Giambattista Formica

La materia della rappresentazione nella scienza assiomatizzata

0. Introduzione

Nel suo libro *La science et l'hypothèse* Henri Poincaré utilizza un'immagine affascinante che bene introduce l'argomento che andremo a discutere in questo articolo: «Compito dello scienziato», scrive, «è ordinare; si fa la scienza con i fatti, come si fa una casa con le pietre; ma un cumulo di fatti non è una scienza, proprio come un mucchio di pietre non è una casa»[1].

Oltre a richiamare qualcosa che a molti potrebbe persino apparire ovvio – cioè che la scienza non possa in alcun modo ridursi ad un mero agglomerato di fatti che il ricercatore registra in ambito osservativo, ma richieda piuttosto un attento processo di elaborazione razionale sia in fase preventiva rispetto al contesto dell'esperienza, sia in fase di valutazione dei dati sperimentali raccolti – questa affermazione ha il merito di ricordarci qualcosa che spesso viene passato sotto silenzio, vale a dire il fatto che durante il nostro tentativo di comprendere il mondo si dia alla conoscenza una materia, un complesso di oggetti, tale da risultare determinante nella costruzione e nella formulazione delle nostre teorie. Se questo è vero, si può parlare di una materia, e di una forma da essa distinta, della conoscenza scientifica, sebbene con alcune precisazioni. Prima di esplicitare questo punto in maniera più approfondita, è quindi opportuno chiarire il senso in cui impiegheremo il termine 'materia'.

Ci interessa discutere questa nozione secondo quell'accezione squisitamente conoscitiva canonizzata nella storia del pensiero dall'epistemologia kantiana, ovvero come quell'ambito della conoscenza in qualche modo ancora indeterminato, sprovvisto di una sistemazione adeguata, a cui nel processo di elaborazione razionale bisogna dare un ordine, imprimere una forma perché troppo disordinato, incompiuto o vago. Un ambito cioè che precede ogni compiuta formalizzazione. Analizzeremo questa nozione in un particolare momento della storia del pensiero scientifico a partire da quando, all'inizio del XX secolo, l'indagine sui fondamenti delle scienze matematiche vedeva una netta evoluzione in senso assiomatico, al fine di ordinare discipline i cui pilastri sembravano esser scossi da inquietanti contraddizioni, paradossi o antinomie.

Un tentativo che iniziò esplicitamente con la matematica, e in particolare con alcune discipline che rientravano nella ricerca matematica pura, ma che finì con l'estendersi anche alle scienze fisiche, alle scienze biologiche e alle scienze sociali, che, come è ovvio, cominciarono ad assumere una connotazione matematica sempre più definita. In questo articolo ci soffermeremo, più nel dettaglio, sull'indagine fondazionale condotta rispetto a tre discipline – la teoria degli insiemi, la meccanica quantistica e la scienza economica – in quanto in esse si può osservare il metodo assiomatico all'opera in maniera per così dire esemplare, ovvero corrispondente alla sua reale natura. E questo per due ragioni distinte: innanzitutto, perché esso si è

[1] J.-H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris 1902; 1907[2]; tr. it., *La scienza e l'ipotesi*, a cura di C. Sinigaglia, Bompiani, Milano 2003, p. 215.

rapportato ad oggetti per natura radicalmente diversi tra loro – insiemi di cose, fenomeni quantistici e rapporti sociali tra individui – di cui si volevano conoscere o rispecchiare in maniera più precisa alcune proprietà e relazioni fondamentali; poi perché, nell'avere a che fare con questi oggetti, il metodo assiomatico si è confrontato con discipline che manifestavano un grado molto diverso di maturazione teorica.

Senza anticipare l'analisi che stiamo per svolgere, per ora basti dire che da questo duplice confronto, con oggetti e con discipline tra loro diverse, la cosa più interessante da notare è la straordinaria flessibilità che il metodo assiomatico ha manifestato come strumento di indagine concettuale nel descrivere, nell'ordinare e nello strutturare regioni del sapere apparentemente così distanti. Anzi, proprio dal confronto con questo materiale multiforme, esso si è lasciato guidare nella formulazione e nella giustificazione delle teorie scientifiche che ha concorso a costituire. Come vedremo, infatti, il modo in cui le assiomatizzazioni delle tre discipline sono state condotte è perfettamente adeguato allo stato in cui la teoria degli insiemi, la meccanica quantistica e la scienza economica versavano nel momento in cui il tentativo della loro trattazione assiomatica veniva intrapreso.

Quello che in definitiva ci interessa far emergere, attraverso la ricostruzione dei primi tentativi di assiomatizzare queste tre discipline, si può riassumere in due punti: (i) da un lato riteniamo opportuno esplicitare cosa debba intendersi per materia della rappresentazione nella scienza assiomatizzata, assumendo seppur in maniera implicita la distinzione kantiana tra una materia e una forma della conoscenza; (ii) dall'altro, una volta stabilito questo, ci pare ugualmente utile mostrare come a partire da ciò che si presenta come materia nelle discipline prese in esame, sia possibile svolgere alcune considerazioni generali sulla natura del metodo assiomatico.

Tale metodo non verrà più a configurarsi come un mero gioco formale, una semplice trasposizione in simboli di contenuti noti ma sprovvisti di adeguato rigore; bisognerà intenderlo piuttosto, contrariamente a quanto si pensa in una certa vulgata, come un formidabile strumento di approfondimento degli stessi contenuti della conoscenza scientifica, in grado sì di dare rigore formale ai campi conoscitivi che ne sono sprovvisti, ma allo stesso tempo in grado di sviluppare una straordinaria capacità di analisi concettuale. Il metodo assiomatico si rivelerà, cioè, uno strumento fondamentale per conoscere l'ordine rinvenibile tra i fenomeni in un certo ambito del sapere.

Nella nostra ricostruzione storica procederemo nel modo seguente e senza alcuna pretesa di esaustività. Dapprima descriveremo l'evoluzione del paradigma hilbertiano, che rappresenta lo sfondo su cui si collocano le assiomatizzazioni delle discipline scelte, e solo successivamente ci soffermeremo su ciascuna di esse, in modo da mostrare il senso dei tentativi svolti per fornir loro un andamento assiomatico. Concluderemo con alcune considerazioni di carattere generale.

1. Il paradigma hilbertiano

L'applicazione del moderno metodo assiomatico alle scienze matematiche ha indiscutibilmente in David Hilbert il suo ispiratore, il suo principale promotore, nonché il suo simbolo. A partire dalla fine del XIX secolo il grande matematico tedesco, supportato da una scuola di giovanissimi ricercatori che cominciava a radunare attorno a sé presso l'Università di Göttingen, lanciò il progetto di una fondazione assiomatica della matematica del tempo, da estendere in maniera sistematica anche alle scienze naturali. Pur declinandosi in termini diversi nel corso dei decenni, questo progetto rimase negli intenti sostanzialmente invariato. Il metodo assiomatico rappresentò sempre, nella considerazione hilbertiana, l'unico strumento adeguato per indagare, ordinare e presentare ogni disciplina che volesse elevarsi al rango di scienza, fino a costituirsi come l'unica maniera per pensare in termini rigorosi:

> «Il metodo assiomatico è e rimane davvero lo strumento indispensabile, adeguato al nostro spirito, per ogni indagine esatta in qualunque campo; esso è logicamente incontestabile e allo stesso tempo è fecondo; garantisce inoltre all'indagine la più piena libertà di movimento. In questo senso, procedere assiomaticamente non è altro che pensare consapevolmente»[2].

Quando Hilbert diede inizio al suo progetto, la matematica si trovava in una situazione per certi versi ambigua[3]. Per tutto il XIX secolo grandi erano stati i suoi sviluppi soprattutto in senso astratto. L'introduzione delle geometrie non-euclidee, principalmente ad opera di Nikolaj Lobačevskij e Bernhard Riemann, ma anche grazie al lavoro di Hermann Grassmann a proposito della definizione generale di geometria n-dimensionale, aveva mostrato come fosse possibile fare matematica in maniera assolutamente aprioristica rispetto a qualsiasi intuizione spaziale o temporale e, allo stesso tempo, aveva insinuato l'idea che l'attività del matematico potesse in realtà consistere in una libera creazione dello spirito, piuttosto che in una pura attestazione di qualcosa di immediatamente presente all'intuizione. Posizione questa che, sebbene non unanimemente accettata, sembrava essere confermata dalla stessa evoluzione dell'analisi – enormemente ampliatasi con l'introduzione della teoria delle funzioni complesse, a partire dai lavori di Augustin-Louis Cauchy, Karl Weierstrass e dello stesso Bernhard Riemann – e che veniva prepotentemente rilanciata dalla nascente teoria degli insiemi, frutto del grande genio di Georg Cantor. Quest'ultima, infatti, mostrando la possibilità di costruire insiemi infiniti di potenza sempre maggiore, e conseguentemente numeri transfiniti corrispondenti a questi insiemi, affermava l'assoluta libertà della matematica nella creazione dei suoi concetti. Hilbert stesso ebbe modo di dire una volta: «Dal paradiso che Cantor ha creato per noi, nessuno deve poterci mai scacciare»[4].

Tuttavia, quasi ad arginare un fiume oramai in piena, l'incredibile sviluppo della matematica in senso astratto cominciò ad essere accompagnato, negli ultimi decenni

---

[2] D. HILBERT, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*, «Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität», 1 (1922), pp. 157-177; poi, con l'aggiunta di alcune note, in HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes*, Springer, Berlin 1935, pp. 157-177; tr. it., *Nuova fondazione della matematica. Prima comunicazione*, in HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 189-213; in part., p. 193.

[3] Per uno sguardo sintetico si veda l'ormai classico: M. KLINE, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972; tr. it., *Storia del pensiero matematico*, 2 voll., a cura di A. Conte, Einaudi, Torino 1996; in part., cap. XLIII.

[4] D. HILBERT, *Über das Unendliche*, «Mathematisce Annalen», 95 (1926), pp. 161-191; tr. it., *Sull'infinito*, in HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 233-266; in part., p. 242.

del secolo, da una sempre maggiore richiesta di rigore sia nel porre le definizioni, sia nel condurre le dimostrazioni, in merito alla trattazione di quelle che venivano chiamate molteplicità infinite. Si generò così un'ampia discussione metodologica, la quale vide emergere le figure di due importanti matematici, che con le loro posizioni divisero gli schieramenti. Da un lato affascinava la posizione astratta di Richard Dedekind che, sposando le idee di Cantor, vincolava l'esistenza degli oggetti matematici al problema della validità dell'intero sistema a cui quegli oggetti facevano riferimento, validità che doveva essere garantita attraverso la dimostrazione della non-contraddittorietà delle nozioni assiomaticamente caratterizzate; e dall'altro frenava la posizione restrittiva di Leopold Kronecker, forte critico della nascente insiemistica, il quale annoverava tra gli oggetti matematici esistenti soltanto i numeri naturali, in quanto dati da Dio, e quelli costruibili a partire da essi attraverso procedure di calcolo indubbie e preventivamente definite. Il primo esito di questa discussione, destinata a durare a lungo, fu il fatto che su alcuni dei più fecondi metodi dimostrativi impiegati dai matematici nel corso dei secoli, primo tra tutti quello delle dimostrazioni non costruttive di esistenza, cominciò a sollevarsi il dubbio della loro liceità e allo stesso tempo il rischio del loro rifiuto. La matematica veniva così esposta al pericolo di esser privata di quei metodi che maggiormente avevano permesso il suo sviluppo.

La situazione si aggravò ulteriormente al volger del secolo, quando, in seguito alla scoperta di alcune antinomie rinvenibili nella teoria cantoriana degli insiemi, si aprì quella che è universalmente nota come «crisi dei fondamenti». Tra queste vi erano l'antinomia di Burali-Forti, o del massimo numero ordinale, che fu anche la prima a comparire nel 1897[5]; l'antinomia di Cantor, o del massimo numero cardinale, comunicata privatamente a Dedekind nel 1899[6]; e soprattutto la celeberrima antinomia di Russell, o della classe di tutte le classi che non appartengono a se stesse, resa nota nel 1902, la quale colpiva al cuore la nozione stessa di insieme[7]. Dopo due decenni di accese discussioni, Hilbert ricordava in maniera estremamente lucida la situazione di quegli anni e le reazioni che seguirono la crisi: «Nella gioia per i nuovi ed abbondanti risultati […] vennero fuori delle contraddizioni dapprima sporadiche e poi gradualmente sempre più acute e serie […]. La reazione fu così impetuosa che furono minacciati anche i concetti più comuni e fecondi ed i tipi di ragionamento più semplici ed importanti della matematica, e si voleva vietare il loro impiego»[8]. Il problema, in realtà, risiedeva nel fatto che con la teoria cantoriana l'intera matematica veniva toccata dalla crisi, a causa della definizione insiemistica che era

[5] Si vedano: C. BURALI-FORTI, *Una questione sui numeri transfiniti*, «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», 11 (1897), pp. 154-164; C. BURALI-FORTI, *Sulle classi ben ordinate*, «Rendiconti del Circolo matematico di Palermo», 11 (1897), p. 260.

[6] Cfr. *Cantor an Dedekind, 28. 7. 1899*, in G. CANTOR, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, a cura di E. Zermelo, Springer, Berlin 1932, pp. 443-447, 451; tr. ingl., *Letter to Dedekind*, in J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 113-117. Per la traduzione italiana del carteggio tra Cantor e Dedekind rimandiamo a: P. NASTASI (a cura di), *Georg Cantor e Richard Dedekind: Lettere 1872-1899*, Springer, Milano 2002.

[7] Cfr. B. RUSSELL, *Letter to Frege*, in J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 124-125; tr. it., *Russell a Frege 16 giugno 1902*, in G. FREGE, *Alle origini della nuova logica. Carteggio scientifico con Hilbert Husserl Peano Russell Vailati e altri*, a cura di C. Mangione, Bollati Boringhieri, Torino 1983, pp. 183-184.

[8] D. HILBERT, *Über das Unendliche* cit.; tr. it., pp. 241-242.

stata data del concetto di numero da Weierstrass, Cantor e Dedekind. Ed era essa stessa che doveva essere riformata nella sua interezza.

Hilbert si fece promotore di questa riforma attraverso l'impiego del metodo assiomatico[9], con l'intento preciso di non dilapidare il patrimonio di risultati acquisiti e di non mutilare la matematica dei concetti e dei metodi rivelatisi fecondi. Non si potrebbe cogliere appieno il tentativo fondazionale hilbertiano, perpetuato nel tempo dalla sua scuola, se non si avesse ben chiaro questo atteggiamento conservativo nei confronti della scienza impresso fin dall'inizio al metodo assiomatico. Come egli ebbe modo di chiarire in una relazione programmatica, il suo tentativo mirava a fondare la matematica in una maniera assolutamente incontestabile, lasciando però inalterato il patrimonio dei risultati raggiunti nel tempo:

> «L'obiettivo di fondare in modo sicuro la matematica è anche il mio obiettivo. Io desidero restituire alla matematica l'antica reputazione di verità incontestabile, che sembra si vada perdendo a causa dei paradossi della teoria degli insiemi; ma credo che ciò sia possibile conservando in pieno il patrimonio della matematica. Il metodo che io intraprendo per questo fine è nient'altro che il metodo assiomatico»[10].

L'ingresso ufficiale di Hilbert nel dibattito fondazionale risale all'anno 1899, quando venne pubblicato per la prima volta il testo *Grundlagen der Geometrie*. In quello stesso anno egli avanzò l'idea di estendere il metodo assiomatico, utilizzato nell'indagine sui principi della geometria, al problema della fondazione della matematica[11], che egli vedeva composta di tre ulteriori discipline: aritmetica, analisi e teoria degli insiemi. La ragione di questa estensione risiedeva nel fatto che l'indagine assiomatica dei fondamenti della geometria aveva mostrato tre punti di capitale importanza: innanzitutto, aveva permesso di riportare i più importanti teoremi della geometria ad un insieme di assiomi il più possibile semplici, a partire dai quali si poteva attribuire un significato alle relazioni che intercorrono tra gli oggetti del dominio geometrico, cosa certamente auspicabile anche per altri campi del sapere; in secondo luogo, attraverso l'indagine sulla reciproca compatibilità degli assiomi, aveva dato fondamento ad una pluralità di geometrie tutte ammissibili sul piano dei principi e mostrato così, ad un livello più generale, la necessità di chiarire per ciascun campo della matematica il nesso esistente tra le asserzioni che compongono alla radice l'apparato teorico; infine, individuando un modello numerico come interpretazione del sistema di assiomi formulato, aveva mostrato quanto fosse necessario assicurarsi la fondazione della geometria in maniera ancora più certa attraverso uno spostamento della ricerca sui fondamenti del concetto di numero. La portata di quest'ultimo punto può esser colta pienamente se si tiene in conto che la

---

[9] Per un'interessante ricostruzione della riflessione hilbertiana a partire dalla discussione metodologica di fine Ottocento e per un'analisi critica della genesi del programma fondazionale finitista si veda: W. SIEG, *Hilbert's programs: 1917-1922*, «The bulletin of symbolic logic», 5 (1999), pp. 1-44. Per una sintetica ricostruzione della sua interazione con la teoria degli insiemi si veda invece: G.H. MOORE, *Hilbert on the infinite: the role of set theory in the evolution of Hilbert's thought*, «Historia mathematica», 29 (2004), pp. 40-64.

[10] HILBERT, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung* cit.; tr. it., pp. 192-193.

[11] Cfr. D. HILBERT, *Über den Zahlbegriff*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», 8 (1900), pp. 180-184; tr. it., *Sul concetto di numero*, in HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 139-143.

costruzione di modelli era in questo periodo il metodo principale utilizzato per garantire la non-contraddittorietà degli assiomi formulati per determinati campi del sapere matematico.

Sebbene Hilbert perfezionò il suo programma fondazionale in senso finitista soltanto a partire dal 1922, quest'idea di estendere il metodo assiomatico alla fondazione della matematica nella sua interezza subì nei primi anni del secolo una velocissima evoluzione, fino ad investire il contesto della scienza naturale. Si pensi che nella relazione tenuta ad Heidelberg nel 1904, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, Hilbert mostrò di aver già guadagnato due punti fondamentali del suo futuro programma: da un lato si accorse della necessità di scommettere, come principio metodologico fondamentale, sullo sviluppo parzialmente simultaneo delle leggi della logica e della matematica, al fine di risolvere i problemi generati dalla comparsa dei paradossi; e dall'altro avvertì l'esigenza di attribuire alla questione della non-contraddittorietà dei sistemi assiomatici una natura squisitamente sintattica, evitando di farla ricadere esclusivamente nella problematica dell'esistenza di un determinato sistema di oggetti[12]. In realtà queste importanti acquisizioni non ebbero immediatamente un seguito, a causa di una devastante obiezione mossa da Poincaré al principio di induzione completa, che indusse Hilbert a mantenere un lungo silenzio in materia fondazionale[13]. Tuttavia, il dato più rilevante è che, in questo periodo durato più di dieci anni, egli non perse mai la fiducia nel metodo assiomatico che invece cercò di applicare in maniera sistematica allo studio delle scienze naturali, e in particolare alla fisica[14]. Già nel 1900 a Parigi, durante il Secondo congresso internazionale dei matematici, egli aveva sollevato il problema di trattare assiomaticamente quelle discipline fisiche nelle quali la matematica svolgeva un ruolo eminente; tuttavia ora, e con il passare del tempo, aumentava il suo fastidio per

[12] Cfr. D. HILBERT, *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik*, in *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 17. August 1904*, Teubner, Leipzig 1905, pp. 174-185; tr. it., *Sui fondamenti della logica e dell'aritmetica*, in HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 163-175.

[13] L'antinomia di Russell indicò ad Hilbert la necessità di condurre le dimostrazioni di non-contraddittorietà dei sistemi assiomatici in maniera diretta e induttiva. Tale dimostrazione doveva mostrare che gli assiomi godono della proprietà di essere non-contraddittori e che le regole di inferenza conservano la stessa proprietà, generando così teoremi che non sono in contraddizione tra loro. Ad Heidelberg, però, queste riflessioni furono presentate relativamente al sistema dell'aritmetica, e secondo Poincaré nascondevano una circolarità pericolosa almeno quanto quella che generava i paradossi. Il sistema dell'aritmetica, infatti, comprendeva tra le sue proposizioni fondamentali proprio l'assioma di induzione, che era indispensabile per sviluppare le dimostrazioni di non-contraddittorietà. Hilbert fu in grado di rispondere compiutamente a questa obiezione soltanto nel 1927, quando propose di distinguere una «induzione formale» basata sull'assioma di induzione da una «induzione contenutistica» implicata nella dimostrazione della non-contraddittorietà del sistema di assiomi: cfr. D. HILBERT, *Die Grundlagen der Mathematik*, «Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität», 6 (1928), pp. 65-85; tr. it., *I fondamenti della matematica*, in HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 267-289; in part., p. 279.

[14] Una lettura attenta anche solo dei titoli dei corsi universitari tenuti da Hilbert tra il 1905 e il 1917 rivela che egli non abbandonò mai la ricerca sui fondamenti della matematica, che invece cominciò ad affiancare allo studio dei fondamenti della fisica. Il suo silenzio ebbe dunque una connotazione esclusivamente pubblica. Oltre al già citato lavoro di Wilfried Sieg si veda anche: V.M. ABRUSCI, *David Hilbert's 'Vorlesungen' on logic and foundations of mathematics*, in G. CORSI / C. MANGIONE / M. MUGNAI (a cura di), *Atti del convegno internazionale di storia della logica, San Giminiano, 5-8 Dicembre 1987*, CLUEB, Bologna 1989, pp. 333-338.

una sempre più evidente mancanza di ordine nei trionfi dei fisici. È emblematica l'affermazione di Paul Ewald, che dal 1912 assistette Hilbert nei suoi studi di fisica, nel descrivere quale fosse il programma scientifico di quegli anni: «Avevamo riformato la matematica, la cosa successiva era riformare la fisica, e poi saremmo andati oltre fino alla chimica»[15].

Tutto questo doveva essere svolto all'insegna del metodo assiomatico: da esso era necessario partire per fondare la matematica e tutto ciò che aveva la pretesa di elevarsi al rango di scienza. Non è affatto un caso che il ritorno di Hilbert sulla scena pubblica nel 1917 e la ripresa del cammino fondazionale pubblicamente interrotto avvennero proprio con una conferenza dal titolo *Axiomatisches Denken*:

> «Io credo: tutto ciò che può essere oggetto del pensiero scientifico, non appena è maturo per la formazione di una teoria, cade sotto il metodo assiomatico e per suo tramite sotto la matematica. Progredendo verso livelli sempre più profondi di assiomi […] otteniamo anche illuminazioni sempre più profonde sulla natura del pensiero scientifico e diveniamo sempre più consapevoli dell'unità del nostro sapere. Nel segno del metodo assiomatico la matematica sembra chiamata ad un ruolo di guida in tutto ciò che è scienza»[16].

Da questo momento in particolare, l'obiettivo di trattare assiomaticamente tutte le aree della conoscenza scientifica si intreccia, nella considerazione hilbertiana, con il tentativo sempre più esplicito di rendere oggetto di indagine non più un singolo campo conoscitivo bensì lo stesso concetto di teoria assiomatica in generale. Si trattava di una ripresa della ricerca interrotta e, allo stesso tempo, di una sua radicalizzazione: «adesso si ha a che fare con qualcosa di ancora più importante. Noi vedremo come un perfezionamento che credo di poter dare al metodo assiomatico ci porti a conseguire piena sicurezza sui principi del ragionamento nella matematica»[17].

Hilbert meditò a lungo sulla realizzabilità di questa intuizione, avvalendosi della preziosa collaborazione di Paul Bernays. E solo nel 1922 presentò una relazione programmatica, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung*, in cui espose la metodologia del suo compiuto programma di ricerca[18]. Questa metodologia, pur subendo evoluzioni tecniche nel corso degli anni, rimase sempre immutata nei lineamenti fondamentali, continuando a strutturarsi secondo due principi essenziali: da un lato, infatti, Hilbert riteneva opportuno collocare il processo di una formulazione assiomatica della matematica intuitiva che chiamava «*matematica propriamente detta*», in cui il complesso delle formule ordinarie della matematica si tramutavano, sviluppando simultaneamente matematica e logica, in stringhe di segni matematico-formali manipolabili simbolicamente e dimostrabili mediante le regole del calcolo logico; e dall'altro, invece, considerava necessario collocare «una matematica in un certo senso nuova, una *metamatematica*» che, attraverso

---

[15] Cfr. C. REID, *Hilbert*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1970, pp. 126-142; in part., p. 129.

[16] HILBERT, *Axiomatisches Denken* cit.; tr. it., p. 188.

[17] HILBERT, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung* cit.; tr. it., p. 193.

[18] Il ruolo programmatico di questa relazione è stato richiamato da Paul Bernays: cfr. P. BERNAYS, *Die Bedeutung Hilberts für die Philosophie der Mathematik*, «Die Naturwissenschaften», 10 (1922), pp. 93-99; tr. ingl., *Hilbert's significance for the philosophy of mathematics*, in P. MANCOSU (ed.), *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, New York-Oxford 1998, pp. 189-197; in part., p. 193.

ragionamenti contenutistici, doveva dar sicurezza alla matematica formalizzata, e in maniera speculare anche alla matematica propriamente detta, introducendo assiomi e dimostrando la loro non-contraddittorietà in maniera indubbia, cioè finitaria. Questi due momenti dovevano alternarsi continuamente al fine di assicurare la validità della matematica classica e, tramite questa, anche delle più importanti regioni della scienza[19].

Come ebbe modo di esplicitare Bernays in un suo contributo: «Il grande vantaggio della procedura di Hilbert consiste precisamente nel fatto che i problemi e le difficoltà che si presentano nella fondazione della matematica vengono trasferiti da un dominio epistemologico-filosofico in uno che è propriamente matematico»[20]. Si può cogliere appieno il significato di questo giudizio se si tiene in conto il fatto seguente. Sicuramente la procedura hilbertiana, sin dalle prime fasi della sua lunga gestazione, mirava a fondare i campi più problematici della conoscenza scientifica attraverso i due momenti esplicitati: la formulazione assiomatica delle teorie e la loro giustificazione attraverso dimostrazioni di non-contraddittorietà; ma solo ora essi venivano trattati in maniera sistematica e cominciavano ad assumere un significato matematico esplicito: la formulazione assiomatica attraverso l'esplicitazione di un linguaggio formale e di un calcolo logico in cui poter essere sviluppata, e la giustificazione delle teorie formali attraverso l'individuazione di tecniche matematiche finitarie con cui poter condurre le dimostrazioni di non-contraddittorietà. Purtroppo in questa sede non possiamo descrivere, come invece meriterebbero, le linee di realizzazione di questo programma, quelle tecniche raffinatissime che attribuiscono alle dimostrazioni di non-contraddittorietà un carattere strettamente matematico[21]; è tuttavia opportuno svolgere due brevi osservazioni che sono essenziali per sviluppare il nostro discorso sul concetto di materia rispetto al problema dell'assiomatizzazione delle scienze.

La prima riguarda il nesso esistente tra le nozioni di materia e di forma nell'evoluzione del paradigma hilbertiano. La posizione hilbertiana, infatti, viene generalmente denominata «formalismo» per la centralità che la trattazione formale riveste all'interno del programma finitista; Hilbert stesso, ad esempio, legittimava questa lettura quando sosteneva che il «gioco di formule» da lui proposto era fondamentale per «esprimere unitariamente tutto il contenuto concettuale della scienza matematica»[22]. Tuttavia, l'importanza dell'aspetto formale non deve essere enfatizzata oltremodo, e non può quindi diventare il "timbro esclusivo" della ricerca di Hilbert in materia fondazionale, perché l'aspetto contenutistico, o materiale, svolge nell'economia del tutto un ruolo parimenti importante. Già Georg Kreisel sosteneva, molti anni fa, che il formalismo di vulgata, presente in molta letteratura, risentiva dell'idea di formalismo sostenuta da Luitzen Brouwer, che tendeva a contrapporre il

[19] Cfr. HILBERT, *Neubegründung der Mathematik. Erste Mitteilung* cit.; tr. it., p. 210.

[20] P. BERNAYS, *Über Hilberts Gedanken zur Grundlegung der Arithmetik*, «Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung», 31 (1922), pp. 10-19; tr. ingl., *On Hilbert's thoughts concerning the grounding of arithmetic,* in P. MANCOSU (ed.), *From Brouwer to Hilbert. The debate on the foundations of mathematics in the 1920s*, Oxford University Press, New York-Oxford 1998, pp. 215-222; in part., pp. 221-222.

[21] A riguardo si veda: R. ZACH, *The practice of finitism. Epsilon calculus and consistency proofs in Hilbert's program*, «Synthese», 137 (2003), pp. 211-259. Il contributo fornisce una ricostruzione delle tecniche impiegate nell'ambito del programma fondazionale finitista in una prospettiva storico-critica.

[22] D. HILBERT, *Die Grundlagen der Mathematik* cit.; tr. it., p. 282.

trattamento formale hilbertiano alla matematica intuitiva del suo intuizionismo. Ma «Hilbert», concludeva Kreisel, «non era un fanatico del formalismo bruto: mentre i suoi problemi riguardavano le proprietà sintattiche dei sistemi formali, le soluzioni dovevano essere fornite attraverso un corretto ragionamento intuitivo, ed egli esplicitamente considerava non necessaria la formalizzazione di questo ragionamento»[23]. Inoltre, stando alla metodologia del programma che abbiamo appena richiamato, si può aggiungere che era la stessa individuazione degli assiomi che dovevano comporre il sistema formale a richiedere un ragionamento intuitivo preventivo rispetto al procedimento della formalizzazione nel suo complesso[24]. Ed è soltanto a partire da questo ragionamento, dunque, che sarebbe stato possibile individuare gli assiomi in grado di catturare formalmente una teoria scientifica informale o un complesso caotico di fenomeni. Si tratta di un punto che verificheremo presto in maniera dettagliata, perché è proprio in esso che scopriremo cosa è da considerare materia della rappresentazione; per ora basti anticipare che sarebbe altamente riduttivo descrivere il tentativo hilbertiano di fondare assiomaticamente le scienze enfatizzando in maniera esclusiva l'aspetto formale del suo programma.

La seconda osservazione riguarda invece il ruolo svolto dalle dimostrazioni di non-contraddittorietà nella effettiva assiomatizzazione di alcune discipline, tra cui quelle che stiamo per prendere in considerazione. È noto infatti che, almeno nella sua forma più ambiziosa, il programma finitista mostrò in poco tempo dei forti limiti concettuali. Nel suo celeberrimo articolo del 1931, *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia mathematica *und verwandter Systeme I*, Kurt Gödel pose fine alla pretesa di Hilbert dimostrando, in termini matematici rigorosi, che tutti i sistemi formali, consistenti e abbastanza potenti da includere l'aritmetica formalizzata, sono sintatticamente incompleti e che non è possibile dimostrare dall'interno la loro non-contraddittorietà[25]. Si può però facilmente notare che, anche prima di questo annuncio, la non-contraddittorietà delle assiomatizzazioni formulate per molte teorie scientifiche era tutt'altro che un problema risolto, anzi in molti casi soltanto annunciato per poi essere procrastinato. Si pensi che il risultato più interessante raggiunto dalla scuola di Hilbert, avvenne ad opera di un matematico francese, Jacques Herbrand, che nel 1931 fornì una dimostrazione finitaria della non-contraddittorietà di un frammento dell'aritmetica[26]. Sicuramente molto meno di

[23] G. KREISEL, *Hilbert's programme*, in P. BENACERRAF / H. PUTNAM (eds.), *Philosophy of mathematics: selected readings*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs (NJ) 1964, pp. 157-180; in part., p. 158.

[24] Per una sintetica introduzione al problema si veda: V. PECKHAUS, *Predeductive reasoning*, in C. CELLUCCI / P. PECERE (eds.), *Demostrative e non-demostrative reasoning in mathematica and natural science*, Workshop, University of Rome 'La Sapienza', Villa Mirafiori, Rome 16-17 June 2005, Edizioni dell'Università degli Studi di Cassino, Cassino 2006, pp. 9-25.

[25] Cfr. K. GÖDEL, *Über formal unentscheidbare Sätze der* Principia mathematica *und verwandter Systeme I*, «Monatshefte für Mathematik und Physik», 38 (1931), pp. 173-198; poi, ristampato con tr. ingl. a cura di S.C. Kleene, in GÖDEL, *Collected works*, Vol. I: *Publications 1929-1936*, a cura di S. Feferman, J.W. Dawson, Jr., S.C. Kleene, G.H. Moore, R.M. Solovay, J. van Heijenoort, Oxford University Press, New York-Oxford 1986, pp. 145-195; tr. it., *Proposizioni formalmente indecidibili dei* Principia mathematica *e di sistemi affini I*, in GÖDEL, *Opere*, Vol. 1: *1929-1936*, a cura di E. Ballo, S. Bozzi, G. Lolli, C. Mangione, Bollati Boringhieri, Torino 1999, pp. 113-138.

[26] Cfr. J. HERBRAND, *Sur la non-contradiction de l'arithmétique*, «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 166 (1931), pp. 1-8; tr. ingl., *On the consistency of arithmetic*, in J. VAN

quello che ci si attendeva. Questo, a nostro avviso, sta ad indicare che il programma fondazionale hilbertiano si costituiva certamente di due momenti tra loro co-essenziali ma che, se necessario, potevano essere perseguiti in maniera assolutamente indipendente, dando ovviamente la precedenza non solo cronologica, ma anche di importanza, al momento della trattazione assiomatica. In certi casi si ha persino l'impressione che l'ordine impartito dal metodo assiomatico ad alcune discipline venisse di per sé considerato un sintomo certo della loro definitiva sistematizzazione, e che le dimostrazioni di non-contraddittorietà dovessero soltanto realizzare un completamento, peraltro atteso, del procedimento della loro indubitabile assicurazione.

Ma se così stanno le cose, il programma fondazionale hilbertiano non deve essere visto in maniera troppo rigida. Esso sicuramente costituì l'ideale regolativo entro cui tutte le prime sistematizzazioni si mossero; ma ciascuna sistematizzazione si mosse in maniera peculiare, perché diverso era il materiale a disposizione di ognuna e diverse erano le azioni che quel materiale richiedeva. Tutte però si mossero all'insegna del metodo assiomatico che prometteva una grande flessibilità e un'ampia scala di applicazioni possibili.

2. La teoria degli insiemi

La prima trattazione assiomatica della teoria degli insiemi[27] fu condotta da Ernst Zermelo nell'articolo *Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre I* del 1908. Nonostante le revisioni a cui fu sottoposta nei decenni successivi, questa trattazione costituì la naturale conclusione di un serrato confronto iniziato da Zermelo con la più importante questione lasciata aperta dalla riflessione cantoriana, ovvero il problema della potenza del continuo numerico[28].

Quando Zermelo giunse a Göttingen nel 1897, trovò un Hilbert molto attento agli sviluppi della teoria degli insiemi, perché alle prese con il tentativo di estendere il metodo assiomatico allo studio del sistema dei numeri reali. Al pari di altri giovani matematici, egli finì col subire il fascino di Hilbert e da subito sposò le sue ricerche, dirigendo la propria attenzione verso le questioni insiemistiche che più interessavano la comunità scientifica. «Trent'anni fa, quando ero Privatdozent a Göttingen», ebbe modo di scrivere molto tempo dopo, «caddi sotto l'influenza di Hilbert, che devo maggiormente ringraziare per il mio percorso scientifico e per avermi indirizzato verso i fondamenti della matematica, e in particolare verso i problemi fondamentali della teoria *cantoriana* degli insiemi»[29].

HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 620-628.

[27] Non potendo in questo articolo tracciare una parabola storica dettagliata dell'evoluzione della teoria degli insiemi, e del ruolo fondamentale giocato da questa disciplina nei complessi sviluppi della matematica moderna, rinviamo alla seguente monografia: J. FERREIRÓS, *Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1999.

[28] Per uno sguardo unitario sull'evoluzione dell'indagine insiemistica di Zermelo si veda il seguente contributo: A. KANAMORI, *Zermelo and set theory*, «The bulletin of symbolic logic», 10 (2004), pp. 487-553.

[29] Si tratta di un passaggio molto celebre tratto da una relazione inedita, scritta per la Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaften e citata in: MOORE, *Hilbert on the infinite* cit., p. 49.

La questione del continuo numerico diveniva nel frattempo uno snodo matematico cruciale. Con la sua formulazione Hilbert iniziò nel 1900, nella relazione tenuta al Congresso di Parigi, l'elencazione dei ventitré problemi che avrebbero dovuto impegnare le menti dei matematici nel nuovo secolo[30]: dato un insieme infinito di numeri reali, esso è equivalente o all'insieme dei numeri naturali oppure all'insieme di tutti i numeri reali, cioè al continuo, così che si possa ragionevolmente affermare che esistono soltanto due insiemi di numeri, gli insiemi numerabili e il continuo numerico. La strada tracciata da Hilbert per giungere alla dimostrazione di questo importante teorema passava per un risultato intermedio parimenti importante, la dimostrazione del buon ordinamento del sistema dei numeri reali. Con essa si sarebbe rinvenuta una configurazione di questo sistema di numeri così che non solo per ogni loro coppia sarebbe stato possibile individuarne l'ordine, «quale viene prima e quale viene dopo», bensì più nel dettaglio un'immagine tale che sia del sistema nel suo complesso, sia di ogni suo sottoinsieme sarebbe stato possibile stabilire l'esistenza di un numero che precede tutti gli altri. Zermelo dimostrò il teorema del buon ordinamento, generalizzandolo ad ogni insieme ben definito, in una breve comunicazione del 1904[31]. Questo lavoro finì però col sollevare un numero considerevole di critiche, anche autorevoli, a causa dell'impiego nella dimostrazione di uno strumento matematico tanto potente quanto poco costruttivo, l'assioma della scelta, che avrebbe generato una delle più accese discussioni della storia della matematica[32].

In realtà, l'avversità incontrata dal teorema del buon ordinamento, specie tra i matematici più affermati, con la sola eccezione di Hilbert, andò ad affiancare la difficoltà sorta con l'antinomia di Russell che, come è oggi noto, venne scoperta indipendentemente da Zermelo agli inizi del XX secolo[33]. È rimasto celebre quel passaggio della lettera indirizzata a Gottlob Frege nel 1903 in cui Hilbert alluse alla scoperta di Zermelo: «La ringrazio per il secondo volume dei Suoi *Grundgesetze*, che mi interessa molto. Il Suo esempio in chiusura del libro (p. 253) ci è noto; già quattro-cinque anni fa ho trovato altre contraddizioni ancora più persuasive; esse mi hanno portato al convincimento che la logica tradizionale è insufficiente, che la teoria della formazione dei concetti ha bisogno piuttosto di una rigorizzazione e di un perfezionamento»[34]. Si tratta di un passaggio storicamente illuminante, rivelatore di

---

[30] Cfr. D. HILBERT, *Mathematische Probleme*, «Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen», 1900, pp. 253-297; poi, con aggiunte e correzioni, in HILBERT, *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes*, Springer, Berlin 1935, pp. 290-329; tr. it. parziale, *Problemi matematici*, in HILBERT, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di V.M. Abrusci, Bibliopolis, Napoli 1978, pp. 145-162; in part., pp. 154-156.

[31] Cfr. E. ZERMELO, *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe)*, «Mathematische Annalen», 59 (1904), pp. 514-516; tr. ingl., *Proof that every set can be well-ordered*, a cura di S. Bauer-Mengelberg, in J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 139-141.

[32] Per una ricostruzione della travagliata storia dell'assioma della scelta si veda: G.H. MOORE, *Zermelo's axiom of choice: its origins, development, and influence*, Springer, New York-Heidelberg-Berlin 1982.

[33] In merito alla storia della scoperta di Zermelo si veda: R. RANG / W. THOMAS, *Zermelo's discovery of the "Russell paradox"*, «Historia mathematica», 8 (1981), pp. 15-22.

[34] *Hilbert an Frege, 7. 11. 1903*, in G. FREGE, *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, a cura di G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, A. Veraart, Mainer, Amburgo 1976, pp. 79-80; tr. it., *Alle*

un momento importante nel dibattito sui fondamenti della matematica: all'antinomia di Russell, infatti, nella scuola assiomatica, non veniva attribuito un significato strettamente insiemistico, e quindi matematico, ma uno più genericamente logico, riguardante la formazione dei concetti, che solo in seconda battuta, e neanche come qualcosa di catastrofico, veniva a riguardare la teoria degli insiemi[35]. Questo basterebbe a giustificare il fatto che la scoperta non venne immediatamente resa nota alla comunità scientifica ma continuò invece a circolare informalmente tra i membri della scuola di Hilbert. Possiamo anzi dire che l'antinomia di Russell, insieme con le altre principali antinomie note, venne presa davvero sul serio nella sua intrinseca natura fondazionale dalla scuola assiomatica, quando cominciò a farsi strada nella considerazione hilbertiana l'idea di svolgere in maniera simultanea la ricerca matematica e l'indagine logica sui fondamenti, dunque soltanto a partire dal 1904.

Ora, è interessante osservare entrambe queste istanze – il buon ordinamento degli insiemi ben definiti e l'eliminazione delle antinomie – confluire in quanto preoccupazioni nell'assiomatizzazione zermeliana della teoria degli insiemi[36]. Non possiamo in questa sede fornire una descrizione matematicamente completa di questa trattazione; ci soffermeremo piuttosto sugli intenti che hanno mosso la stesura del lavoro, così come emergono chiaramente da alcuni passaggi del paragrafo introduttivo all'articolo del 1908. Questo sarà sufficiente per evidenziare cosa è stato considerato materia nel primo tentativo di assiomatizzare la teoria cantoriana.

La teoria degli insiemi viene definita da Zermelo, fin dalle prime righe dell'introduzione, come «quella branca della scienza matematica» il cui compito consiste nell'investigare in termini matematici rigorosi le nozioni fondamentali di numero, ordine e funzione al fine di intraprendere e sviluppare la «fondazione logica» dell'intera aritmetica e dell'intera analisi. In questo senso la disciplina costituiva una «componente indispensabile della scienza matematica». Tuttavia, la sua esistenza sembrava essere «minacciata» da «certe contraddizioni, o "antinomie" che potevano essere derivate dai suoi principi»[37]: tra queste spiccava innanzitutto l'antinomia di Russell che, contestando la validità di una proposizione evidente come

origini della nuova logica. Carteggio scientifico con Hilbert Husserl Peano Russell Vailati e altri, a cura di C. Mangione, Bollati Boringhieri, Torino 1983, pp. 64-65; in part., p. 65.

[35] Cfr. FERREIRÓS, *Labyrinth of thought* cit., pp. 306-311.

[36] Non è un caso dunque che nel 1908 Zermelo pubblicò oltre al suddetto lavoro, in cui propose la prima assiomatizzazione della teoria degli insiemi, un ulteriore articolo in cui fornì una nuova dimostrazione del teorema del buon ordinamento e rispose alle numerose obiezioni sollevate contro l'assioma della scelta impugnando la sua natura di principio logico generale: cfr. E. ZERMELO, *Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung*, «Mathematische Annalen», 65 (1908), pp. 261-281; tr. ingl., *A new proof of the possibility of a well-ordering*, a cura di S. Bauer-Mengelberg, in J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 183-198. È stato, anzi, più volte notato che la stessa assiomatizzazione della teoria degli insiemi muoveva più dalla urgenza di assicurare il teorema del buon ordinamento che dalla preoccupazione generata dalla comparsa delle antinomie, sebbene Zermelo si sia trovato nella condizione di dover affrontare *anche* il problema dei paradossi insiemistici. Si veda ad esempio: FERREIRÓS, *Labyrinth of thought* cit., pp. 317-324; G.H. MOORE, *The origins of Zermelo's axiomatization of set theory*, «Journal of philosophical logic», 7 (1978), pp. 307-329.

[37] Cfr. E. ZERMELO, *Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, «Mathematische Annalen», 65 (1908), pp. 261-281; tr. ingl., *Investigations in the foundations of set theory I,* a cura di S. Bauer-Mengelberg, in J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 200-215; in part., 200.

il principio di comprensione, poneva in maniera inevitabile la necessità di riformare la nozione di insieme così come era stata definita da Cantor. L'idea molto intuitiva di considerare come insieme ogni collezione di oggetti ben distinti, identificati da una certa proprietà, doveva cioè essere necessariamente ristretta perché proprio da essa era possibile generare l'antinomia della classe di tutte le classi[38].

Intraprendere una fondazione logica della scienza matematica, a partire dalle più elementari nozioni dell'insiemistica, significava dunque, secondo Zermelo, restringere e ridefinire innanzitutto la nozione di insieme. Questo però andava svolto, in linea con l'assiomatica hilbertiana, in maniera indiretta, dunque non appena attraverso la sostituzione di una definizione più complessa con una meno problematica, bensì attraverso l'individuazione di alcuni principi, o assiomi, pochi quanto al numero e il più possibile semplici, in grado di determinare il significato del termine 'insieme' in maniera chiara, univoca e indubitabile. Si sarebbe così evitato il problema delle antinomie e ad un tempo permesso di inserire il teorema del buon ordinamento in una costruzione teorica di respiro più ampio. Tuttavia, ciò che è davvero decisivo, rispetto alla nostra considerazione sulla nozione di materia, è il modo in cui questo compito complessivo sarebbe stato sviluppato, ovvero il procedimento in base al quale gli assiomi sarebbero stati individuati:

> «Date queste circostanze, a questo punto non ci è concesso che procedere nella direzione opposta: cominciare dalla teoria degli insiemi così come essa è data storicamente, per individuare i principi richiesti al fine di ottenere la fondazione di questa disciplina matematica. Nel risolvere il problema dobbiamo, da una parte, restringere sufficientemente questi principi così da escludere tutte le contraddizioni e, dall'altra, assumerli ampi a sufficienza per conservare tutto quello che in questa teoria è prezioso.
> Intendo ora mostrare in questo articolo come l'intera teoria creata da Cantor e Dedekind possa essere ridotta a poche definizioni e a sette principi, o assiomi, che sembrano essere tra loro indipendenti»[39].

Risulta particolarmente evidente ciò che viene considerato materia da Zermelo durante il procedimento di elaborazione assiomatica della teoria degli insiemi: «[la] teoria degli insiemi così come è storicamente data», la teoria ingenua di Cantor e

[38] In base al principio di comprensione si può affermare che ad ogni proprietà corrisponde un classe, ovvero la classe degli oggetti che godono di quella proprietà. Nulla preclude però a questa classe di essere oggetto di ulteriori predicazioni. Si consideri ad esempio la proprietà 'non essere elemento di se stesso'. Questa proprietà definirà la classe W di tutte, e solo, quelle classi che non contengono se stesse come elemento. Possiamo quindi procedere al passo successivo e chiederci se W è elemento di se stessa oppure no. È questo il punto in cui si genera l'antinomia. Infatti, se W è elemento di se stessa, in quanto classe di tutte le classi che non sono elemento di se stesse, non sarà elemento di se stessa; mentre se W non è elemento di se stessa, sempre in quanto classe di tutte le classi che non sono elemento di se stesse, sarà elemento di se stessa. Tale antinomia si può rappresentare in simboli, $W \in W \leftrightarrow W \notin W$, per indicare in maniera ancora più nitida il suo aspetto auto-contraddittorio: la classe W è elemento di se stessa se, e solo se non è elemento di se stessa. Anche per un confronto con la soluzione di Russell al problema dei paradossi – soluzione per lungo tempo considerata alternativa rispetto a quella di Zermelo – si veda: B. RUSSELL, *Mathematical logic as based on the theory of types*, «American journal of mathematics», 30 (1908), pp. 222-262; poi in J. VAN HEIJENOORT (ed.), *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, Harvard University Press, Cambridge (MA) 1967, pp. 150-182.

[39] ZERMELO, *Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre I* cit.; tr. ingl., p. 200.

Dedekind, in quanto cumulo di fatti a cui era necessario imprimere una forma e dare un ordine. A partire da questa teoria si sarebbe individuato quel sistema di principi semplicissimi, gli assiomi, attraverso i quali proseguire nella fondazione logica della disciplina. Tale sistema, scelto mediante un procedimento intuitivo di riflessione razionale, doveva essere perfettamente adeguato alla materia da trattare: doveva cioè presentarsi ampio a sufficienza, così da includere e conservare i più importanti risultati raggiunti dalla teoria ingenua, e allo stesso tempo ristretto a sufficienza, al fine di escludere ed evitare tutti i paradossi fino a quel momento noti. Proprio in questo senso, il sistema di assiomi si presentava assolutamente determinato dalla materia da rappresentare, dai suoi successi come anche dalle sue urgenze, essendo necessariamente costruito per soddisfare queste due condizioni. Si noti per inciso che si tratta di una declinazione di quell'atteggiamento conservativo nei confronti della scienza che avevamo già rilevato nella descrizione del paradigma hilbertiano.

Anche se non possiamo in questa sede descrivere il significato matematico di ciascuno dei sette assiomi che compongono il "sistema formale", e conseguentemente il modo in cui essi permettono di ricostruire effettivamente la teoria ingenua [40], è tuttavia opportuno precisare che questo sistema determina il significato del termine 'insieme' in maniera estremamente precisa, innanzitutto stabilendo che cosa è lecitamente ammissibile come insieme, e fornendo così una restrizione alla definizione cantoriana, e successivamente postulando quali insiemi è necessario assumere come esistenti e quali procedure è possibile utilizzare per generarne di nuovi, così da ricostruire fin dal principio, e in maniera indubbia, l'intera teoria di Cantor e Dedekind.

A ragione, secondo il nostro punto di vista, questo primo tentativo di trattare assiomaticamente la teoria degli insiemi è stato definito pragmatico, non soltanto perché – come si è detto – appare molto sfumato il criterio di scelta del sistema di assiomi, su cui in linea di principio e ultimamente incomberebbe una certa arbitrarietà[41]: sebbene infatti la nozione di insieme sia definita in maniera estremamente precisa, locuzioni come 'ampio a sufficienza' e 'ristretto a sufficienza' sembrerebbero mantenere ancora una forte indeterminatezza del significato, e quindi legittimare ulteriori pratiche per l'individuazione di assiomi alternativi, in teoria ugualmente validi[42]; ma anche per il fatto che lo stesso problema della intrinseca

[40] Nel sistema di assiomi si contemplano un principio di identità come l'assioma di estensione, che stabilisce l'uguaglianza di insiemi che possiedono gli stessi elementi; quattro principi di costruzione – l'assioma dell'insieme elementare, l'assioma di separazione, l'assioma dell'insieme potenza e l'assioma dell'unione – che stabiliscono le regole per generare nuovi insiemi da insiemi preventivamente dati; e infine due principi esistenziali: uno, l'assioma della scelta, che stabilisce l'esistenza di una funzione di selezione, utile alla dimostrazione del teorema del buon ordinamento; l'altro, l'assioma di infinità, che afferma l'esistenza nel dominio di almeno un insieme infinito. Cfr. ZERMELO, *Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre I* cit.; tr. ingl., pp. 201-205.

[41] Per motivi diversi molti hanno definito «pragmatica» l'assiomatizzazione di Zermelo; tuttavia per questo significato specifico, relativo alla scelta del sistema di assiomi, si veda: KANAMORI, *Zermelo and set theory* cit., p. 503.

[42] Nonostante in un sistema ipotetico-deduttivo così fatto gli assiomi svolgono il compito di definire i concetti, cioè di determinare il loro significato all'interno della teoria, essi non nascondono alcuna pretesa di esaustività rispetto agli oggetti del campo che intendono ordinare. Per questo motivo è sempre possibile, almeno in linea di principio, come del resto dimostrano le molte assiomatizzazioni condotte rispetto ad una stessa disciplina, costruire un ulteriore sistema più semplice o esaustivo rispetto a quelli di volta in volta individuati. Per la presenza di queste istanze nell'epistemologia

tenuta del sistema di assiomi, ovvero la questione della sua assoluta non-contraddittorietà, non venga direttamente affrontato, ma venga piuttosto proiettato sull'eliminazione di circostanza, dunque in linea di principio temporanea, soltanto di quelle antinomie che avevano generato seri problemi metodologici: «[n]on sono stato ancora capace», scrive non a caso Zermelo, «di dimostrare rigorosamente che i miei assiomi sono non-contraddittori, benché questo sia certamente essenziale; ho al contrario dovuto limitare me stesso a mostrare caso per caso che le antinomie scoperte fino ad ora svaniscono una volta per tutte se i principi qui proposti sono adottati come fondamenti»[43]. Si pensi che soltanto dell'antinomia di Russell viene fornita nell'articolo una diretta confutazione, attraverso la dimostrazione di un teorema che stabilisce l'impossibilità di riunire tutti gli insiemi costruibili in un unico "super-insieme", onnicomprensivo ma contraddittorio; tuttavia anche questo, come è ovvio, è molto lontano dal poter essere considerato una dimostrazione assoluta di non-contraddittorietà del sistema di assiomi individuato[44].

Eppure, nonostante quelle che potrebbero sembrare delle limitazioni rispetto all'originale impostazione hilbertiana, l'assiomatizzazione di Zermelo della teoria degli insiemi venne definita dallo stesso Hilbert, per la conformità allo spirito che aveva animato l'evolversi della disciplina, «il più brillante esempio di una perfetta elaborazione del metodo assiomatico»[45].

3. La meccanica quantistica

Il cammino che condusse alla prima assiomatizzazione della meccanica quantistica fu sicuramente più lungo e meno lineare di quello capitato alla teoria degli insiemi, nonostante la teoria dei quanti avesse dalla sua il fatto di avere Hilbert stesso come diretto protagonista[46]. In questo cammino, infatti, come ha scritto Jan Lacki, sarebbe opportuno distinguere almeno due stadi successivi e concettualmente separati: un primo animato dal tentativo di unificare, individuando una base formale comune, le differenti presentazioni fornite della teoria quantistica ai suoi albori, tra il 1925 e il 1926; e un secondo stadio, iniziato nel 1927, percorso dall'urgenza di fornire una giustificazione fisica, un'interpretazione, all'apparato formale individuato[47]. Anche in questo caso non possiamo entrare nei molti dettagli matematici indispensabili per fornire un'immagine approfondita degli sviluppi di questi due momenti; basterà mettere a fuoco la circostanza in cui avvenne l'intreccio tra i due stadi, per ottenere

hilbertiana si veda ad esempio: J.C. WEBB, *Mechanism, mentalism, and metamathematics. An essay on finitism*, Reidel, Dordrecht-Boston-London 1980, cap. III, § 1; in part., pp. 78-82.

[43] ZERMELO, *Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre I* cit.; tr. ingl., pp. 200-201.

[44] Per uno sguardo sulla strategia zermeliana si veda: ZERMELO, *Untersuchngen über die Grundlagen der Mengenlehre I* cit.; tr. ingl., pp. 202-203.

[45] Cfr. MOORE, *Hilbert on the infinite* cit., p. 57.

[46] Non potendo in questa momento fornire una panoramica storica completa del contesto storico in cui la prima assiomatizzazione della meccanica quantistica si afferma, rimandiamo a: M. JAMMER, *The conceptual development of quantum mechanics*, McGraw-Hill, New York 1966; in part., capp. 5-9.

[47] Cfr. J. LACKI, *The early axiomatization of quantum mechanics: Jordan, von Neumann and the continuation of Hilbert's program*, «Archive for History of Exact Sciences», 54 (2000), pp. 279-318; in part., pp. 281-282.

un'immagine quanto più possibile chiara di ciò che deve essere considerato materia nel primo tentativo di assiomatizzare la meccanica quantistica.

Benché si trattasse di un ambito di ricerca osservato con grande attenzione fin dai primi anni Venti, l'interesse di Hilbert verso la meccanica quantistica si risvegliò in maniera decisiva nel 1926. Risultava sorprendente per lui l'armonia riscontrabile tra la teoria delle equazioni integrali lineari, a cui aveva lavorato assiduamente nel primo decennio del secolo, e i metodi matematici necessari per sviluppare il formalismo della teoria dei quanti tanto che, una volta informato degli ultimi risultati da un collaboratore, decise di studiare questi recenti sviluppi tenendovi un corso di lezioni dal titolo *Mathematische Methoden der Quantentheorie*[48]. La disciplina che trovò davanti a sé, però, non era nient'affatto organica, divisa non soltanto negli approcci e nelle diverse formulazioni, ma più gravemente spaccata sull'immagine fisica e sull'euristica da proporre. Un ambito di ricerca, cioè, bisognoso di una unificazione formale e insieme concettuale, ben al di là delle numerose prove matematiche di equivalenza che andavano diffondendosi tra i formalismi esistenti.

Quando infatti Hilbert pubblicò nel 1927, insieme con Lothar Nordheim e John von Neumann, il frutto di questa riflessione accademica, l'articolo *Über die Grundlagen der Quantenmechanik*, il problema dell'assimilazione dei due modelli quantistici più noti, la meccanica delle matrici di Werner Heisenberg[49] e la meccanica delle onde di Erwin Schrödinger[50], aveva già trovato soluzione ad un livello matematico accettabile, anche se non del tutto rigoroso. Si erano appena diffusi ad esempio tre importanti contributi che andavano in questo senso: la dimostrazione di equivalenza fornita da Schrödinger[51], la teoria delle trasformazioni di Paul Dirac[52] e l'approccio semi-assiomatico di Pascual Jordan[53]; e ciononostante, come viene esplicitato nell'articolo, restava più che mai urgente il bisogno di presentare la teoria quantistica in una versione generalizzata. Restava cioè aperto il problema di individuare un unico formalismo in cui scrivere i principi fondamentali della disciplina e in cui render intuitivamente chiaro il loro significato empirico[54]. Per

---

[48] Cfr. REID, *Hilbert* cit., pp. 180-183.

[49] Cfr. M. BORN / W. HEISENBERG / P. JORDAN, *Zur Quantenmechanik II*, «Zeitschrift für Physik», 35 (1926), pp. 557-615; tr. it., *Sulla meccanica dei quanti. II*, in W. HEISENBERG, *Lo sfondo filosofico della fisica moderna*, a cura di G. Gembillo e E.A. Giannetto, Sellerio, Palermo 1998, pp. 140-206.

[50] I lavori di Schrödinger da menzionare sarebbero quattro. Essi appaiono con lo stesso titolo e nella stessa rivista nel 1926: E. SCHRÖDINGER, *Quantisierung als Eigenwertproblem*, «Annalen der Physik», I: *Erste Mitteilung*, 79 (1926), pp. 361-376; II: *Zweite Mitteilung*, 79 (1926), pp. 489-527; II: *Dritte Mitteilung*, 80 (1926), pp. 437-490; IV: *Vierte Mitteilung*, 81 (1926), pp. 109-139. Per le traduzioni italiane, con il titolo *Quantizzazione come problemi agli autovalori*, si veda: S. BOFFI (a cura di), *La meccanica delle onde*, Università di Pavia, Pavia 1991, pp. 25-97.

[51] Cfr. E. SCHRÖDINGER, *Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen*, «Annalen der Physik», 79 (1926), pp. 734-756; tr. ingl., *On the relationship of the Heisenberg-Born-Jordan quantum mechanics to mine*, in G. LUDWIG (ed.), *Wave mechanics*, Pergamon, Oxford 1968, pp. 127-150.

[52] Cfr. P.A.M. DIRAC, *On the theory of quantum mechanics*, «Proceedings of the Royal Society», A 112 (1926), pp. 661-672.

[53] Cfr. P. JORDAN, *Über eine neue Begründung der Quantenmechanik*, «Zeitschrift für Physik», 40 (1926), pp. 809-838.

[54] D. HILBERT / L. NORDHEIM / J. VON NEUMANN, *Über die Grundlagen der Quantenmechanik*, «Mathematische Annalen», 98 (1927), pp. 1-30; poi in J. VON NEUMANN, *Collected works*, a cura di A.H. Taub, Vol. I: *Logic, theory of sets and quantum mechanics*, Pergamon, Oxford 1961, pp. 104-133; in part., p. 104.

questo sarebbe stato sufficiente, secondo Hilbert, fornire la meccanica quantistica di una trattazione assiomatica adeguata.

In realtà divenne subito chiaro che questo compito era tutt'altro che semplice e che sarebbe stato difficile spingersi al di là di una corretta posizione del problema a causa di una teoria quantistica che, perché non sviluppata a sufficienza, impediva l'applicazione del metodo assiomatico in maniera analoga rispetto al lavoro svolto nel contesto della geometria e della teoria degli insiemi. Hilbert incontrava, quindi, un ambito di ricerca ostile a quella trattazione assiomatica che fin dal 1900 aveva pensato di estendere anche alle discipline fisiche, per natura più propense ad essere sviluppate con metodi matematici astratti. Questa trattazione, secondo quanto esplicitato al Congresso di Parigi, sarebbe dovuta avvenire per gradi: formulando, dapprima, un piccolo numero di assiomi in grado di «abbracciare» la più ampia classe di fenomeni appartenenti al campo conoscitivo da indagare e implementando, in seguito, progressivamente il numero degli assiomi individuati fino ad ottenere le teorie scientifiche particolari che più interessavano[55]. Questo modo di procedere, però, come è particolarmente evidente nel caso dell'assiomatizzazione zermeliana della teoria degli insiemi, presupponeva che fosse già disponibile sottomano una materia, certo ancora disordinata, ma ben identificata e sufficientemente predisposta ad esser sottoposta ad una trattazione classica; cosa che invece, secondo Hilbert, non poteva assolutamente darsi nel caso della teoria quantistica disponibile.

Il discorso hilbertiano diventa particolarmente chiaro in riferimento all'individuazione delle probabilità associate alla distribuzione dei valori delle quantità fisiche:

> «La via che porta a questa teoria è la seguente: si formulano certi requisiti fisici relativi a queste probabilità, requisiti che sono plausibili sulla base della nostre esperienze e delle nostre conoscenze, e che implicano certe relazioni esistenti tra queste probabilità. Si cerca successivamente una macchina analitica in cui appaiano le quantità che soddisfano esattamente queste relazioni. Questa macchina, e le quantità che appaiono in essa, ricevono un'interpretazione fisica sulla base dei requisiti fisici. L'obiettivo è formulare i requisiti fisici in un modo sufficientemente completo da determinare la macchina analitica in maniera non ambigua. Questo è dunque il metodo dell'assiomatica, come è ad esempio stato perseguito nella geometria. […] In fisica in ogni modo, la procedura assiomatica sopra richiamata non è perseguita in maniera puntuale; qui la procedura da seguire come regola per stabilire una nuova teoria è la seguente.
> Di solito si congettura la macchina analitica prima che si sia individuato un sistema di assiomi completo; e successivamente si tenta di stabilire le relazioni fisiche fondamentali soltanto attraverso l'interpretazione del formalismo. È difficile comprendere questa teoria se le due cose, il formalismo e la sua interpretazione fisica, non vengano separate in maniera accurata. Questa separazione deve qui essere perseguita nella maniera più chiara possibile nonostante, considerando l'attuale stato della teoria, non vogliamo ottenere un'assiomatizzazione completa. In ogni modo, ciò che è determinato in maniera univoca è la macchina analitica che – in quanto entità puramente

[55] HILBERT, *Mathematische Probleme* cit.; tr. it., p. 159.

matematica – non può essere alterata. Ciò che può essere modificato – e probabilmente sarà modificato in futuro – è l'interpretazione fisica, che contiene una certa libertà e arbitrarietà»[56].

Quello che è descritto in questo passaggio non è altro che lo scarto esistente tra una modalità classica, e per certi versi idealizzata, di affrontare il problema dell'assiomatizzazione di alcune discipline scientifiche, così come era avvenuto in geometria e in maniera speculare nella teoria degli insiemi, e una modalità assolutamente nuova, imposta dallo stato in cui versava la meccanica quantistica, che richiedeva al contrario l'impiego del metodo assiomatico con un livello elevato di flessibilità. Non a caso Hilbert, Nordheim e von Neumann sentirono il dovere di aggiungere che l'assiomatizzazione da loro proposta non avrebbe potuto in alcun modo essere considerata completa, perché lo stesso modo di procedere necessitava una radicale inversione al fine di risultare adeguato allo stadio raggiunto dalla teoria dei quanti. Se in genere l'individuazione del formalismo avveniva tramite un ragionamento intuitivo svolto a partire da un complesso di conoscenze informalmente note, che in un secondo momento finivano per guidare la stessa interpretazione del formalismo nella sua interezza, era necessario ora invertire il solito modo di procedere: sviluppare prima il formalismo in maniera indipendente rispetto ad ogni possibile ragionamento intuitivo informale – ad esempio ricercando la strumentazione matematica adeguata per dotare di un "unico linguaggio" i differenti approcci utilizzati nello studio dei fenomeni quantistici – e solo successivamente provare a dotare questo formalismo di un'interpretazione in accordo con i dati delle misurazioni[57]. È chiaro che in questa prospettiva le pietre con cui costruire l'edificio di una teoria solidamente strutturata, ovvero la materia della rappresentazione, non erano altro che le diverse formulazioni quantistiche o, meglio, la teoria delle trasformazioni in quanto sintesi delle diverse formulazioni della meccanica quantistica fornite fino a quel momento.

Tuttavia, nonostante questa consapevolezza, Hilbert non si spinse molto al di là di una corretta posizione del problema. Egli non riuscì a superare i limiti matematici e concettuali nascosti nella teoria delle trasformazioni di Dirac e nell'equivalente impostazione di Jordan. Fu al contrario il suo più giovane collaboratore, John von Neumann, ad introdurre una decisiva innovazione sviluppando, a partire dal 1927, un formalismo più rigoroso basato sulla struttura matematica dello spazio astratto di Hilbert[58]. «Questo modo di procedere», scriverà von Neumann nel suo fondamentale

[56] HILBERT / NORDHEIM / VON NEUMANN, *Über die Grundlagen der Quantenmechanik* cit., pp. 105-106.

[57] Per un approfondimento di questo passaggio si veda, oltre al già citato LACKI, *The early axiomatization of quantum mechanics* cit., pp. 295-300, anche M. RÉDEI / M. STÖLTZNER, *Soft axiomatisation: John von Neumann on method and von Neumann's method in the physical sciences*, in E. CARSON / R. HUBER (eds.), *Intuition and the axiomatic method*, Springer, Dordrecht 2006, pp. 235-249; in part., pp. 237-240.

[58] La considerazione di von Neumann partiva dalla constatazione che l'unificazione permessa dalla teoria delle trasformazioni di Dirac e Jordan, così come la riflessione svolta insieme con Hilbert e Nordheim, dipendeva dalle proprietà della δ-funzione di Dirac, la quale finiva col generare una situazione matematica strana. Attraverso una trasposizione di un operatore differenziale in un operatore integrale, infatti, questa funzione permetteva di stabilire una dubbia corrispondenza tra uno spazio Z di indici discreti e uno spazio Ω di variabili continue. L'innovazione di von Neumann consistette nell'intuire che poteva essere stabilito un nuovo formalismo in virtù del fatto che uno spazio sequenza F_Z su Z e uno spazio funzione P_Ω su Ω, ovvero il sostrato analitico della meccanica

compendio del 1932, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, «orientato fortemente in senso geometrico, possiede notevoli vantaggi formali»[59]. Non a caso il testo contribuì non solo a fornire maggiore rigore alla teoria delle trasformazioni, l'approccio matematico considerato fino a quel momento più soddisfacente, ma incise allo stesso tempo in maniera significativa sulla rapida affermazione dell'interpretazione statistica della teoria dei quanti. Anzi, risulta particolarmente evidente la sostanziale dipendenza di questa interpretazione dal formalismo adottato, in linea con quanto affermato nell'articolo del 1927, in quanto è categoricamente dimostrata l'incompatibilità tra l'apparato formale adottato e l'ipotesi del determinismo quantistico: viene fornita una sorta di dimostrazione di non-contraddittorietà *post litteram*, al fine di mostrare l'inopportunità dell'introduzione dei cosiddetti parametri nascosti, che costituivano il punto essenziale su cui si reggeva l'interpretazione deterministica[60]. Il lavoro di von Neumann viene ancora oggi ammirato dai fisici per aver disciplinato un ambito controverso della scienza naturale.

È stato giustamente rilevato come la trattazione fornita da von Neumann costituisca il naturale compimento della strada inaugurata da Hilbert nello studio della meccanica quantistica. Sembra invece che divergano soltanto le opinioni tra chi ritiene che questo compimento avvenga attraverso il raggiungimento di una assiomatizzazione piena, oltre le stesse attese hilbertiane, e chi mantiene al contrario l'idea che von Neumann continui a percorrere le vie di una assiomatizzazione meno rigida, in linea con quanto era emerso nell'articolo del 1927[61]. Senza entrare in queste difficili vicende interpretative, che richiederebbero un'analisi lunga e puntuale della trattazione neumanniana, è sufficiente dire che, comunque stiano le cose, il caso della meccanica quantistica sembrerebbe enfatizzare la straordinaria flessibilità del metodo assiomatico nel rivolgersi con modalità dissimili verso discipline dotate di un grado molto diverso di maturazione teorica, sia perché i loro concetti non sono stati pienamente chiarificati sia perché le evidenze empiriche raccolte non sono ancora sufficienti per generare assiomatizzazioni più compiute[62]. Questo sta ad indicare, a nostro avviso, che il metodo assiomatico consente applicazioni perseguibili in maniera estremamente pragmatica, assolutamente adeguate allo stadio di maturazione

---

delle matrici e il sostrato analitico della meccanica delle onde, erano isomorfi e possedevano una struttura comune definita come *spazio astratto di Hilbert*. Per ulteriori dettagli di natura tecnica si veda ad esempio: JAMMER, *The conceptual development of quantum mechanics* cit., pp. 306-322.

[59] J. VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer, Berlin-Heidelberg 1932; tr. it., *I fondamenti matematici della meccanica quantistica*, a cura di G. Boniolo, Il Poligrafo, Padova 1998, p. 27.

[60] Si vedano in particolare i due seguenti luoghi: VON NEUMANN, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* cit.; tr. it., cap. III, §§ 1-2; cap. IV, §§ 1-2. Per uno sguardo critico sull'argomentazione neumanniana si veda: R. GIUNTINI / F. LAUDISA, *The impossible causality: the no hidden variables theorem of John von Neumann*, in M. RÉDEI / M. STÖLTZNER, *John von Neumann and the foundation of quantum physics*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London 2001, pp. 173-188.

[61] Si confronti ad esempio LACKI, *The early axiomatization of quantum mechanics* cit., pp. 300-313; in part., p. 313, sostenitore della prima opinione, con RÉDEI / STÖLTZNER, *Soft axiomatisation: John von Neumann on method and von Neumann's method in the physical sciences* cit., pp. 240-243; in part., p. 241. Questi ultimi sono invece fermamente convinti della validità della seconda opinione.

[62] Sebbene non sia stato generalizzato rispetto alla natura stessa del metodo assiomatico, questo punto è stato tuttavia enfatizzato rispetto al caso specifico della meccanica quantistica. Si veda ad esempio: STÖLTZNER M., *Opportunistic axiomatics – von Neumann on the methodology of mathematical physics*, in M. RÉDEI / M. STÖLTZNER (eds.), *John von Neumann and the foundations of quantum physics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-New York 2001, pp. 35-62.

raggiunto dal materiale da trattare. Un fatto ancora più evidente nel caso della scienza economica.

4. La scienza economica

La possibilità di trattare la scienza economica attraverso strumenti matematici rigorosi si palesò in maniera indiscutibile soltanto nel 1944, quando venne pubblicato il libro *Theory of games and economic behaviour* di John von Neumann e Oskar Morgenstern. L'interesse della comunità scientifica fu tale che un nuovo e ampio canale di comunicazione si aprì tra il mondo della matematica e quello delle scienze sociali. L'applicazione della teoria dei giochi allo studio dei fenomeni economici costituì, infatti, la più radicale dimostrazione dell'assoluta fecondità del metodo assiomatico per l'economia moderna[63].

Si trattò, però, di un tentativo che proveniva da lontano, in quanto affondava le proprie radici nella Mitteleuropa di inizio secolo. La scuola di Hilbert, alla quale von Neumann, come abbiamo visto, aveva preso parte, iniziò ad affrontare il problema dei giochi con metodi combinatori e insiemistici già a partire dall'opera di Zermelo, che nel 1912 dimostrò la possibilità di descrivere matematicamente la strategia di un giocatore di scacchi[64]. Attraverso l'applicazione del teorema del punto fisso di Brouwer, fu lo stesso von Neumann a fornire nel 1928 una prima generalizzazione di questo risultato, dimostrando per tutti i giochi con due partecipanti, a somma zero e a informazione completa, l'esistenza di una strategia che permettesse ai giocatori di minimizzare le loro perdite massime. Si tratta di quello che è noto come teorema del minimax[65]. Nonostante si intravedessero nell'articolo le possibilità di una ulteriore estensione di queste conclusioni ai problemi dell'economia classica, solo grazie all'incontro a Princeton nel 1938 con l'economista Morgenstern, un altro emigrante dal vecchio continente, cominciò a farsi strada nella considerazione di von Neumann l'idea di poter descrivere in termini di gioco tutti i fenomeni di interazione socio-economica, a dispetto degli inutili tentativi precedentemente condotti nel trattare la scienza economica con strumenti matematici rigorosi[66].

[63] Riguardo al contributo di von Neumann e Morgenstern all'evoluzione della scienza economica moderna si veda: M. DORE / S. CHAKRAVARTY / R. GOODWIN (eds.), *John von Neumann and modern economics*, Clarendon, Oxford 1989.

[64] Cfr. E. ZERMELO, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels*, in *Proceedings of the fifth international congress of mathematicians*, Cambridge, 22-28 August 1912, Vol. II, Cambridge University Press, Cambridge 1913, pp. 501-504. Per uno sguardo sul lavoro di Zermelo, e per una sua traduzione inglese, si veda: U. SCHWALBE / P. WALKER, *Zermelo and the early history of game theory*, «Games and economic behaviour», 34 (2001), pp. 123-137.

[65] Cfr. J. VON NEUMANN, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, «Mathematische Annalen», 100 (1928), pp. 295-320; poi in VON NEUMANN, *Collected works*, a cura di A.H. Taub, Vol. VI: *Theory of games, astrophysics, hydrodynamics and meteorology*, Pergamon, Oxford 1961, pp. 1-26; tr. ingl., *On the theory of games of strategy*, in A. TUCKER / R. DUCAN LUCE (eds.), *Contributions to the theory of games*, Vol. 4, Princeton University Press, Princeton 1959, pp. 13-42.

[66] Per una descrizione storicamente interessante del lungo cammino che portò von Neumann e Morgenstern a lavorare congiuntamente alla stesura di un libro sulla teoria dei giochi e sul comportamento economico si veda: R.J. LEONARD, *From parlor game to social science: von Neumann, Morgenstern and the creation of game theory 1928-1944*, «Journal of Economic Literature», XXXIII (1995), 730-761. Per una ricostruzione critica, invece, dell'incrocio tra la via formalista in matematica e la via viennese nel fronteggiare matematicamente i problemi dell'economia

Eppure divenne subito evidente, come dimostra la prima delle sezioni del libro, che ancora una volta l'applicazione del metodo matematico si presentava tutt'altro che semplice. Innanzitutto, secondo von Neumann e Morgenstern, la scienza economica manifestava carenze concettuali notevoli, inequivocabilmente dimostrate dall'assenza di un teoria generale[67]. Si registrava di conseguenza l'impiego di strumenti matematici inopportuni perché gli stessi problemi economici da studiare non erano stati individuati in maniera chiara e non avevano ricevuto una precisa formulazione: essi erano semplicemente trasposti in termini simbolici senza ricevere un'adeguata analisi matematica. A questo poteva inoltre aggiungersi l'assenza di uno sfondo empirico soddisfacente, in grado di fornire indicazioni euristiche significative per la costruzione di una teoria, caratteristico di una disciplina scientifica che attraversava ancora uno stadio assolutamente primitivo[68]. A distanza di molti anni von Neumann lamentava ancora, nonostante il lavoro condotto con Morgenstern, la carenza concettuale della scienza economica: «[q]uello che sembra eccessivamente difficile nella scienza economica è la definizione delle categorie. […] Ora, tutte le scienze hanno cominciato in questo modo, e la scienza economica, in quanto scienza, ha solo poche centinaia di anni di età. Le scienze naturali avevano più di mille anni quando i primi importanti progressi furono compiuti»[69]. Al suo interno vi erano certamente alcune aree più sviluppate, che potevano essere studiate utilizzando metodi matematici sicuri, ma ve ne erano anche altre che richiedevano un intenso lavoro descrittivo preliminare: alcuni concetti fondamentali, come quello di utilità economica o di condotta razionale, su cui pure si reggeva la disciplina, si presentavano ad esempio sprovvisti di una definizione accurata e impossibilitati a ricevere un trattamento matematico rigoroso[70].

Pur assumendo tutta la precarietà di questa situazione, von Neumann e Morgenstern ritennero la teoria dei giochi lo strumento più adeguato per iniziare un lavoro di chiarificazione concettuale, per sottoporre la disciplina ad un trattamento matematico accurato e per sviluppare una vera e propria teoria del comportamento economico. In questo modo tentarono una trattazione assiomatica della scienza economica che, per forza di cose, doveva essere di natura pragmatica. Da un punto di vista strettamente tecnico si doveva cioè individuare innanzitutto una sistematizzazione assiomatica della teoria dei giochi, che definisse le nozioni fondamentali di gioco e di strategia, e che fosse estendibile a giochi di natura diversa: ad esempio, a giochi di 2-persone, 3-persone, … n-persone con somma zero, come anche a giochi con somma diversa da zero. Avendo von Neumann iniziato questo lavoro qualche decade addietro, esso si presentava già ad uno stadio avanzato. Successivamente, si doveva intraprendere uno studio assiomatico accurato dei concetti di utilità economica e di condotta razionale, che mostrasse l'applicabilità

teorica si veda: L. PUNZO, *The school of mathematical formalism and the Viennese circle of mathematical economists*, «Journal of the history of economic thought», 13 (1991), pp. 1-18.

[67] Si confronti a riguardo: J. VON NEUMANN / O. MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* (1944), Princeton University Press, Princeton 1972, p. 2.

[68] Cfr. VON NEUMANN / MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* cit., pp. 2-6.

[69] J. VON NEUMANN, *The impact of recent developments in science on the economy and on economics* (1955), Speech at the National Planning Association, Washington, D.C. (USA), Dec. 12 1955; poi parzialmente in VON NEUMANN, *Collected works*, a cura di A.H. Taub, Vol. VI: *Theory of games, astrophysics, hydrodynamics and meteorology*, Pergamon, Oxford 1961, pp. 100-101; in part., p. 101.

[70] Cfr. VON NEUMANN / MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* cit., pp. 8-9.

della teoria assiomatica dei giochi all'economia e permettesse un suo effettivo trattamento con metodi matematici noti. Questa procedura venne effettivamente perseguita e venne impiegata con successo per descrivere alcune situazioni socio-economiche complesse[71].

Senza entrare in ulteriori dettagli di natura tecnica, che ancora una volta ci porterebbero lontano da quello che più ci interessa, è opportuno richiamare un passaggio del libro che bene documenta, seppure in termini generali, il senso della procedura adottata da von Neumann e da Morgenstern, e che ci permette di fare un passo ulteriore:

> «Il campo coperto in questo libro è molto limitato, e in questo senso lo affrontiamo con modestia. […] [C]iò che è importante è lo sviluppo graduale di una teoria, basata su attente analisi dell'interpretazione ordinaria e usuale dei fatti economici. Questo stadio preliminare è necessariamente *euristico*: una fase di transizione da considerazioni non matematiche di plausibilità alla procedura formale della matematica. La teoria infine ottenuta deve essere matematicamente rigorosa e concettualmente generale. Le sue prime applicazioni avvengono necessariamente a problemi elementari, dove il risultato non è mai stato messo in dubbio e nessuna teoria è effettivamente richiesta. In questo primo stadio l'applicazione serve a corroborare la teoria. Lo stadio successivo si sviluppa quando la teoria è applicata a situazioni un po' più complesse in cui essa fino ad un certo punto può già essere portata oltre l'ovvio e il familiare. Qui la teoria e l'applicazione si corroborano vicendevolmente. Al di là di questo si estende il campo del successo autentico: l'effettiva predizione attraverso la teoria. È ben noto come tutte le scienze matematiche hanno attraversato queste fasi successive di evoluzione»[72].

È sicuramente interessante il fatto che questo modo di procedere venga considerato comune a tutte le scienze matematiche; tuttavia dovrebbe essere chiaro come essa possa rispecchiare la procedura adottata nel caso specifico della scienza economica. Il primo momento è effettivamente modesto: attraverso la teoria assiomatica dei giochi si formula una teoria matematica in grado di descrivere alcuni fenomeni economici elementari. Qui per forza di cose si deve procedere in maniera pragmatica perché la teoria deve essere funzionale al materiale da trattare. Si procede cioè trasponendo in termini formali alcune considerazioni non matematiche di natura intuitiva. L'obiettivo da raggiungere è, naturalmente, quello di formulare una teoria matematicamente rigorosa e concettualmente generale che permetta ulteriori applicazioni. Le applicazioni iniziali devono, tuttavia, servire per corroborare il nostro processo di costruzione, così da fornirci serie indicazioni sulla correttezza della teoria. Una volta ottenuti questi primi risultati, la teoria può essere ulteriormente estesa e ulteriormente applicata a fenomeni di natura più complessa: «La procedura efficace consiste nell'ottenere innanzitutto la massima precisione e il massimo dominio in un campo limitato, successivamente procedere verso un altro,

[71] Per una sintetica descrizione tecnica dei contributi neumanniani alla teoria dei giochi si veda: H.W. KUHN / A.W. TUCKER, *John von Neumann's work in the theory of games and mathematical economics*, «Bulletin of the American Mathematical Society», 64 (1958), pp. 100-122.

[72] VON NEUMANN / MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* cit., pp. 7-8.

verso un campo un po' più ampio, e così via»[73]. Da questo momento l'estensione della teoria genera la possibilità di ulteriori applicazioni che continuerebbero ad affermare la sua validità. Il fine ultimo di questo processo estensivo è la costruzione di una teoria matematica tendenzialmente in grado di descrivere ogni fenomeno economico; è chiaro però che von Neumann e Morgenstern furono ben lontani dal raggiungere questo stadio.

In ogni modo, il metodo adottato per svolgere questo procedimento pragmatico è chiaramente il metodo assiomatico, l'unico in grado di garantire l'andamento euristico della teoria nel descrivere i fenomeni economici informalmente noti. Non a caso, durante la definizione del concetto generale di gioco, che è poi la nozione fondamentale su cui tutta la costruzione teorica si regge, von Neumann e Morgenstern scrivono: «[q]uesta definizione dovrebbe in primo luogo essere vista nello spirito del moderno metodo assiomatico»[74]. In virtù della flessibilità che esso è capace di garantire, adeguandosi agli oggetti di cui deve trattare, questo metodo risulta infatti pragmatico per definizione:

> «La scelta degli assiomi non è un compito del tutto oggettivo. Essa è di solito richiesta per raggiungere un qualche fine determinato – qualche teorema determinato, o un numero di teoremi determinati, devono essere derivabili dagli assiomi – e in questo senso la questione è definita e oggettiva. Tuttavia oltre a questo ci sono sempre altre importanti condizioni che hanno una natura meno esatta: gli assiomi non dovrebbero essere troppo numerosi, il loro sistema deve essere il più semplice e trasparente possibile, e ciascun assioma dovrebbe avere un immediato significato intuitivo attraverso cui la sua appropriatezza potrebbe essere direttamente giudicata. In una situazione come la nostra quest'ultimo requisito è essenziale, a dispetto della sua vaghezza: noi vogliamo rendere un concetto intuitivo docile ad un trattamento matematico e vedere il più chiaramente possibile quali condizioni questo richieda»[75].

Non esiste dunque una procedura assoluta e infallibile per costruire assiomaticamente una teoria scientifica, perché questo richiede una certa funzionalità rispetto alla materia a disposizione e ai fini che con l'assiomatizzazione ci si propone di raggiungere. La scelta degli assiomi non è un compito del tutto oggettivo, ma neanche del tutto arbitrario. Nel caso della scienza economica la materia a disposizione era costituita da fenomeni economici di natura più o meno elementare e l'obiettivo da raggiungere consisteva nel descrivere formalmente questi fenomeni nei termini della nozione di gioco per valutare la possibilità di svolgere previsioni economiche di più ampia portata. È infine indicativo che in tutto il testo non ci sia alcuna considerazione significativa relativa al problema della consistenza della teoria assiomatica individuata.

5. Considerazioni conclusive

[73] VON NEUMANN / MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* cit., p. 7.

[74] Per la formulazione assiomatica della nozione di gioco si veda: VON NEUMANN / MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* cit., pp. 73-79; per la citazione, in part., p. 74.

[75] VON NEUMANN / MORGENSTERN, *Theory of games and economic behaviour* cit., p. 25.

Nonostante i tre tentativi appena descritti siano rivolti a perseguire assiomatizzazioni di discipline che trattano di oggetti tra loro molto diversi, l'analisi che abbiamo condotto ci consente di svolgere alcune considerazioni conclusive di carattere generale relative alla natura del metodo assiomatico.

A partire dalla nostra ricostruzione è dunque possibile isolare un punto fondamentale su cui le tre assiomatizzazioni convergono in maniera incontestabile, a dispetto del fatto che esse si svilupparono in tre momenti diversi rispetto all'evoluzione del paradigma hilbertiano. Nel primo caso, quello della teoria degli insiemi, il programma di Hilbert sui fondamenti delle scienze era ancora in fase di gestazione; esso attraversava, anzi, un lungo periodo di crisi a causa dell'obiezione mossa da Henri Poincaré al principio di induzione completa. Nel secondo caso, quello della meccanica quantistica, tale programma era nel pieno del suo sviluppo, avendo acquisito una connotazione matematica ben definita che lo induceva ad articolarsi nei suoi due momenti essenziali: il momento della formulazione assiomatica delle teorie formali e il momento della giustificazione attraverso dimostrazioni finitarie di non-contraddittorietà. Nel terzo caso, quello della scienza economica, il programma di Hilbert era invece definitivamente tramontato, avendo incontrato forti limitazioni concettuali nei teoremi di incompletezza di Gödel.

Eppure, proprio a dispetto di queste differenze, le tre assiomatizzazioni furono perseguite in maniera similmente pragmatica, adeguandosi allo stadio di maturazione raggiunto dalle rispettive discipline di riferimento, le quali si presentavano davanti alla trattazione assiomatica come materia della sua rappresentazione. La teoria ingenua degli insiemi si configurava, ad esempio, come bisognosa di una rigorosa sistemazione logica: essa poteva sicuramente annoverare un gran numero di risultati a suo favore, un numero considerevole di teoremi applicabili in altri rami del sapere matematico, ma molto spesso questi risultati venivano ad essere in contraddizione tra loro. La meccanica quantistica, dal canto suo, pur avendo raggiunto una prima e provvisoria formulazione unitaria nella teoria delle trasformazioni, mancava di una unificazione concettuale compiuta, cioè di un formalismo più rigoroso in grado di guidare l'interpretazione fisica della teoria. La scienza economica, infine, risultava persino sprovvista di una teoria transitoria, i suoi problemi erano mal definiti e lo sfondo empirico era insoddisfacente: era quindi quanto mai necessario formulare un sistema teorico a cui riportare gli stessi fenomeni economici semplici. Adeguandosi a ciascuna di queste situazioni, e facendosi da esse guidare, il metodo assiomatico si è dimostrato capace di "dare ad ogni disciplina il suo", cioè quello che veniva effettivamente richiesto, e di avere di conseguenza una straordinaria flessibilità di impiego.

Se questo è vero, si impoverisce di molto l'ipotesi che vede il metodo assiomatico come un semplice strumento di trasposizione formale di conoscenze, e si afferma invece l'idea, molto più ricca, di uno strumento formidabile di analisi concettuale teso a rinvenire un ordine tra i fenomeni di un dato campo conoscitivo. Hilbert richiamava questo punto quando diceva che procedere assiomaticamente non significava altro che pensare consapevolmente; anzi, forse è proprio questo il cuore del suo programma fondazionale, che giunge a noi immutato negli anni e nel tempo.