descrição do único sinal primitivo geral da lógica.”. (5.472). Devido esta sua característica essencial, “A forma proposicional geral é a essência da proposição.”. (5.471). Se a proposição é uma figuração da realidade, então especificar a essência da proposição significa especificar a essência do mundo. “Especificar a essência da proposição significa especificar a essência de toda descrição e, portanto, a essência do mundo.”. (5.4711). Nisso a variável é fundamental, pois ela é, como vimos, condição necessária para a forma proposicional geral já que toda forma proposicional geral expressa por uma variável (cf. 4.53).

Entendido a importância da variável para a forma lógica e para descrição da essência do mundo, analisaremos, a seguir, sua relação com o esquema lógico da função proposicional, noção introduzida, principalmente, por Frege e Russell.

3.11. Sobre o significado da função proposicional no *Tractatus*

Procuraremos mostrar, nessa seção, que a variável proposicional (*Satazvariable*) correspondente a noção de variável em Lógica, sendo condição necessária para a expressão da essência da lógica, pois sem ela não é possível expressar a forma lógica da proposição. Mas, antes apresentaremos algumas interpretações sobre a função proposicional no *Tractatus* (1921) a partir da interpretação do conceito de variável proposicional.

A semelhança entre a variável proposicional de Wittgenstein e a função proposicional Russell é observada por alguns comentadores. Eric J. Loomis no artigo "Função proposicional e forma lógica no *Tractatus*" (*Logical Form and Propositional Function in the Tractatus*) diz que "Tal como acontece com Russell, proposições de Wittgenstein são, portanto, compostos estruturados, e estes informam sua concepção de funções proposicionais." (LOOMIS, 2005, p. 218, tradução nossa)[447]

No artigo Loomis falará em "função proposicional em Wittgenstein", pois encontra semelhança entre ela e a variável proposicional (*Satazvariable*). Escreve ele que "A função proposicional em Wittgenstein é introduzida como *Satzvariablen* - 'variáveis proposicionais'. Em 3.313, Wittgenstein indica como uma *Satzvariablen* é formada, ao tomar qualquer parte de uma proposição elementar que contribui para o sentido da proposição e transforma essa parte em uma variável.". (LOOMIS, 2005, p. 218-219, tradução nossa)[448]

Por outro lado, João Vergílio G. Cuter, no artigo "A Lógica do *Tractatus*" tem uma interpretação de que "Todo nome é, no *Tractatus*, uma função proposicional.". (CUTER, 2002, p. 90). Em outro artigo, "Como negar um nome", defende a tese de que "O nome é o caso-limite de função proposicional. Como qualquer função proposicional, ele pode perfeitamente ser negado.". (CUTER, 2009, p. 33). Vamos, no que se segue, apresentar e analisar ambas as interpretações. Iniciemos por esta última.

Cuter diz que todo nome é, no *Tractatus* (1921), uma função proposicional a partir do aforismo 3.314. No aforismo 3.314 diz Wittgenstein que "A expressão só tem significado na proposição. Toda variável pode ser concebida como variável proposicional (Inclusive o nome variável).". Segundo Cuter (2002, p. 90) aparentemente parece que Wittgenstein está se utilizando do princípio contextual de Frege para precisar o significado da expressão que nela ocorre. Mas, como aponta Cuter, embora Wittgenstein se utiliza do princípio contextual ("Só a proposição tem sentido; é só no contexto da proposição que um nome tem significado" (3.3)),

---

[447] "As with Russell, Wittgenstein's propositions are thus structured compounds, and this informs his conception of propositional functions.".

[448] "Wittgenstein's proposicional function are introduced as *Satzvariablen* – 'propositional variables'. At 3.313, Wittgenstein indicates how a *Satzvariablen* is formed, by taking any part of an elementary proposition that contributes to the proposition's sense and changing that part into a variable.".

há divergências consideráveis em relação a Frege, que vão além da divergência explícita no aforismo 3.3, divergências as quais decorrem da sua concepção de objeto.

Para explicar esta divergência, Cuter reporta ao aforismo 2.0123. Este aforismo diz que todo objeto do mundo carrega consigo a possibilidade de combinação em estados de coisas com outros objetos do mundo. Como vimos, Wittgenstein chama esta possibilidade de combinação de "forma do objeto". Nesse sentido, ele ressalta que o nome, que na linguagem designa um objeto do mundo, só tem significado enquanto forma, isto é, na medida que expressa a possibilidade de combinação com outros objetos. Segundo Cuter, é isso que Wittgenstein quer dizer quando mobiliza o princípio do contexto de Frege. "É somente na medida em que incorpora, na forma de regras sintáticas, todas aquelas possibilidades combinatórias que lhe permitem espelhar a forma lógica que um sinal pode tornar-se símbolo desse objeto, designando-o.". (CUTER, 2002, p. 91)

A conclusão que Cuter chega é, então, a de que nome é um caso de função proposicional: "Wittgenstein dá a esta afirmação ['só no contexto da proposição que um nome tem significado'] o sentido mais radical possível, transformando o nome num caso particular das funções proposicionais.". (CUTER, 2002, p. 91). Desse modo, Cuter afirma que o conceito de expressão introduzido, como vimos, no aforismo 3.31 é todo mobilizado por Wittgenstein tendo em vista esta ideia.

Como vimos, diz Wittgenstein nos aforismos que seguem o aforismo 3.31 que "A expressão é, pois, representada [*dargestellt*] por uma variável, cujos valores são as proposições que contêm a expressão. (No caso-limite, a variável torna-se constante, a expressão torna-se proposição). Chamo uma tal variável de 'variável proposicional'.". (3.313). Sendo a expressão ou um símbolo cada parte da proposição que caracteriza o sentido dela (3.31) e sendo o nome um símbolo (3.3411) que compõe uma parte da proposição, então o nome é, como vimos, uma expressão. Assim, se a expressão é representada (*dargestellt*) por uma variável proposicional, então o nome, como um tipo de expressão, é, assim, na interpretação de Cuter, uma variável proposicional, isto é, uma função proposicional.

Cuter (2002, p. 92) ilustra sua interpretação de que o nome é uma função proposicional através do seguinte exemplo: sejam duas proposições elementares compostas pela concatenação imediata de três nomes categorialmente distintos: "$aA\alpha$" e "$bB\beta$", tal que os três primeiros elementos da primeira proposição são, respectivamente, compatíveis, do ponto de vista categorial, com os elementos da segunda proposição, e as letras "x", "X" e "Φ"

são letras variáveis correspondentes, respectivamente, a cada uma destas categorias. Sendo as categorias de $aA\alpha$ e $bB\beta$ correspondentes, então podemos substituir, na proposição $aA\alpha$ o elemento a pelo elemento b, por exemplo.

Essa possibilidade de substituição pode ser representada por uma variável proposicional que corresponde a essa categoria de substituição, a variável x, ficando assim expresso: $xA\alpha$. Diz ele que "A expressão '$xA\alpha$' é a forma geral de um conjunto formalmente determinado de proposições e pode, por isso, ser usada como uma variável cujo escopo é exatamente essa totalidade de proposições formada por todos os seus valores (3.313).". (CUTER, 2002, p. 92 – 93). Desse modo, sendo nomes variáveis proposicionais, isto é, funções proposicionais, então os nomes que compõem a proposição $aA\alpha$ são expressos por "$xA\alpha$", "$aX\alpha$", "$aA\Phi$", "$xX\alpha$", "$xA\Phi$", etc.

Assim, ele conclui que "O nome é um caso particular de expressão e, nessa medida, um caso particular de variável proposicional, e deve, mais apropriadamente, ser chamado de 'nome variável' (3.314b).". (CUTER, 2002, p. 93). Nesse sentido, cada categoria que compõe uma proposição é representada por um nome, o nome variável, correspondente a cada uma destas categorias, isto é, o nome variável $xA\alpha$ é um caso particular de função proposicional, pois é uma variável para esta categoria específica que ele representa, o nome variável $aX\alpha$ é um caso particular de função proposicional, pois representa outra categoria, e assim por diante.

Se o que nomeia em $xA\alpha$, por exemplo, não é o sinal "A", mas toda a expressão "$xA\alpha$", que é o nome variável, que corresponde, como diz Cuter, a variável proposicional, também chamado de função proposicional, então o nome variável, como qualquer função proposicional, pode ser negado. Sobre isso, diz ele no seu artigo *Como negar um nome*, utilizando-se de outra notação: "[...] o que nomeia, na proposição '$aA{**}\alpha{*}$', não é o sinal 'A', mas sim a expressão '$xA{**}\Phi$', que é uma variável proposicional, e pode, como queríamos demonstrar, ser negada sem nenhum problema.". (CUTER, 2009, p. p. 61)

Cuter observa que quando os nomes se concatenam e formam a proposição elementar, seus significados já estão dados previamente, pois o nome variável indica que já está em sua natureza a sua possibilidade de combinação com outros nomes. Em outras palavras, não é preciso explicitar ou determinar o significado dos nomes no contexto da proposição, pois estão na natureza deles. Sobre isso, escreve ele "Quando os nomes entram em cena, eles já vêm preenchidos de significação. As proposições elementares que encontramos no final da análise exibem, naquilo que elas dizem, quais são os nomes que toda e qualquer llinguagem é composta. Não é preciso 'insinuar', nem 'esboçar' significações.". (CUTER, 2009, p. 60)

Se a interpretação de Cuter sobre a função proposicional no *Tractatus* (1921) estiver correta, teríamos, como ele mesmo observa, uma mudança substancial no modelo de análise da proposição do Cálculo de Predicado da Lógica Contemporânea que opõe o conceito de nome como um elemento saturado de um lado e o conceito de função proposicional como elemento insaturado de outro, introduzido, explicitamente, por Frege. Como ele mesmo observa (cf. 2009, p. 87 – 90) se nome for entendido como um caso de função proposicional, então "[...] toda a análise lógica do *Tractatus* está assentada numa negação radical deste modelo de análise que opõe nomes, de um lado, as funções proposicionais, do outro. Todo nome é, no *Tractatus*, uma função proposicional.". (CUTER, 2002, p. 89 – 90)

Mas, Loomis, no artigo "Função proposicional e forma lógica no *Tractatus*", tem uma interpretação diferente para o que ele chama por "função proposicional em Wittgenstein". Assim como Cuter, Loomis encontra no conceito de variável proposicional (*Satzvariable*) a função proposicional do *Tractatus* (1921). Entretanto, ao contrário de Cuter, Loomis tem uma interpretação que mais se aproxima do que distância da concepção de Russell sobre a função proposicional.

Em sua interpretação, Loomis entende que o que Wittgentsein chama por "variável proposicional" tem o mesmo significado que a "função de nomes". "Eu uso '*Satzvariable*' exclusivamente para designar funções proposicionais de Wittgenstein. Eu não vejo diferença entre a noção de um *Satzvariable* introduzido no 3.3s e a ideia 4.24 que a proposição elementar pode ser expressa como 'uma função de seus nomes'.". (LOOMIS, 2005, p. 218, nota 11, tradução nossa)[449]

Para reforçar sua interpretação, Loomis lança mão do aforismo 3.318 no qual Wittgenstein diz: "A proposição, concebo-a – à maneira de Frege e Russell – como função das expressões nela contidas.". Segundo ele, esse aforismo indica que o *Tractatus* (1921) leva em consideração a concepção de Russell sobre a função proposicional, pois "[...] como Russell, Wittgenstein considera suas proposições não como nomes para objetos, mas como complexos constituídos de elementos combinados de modo definido (3.318).". (LOOMIS, 2005, p. 218,

[449] "I use '*Satzvariahle*' exclusively to designate Wittgenstein's propositional functions. I do not see any difference between the notion of a *Satzvariable* introduced in the 3.3s and the 4.24 idea that the elementaty proposition can be expressed as 'a function of its names'.".

tradução nossa)[450] e, desse modo, "Tal como acontece com Russell, proposições de Wittgenstein são, portanto, compostos estruturados, e isto informa sua concepção de funções proposicionais.". (LOOMIS, 2005, p. 218, tradução nossa)[451]

Tendo isso em vista, Loomis (cf. 2005, p. 218) encontra as seguintes semelhanças entre a variável proposicional de Wittgenstein e a função proposicional de Russell. São elas: (i) Ambas tomam "[...] qualquer parte de uma proposição elementar que contribui para o sentido da proposição e transformam essa parte em uma variável.". (Idem, ibidem, tradução nossa)[452]; (ii) Em ambas "O resultado dessa transformação é 'uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável resultante' (3.315).". (Idem, ibidem, tradução nossa)[453]; (iii) Em ambas, a variável, que determina as possíveis proposições que são seus valores possíveis, são a marca comum dessas possíveis proposições, isto é, dessa classe de proposições, como indica o aforismo 3.317; (iv) "E, assim como as funções proposicionais de Russell, a *Satzvariable* compartilha uma forma com essas proposições por pressupor todas as proposições em que ela pode ocorrer (3.311).". (Idem, ibidem, tradução nossa)[454]

Entretanto, apesar das semelhanças, há divergências, como aponta Loomis (cf. 2005, p. 218), diferenças importantes. São elas: (i) Russell introduz negação, conjunção, disjunção, etc., a partir de funções proposicionais, chamadas por ele de "funções de verdade", enquanto que Wittgenstein introduz tais conjunções a partir de operações, pois como vimos, as operações de negação podem ser operações de si mesmas, mas funções não podem ser funções de si mesmas, o que diferencia função de operação e torna a operação, e não a função, condição para os conectivos; (ii) Para Russell a função de verdade caracteriza o sentido de todas as proposições, já Wittgenstein rejeita isso, pois, como dito no item anterior, não são as funções de verdade que geram novas proposições a partir de proposições mais elementares, mas as operações de verdade.

Diz Loomis (cf. 2005, p. 219) que as razões de Wittgenstein sobre as quais sustentam suas afirmações e concepção sobre a função proposicional estão fundamentadas sobre sua

[450] "like Russell, Wittgenstein regards his propositions not as names for objects, but as complexes consisting of elements combined in a definite way (3.14).".
[451] "As with Russell, Wittgenstein's propositions are thus structured compounds, and this informs his conception of propositional functions.".
[452] "[...] any part of an elementary proposition that contributes to the proposition's sense and changing that part into a variable.".
[453]"The result of this change is "a class of propositions which are all the values of the resulting variable proposition" (3.315).".
[454] "And, as with Russell's propositional functions, the Satzvariable shares a form with these propositions by presupposing all of the propositions in which it can occur (3.311).".

concepção de proposição. E isso, segundo ele, é melhor visto a partir da análise das proposições e de como as funções proposicionais surgem a partir desta análise. Para ilustrar isso, ele parte do seguinte exemplo: sejam duas cores diferentes, verde e azul, simbolizados, respectivamente, por "*g*" e "*b*"; e sejam pontos em um campo determinado, chamados "p_1", "p_2", "p_3" e "p_4", tal que a concatenação das referidas cores com os referidos pontos forma proposições, por exemplo, gp_1 diz que o ponto p_1 é verde. O conjunto de proposições construídas a partir da combinação entre os pontos e as cores dadas constituem uma linguagem que ele chamará de "L_0".

Em L_0 os sinais para cores, os sinais para indivíduos e a concatenação entre ambos os sinais, são o que Wittgenstein chama "expressões", pois elas caracterizam, como vimos, o sentido da proposição. Se tomarmos as expressões "gp_1", "gp_2", "gp_3" e "gp_4" poderemos observar duas coias: (i) há algo de comum entre elas, a saber, a expressão *g*; (ii) há algo que varia nelas, as expressões "p_1", "p_2", "p_3" e "p_4". As expressões que é comumns são chamadas de "constantes" e as expressões que variam são representadas por uma variável (cf. 3.312 e 3.313); neste caso poderíamos representar esta relação entre esta constante *g* e suas variáveis por "*gy*". Por outro lado, se tomarmos as expressões "gp_1", "bp_1", poderemos representá-la por "xp_1". Mas, pode ocorrer também que ambas variem, então teremos "*xy*". Além de variáveis de expressões que compõem uma proposição elementar, podemos ter variáveis de proposições elementares, por exemplo, "*r*" é a variável para proposições elementares gp_1, gp_2, gp_3, gp_4, bp_1, bp_2, bp_3, bp_4. Em suma, podemos ter em L_0 as seguintes expressões variáveis: "*gy*", "xp_1", "*xy*", and "*r*". Sobre isso escreve Loomis que as quatro variáveis de expressões: "*gy*", "xp_1", "*xy*", e "*r*", são exemplos de variável proposicional. A variável proposicional expõe que uma proposição elementar é uma função de seus nomes por nos mostrar quais os elementos são expressões, ou seja, são essenciais para o sentido da proposição, o que as proposições têm em comum umas com as outras (cf. 3.31, 4.24). (LOOMIS, 2005, p. 221-222, tradução nossa)[455]

A função de nomes corresponde, segundo Loomis (cf. 2005, p. 222) ao que Wittgenstein chama, como vimos, de "forma de afiguração", pois a função de nomes expressa o que há de comum entre a proposição e o fato afigurado por ela. Desse modo, assim como a

[455] "The four variable expressions: '*gy*', 'xp_1', '*xy*', and '*r*', are examples of Wittgenstein's *Satzvariablen*. *Satzvariablen* expose that an elementary proposition is a function of its names by showing us what elements are expressions, that is, are essential for the sense of the proposition, and what propositions have in common with one another (cf 3.3 1,4.24).".

função de nomes expressa a possibilidade de concatenação de nomes em proposição, "[...] a forma de afiguração é a possibilidade de que as coisas estejam umas para as outras tais como os elementos da figuração.". (2.151)

Observa Loomis (cf. 2005, p. 222) que a novidade da variável proposicional ou da função proposicional em Wittgenstein em relação a Russell e, também, à tradição da Lógica Contemporânea é que ela não é, como o é para eles, um esquema sintático, específico e independente que a partir deles é dada uma interpretação que especifica os possíveis valores que ele pode receber, resultando, com isso na Lógica de Predicados. As variáveis proposicionais, pelo contrário, são construídas a partir de proposições significativas que figuram os fatos do mundo, fatos os quais, como vimos, existem de antemão como formando a totalidade do mundo (cf. 1.1).

Em suma, considerando ambas as interpretações, a interpretação de Cuter e a de Loomis, podemos observar que Cuter sustenta sua interpretação, de que todo nome é uma função proposicional, sobre os aforismos 3.3, 3.31, 3.311, 3.313, 3.314 e 2.0123, e Loomis sustenta sua interpretação, de que a função proposicional em Wittgenstein é função de nomes, sobre os aforismos 3.318, 3.3, 3.31 e 4.24. Embora eles considerem, em parte, os mesmos aforismos, a interpretação que eles dão a tais aforismos são, fundamentalmente, como vimos, bem distintas.

A raiz da interpretação de Cuter parte, principalmente, do aforismo 3.313, sobre o significado do termo alemão "dargestellt", que como vimos, significa apresentar, expor, isto é, a variável proposicional "apresenta" uma expressão; e sendo nomes tipos de expressões, então, a conclusão que Cuter chega é que nomes são um caso de variável proposicional ou função proposicional. Sua interpretação deste aforismo explicaria a expressão "nome variável" usada por Wittgenstein em 3.314 e daria, segundo ele, uma explicação completa sobre o aforismo 2.0123 de que "[…] se conheço o objeto, conheço também todas as possibilidades de seu aparecimento em estados de coisas (Cada uma dessas possibilidades deve estar na natureza do objeto).".

Por outro lado, a raiz da interpretação de Loomis encontra-se no peso do aforismo 3.318. Neste aforismo Wittgenstein explicita, claramente, que ele concebe, assim como Frege e Russell, a proposição como função das expressões nela contidas. Este aforismo não é discutido por Cuter em seus dois artigos. É, essencialmente, sobre o peso deste aforismo que Loomis pauta sua interpretação sobre os demais aforismos e interpreta a variável proposicional como uma função de nomes, o que o permite observar mais semelhanças que diferenças entre variável proposicional e a função proposicional de Russell, permitindo-o, sem muitas restrições, chamar a variável proposicional de "função proposicional em Wittgenstein".

Entretanto, uma interpretação que nos parece mais correta é considerar a variável proposicional (*Satazvariable*) como correspondente à variável em Lógica e não identificá-la com o nome ("nome variável", na concepção de Cuter) ou não identificá-la como função de nomes (na concepção de Loomis).

Como vimos, no aforismo 3.314, Wittgenstein diz "A expressão só tem significado na proposição. *Toda variável pode ser concebida como variável proposicional* (inclusive o nome variável).". (grifo nosso). Dizer que toda variável é uma variável proposicional significa que ela não pode ser algo isolado e independente das demais coisas do mundo. Vimos nas seções anteriores da Tese que o que Wittgenstein chama por "variável proposicional" é a variável que representa a possibilidade de substituições das expressões no interior das proposições. Com isso, a variável proposicional é a variável cujo valor, resultante de sua substituição por expressões, é uma proposição com sentido.

Além disso, se a forma proposicional geral é a descrição do único sinal primitivo geral da lógica, e se a forma proposicional geral é uma variável proposicional, então podemos dizer que a essência da Lógica é a variável proposicional, pois é condição para a forma Lógica e expressa, com isso, a sua essência. Sendo o *Tractatus* (1921) uma elucidação sobre a essência da Lógica, parece-nos que não há um conceito mais fundamental para expressar essa essência que o conceito de variável.

Dada a importância da variável proposicional para Wittgenstein e da função proposicional para Frege e Russel, podemos dizer que, assim como para Frege e Russell a função proposicional é o esquema de análise mais simples e irredutível da proposição, pois expressa sua forma lógica mais elementar, para Wittgenstein a variável proposicional (*Satzvariable*) é a expressão mais simples e irredutível da proposição, sendo condição necessária para expressar a forma lógica da proposição. Dizemos, assim, que o papel desempenhado pela função proposicional em Frege e Russell corresponde ao papel desempenhado pela variável proposicional em Wittgenstein.

Assim, se a forma geral da proposição é a descrição do único sinal primitivo geral da lógica, então ela é a descrição da essência da proposição. Se a proposição é uma figuração da realidade, então especificar a essência da proposição significa especificar a essência do mundo. Para isso, a variável proposicional é condição necessária para a expressão da essência da lógica, pois sem ela não é possível expressar a forma lógica da proposição em toda linguagem possível para a expressão dos pensamentos.

3.12. Conclusão

A expressão da variável representa, como vimos, a possibilidade de substituições das expressões no interior das proposições. A variável proposicional é uma variável cujo valor, resultante de sua substituição por expressões, é uma proposição com sentido. As expressões que substituem as variáveis são chamadas de "constantes". A expressão é, pois, representada por uma variável, cujos valores são as proposições que contêm a expressão.

Como pudemos observar, se transformarmos em variável uma ou todas as partes essenciais e constituintes de uma proposição, então temos uma classe de proposições que são todos os valores da proposição variável assim originada. Essa transformação em variável é, como vimos, uma decisão arbitrária do lógico. Esta decisão fixa os tipos de valores que a variável proposicional pode assumir.

A fixação da variável apenas especifica, no nível sintático, os tipos de proposições de uma classe de proposições. Podemos dizer que toda variável, que por natureza fixa uma determinada forma que as proposições podem assumir, é uma variável proposicional. A fixação da variável gera uma marca comum de uma classe de proposições que são todos os valores da proposição. Essa marca comum de uma classe de proposições, que é a variável proposicional, nos conduz ao conceito de forma proposicional.

A forma da proposição representa, como vimos na Seção 3.4, o que há de essencial para a caracterização do sentido das proposições, pois ela é constituída pela variável proposicional. Nesse sentido, do mesmo modo que a variável proposicional representa as expressões, a forma da proposição também representa as expressões. Assim, como a forma proposicional representa a expressão, então ela é a marca característica comum de uma classe de proposições, isto é, ela é a forma de uma classe de proposições.

A forma lógica é o que Wittgenstein chama por "conceito formal". O conceito formal é uma variável proposicional, tal que a variável proposicional expressa o conceito formal. Ele não pode ser expresso por uma proposição, mas mostra-se na própria simbolização de uma conceitografia. Como o conceito formal é mostrado em uma conceitografia por variáveis, pois são as variáveis que, como vimos, mostram a forma da proposição, então a função, que é representada por uma variável, a variável f, exibe um conceito formal.

A função é, como vimos na Seção 3.5, uma variável proposicional que representa expressões das proposições, cuja substituição nas variáveis por expressões resulta em uma proposição com sentido. Nas funções, as variáveis proposicionais "f" e "ϕ" representam, respectivamente, expressões que designam predicados ou relações, e as variáveis proposicionais "x", "y", "z", etc., representam expressões e que designam indivíduos.

Essas expressões representadas por variáveis proposicionais são o que Wittgenstein chama por "nomes". Sobre isso, diz o autor: "Os nomes são símbolos simples, indico-os por meio de letras isoladas ('x', 'y', 'z').". (4.24). "Os sinais simples empregados na proposição chamam-se nomes.". (3.202). Assim, nomes são sinais empregados da proposição que representam expressões.

O nome tem um objeto que é seu significado. Diz Wittgenstein que "O nome [*Name*] significa o objeto. O objeto é seu significado [*Bedeutung*]". (3.203). O nome mantém, desse modo, uma relação com o objeto, a relação de nomeação, cujo significado é o próprio objeto do mundo. Nomes designam objetos que são indivíduos, predicados e relações. O significado de um nome deve ser verificado no contexto da proposição. Os nomes não têm sentido, pois eles não podem ser descritos ou enunciados por uma proposição, eles podem apenas ser nomeados. Se eles não podem ser descritos, então não podem ser definidos a partir de elementos mais simples. Por serem as unidades mais simples, os nomes formam as proposições mais elementares. Assim, nomes são unidades básicas que compõem e contribuem para a caracterização do sentido das proposições.

Nesse sentido, a proposição elementar é como uma função dos nomes: 'fx', $\phi(x,y)$, etc., cujas variáveis proposicionais que a compõem representam expressões que são nomes, cujo significado dos nomes podem ser indivíduos, predicados e relações. Isso explica, a nosso ver, como é possível a concatenação entre os nomes, pois as variáveis proposicionais que representa cada uma das categorias de expressões expressa a possibilidade de combinação entre eles em estados de coisas.

Assim, as proposições são resultados da substituição dos nomes nas variáveis que os representam na função de nomes. Quando o nome substitui a variável na função, ele é designado, com vimos de "argumento". Então, argumento é tanto o nome de indivíduo quanto o nome de predicados e relações. Nesse sentido, quando o argumento substitui a variável que o representa na função temos como resultado uma proposição com valor de verdade, o valor verdadeiro ou falso. A relação entre os argumentos que substituem a variável e o valor de verdade ou o valor falso resultante é o que Wittgenstein chama da "função de verdade" da proposição elementar.

No aforismo 4.53 Wittgenstein diz que a "A forma proposicional geral é uma variável proposicional". Isso quer dizer que a variável proposicional é condição para a forma proposicional geral. As variáveis proposicionais que ocorrem na forma proposicional geral $[p, \xi, N(\xi)]$ permitem que ela expresse a possibilidade de combinação entre os possíveis elementos que a constituem e, também permite expressar a generalidade.

Como qualquer generalização, a forma geral mostra a possibilidade de composição para todos os casos, isto é, ela é o substrato de outras proposições. Ela não expressa o certo nem o impossível, mas o possível. Essa condição de servir de substrato para outras proposições caracteriza a forma proposicional geral, pois é próprio dela prever, através das relações internas entre as estruturas das proposições expressas pela forma geral, a forma de todas as proposições.

Do mesmo modo que a forma proposicional mostra a possibilidade geral de composição de elementos que formam a proposição, a forma da realidade é a possibilidade de concatenação entre os objetos. A concatenação dos objetos pode se dar de um modo ou de outro, porém a forma da realidade permanece a mesma. A concatenação dos objetos são os estados de coisas e a maneira como os objetos se vinculam no estado de coisas é a estrutura do estado de coisas.

A forma é a possibilidade da estrutura, pois é a forma que indica a possibilidade de composição de uma estrutura dos estados de coisas. Os objetos que constituem o estado de coisas são designados na linguagem por nomes. O nome mantém, desse modo, uma relação com o objeto, a relação de nomeação, cujo significado é o próprio objeto do mundo. Assim como o nome é um elemento simples, o objeto é, também, simples, constituindo-se na substância do mundo.

Apesar dos objetos serem as substâncias do mundo, isso não quer dizer que os objetos estejam isolados uns dos outros. Os objetos se concatenam, como dissemos, em estados de coisas. A possibilidade de um objeto se concatenar a um e não a outro é forma do objeto. A forma do objeto é expressa na linguagem por variáveis proposicionais "x", "y", "z", "f", "ϕ", etc., que representam os nomes.

A forma do objeto está disposto em um espaço de possibilidades de se relacionar em estados de coisas, que é o espaço lógico. A existência do lugar no espaço lógico é assegurada pela existência das partes constituintes e pela existência da proposição com sentido. Desse modo, dada uma proposição elementar, já está nela todas as constantes lógicas que a constituem, em especial a formal geral da proposição.

Se verificarmos em todo o *Tractatus* (1921), não há ocorrência do termo "função proposicional". O conceito que mais parece se aproximar do conceito de função proposicional é o conceito de "variável proposicional" (*Satzvariable*) introduzido por Wittgenstein no aforismo 3.313.

Considerando as interpretações de Cuter e Loomis sobre a função proposicional no *Tractatus* (1921), podemos observar que Cuter sustenta sua interpretação, de que todo nome é uma função proposicional, sobre os aforismos 3.3, 3.31, 3.311, 3.313, 3.314 e 2.0123, e Loomis sustenta sua interpretação, de que a função proposicional em Wittgenstein é função de nomes, sobre os aforismos 3.318, 3.3, 3.31 e 4.24. Embora eles considerem, em parte, os mesmos aforismos, a interpretação que eles dão a tais aforismos são, como vimos, bem distintas.

A raiz da interpretação de Cuter parte, principalmente, do aforismo 3.313, sobre o significado do termo alemão "dargestellt", que como vimos, significa apresentar, expor, isto é, a variável proposicional "apresenta" uma expressão; e sendo nomes tipos de expressões, então, a conclusão que Cuter chega é que nomes são um caso de variável proposicional ou função proposicional. Sua interpretação deste aforismo explicaria a expressão "nome variável" usada por Wittgenstein em 3.314 e daria, segundo ele, uma explicação completa sobre o aforismo 2.0123 de que "[…] se conheço o objeto, conheço também todas as possibilidades de seu aparecimento em estados de coisas (Cada uma dessas possibilidades deve estar na natureza do objeto).".

Por outro lado, a raiz da interpretação de Loomis encontra-se no peso do aforismo 3.318. Neste aforismo Wittgenstein explicita, claramente, que ele concebe, assim como Frege e Russell, a proposição como função das expressões nela contidas. Este aforismo não é discutido por Cuter em seus dois artigos. É, essencialmente, sobre o peso deste aforismo que Loomis pauta sua interpretação sobre os demais aforismos e interpreta a variável proposicional como uma função de nomes, o que o permite observar mais semelhanças que diferenças entre variável proposicional e a função proposicional de Russell, permitindo-lhe, sem muitas restrições, chamar a variável proposicional de função proposicional em Wittgenstein.

Entretanto, uma interpretação que nos parece mais correta é considerar a variável proposicional (*Satazvariable*) como correspondente à variável em Lógica e não identificá-la com o nome ("nome variável", na concepção de Cuter) ou não identificá-la como função de nomes (na concepção de Loomis).

Como vimos, no aforismo 3.314, Wittgenstein diz "A expressão só tem significado na proposição. *Toda variável pode ser concebida como variável proposicional* (inclusive o nome variável).". (grifo nosso). Dizer que toda variável é uma variável proposicional significa que ela não pode ser algo isolado e independente das demais coisas do mundo. Vimos nas seções anteriores da Tese que o que Wittgenstein chama por "variável proposicional" é a variável que representa a possibilidade de substituições das expressões no interior das proposições. Com isso, a variável proposicional é a variável cujo valor, resultante de sua substituição por expressões, é uma proposição com sentido.

Além disso, se a forma proposicional geral é a descrição do único sinal primitivo geral da lógica, e se a forma proposicional geral é uma variável proposicional, então podemos dizer que a essência da Lógica é a variável proposicional, pois é condição para a forma Lógica e expressa, com isso, a sua essência. Sendo o *Tractatus* (1921) uma elucidação sobre a essência da Lógica, parece-nos que não há um conceito mais fundamental para expressar essa essência que o conceito de variável.

Afirmamos, assim, que o papel desempenhado pela função proposicional em Frege e Russell corresponde ao papel desempenhado pela variável proposicional em Wittgenstein no *Tractatus* (1921), pois assim como para Frege e Russell a função proposicional é o esquema de análise mais simples e redutível da proposição, pois expressa sua forma lógica mais elementar, para Wittgenstein a variável proposicional (*Satzvariable*) é a expressão mais simples e irredutível da proposição, sendo condição necessária para expressar a forma lógica da proposição.

Considerações finais

O estudo do conceito de variável leva-nos a perceber o quanto ela é essencial para a Lógica, em especial para a expressão da forma lógica. Podemos dizer que a variável é o que nos permite alcançar a generalização, isto é, distinguir, com mais clareza, proposições particulares de proposições gerais.

As afirmações sobre fatos gerais são de suma importância para uma descrição mais ampla do mundo, condição para a Lógica e as ciências em geral, pois não existe ciência do particular, embora a descrição do particular seja importante na elaboração e confirmação de uma teoria que, em essência, é um conjunto de enunciados gerais que correspondem a fatos gerais do mundo.

No caso da Lógica, as proposições são tão gerais que não existe quaisquer menções aos fatos particulares. Isso quer dizer que o objeto da Lógica são as formas. Assim, as palavras presentes nos enunciados da lógica são, por natureza, "[...] palavras que expressam simplesmente uma forma ou conexão, não mencionando qualquer constituinte particular da proposição na qual elas ocorrem.". (RUSSELL, 1992, p. 58)

A forma é expressa pelas variáveis que ocorrem nas proposições ou nas funções proposicionais. Isso significa que não há proposições lógicas sem o uso de variáveis: "[...] as funções proposicionais que contêm somente variáveis e nada além. Isto engloba toda a lógica. Toda proposição lógica se constitui total e unicamente de variáveis, embora não seja verdadeiro que toda proposição que se constitui total unicamente de variáveis seja lógica. (RUSSELL, 1992, p. 101, grifo do autor).

No contexto do *Tractatus* (1921), vimos que a partir de uma proposição qualquer transformarmos partes essenciais de sua composição em variáveis. O simbolismo da variável expressa a possibilidade de compor novas proposições quaisquer a partir das partes que a compõem. Ela não mostra um caso particular, mas a possibilidade de composição, pois é o substrato outras proposições, tornando-as possíveis. Assim, podemos dizer que as variáveis expressam a possibilidade de composição de novas proposições a partir de expressões dadas, sejam estas expressões indivíduos, predicados ou relações, sejam proposições já conhecidas.

Se assumirmos a visão orgânica do *Tractatu*s (1921), podemos dizer que toda variável fixa uma determinada forma que as proposições podem assumir; portanto toda variável é variável proposicional. Se toda variável é uma variável proposicional, então só podemos determinar seu significado no contexto da proposição, a partir de uma proposição dada. A variável não é, então, uma representação isolada de uma expressão, mas pressupõe uma proposição constituída por expressões para que ela tenha significado enquanto variável dessa expressão de uma proposição.

Nesse sentido, a variável fixa os tipos de valores que a variável proposicional pode assumir tal que a fixação dos desses possíveis valores é a própria variável. A fixação da variável proposicional determina, no nível sintático, os tipos de proposições de uma classe de proposições. Essa fixação dos valores que a variável assume determina uma classe de proposições e os tipos de proposições que compõem aquela classe determinada. Nesse sentido, a variável é condição para a forma lógica.

Diz John Baldwin em *Variáveis: sintaxe, semântica e situações* (2015) (*Variables: syntax, semantics and situations*) que uma das ideias da Lógica Moderna é a de que a noção de variável pode ser explicada para descrever tanto um sistema de inscrições formais (a linguagem matemática) quanto a interpretação destas inscrições em sistemas de número. (cf. BALDWIN, 2015, p. 3)

Em sistemas formais necessita-se, primeiro, especificar seu alfabeto que são o conjunto de símbolos básicos a partir dos quais se constituirá a linguagem desse sistema. A partir do alfabeto especifica-se, então, a gramática para definir quais expressões são bem-formadas. A primeira expressão básica definida na linguagem formal são as variáveis, sejam as variáveis para indivíduo, as variáveis para funções e relações, e as variáveis para proposições. Em seguida, definem-se as constantes, isto é, quais símbolos constantes que podem substituir as respectivas variáveis, conforme as categorias de variáveis definidas previamente, isto é, qual símbolo de constante deve substituir a variável individual, as variáveis para funções e relações, e as variáveis para proposições.

Se entendermos que a Lógica é, contemporaneamente, o estudo de sistemas formais e que, com isso, "A Lógica, em sentido amplo, é uma disciplina, uma ciência, um ramo do saber, na qual se estuda diversos sistemas formais, e não se constitui, necessariamente, em apenas um sistema formal.". (TASSINARI; D'OTTAVIANO, 2012, p. 163), então podemos considerar a variável como um simbolismo primordial nos mais diversos sistemas formais, isto é, nos diversos tipos lógicas existentes, pois o significado de um sistema formal depende de uma semântica que o lógico atribui a este sistema, isto é, que o lógico atribui às variáveis presentes nestes sistemas formais.

Em particular, vimos que no sistema formal do *Principia Mathematica* (1910) a primeira noção elementar que Whitehead e Russell introduzem é o conceito de variável e, também, junto com ele, o conceito de constante. A constante é o conceito relativo e oposto à variável cujo valor é determinado por oposição à variável. O que diferencia as variáveis e as constantes, no plano notacional, é a convenção adotada na linguagem, de modo que uma letra singular adotada para uma, por definição, não pode ser usada para outra. Mas, embora as constantes sejam fixadas previamente na notação, a princípio, como indicam os próprios autores, todas as letras são variáveis, a não ser que seja definida como constante e passe a ser usada como tal na notação após a definição na ordem das razões da linguagem. Isso significa que são as variáveis que melhor expressam a forma lógica como possibilidade de substituição das constantes na linguagem formal.

No que concerne à função proposicional, Russell e Whitehead dizem no *Principia* (1910) que "É esse tipo de ambiguidade que constitui a essência da função.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1968, p. 39, tradução nossa).[456] Isso quer dizer que o conceito de função proposicional só é possível enquanto forma esquemática com o conceito de variável que nela ocorre, a variável real. A variável real expressa a possibilidade de substituição na função proposicional, possibilidade esta que constitui sua essência e é condição para a sua forma esquemática. Essa possibilidade de substituição resulta em proposições e não, por exemplo, em números, como ocorre com as funções matemáticas.

Whitehead e Russell salientam no *Principia* os seguintes significados associadas ao uso do termo variável, entre as quais destacamos: (i) a variável é ambígua e indefinida em sua denotação; e (ii) uma variável preserva sua identidade em diferentes ocorrências no mesmo contexto de modo que muitas variáveis podem ocorrer em conjunto, ao mesmo tempo, sem que haja destituição de sua identidade.

Uma noção elementar do uso de variáveis na Lógica tem origem, como vimos, em Aristóteles. Na Lógica Aristotélica, a ocorrência de variáveis, com uso de letras do alfabeto, como expresso em "*S* é *P*", torna possível a expressão da forma mais simples e redutível da proposição. Além disso, a maior parte dos tipos de sentenças categóricas é indicado com esse uso elementar do conceito de variável. Essa noção permite Aristóteles desenvolver, pela primeira vez na História da Lógica, um sistema de leis da lógica formal cuja sequência de sentenças constitui o primeiro sistema axiomático já construído. Mas, podemos dizer que

[456] "It is this kind ambiguity that constitutes the essence of a function.".

parte substancial do significado da variável, tal como o conhecemos hoje, tem origem no conceito de incógnita em Matemática. Vimos na Introdução que o conceito de incógnita surge na Álgebra quando Al-Khwārizmī utiliza um símbolo para expressar o desconhecido em uma equação matemática. Neste contexto, o desconhecido não designa uma entidade específica, mas um objeto que pode ser indiferentemente numérico ou geométrico.

A incógnita x envolve um grau de abstração que permite expressar números não apenas como objetos determinados, mas como elementos indeterminados que, apesar da vaguesa do desconhecido expresso pela expressão "x", torna-se possível fazer uma análise em equações gerais que expressa a fronteira entre as entidades numéricas e geométricas. Podemos dizer que esse grau de abstração e generalidade que é decorrente da expressão da indeterminação desses objetos algébricos abre espaço para uma nova percepção sobre o mundo. O indeterminado expresso por x é de tal modo geral que assegura uma variedade de conteúdo que não pode ser determinada completamente. Essa sutileza da variável aristotélica não consegue alcançar. O conceito de incógnita abre horizontes para um nova ontologia que nos permite conhecer um objeto sem estar em condições de representar exatamente.

Assim, a variável na Lógica Aristotélica tem um significado mais determinado e restrito, pois sabe-se com clareza, a natureza do significado da expressão constante que a substitui. Na Álgebra a variável tem um significado mais indeterminado e mais irrestrito, pois parece envolver um maior grau de generalização e expressa fronteira entre as entidades numéricas e geométricas. O significado do conceito de variável em Lógica Matemática parece ser um encontro entre os significados da noção elementar de variável da Lógica Aristotélica e do conceito de variável, representado pelo conceito de incógnita, da Álgebra, tendo ajudado a determinar, inclusive, o conceito de função proposicional em Lógica.

Na função proposicional o campo de valores representado pela variável é bastante amplificado, como pudemos observar. Dizem Whitehead e Russell (cf. 1910, p. 4) que na Matemática a variável serve, geralmente, de suporte para possíveis quantidades e números indeterminados, enquanto que na Lógica Matemática a variável pode ser, de acordo com as circunstâncias ou o contexto de aplicação na linguagem formal idealizada pelo lógico, qualquer conjunto de entidades, proposições, funções, classes ou relações.

A distinção entre variável restrita e irrestrita em funções proposicionais é tão significativa para a Lógica Matemática que ela esteve por trás de um dos paradoxos mais famosos da Lógica, o Paradoxo de Russell; paradoxo que, como sabemos, fez ruir o projeto fregeano de fundamentação da Aritmética na Lógica. A procura por uma solução desse paradoxo motivou a criação, como vimos, da Teoria dos Tipos, abrindo um campo de estudo sobre os tipos de lógica. A solução deste paradoxo encontra-se justamente no conceito de variável irrestrita: no Axioma da Redutibilidade a restrição de x ao conjunto A neste postulado, pois, como vimos, se x não fosse restrito a um conjunto A, estaríamos admitindo o conjunto de todos os conjuntos.

Se a variável irrestrita não pode ser utilizada na função proposicional, há outro tipo de variável que é fundamental para sua determinação: o conceito de variável real. O conceito de variável real delimita precisamente a separação entre os conceitos de proposição e função proposicional, já que variáveis podem ocorrer também em proposições, as chamadas variáveis aparentes. O conceito de variável real constitui a essência da função proposicional, pois não se pode conceber o conceito de função proposicional sem o prévio simbolismo da variável que nela ocorre. Diz Russell que "É esse tipo de ambiguidade [expresso pela variável] que constitui a essência da função.". (WHITEHEAD; RUSSELL, 1968, p. 39, tradução nossa). O conceito de variável confere à função proposicional sua natureza essencialmente ambígua. A variável x, associada à expressão da função proposicional ϕx, traz consigo uma coleção de valores que esta expressão pode assumir ao substituirmos a variável x pelas constantes contidas na coleção de objetos constantes abrangidos por essa variável.

Nessa coleção de valores há todas as proposições (verdadeiras ou falsas) que podem ser obtidas na Lógica das Classes e das Relações, cujas formas se resume em três casos, a saber: (i) todas as possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras, isto é: $(x) \,.\, \phi x$; ou (ii) algumas das possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras, isto é: $(\exists x) \,.\, \phi x$; ou (iii) nenhuma das possíveis proposições resultantes da substituição na variável pela constante na função proposicional são verdadeiras, isto é: $\sim(\exists x) \,.\, \phi x$" ou $(x) \,.\, \sim\phi x$. A variável x associada a esses símbolos não tem o valor ambíguo que, por definição, se atribui, por exemplo, à variável x em ϕx, pois a variável x está, como vimos, previamente determinada pelos *escopos* expressos por "todos" ou "alguns" ou "nenhum". A variável que ocorre associada aos campos expressos por "todos" ou "alguns" ou "nenhum" é uma variável aparente e a variável associada apenas à função proposicional é uma variável real. O "escopo de x" é um conjunto de valores que x assume ou que determina x dentre os possíveis valores de *x*, a saber: “todos os valores”, “alguns valores” ou “nenhum valor”. Já os possíveis valores de *x*, os autores chamam de “campo de valores” (*range*).

Em Frege, o conceito de variável foi de suma importância para a introdução do conceito de função. Na *Conceitografia* (1879), onde Frege apresenta, pela primeira vez o conceito de função, ele faz uma distinção que nos parece central: letras para expressar validade geral das proposições e letras com significado particular. As letras com validade geral são as variáveis, pois, como diz ele “A primeira consiste em letras, das quais cada uma representa ou um número indeterminado ou uma função indeterminada. Esta indeterminação torna possível a utilização de letras para expressar a validade universal de proposições, como em $(a + b)\ c = ac + b$c.”. (FREGE, § 1, 1993, p. 1, tradução nossa). A expressão da indetermação torna possível alçar a generalidade, pois torna possível “expressar a validade universal de proposições” por oposição ao significado particular de um objeto determinado, como números e operações. “Os primeiros são *letras* e isso servirá principalmente para expressar *generalidade*.”. (FREGE, § 1, 1993, p. 1, grifo do autor, tradução nossa)

No artigo *Função e Conceito* (1891), onde Frege traz novas explicitações sobre o conceito de função utilizada na *Conceitografia* (1879), a introdução do conceito função aparece no contexto em que ele discute o significado da variável *x* em expressões da matemática. Diz ele que chegamos à ideia correta de função quando escrevemos '*x*' para indicar indefinidamente e passamos a olhar para o que permanece na expressão. O que permanece, no caso de nosso exemplo, é o que há de comum entre tais expressões, isto é, o que designamos de “forma”. Assim, apesar de na expressão “$2.\ x^2 + x$” escrevermos o sinal “*x*” para um número indeterminado e na expressão “$2.\ 2^2 + 2$” substituirmos *x* pelo número 2, a expressão em si, isto é, a sua forma, permanece a mesma.

A função nela mesma é assim expressa por Frege: “$2.\ (\ )^2 + (\ )$”. O que há de essencial na função é o que subsiste ao suprimirmos o *x* no caso da expressão $2.\ x^2 + x$ ou ao suprimirmos 2 na expressão $2.2^2 + 2$. Desse modo, apesar de tais expressões poderem resultar em números distintos e poderem ser expressas por sinais diferentes, estes sinais têm algo em comum: designam a mesma função expressa pelos sinais. A variável *x* não deve ser considerada como pertencente à função, pois esta letra só serve para indicar a espécie de complementação de que a função necessita, mostrando os lugares onde o sinal do argumento deve entrar. A letra “x”, que vem a ocupar o espaço insaturado da expressão de uma função, indicado pelos parênteses, é o sinal genérico que indica a possibilidade de os elementos ocuparem esse espaço incompleto. O espaço insaturado, expresso pelo sinal "x", é o que pode expressar melhor a função.

Como vimos, a função é expressa por Frege utilizando-se as variáveis *f* ou *F*, ficando assim indicada "$f\,(x)$" ou "$F\,(x)$", cujos parênteses "( )" indicam que o "lugar" está vazio e o sinal x ocupa esse "espaço" insaturado no papel, sendo este o sinal que indica algo que venha a ocupar este lugar. As variáveis *f* ou *F* expressam qualquer função indefinidamente, pois "Assim como por uma letra se indica um número indefinidamente quando se visa a expressar a generalidade, também se necessita de letras para indicar uma função indefinidamente.". (FREGE, 2009, p. 90). A utilização de variáveis para indicar uma função indefinidamente permitiu que Frege encontrasse no conceito em Lógica um tipo de função. Função e conceito são, para Frege, como vimos, princípios centrais no seu projeto de fundamentação da Aritmética na Lógica: o princípio da separação entre o conceito e o objeto.

O conceito de função proposicional de Russell e Frege parece se aproximar mais do que Wittgenstein chama por "função de nomes" (4.24), que é, também, expressa por fx, $\phi(x,y)$. Mas, a função de nomes não parece ser o elemento essencial para expressar a possibilidade de composição entre as expressões que ocorrem na proposição. Esse elemento essencial é a variável proposicional, pois toda função de nomes é uma variável proposicional. A variável proposicional é condição necessária para a função de nomes e, inclusive, a forma geral da proposição sendo condição para estas, já que a função de nome e a forma proposicional geral pressupõem a existência do conceito de variável.

Dada a importância da variável proposicional para Wittgenstein e da função proposicional para Frege e Russel, podemos dizer que assim como para Frege e Russell a função proposicional é o esquema de análise mais simples e redutível da proposição, pois expressa sua forma lógica mais elementar, para Wittgenstein a variável proposicional (*Satzvariable*) é a expressão da essência da lógica, sem a qual não é possível expressar a forma lógica da proposição.

Assim, se entendermos que os predicados são classificados como termos gerais que não se referem exclusivamente a uma única entidade, mas geralmente a uma gama de entidades, e sendo a variável proposicional o simbolismo que expressa esta possibilidade dessas entidades referidas pela predicação, então a função proposicional em Wittgenstein é essencial para a análise da predicação lógica, cujo um dos temas de estudo centrais é a análise da forma lógica da proposição.

Bibliografia

AENISHÄNSLIN, M. *La structure cyclique du Tractatus de Wittgenstein*. In: GRANGER, G. G. (org). *Systèmes Symboliques, Science et Philosophie*. Marseille: Centre National de la recherches scientifiques, 1978.

AL-KHOWARISMI. The Book of Algebra and Almucabola. In: *Contributions to the history of sicence*. Humanistic Series. Vol. XI. Robert of Chester's latin translation of the Algebra of Al-khowarizmi. Trad. Louis Charles Karpinki. London and New York: The Mcmillan and Company Limited, 1915.

ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

ANGELELLI, I. Predication theory: classical vs modern. In: HOCHBERG, H.; MULLIGAN, K. (Orgs.). *Relations and Predicates*. Frankfurt: Ontos Verlag, 2004.

ANGIONI, L. *Introdução à teoria da predicação em Aristóteles*. Campinas: Editora da Unicamp, 2006.

ANSCOMBE, G. E. M. *An introduction to Wittgenstein's Tractatus*. New York: Harper & Row, 1965.

ARISTÓTELES. *Órganon*. Trad. Eson Bini. Bauru: EDIPRO, 2005.

______. *Tratados de lógica (Órganon)*. Trad. Miguel Candel Sanmartín. Madrid: Editorial Gredos, 1982.

ARNAUD, A.; NICOLE, P. *L'art de penser*: la logique de Port-Royal. Edité par Bruno Baron von Freytag Löringhoff et Hebert E. Brekle. Stuttgart: Friderich Frommann Verlag (Günther Holzboog), 1965.

BARBOSA, L. F. *Curso de semiótica geral*. São Paulo: Quartier Latin do Brasil, 2007.

BALDWIN, J. T. *Syntax, semantics and situations*. Disponível em: http://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/var5.pdf. Acesso em 20 de Dezembro de 2015.

BERNOULLI, J. Opera. Imprint Collection (Library of Congress). Disponível em: https://ia902700.us.archive.org/23/items/bub_gb_HdBJAAAAMAAJ/bub_gb_HdBJAAAAMAAJ.pdf. Acesso em: 20 de Dezembro de 2015. Geneve: Sumptibus Haeredum Caramer & Fratrum Philibert, 1744.

BLACK, M. *A companion to Wittgenstein's 'Tractatus'*. New York: Cornell University Press, 1970.

BLANCHÉ, R.; DUBUCS, J. *História da lógica*. Trad. Antonio Pinto Ribeiro e Pedro Elói Duarte. Lisboa: 1996.

BOOLE, G. *An investigation of the laws of thought*. London: Walton and Maberly, 1854.

BOCHEŃSKI, I.M. *História de la logica formal*. Madrid: Editorial Gredos, 1966.

______. M. *A history of formal logic*. Trad. Ivo Thomas. University of Notre Dame Press, 1961.

______. M. *Ancient formal logic*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1951.

BOGER, G. Aristotle's underlying logic. In: GOBBAY, D.; WOODKS, J. *Greek, indian and arabic logic*. London: Elsevier B.V., 2004.

BOYER, C. B. *A history of mathematics*. New York, London, Sydney, 1968.

BURIDAN, J. The treatise on supposition. In: *Synthese Historical Library*: texts and studies in the history of logic and philosophy. Vol. 27. Translated, with a philosophical introduction Peter King. Dordrecht; Boston; Lancaster; Tokyo: D. Reidel Publishing Company, 1985.

CAREY, R.; ONGLEY, J. Historical dictionary of Bertrand Russell's philosophy. Toronto: The Scarecrow Press, 2009.

CUTER, J. V. G. Como negar um nome. In: *Revista Filósofos*. vol. 14, no. 2. 2009.

______. A lógica do 'Tractatus'. In: *Manuscrito*, 25.1, 2002.

DE MORGAN, A. *Syllabus of a proposed system of logic*. London: Walton and Maberly, 1960.

DESCARTES, R. *La géométrie de René Descartes*. Paris: A. Hermann, 1886.

DUMMETT, M. *The interpretation of Frege's philosophy*. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1981.

EVES, H. *Introdução à história da matemátic*a. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

FABBRICHESI, R.; MARIETTI, S. *Semiotcs and philosophy in Charles Sanders Peirce*. Newcastle: Cambridge Scholars Press, 2006.

FLOYD, J. Wittgenstein on Philosophy of Logic and Mathematics. In: *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, 2007. Disponível em: https://www.academia.edu/450662/JF_2005_Wittgenstein_on_Philosophy_of_Logic_and_Mathematics. Acesso em: 30 de Maio de 2015.

FRASCOLLA, P. *Understanding Wittgenstein's Tractatus*. Routledge: London and New York, 2007.

FREGE, F. L. G. Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens. L. Nebert, Halle A/S., 1879. In: Ignacio Angelelli (Org). *Begriffsschrift und andere Aufsätze*. Hildesheim, Zürich, New York: 1993.

______. Begriffsschrift: a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. In: HEIJENOORT, Jean van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.

______. *Conceptografía*. Trad. Hugo Padilla. Universidad Nacional Autónoma de México. Instituto de Investigaciones Filosóficas, 1972. Disponível em: www.accionfilosofica.com/misc/1176099341crs.pdf. Acesso em 10 de Dezembro de 2013.

______. *Idéographie*. Trad. Corine Besson. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1999.

______. Prefácio ao Begriffsschrift. Trad. Fernando Raul Neto. In: RAUL NETO, Fernando. *Prefácio ao Begriffsschrift (1879) de Gottlob Frege (1848-1945)*: tradução e introdução ao texto. Revista Brasileira de História da Matemática (RBHM), vol. 8, nº 16, p. 123-141, 2008.

______. *Funktion und begriff*. Jena: Verlag von Hermann Pohle, 1891. Disponível em: https://archive.org/details/functionundbegr00freggoog. Acesso em 18 de Dezembro de 2013.

______. Função e conceito. Trad. Paulo Alcoforado. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

______. *Grundgesetze der arithmetik*: begriffsschriftlich abgeleitet. II. Band, H. Pohle, Jena, 1893. Disponível em: https://archive.org/details/bub_gb_LZ5tAAAAMAAJ. Acesso em 18 de Dezembro de 2013.

______. *The basic laws of arithmetic*: exposition of the system. Trad. Montgomery Furth. Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press, 1964.

______. Prólogo às leis básicas da aritmética. Trad. Celso Reni Braida. In: BRAIDA, Celso Reni. *Três aberturas em ontologia*: Frege, Twardowski e Meinong. Florianópolis: Rocca Brayde, 2005.

______. *Die Grundlagen der arithmetik*. aine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau: Verlag von Wilhelm Koebner, 1884.

______. *The foundations of arithmetic*: a logico-mathematical enquiry into the concept of number. Trad. J. L. Austin. 2ª ed. New York: Harper and Brothers, 1960.

______. *Os fundamentos da aritmética*: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Trad. Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

______. O Pensamento: uma investigação lógica. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Investigações lógicas*. Trad. Paulo Alcoforado. Porto Alegre: PUCRS, 2002.

______. *Sobre a justificação científica de uma conceitografia*. Trad. Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

______. Sobre o conceito e o objeto. Trad. Paulo Alcoforado. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

______. Sobre o sentido e a referência. Trad. Paulo Alcoforado. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

______. Digressões sobre o sentido e a referência. Trad. Paulo Alcoforado. In: ALCOFORADO, Paulo (Org.). *Lógica e filosofia da linguagem*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2009.

FRISCH, J. C. Extension and Comprehension. In: *Logic*. New York: Philosophical Library, 1969.

FURTH, M. Editor's introduction. In: FREGE, F. L. G. *The basic laws of arithmetic*: exposition of the system. Trad. Montgomery Furth. Berkeley, Los Angeles, London: University of California Press, 1964.

GEACH, P.; BLACK, M. *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege*. Oxford: Basil Blackwell, 1960.

GLOCK, H. J. *A Wittgenstein dictionary*. Oxford: Blackwell, 1996.

GÖDEL, K. The completeness of the axioms of the functional calculus of logic. In: HEIJENOORT, Jean van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.

GRANGER, G. G. (org). *Systèmes symboliques, science et philosophie*. Marseille: Centre National de la recherche scientifique, 1978.

______. Préambule du traducteur. In: WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Trad. Gilles Gaston Granger. Éditions Gallimard, 1993.

GRATTAN-GUINNES. Mathematics in behind Russell's logicism, and its recepetion. In: *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*. Cambridge: Cambridge Universtity Press, 2003.

GRIFFIN, N. (Org.) *The Cambridge companion to Bertrand Russell*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

HAWKINS, B. S. Peirce and Russell: the history of a neglected “controversy”. In: *Studies in the logic of Charles Sanders Peirce*. (Org. HOUSER, N.; ROBERTS, D. D.; EVRA, J. V). Bloomington e Indianapolis: Indiana University Press, 1997.

HEIJENOORT, Jean van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.

HERTZ, H. *The principles of mechanics*. London: Macmillan & Co., 1899. Disponível em: https://archive.org/details/principlesofmech00hertuoft. Acesso em: 30 de Maio de 2015.

HILBERT, D.; ACKERMANN, W. *Principles of mathematical logic*. Trad. Lewis Hammond, George Leckie e F. Steinhardt. New York: Chelsea Publishing Company, 1950.

HRBACEK, K. JECK, T. *Introduction to set theory.* 3ed. New York: Marcel Dekker, 1999.

HYLTON, P. *Propositions, functions, and analysis*: selected essays on Russell's Philosophy. New York: Oxford University Press, 2005.

______. Functions, operations, and sense in Wittgenstein’s Tractatus. In: *Propositions, functions, and analysis*: selected essays on Russell's Philosophy. New York: Oxford University Press, 2005.

JANIK, A.; TOULMIN, S. *Wittgeinstein’s Vienna*. New York: Touchstone Book, 1996.

JOHANSEN, J. D. *Dialogic semiosis*: and essay on signs and meaning. Bloomington & Indianapolis: Indiana University Press, 1993.

______. Prolegomena to a semiotic theory of text interpretation. In: *Semiótica*, 57(3/4): p. 225-288, 1985.

KANT, I. *Crítica da razão pura*. Trad. Manuela Pinto dos Santos e Alexandre Fradique Morujão. 5ª ed. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2001.

______. *Kritik der reinen Vernunft*. Hamburg: Verlag Felix Meiner, 1956.

KNEALE, W.; KNEALE, M. *The development of logic*. Oxford: Clarendon Press, 1962.

______. *O desenvolvimento da lógica*. Trad. M. S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1968.

LANG, S. *A first course in calculus*. 3 ed. New York, Berlim, Heidelberg: Springer-Verlag, 1986.

LEIBNIZ, G. W. *Mathematische schriften*. Vol.7. Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, 1971.

______. *Philosophical papers and letters*. Trad. Leroy E. Loemker. Vol. 2. 2ª ed. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

______. *Essais de théodicée sur la bonté de Dieu*, la liberté de l'homme et l'origine du mal, par M. Leibnitz. Amesterdam: Chez François Changuion, 1784. Disponível em: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6528777d.r=bateaux+peches.langFR. Acesso em 18 de Novembro de 2015.

______. *La monadologie*: avec étude e notes. Paris: Librairie Victor Lecoffre, 1900. Disponível em: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k65425v. Acesso em 18 de Novembro de 2015.

LOOMIS, E. J. Logical Form and propositional function in the *Tractatus*. In: *Theoria.* Volume 71, Issue 3, 215–240, September 2005.

LORENZO, J. de. Estudio preliminar. In: *Análisis infinitesimal*. 2 ed. Madrid: Editorial Tecnos, 1994.

LUZIN, N. Fuction: part I. In: *The American Mathematical.* Trad. Abe Shenitze. Monthly, Vol. 105, No. 1. (Jan., 1998), pp. 59-67. Disponível em: http://ocw.nctu.edu.tw/course/fourier/supplement/function%20part1.pdf. Acesso em 20 de Dezembro de 2015.

______. Fuction: part II. In: *The American Mathematical.* Trad. Abe Shenitze. Monthly, Vol. 105, No. 3. (Mar., 1998), pp. 263-270. Disponível em: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.383.7404&rep=rep1&type=pdf. Acesso em 20 de Dezembro de 2015.

MARION, M. *Ludwig Wittgenstein*: uma introdução ao Tractatus Lógico-Philosophicus. Trad. Bento Prado Neto. São Paulo: Annablume, 2012.

MASLOW, A. *A study in Wittgenstein's Tractatus*. Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1961.

MCGINN, C. *Logical properties*: identity, existence, predication, necessitiy, truth. Oxford: Clarendon Press, 2000.

MONK, R. *Wittgenstein*: the duty of genius. Vintage: London, 1991.

______. *Wittgenstein*: o dever do gênio. Trad. Carlos Afonso Malferrari. São Paulo: Companhia das Letras, 1995.

MOORE, G. E. The nature of judgment. In: *Mind*, New Séries, Vol. 8, No 30 (Apr., 1899), p. 176-193. Disponível em: http://mind.oxfordjournals.org/content/VIII/2/176.extract. Acesso em: 06 de Agosto de 2015.

MORENO, Arley R. Le système de numeration du Tractatus. In: GRANGER, G. G. (org). *Systèmes Symboliques, Science et Philosophie*. Marseille: Centre National de la recherche scientifique, 1978.

______. *Wittgeinstein*: os labirintos da linguagem: ensaio introdutório. São Paulo: Moderna; Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 200. (Col. Logos)

OCKHAM, W. *Ockham's theory of terms*: part I of Summa Logicae. Translated and Introduced Michael J. Loux. Notre Dame: University of Notre Dame Press, 1974.

PEANO, G. *Logica matematica*: interlingua ed algebra della gramatica. In: *Opere scelte*. Roma: Edizioni Cremonese, 1958.

PEARS, D. *Ludwig Wittgenstein*. New York: The Viking Press, 1970.

______. *As ideias de Wittgenstein*. Trad. Octanny Silveira da Mota e Leonidas Hegenberg. São Paulo: Cultrix, Editora da Universidade de São Paulo, 1973.

PEIRCE, C. S. *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: MA, Harvard University, 1974.

______. On a new list of categories. In: *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: Harvard University, 1974.

______. *Speculative grammar*. In: *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: Harvard University, 1974.

______. Upon logical comprehension and extension. In: *Writings of Charles S. Peirce*: A Chronological Edition, Volume 2: 1867-1871. Indiana: Indiana University Press, 1984.

POTTER, M.; RICKETTS, T. *The Cambridge companion to Frege*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

POTTER, M. Introduction. In: POTTER, M.; RICKETTS, T. (Ed.). *The cambridge companion to Frege*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

PORFÍRIO, T. de. *Isagoge*. Trad. Alain de Libera et Alain-Philippe Segonds. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin, 1998.

RASHED, R. *Classical mathematics from Al-Khwarizmi to Descartes*. Trad. Michel H. Sank. London and New York: Routledge Taylor & Francis Group, 2015.

RUSSELL, B. *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*. London; New York: Routledge Taylor & Francis Group, 2005.

______. *Mathematical logic based on the theory of types*. In: *American Journal of Mathematics*, Vol. 30, No. 3 (Jul., 1908), 222-262.

______. Da denotação. In: *Lógica e conhecimento*: ensaios escolhidos. Trad. Pablo Rubén Mariconda. São Paulo: Nova Cultural, 1992.

______. *Introduction to mathematical philosophy*. London: George Allen an Unwin Ltd, 1963.

______. *Introdução à filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1966.

______. Letter to Frege. In: HEIJENOORT, J. van. *From Frege to Gödel*: a source book in mathematical logic, 1879-1931. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1967.

______. *My philosophical development*. New York: Simon and Schuster, 1959.

______. *Meu desenvolvimento filosófico*. Trad. Luiz Alberto Cerqueira e Alberto Oliva. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1980.

______. *The principles of mathematics*. Cambridge: University Press, 1903.

SANTOS, L. H. L. dos. A essência da proposição e a essência do mundo. In: WITTGEINSTEIN, L. *Tractatus logico-philosophicus.* São Paulo: EDUSP, 2001.

______. Vida e obra. Tradução e notas. In: FREGE, F. L. G. *Os fundamentos da aritmética*: uma investigação lógico-matemática sobre o conceito de número. Trad. Luís Henrique dos Santos. São Paulo: Abril Cultural, 1980.

SCHOENFELD, A. H.; ARCAVI, A. On the meaning of variable. In: *Mathematics Teacher.* 81(6), p. 420 - 427. 1988.

SHORT, T. L. *Peirce's theory of signs*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.

SILVEIRA, L. F. B. da. *Curso de semiótica geral*. São Paulo: Quartier Latin, 2007.

STEGMÜLLER, W. *A filosofia contemporânea*: introdução crítica. Vol. 1. São Paulo: Editora Pegagógica e Universitária, 1977.

TASSINARI, R. P.; D'OTTAVIANO, I. M. L.. A lógica e as lógicas: sobre a noção de sistema formal e o princípio da liberdade lógica. In: Gonzalez, M.E.Q; Broens, M.C.;Martins, C.A.. (Org.). *Informação, Conhecimento e Ação Ética*. 1 ed. Marília/São Paulo: Oficina Universitária/Cultura Acadêmica, 2012. Disponível em: http://www.marilia.unesp.br/Home/Instituicao/Docentes/RicardoTassinari/LL.pdf. Acesso em 12 de Dezembro de 2015.

WAERDEN, B. L. van der. *A history of Algebra*: from al Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.

WHITEHEAD, A. N.; RUSSELL, B. *Principia mathematica*. Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

______. *Principia mathematica*. 2ª ed. (Reprinted). Cambridge: Cambridge University Press, 1963.

WHITEHEAD, A. N. *An introduction to mathematics*. London: Willians and Norgate, 1911.

WITTGENSTEIN, L. Some remarks on logical form. In: *Proceedings of the Aristotelian Society.* Vol. 9, p. 162-171. Acesso em 14 de Maio de 2012.

______. *Notebooks 1914-1916*. New York: Harper & Brothers, 1961.

______. Notes on logic. In: *Notebooks 1914-1916*. New York: Harper Torchbooks, 1961.

______. Notes dictated to G. E. Moore in Norway. In: *Notebooks 1914-1916*. New York: Harper & Brothers, 1961.

______. *Prototractatus*: an early version of Tractatus logico-philosophicus. Edited by B.F. McGuinness, T. Nyberg, G.H. von Wright; with a translation by D.F. Pears [and] B.F. McGuinness, an historical introduction by G.H. von Wright and a facsimile of the author's manuscript. London; New York: Routledge, 2002.

______. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. Charle Kay Ogden (com colaboração de Frank Plumpton Ramsey). London: KEGAN PAUL, TRENCH, TRUBNER & CO., LTD; New York: HARCOURT, BRACE & COMPANY, INC., 1922. Disponível em: http://www.gutenberg.org/files/5740/5740-pdf.pdf. Acesso em 09 de Setembro de 2014.

______. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. David Pears e Brian MacGuinnes. London and New York: Routledge Classics, 2002.

______. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. José Arthur Giannotti. São Paulo: Companhia Editora Nacional e Editora da Universidade de São Paulo, 1968.

______. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. Luiz Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

______. *Tractatus logico-philosophicus*. Trad. Gille Gaston Granger. Éditions Gallimard, 1993.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. In: *Archive for history of exact sciences*. Vol. 16, No. 1, pp. 37-85, 1976.

Anexos

1. Peirce e a função proposicional

Podemos observar que há registros explícitos do conceito de função proposicional também nos trabalhos de Charles Sanders Peirce (1839 – 1914), quando o mesmo introduz o conceito de "rema" (*rhema*).[457]Feremos nesta parte do Anexo uma exposição sumária sobre este conceito em Peirce.

Na coletânea de textos de Peirce intitulada "*Collected papers of Charles Sanders Peirce*"[458], a referência que nos parece mais se assemelhar a uma definição, e que parece introduzir o conceito de rema, é a referência que encontramos no livro intitulado "Gramática Especulativa" (1895-1896) (*Speculative Grammar*). Neste livro, Peirce diz que

> Um *Rema* é um Signo que, para seu Interpretante, é um Signo de Possibilidade qualitativa, ou seja, é entendido como representando tal ou tal espécie de objeto possível. Todo Rhema fornecerá, talvez, alguma informação; mas não é interpretado como assim procedendo. (PEIRCE, CP. 2.250, grifo do autor, tradução nossa)[459]

Nesse sentido, um rema é um signo de possibilidade qualitativa, pois expressa a possibilidade de atribuição de uma qualidade ou de um predicado a possíveis objetos que podem receber essa predicação. Ao contrário de um signo que nomeia um objeto, um rema tem propriedade predicativa que pode ser atribuída a muitos objetos; o que o torna, como o próprio autor o diz, uma "signo de possibilidade qualitativa".

Sobre o conceito de predicado, escreve Peirce no livro "S*inopse parcial de uma proposta de trabalho em lógica*" (1902) (*Partial synopsis of a proposed work in logic*) que "O que permanece de uma proposição após a retirada de seu sujeito é um termo (um rema) chamado seu Predicado.". (PEIRCE, CP. 2.95, tradução nossa)[460]

[457] Encontramos as seguintes variações do termo "rhema", que Peirce utiliza para se referir ao conceito de rema: "rheme" e "term". Utilizaremos a tradução "rema" para nos referirmos, indistintamente, às ocorrências dos termos rhema ou rheme, mas, embora "term" expresse, no entender de Peirce, o conceito de rema, traduziremos "term" por "termo" mesmo. Short (cf. 2007, p. 232) observa ainda outras variações de designações para o conceito de rema: "sumisign" e "seme".

[458] A edição de nossa consulta é a versão eletrônica da seguinte edição do *The Collect Papers*: PEIRCE, C. S. *Collected papers of Charles Sanders Peirce*. Vol. I-VI ed. Charles Hartshorne and Paul Weiss; Vol. VII-VIII ed. Arthur W. Burks. Cambridge: MA, Harvard University, 1958. Designaremos esta edição apenas por "*The Collect Papers*".

[459] "A *Rheme* is a Sign which, for its Interpretant, is a Sign of qualitative Possibility, that is, is understood as representing such and a kind of possible Object. Any Rheme, perhaps, will afford some information; but it is interpreted as doing so.".

[460] "That which remains of a Proposition after removal of its Subject is a Term (a rhema) called its Predicate.".

O rema é um predicado ou termo predicativo que está na relação com o interpretante. Peirce denomina de “interpretante” o signo criado na mente de alguém. O signo criado na mente de alguém, também chamado de “representamen”, é aquilo que, sob certo aspecto, representa algo para alguém ou em potência representa algo para alguém. O que é representado é o que ele chama por “objeto”. Em resumo diz Peirce:

> Um sinal, ou *representamen*, é algo que está á disposição de alguém por alguma coisa em algum aspecto ou capacidade. Dirige-se a alguém, isto é, cria na mente dessa pessoa um signo equivalente, ou talvez um sinal mais desenvolvido. Esse sinal que ele cria eu chamo *interpretante* do primeiro sinal. O sinal representa algo, seu *objeto*. (PEIRCE, CP. 2.228, grifo do autor, tradução nossa)[461]

Signo, Interpretante e Objeto constituem o que é chamado de “relação triádica” (cf. CP 2.242 e CP 2.274, e.g). Não faremos, aqui, uma apresentação da semiótica de Peirce, pois não contempla os propósitos de nossa exposição. Entretanto, o que nos parece interessante observar é que, em um sentido mais amplo, conforme explica Barbosa, “Todo signo será remático ou terá um rema ou será sustentado, em última instância, por um rema. Todo signo, com efeito, será interpretado e assim o poderá ser, como um signo de possibilidade.”. (BARBOSA, 2007, p. 80)

Exemplifica Barbosa (cf. 2007, p. 81) que uma placa de trânsito que indique, de modo convencional, ser proibida a conversão à esquerda, caso seja tirada do contexto em que leva o interpretante a agir seguindo suas indicações, será interpretada como um signo de possibilidade. Assim, em resumo, diz, ainda, Barbosa que “Um mero predicado que não está sendo atribuído a nenhum sujeito será interpretado como um rema, dada sua possibilidade de atribuição.”. (BARBOSA, 2007, p. 81)

Podemos observar, então, uma relação muito próxima entre o conceito de rema com o conceito de função proposicional. Observa o editor do *The Collect Papers* que o que Peirce chama por “rema” é o que hoje é chamado na Lógica Moderna de “função proposicional”: “Hoje o rema, ou reme, é convencionalmente simbolizado como Φx e é chamado de uma função proposicional” (CP. 2.95, Fn 1, p. 53, tradução nossa).[462] Ainda diz: “Uma coleção é

---

[461]“A sign, or *representamen*, is something which stands to somebody for something in some respect or capacity. It addresses somebody, that is, creates in the mind of that person an equivalent sign, or perhaps a more developed sign. That sign which it creates I call the *interpretant* of the first sign. The sign stands for something, its *object*.”.
[462] “Today the rhema, or rheme, is conventionally symbolized as φx and is called a propositional function.”.

um rema ou uma função proposicional. Seus membros esses subjeitos que fazem uma proposição verdadeira.". (CP. 3.537 Fn, P1, p. 338, tradução nossa)[463]

Nesse sentido, dizem Fabbrichesi e Marietti em "Semiótica e Filosofia em Charles Sanders Peirce" (*Semiotcs and philosophy in Charles Sanders Peirce*) que "Remas são sinais fragmentários que devem ser incorporados a 'sinais completos' (proposições ou argumentos); eles são 'um sinal de essência' (EP 2: 294)[464]". (FABBRICHESI; MARIETTI, 2006, p. 25, tradução nossa)[465]

Diz Barbosa (cf. 2007, p. 80) que, enquanto um termo predicativo, o rema é um signo da mais ampla extensão. Sua característica é tão ampla que Peirce define mente (*mind*) como um rema. Nesse sentido, escreve o editor do *The Collect Papers* que "A mente é uma função proposicional dos universos mais amplos possíveis, tal que seus valores são os significados de todos os signos, cujos efeitos atuais estão em efetiva interconexão.". (Cf., CP. 4.550 Fn 2 p. 432, tradução nossa)[466]

Comenta Johansen (cf. 1966, p. 243) que a noção de rema, remonta, originalmente, ao escrito "Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica" (*Upon Logical Comprehension and Extension*) publicado em 1867.

Neste escrito Peirce apresenta dois conceitos que introduzem o conceito de rema, a saber: amplitude (*breadth*) e profundidade (*depth*). Após discutir as muitas acepções do conceito de extensão e compreensão entre os filósofos, escolhe adotar tais termos, dizendo que os tomou emprestado de William Rowan Hamilton (1805 – 1865): "Eu adoptarei os termos de Hamilton, *amplitude* e *profundidade*, por extensão e compreensão, respectivamente, e devo empregá-los em diferentes sentidos, que eu distingueirei por diferentes adjetivos.". (PEIRCE, 1984, p. 425, grifo do autor, tradução nossa)[467]

Peirce define amplitude (*breadth*) do seguinte modo: "Pela *amplitude informada* de um termo, quero dizer todas as coisas reais de que é predicável, com verdade lógica no todo em um suposto estado de informações.". (PEIRCE, 1984, p. 425, grifo do autor, tradução

---

463 "A collection is a rhema or propositional function. Its members are those subjects which make it a true proposition.".

464 EP: *The Essencial Peirce*. Vol. 2. Bloomington: Indiana University Press, 1998.

465 "Rhemes are fragmentary signs that must be embedded in 'completer signs' (propositions or arguments); they are 'a sign of essence' (EP 2: 294)".

466 "Mind is a propositional function of the widest possible universe, such that its values are the meanings of all signs whose actual effects are in effective interconnection.".

467 "I shall adopt Hamilton's terms, *breadth* and *depth*, for extension and comprehension respectively, and shall employ them in different senses, which I shall distinguish by different adjectives.".

nossa).[468] Por exemplo, o termo "no todo" indica que todas as informações que estão disponíveis devem ser consideradas; e as coisas que não fazem parte da amplitude abarcada pelo termo, em sua possibilidade de predicação, não podem ser consideradas, pois não se encontram no campo de possibilidade de sua amplitude. Nesse sentido, se *T* é um termo que é predicável apenas de *S*', *S*'' e *S*''', então os *S*' 's, os *S*'' 's, e os *S*''' 's, constituirão uma amplitude informada de *T*. Se, ao mesmo tempo, *S*' e *S*'' são os sujeitos dos quais apenas um outro termo *T* ' pode ser predicado, e se não se sabe que todos *S*''' 's são ou *S*' ou *S*'', então *T* é dito que ter uma maior amplitude informada que *T* '. (cf. PEIRCE, 1984, p. 425, tradução nossa)

Já a profundidade (*depth*) é assim definida por Peirce: "Pela profundidade informada de um termo, quero dizer todos os reais caracteres (em contradição com meros nomes) que podem ser predicados dele (com verdade lógica, no seu conjunto) em um suposto estado de informação; nenhum caracter sendo contado duas vezes, com conhecimento de causa, no suposto estado de informações.". (PEIRCE, 1984, p. 425-426, tradução nossa).[469] Por exemplo, sabe-se, por observação e análise, que a profundidade informada (*depth*) do termo triângulo são os seguintes predicados: "ter três lados" e "ter como resultado da soma dos seus ângulos formando um ângulo de 180º", pois são informações que são predicadas do termo triângulo, constituindo-se em seus "caracteres reais".

A amplitude informada (*informed depth*) de um termo contribui para a noção de informação em Peirce que não estudaremos aqui, mas que parece abrir um campo de estudo em Teoria do Conhecimento a partir da análise da predicação. Sobre isso, comenta Johansen: "Um modo de definir informação é esta: o conjunto de caracteres que pode ser predicado de um símbolo desprovido de caracteres contidos na sua definição verbal. Outra modo de olhar para este conceito já foi abordado, a saber, informação como um processo de aquisição de conhecimento.". (JOHANSEN, 1993, p. 148, tradução nossa)[470]

É notável, como observa Peirce, que "A profundidade, assim como a amplitude, podem ser certa ou duvidosa, real ou potencial, e há uma compreensão correspondente a

---

[468] "By the informed breadth of a term, I shall mean all the real things of which it is predictable, with logical truth on the whole in a supposed state of information.".
[469] "By the informed depth of a term, I mean all the real characters (in contradiction to mere names) which can be predicated of it (with logical truth, on the whole) in a supposed state of information; no character being counted twice over knowingly in the supposed state of information.".
[470] "One way to define information is this: the set of characters which can be predicated of a symbol minus the characters contained in its verbal definition. Another way of looking at this concept has already been touched on, namely information as a process of knowledge acquisition.".

nitidez extensiva.”. (PEIRCE, 1984, p. 425-426, tradução nossa)[471]. Isso quer dizer que certo ocorre quando se conhece toda a profundidade (*depth*) e amplitude (*breadth*) informada de um termo e o duvidoso ocorre quando não se conhece. O real ocorre quando a profundidade (*depth*) e amplitude (*breadth*) informada de um termo é maior do que as de outro termo a partir do conhecimento de toda a amplitude, e o potencial ocorre quando se conhece quase todos os elementos, mas não todos, da profundidade (*depth*) e amplitude (*breadth*) informada de um termo a ponto de afirmarmos, por exemplo, que um termo é, pontencialmente, maior, em amplitude, do que outro termo.

Tendo em vistas essas breves considerações, podemos dizer que a noção de rema, remonta, assim, originalmente, ao escrito “Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica” que data de 1867, portanto anos antes da publicação da *Conceitografia* (1879), onde Frege introduz o conceito de função.

2. Peirce, Frege e Russell: notas historiográficas

É notável que Peirce e Frege tenham, cada um a sua maneira e dentro dos propósitos de seus pensamentos, introduzido pela primeira vez o conceito de função proposicional de modo independente um do outro.

Benjamin Hawkins, em seu artigo “Peirce e Russell: a história de uma ‘controvérsia’ negligenciada” (*Peirce and Russell: the history of a neglected ‘controversy’*) traz um estudo sobre algo, segundo ele, pouco estudado, isto é, algo negligenciado na História da Lógica: as relações de controvérsia entre os trabalhos de Peirce e Russell no começo do século XX no campo da Lógica Matemática. Neste artigo há duas seções que nos interessam particularmente: a primeira intitulada “A obra de Peirce, Russell e Frege” (*Peirce, Russell, and Frege's Work*), “A consciência de Peirce da obra de Frege” (*Peirce’s Awareness of Frege’s Work*) e “Conhecimento de Peirce e Russell da obra um do outro” (*Peirce’s and Russell’s Cognizance of Each Other’s Work*). Nestas seções Hawkins traz comentários historiográficos sobre especulações em torno do conhecimento por parte de Peirce sobre os trabalhos de Frege, já que é certo que Frege não conhecia os trabalhos de Peirce.

Segundo Hawkins, Peirce parece não ter conhecido os trabalhos de Frege. Sobre isso, escreve: “Os escritos de Peirce não contêm menção a Frege – e o meticuloso Peirce foi

[471] “The depth, like the breadth, may be certain or doubtful, actual or potencial, and there is a comprehensive distinctness corresponding to extensive distinctness.”.

geralmente atento às suas referências. Peirce, por exemplo, parece inteiramente inconsciente da quantificação no *Begriffsschrift* quando (em *1885*) introduz sua separação notacional das funções de quantificação e indexação.". (HAWKINS, 1997, p. 136, tradução nossa)[472]

Hawkins diz haver especulações sobre o conhecimento de Peirce sobre os trabalhos de Frege. Diz Hawkins que "Há, por exemplo, uma cópia da *Conceitografia* [Bg] (*1879*) na biblioteca em Jhons Hopkins University. Não há anotações por Peirce neste volume, mas sua data de aquisição é 5 Abril de 1881, uma data que abrange a permanência efêmera de Peirce na Universidade Johns Hopkins (1879-1884) como instrutor de lógica.". (HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)[473]

Outra especulação é sobre uma cópia da *Conceitografia* (1879) na Sala de Livros raros da Universidade de Princeton. Sabe-se que este livro era de A. Marquand, um dos colaboradores dos *Estudos em Lógica* (1883) (*Studies in Logic*), cujos colaboradores eram seus alunos e cujo editor foi Peirce. E aqui Hawkins cita as seguintes palavras de Peirce: "'Esses artigos, os trabalhos de meus estudantes, têm sido tão instrutivos para mim …' (Peirce ed. 1883: iii).". (Peirce *apud* HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)[474]

Há, também, na bibliografia de Ladd-Franklin, também colaboradora dos *Estudos em Lógica* (1883) (Ladd-Franklin, 1883: 70 – 77), um texto de Schröder em que este faz citações da *Conceitografia* (1879) e faz uma revisão sobre ela. Há, também, uma cópia do texto de Schröder na biblioteca de Peirce que agora se encontra na Biblioteca Widener em Harvard. Segundo Hawkins essa coleção pode ter sido compilada após sua aquisição pela Universidade de Harvard, com o texto de Schröder numerado não por Peirce, mas pode ter sido marcada por Peirce em lápis verde o título "Lógica Formal" do texto de Schröder. Mas, no entender de Hawkins "Nada disso, claro, prova que Peirce leu o Bg [*Begriffschrift*] ou mesmo os comentários de Schröder sobre ela.". (HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)[475]

Por fim, há uma passagem no *Collected Papers*, em que Peirce, comumente fiel as suas referências, menciona os principais pensadores a partir dos quais seu trabalho possa receber um nível de superação e novidade. Nesta referência aparece literalmente o nome de

---

[472] "Peirce's writings contain no mention of Frege – and the polymath Peirce was generally attentive to references. Peirce, for example, seems entirely unaware of the quantification in *Begriffschrift* when (in *1885*) he introduced his notational separation of the quantifying and indexing fuctions.".

[473] "There is, for exemplo, the copy of Frege's *Befriffsschrift* [Bg] (*1879*) in the library at Johns Hopkins University. There are no annotations by Peirce in this volume, but its date of acquisition is 5 April 1881, a date which falls within Peirce's ephemeral tenure at Johns Hopkines (1879-1884) as an instructor in logic.".

[474] "'Theses papers, the work of my students, have been so instructive to me...' (Peirce ed. 1883: iii)"

[475] "None of this, of course, proves that Peirce read Bg or even Schroder's review of it.".

Russell, mas não o de Frege. Escreve Peirce: "Minha análise do raciocínio supera em rigor tudo o que já foi publicado, quer em palavras ou em símbolos - tudo o que De Morgan, Dedekind, Schröder, Peano, Russell, e outros que já fizeram – a um grau tal que lembra a diferença entre um rascunho de lápis de uma cena e uma fotografia do mesmo.". (PEIRCE, CP 5.147, tradução nossa)[476]

Tal referência indica, ao menos, que Peirce conhecia os trabalhos de Russell, interlocutor direto de Frege, cujas referências a Frege aparece no *Principia Mathematica* (1910). Segundo Hawkins, a importância marginal de Russell em sua obra, parece indicar que o interesse e leitura de Peirce sobre o Principia tenha se limitado às entradas do índice da obra. "Peirce anotou, na cópia existente do PM [*Principia Mathematica*], com suas notas marginais nunca sendo tão distantes das referências de Russell a Peirce, parece indicar que a 'leitura' de Peirce foi limitada às entradas do índice dos nomes.". (HAWKINS, 1997, p. 134, tradução nossa)[477]

Desse modo, a presença de Russell não é tão significativa na obra de Peirce como a presença e influência de outros pensadores. Escreve Hawkins que "A presença de 'Russell' aqui é tão significativa quanto a ausência de 'Frege', pois isso foi em 1903, quando *Os Princípios da Matemática* de Russell e o Volume II de *A Leis Fundamentais da Aritmética* foram publicados ou estavam 'em impressão'.". (HAWKINS, 1997, p. 136, tradução nossa).[478] Já da parte de Russell, notamos que este menciona Peirce em *Os Princípios da Matemática* (1903), mas somente para atribuir-lhe o mérito da criação do Cálculo da Lógica das Relações. (cf. RUSSELL, 1903, p. 23)

Assim, da parte de Peirce, sabe-se que ele conheceu os trabalhos de Russell, fazendo menção a este, mas não passam de especulações sobre seu conhecimento dos trabalhos de Frege, em especial sobre a *Conceitografia* (1879), onde Frege introduz, pela primeira vez, como sabemos, o conceito de função proposicional com o termo "função". Sobre o conhecimento de Frege em relação aos trabalhos de Peirce, não há registros que ele os conheceu, principalmente devido ao seu isolamento em Jena.

---

[476] "My analysis of reasoning surpass in thoroughness all that has ever been done in print, whether in words or in symbols – all that De Morgan, Dedekind, Schröder, Peano, Russell, and others have ever done – to such a degree as to remind one of the difference between a pencil sketch of a scene and a photograph of it.".

[477] "Peirce's annotated, extant copy of PM, with his marginalia never being too far from Russell's references to Peirce, seems to indicate that Peirce's 'reading' of PM was limited to the index entries under his name.".

[478] "The presence of 'Russell' here is as signficant as the absence of 'Frege', for it was in 1903 that both Russell's PM and Volume II of Frege's *Grundgesetze der Arithmetik* were published or were 'in print'.".

Já em relação à Russell, Frege parece tomar, pela primeira vez, conhecimento de Russell quando recebe deste uma carta em Julho de 1902 com apontamentos de Russell sobre um possível paradoxo em seu sistema lógico. Já Russell introduz o conceito de função proposicional, expresso pelo termo “função proposicional”, antes mesmo de conhecer os trabalhos de Frege, a partir dos trabalhos de Peano, pois o conceito já estava latente em sua notação. Russell, quanto toma conhecimento dos trabalhos de Frege, faz menção explícita a este em sua obra, antes de publicar a sua própria obra em 1903, reconhecendo o mérito de antecipá-lo.

Sobre o conhecimento de Russell em relação aos trabalhos de Peirce, há uma única referência, em *Os Princípios da Matemática* (1903) (cf. Seção 2.1 de nosso trabalho), na qual Russell atribui o mérito a Peirce de ter sido o primeiro a introduzir a Lógica das Relações. Desse modo, se entendermos que Russell é fiel as suas referências, assim como foi fiel ao se referir a Frege, atribuindo-lhe o mérito de antecipá-lo, então podemos dizer que Russell não tomou conhecimento do escrito de Peirce *Sobre a Compreensão e a Extensão Lógica* (1867) ou qualquer outro de seus trabalhos em que contém o conceito de rema.

Podemos dizer, assim, que o conceito de função proposicional foi introduzido, de modo independente, por Peirce, Frege e Russell, podendo Peirce receber mérito de antecipá-los do ponto de vista cronológico.