La déduction mathématique et la théorie physique. Exemple de solutions numériques physiquement utiles

Sara FRANCESCHELLI

Le « système de Lorenz », un système de trois équations différentielles ordinaires à variables couplées et trois paramètres[1], choisi au début des années 1960 par le météorologue Edward Lorenz pour étudier la convection thermique dans l'atmosphère, a joué un rôle important dans le développement du domaine du chaos déterministe, pendant les décennies 1970 et 1980. Il a en effet été choisi par la communauté des physiciens du chaos comme modèle pour en explorer numériquement les propriétés et ainsi étudier les propriétés des systèmes chaotiques, puisqu'il présente, pour certaines valeurs de ses paramètres de contrôle, un attracteur étrange[2]. Malgré l'efficacité heuristique qui a accompagné son utilisation pendant des décennies, la question de savoir si ce système d'équations différentielles ordinaires non linéaires présente effectivement un attracteur étrange n'allait pas de soi. Elle a été insérée, par le mathématicien Stephen

[1] E.N. Lorenz, « Deterministic Nonperiodic Flow », *Journal of the Atmospherical Sciences*, 20, 1963, p. 130-141.

[2] La notion d'attracteur étrange a été introduite, comme on le verra dans les lignes qui suivent, par David Ruelle et Floris Takens dans un article de 1971 sur la transition vers la turbulence. Depuis, la présence d'un attracteur étrange dans l'espace des phases d'un flot déterministe a été souvent considérée comme étant la signature du chaos déterministe dans un système dissipatif. Il est assez commun de définir un attracteur étrange comme un attracteur ayant une géométrie fractale. Le lecteur pourra se rapporter, par exemple, à E.N. Lorenz, *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, 1993, p. 212. Nous verrons qu'il ne s'agit pas de la définition originaire donnée par Ruelle et Takens dans leur article de 1971.

Smale, dans la liste par lui dressée en 1998 des dix-huit défis pour les mathématiques du XXI^{e} siècle[3]. Le travail de thèse de Warwick Tucker a permis de répondre par la positive seulement vers la fin des années 1990[4]. D'ailleurs, quand Lorenz travaille sur son système, le terme d'attracteur étrange n'existe pas encore. Il a été introduit par David Ruelle et Floris Takens presque une dizaine d'années plus tard, pour parler de l'objet mathématique étudié théoriquement (sans s'appuyer sur des calculs numériques) dans leur article de 1971 sur la nature de la turbulence[5]. Dans cet article, un attracteur étrange est défini comme le produit d'une variété[6] par un ensemble de Cantor[7]. Toutefois, dans ses travaux du début des années 1960, Lorenz, grâce – aussi – à une étude numérique, comprend (sans évidemment utiliser le terme d'attracteur étrange) que son système présente des propriétés très particulières, propres aux systèmes déterministes instables (plus tard qualifiés de chaotiques) : d'une part il est, pour certaines valeurs de ses paramètres, sensible aux conditions initiales, d'autre part il présente, dans l'espace des phases, en correspondance des valeurs de ces paramètres, un comportement étonnant qui sera plus tard reconnu comme caractérisant un attracteur étrange.

Dans la démarche de Lorenz, les calculs numériques exécutés grâce à un ordinateur (Royal McBee LGP-30) et la visualisation de ces résultats grâce à un tableur sont essentiels.

Lorenz est parfaitement conscient toutefois qu'il ne fait que montrer (et non démontrer) l'existence de comportements et propriétés dignes d'attention. À propos de l'utilisation de l'ordinateur, qu'il appelle une

[3] S. Smale, « Mathematical Problems for the Next Century », *Mathematical Intelligencer*, 20, 2, 1998, p. 7-15.

[4] La publication qui contient le résultat sous une forme stabilisée est : W. Tucker, « A Rigorous ODE Solver and Smale's 14th Problem », *Foundations of Computational Mathematics*, 2, 1, 2002, p. 53-117.

[5] D. Ruelle & F. Takens, « On the Nature of Turbulence », *Communications in Mathematical Physiscs*, 20, 1971, p. 167-192.

[6] On entendra ici par « variété » un point, une courbe, une surface, ou un volume ou sa généralisation dans un espace multidimensionnel. Cf. Lorenz, *op. cit.*, 1993, p. 205-213. Dans la suite de ce chapitre, je me référerai au glossaire contenu dans cet ouvrage, si d'autres références ne sont pas explicitées, pour des définitions non techniques de termes de la théorie des systèmes dynamiques et du chaos qui pourraient être inconnus du lecteur.

[7] Un « ensemble de Cantor » est un ensemble de points sur une ligne ou sur une courbe tel qu'entre deux points quelconques on trouve d'autres points de l'ensemble et aussi des trous d'amplitude finie.

machine à calculer dans un article de 1964 dans lequel il approfondit son travail, il écrit :

> Une machine à calculer peut jouer un rôle important, outre celui de produire des réponses numériques. La machine ne peut pas prouver un théorème, mais elle peut suggérer une proposition à prouver. La proposition peut ensuite être prouvée et établie par des moyens analytiques, mais on aurait pu ne pas suspecter l'existence même du théorème sans l'aide de la machine[8].

Comment précisément les solutions numériques peuvent-elles jouer la fonction heuristique évoquée par Lorenz ? C'est dans un jeu d'allers-retours avec les propriétés contemplées par la théorie des systèmes dynamiques que nous devons considérer la question, si nous voulons comprendre les raisonnements à l'œuvre dans le travail de Lorenz. Par « théorie des systèmes dynamiques », j'entends ici l'étude qualitative des équations différentielles qui s'est développée à la suite des travaux de Poincaré sur le problème à trois corps, et dont un aspect essentiel est l'étude des propriétés topologiques d'un flot dans l'espace des phases[9].

Lorenz utilise les solutions numériques comme des instances d'un comportement temporel que la théorie des systèmes dynamiques permet d'appréhender – c'est ce que je vais montrer par cette étude. Il montre que les solutions non périodiques de son système déterministe sont « instables par rapport aux prédictions pratiques » (c'est l'expression utilisée par Lorenz pour parler du comportement qu'aujourd'hui nous appelons « sensibilité aux conditions initiales »). Mais cela n'est pas une raison, pour lui, de renoncer à chercher une signification physique pour ce type de comportement. Nous verrons comment

[8] E.N. Lorenz, « The Problem of Deducing the Climate from the Governing Equations », *Tellus*, 16, 1964, p. 1-11 : 10.

[9] Sur l'origine de cette approche dans l'étude du problème de trois corps, on pourra se rapporter au mémoire de Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Mémoire couronné du Prix de S.M. le roi Oscar II de Suède, *Acta Math.*, 13, 1890, p. 1-270. Le lecteur pourra aussi voir la suivante littérature, que j'indique de manière non exhaustive : J. Barrow-Green, *Poincaré and the Three Body Problem*, American Mathematical Society, 1997 ; F. Béguin, « Le mémoire de Poincaré pour le prix du roi Oscar : l'harmonie céleste empêtrée dans les intersections homoclines », *in* É. Charpentier, É. Ghys & A. Lesne (dir.), *L'Héritage scientifique de Poincaré*, Belin, 2006, p. 177-209 ; T. Roque, « Stability of Trajectories from Poincaré to Birkhoff : approaching a qualitative definition », *Archive for History of Exact Sciences*, 65, 2011, p. 295-342.

Lorenz utilise des itérations simples (de type application logistique) pour essayer de comprendre la signification physique des solutions instables, en relation à des situations expérimentales de convection thermique dans des cylindres en rotation.

Cette étude propose donc une lecture des deux articles de Lorenz, pour mettre en évidence comment il explore les propriétés de systèmes déterministes instables grâce à la simulation numérique et comment il essaie de donner un sens physique à ce genre de comportements.

Le travail de Lorenz nous intéresse pour les pratiques conceptuelles qui y sont à l'œuvre, pratiques qui reflètent la spécificité de la théorie des systèmes dynamiques, tout en ayant été réalisé avant que le travail de Ruelle et Takens, et des physiciens qui ont travaillé sur le chaos déterministe à la suite de leur article fondateur, défendent explicitement la thèse de la pertinence de cette théorie mathématique pour étudier la transition vers la turbulence de systèmes physiques[10].

Dans quel sens l'article de Ruelle et Takens renouvelle-t-il le point de vue théorique sur la transition vers la turbulence ? Avant leur contribution, les physiciens considéraient le problème de la transition vers la turbulence dans un fluide visqueux incompressible soumis à une contrainte externe selon la perspective « de Landau-Hopf », développée indépendamment, par les deux savants, pendant les années 1940. Dans cette perspective, une approche perturbative permettait d'étudier, dans une approximation linéaire, les déstabilisations successives amenant un fluide d'un état stationnaire initial à un état turbulent, caractérisé par un spectre des fréquences continu. L'état turbulent était vu comme la superposition d'un nombre infini de mouvements quasi périodiques, c'est-à-dire comme la superposition d'un nombre infini de fréquences indépendantes (« les modes indépendants »). Chaque fréquence indépendante était vue comme un degré de liberté pour le système. Ainsi, selon ce point de vue, une transition vers la turbulence est possible seulement dans un système ayant un nombre infini de degrés de liberté.

[10] Il sera utile de préciser que, à l'époque considérée, un comportement turbulent était considéré comme une occurrence de comportement chaotique. La pratique d'usage la plus courante pour reconnaître l'établissement d'un comportement de type chaotique, ou turbulent (termes souvent utilisés comme interchangeables, dans les écrits de l'époque), dans une acception purement temporelle (et non spatio-temporelle), était la détection d'un spectre de puissance continu.

Adoptant la perspective de la théorie des systèmes dynamiques, Ruelle et Takens proposent un point de vue novateur, selon lequel une transition vers l'état turbulent peut se produire après un nombre fini et petit de bifurcations, dans un système à un petit nombre de degrés de liberté. La grande nouveauté apportée par ce passage à des systèmes à petit nombre de degrés de liberté, par l'approche de Ruelle et Takens, a été celle de permettre la mise en place d'expériences et d'études numériques sur des modèles mathématiques, pour voir si un comportement chaotique (turbulent) pouvait être observé après un nombre fini et petit de bifurcations, contrairement à ce qui était prévu par la théorie de Landau-Hopf, selon laquelle un nombre infini de bifurcations était nécessaire. Dans les années qui ont suivi, les travaux de différents groupes de physiciens ont montré la pertinence du point de vue de Ruelle et Takens. Les premiers résultats positifs sont issus de l'étude de l'instabilité de Taylor-Couette[11], de l'étude de l'instabilité de Rayleigh-Bénard[12], de l'étude d'oscillations chimiques[13], de l'étude numérique du système de Lorenz[14], ou de l'étude d'autres simplifications des équations de Navier-Stokes[15].

Dans un écrit de 1995, David Ruelle[16], en regardant rétrospectivement ces développements de la théorie du chaos déterministe (qui à son avis n'est rien d'autre qu'un aspect de la théorie des systèmes dynamiques), affirme que la théorie du chaos elle-même peut être comparée à une « boîte à outils » pouvant être utilisé pour aborder les évolutions irrégulières de certains systèmes déterministes à petit nombre de degrés de liberté. Il est important de souligner ce « certains », et aussi le fait que les avancées accomplies dans différents

[11] J.P. Gollub & H. Swinney, « *Onset of Turbulence in a Rotating Fluid* », *Phys. Rev. Letters*, 35, 14, 1975, p. 927-930.

[12] P. Bergé & M. Dubois, « Time dependent velocity in Rayleigh-Benard convection : a transition to turbulence », *Optics Communication*, 19, 1976, p. 129-133, et A. Libchaber & J. Maurer, « Local probe in a Rayleigh-Bénard experiment in liquid helium », *Journal de Physique - Lettres*, 39, 1978, p. 369-372.

[13] Y. Pomeau *et al.*, « Intermittent behavior in the Belousov-Zhabotinsky reaction », *Journal de Physique - Lettres*, 42, 1981, p. 271-273.

[14] J.B. McLaughlin & P.C. Martin, « Transition to Turbulence of a Statistically Stressed Fluid », *Phys. Rev. Letters*, 33, 20, 1974, p. 1189-1192.

[15] V. Franceschini & C. Tebaldi, « Sequences of Infinite Bifurcations and Turbulence in a Five-Mode Truncation of the Navier-Stokes Equations », *J. Stat. Phys.*, 21, 1979, p. 707-726.

[16] D. Ruelle, « Où le chaos intervient-il ? », *Le chaos. Dossier Pour la Science*, janvier 1995.

domaines (la transition vers la turbulence, les réactions chimiques oscillantes, les prévisions météorologiques, la dynamique du système solaire) ont suivi chacune un chemin particulier, relevant de la rencontre entre les nouvelles idées de la théorie des systèmes dynamiques et les questionnements et pratiques des spécialistes des domaines pour lesquels cette perspective théorique s'est révélée fructueuse. Rien n'allait de soi, les progrès dans des domaines spécifiques s'étant réalisés par des sursauts localisés d'activité scientifique.

La présente étude vient renforcer ce point de vue de Ruelle sur le développement de l'histoire du chaos. Puisque le problème étudié par Lorenz est posé par l'évolution d'un système déterministe (à petit nombre de degrés de liberté) présentant un comportement irrégulier (qu'il appelle « instable du point de vue des prédictions pratiques »), et qu'il s'appuie pour cela sur la théorie des systèmes dynamiques accompagnée d'une étude numérique, il nous intéresse ici de voir comment ce chercheur a pu « bien raisonner » alors qu'il ne bénéficiait pas de l'approche de Ruelle et Takens qui, donnant une assise théorique au chaos déterministe, a déclenché par la suite les études de tant de physiciens. Sans avoir encore le concept d'attracteur étrange, introduit par Ruelle et Takens, Lorenz met en place des pratiques conceptuelles pour étudier un objet mathématique dans l'espace des phases qui s'est plus tard révélé être, justement, un attracteur étrange. Ces pratiques conceptuelles, même si elles ne lui permettent pas de démontrer ses affirmations concernant les propriétés des flots déterministes non périodiques qu'il étudie, se révèlent qualitativement correctes : en accord avec le point de vue de Ruelle, on peut donc penser la théorie des systèmes dynamiques comme une boîte à outils. Pour poursuivre la métaphore, on pourrait dire que Ruelle et Takens ont affiné certains de ces outils (en théorisant la possibilité d'une transition vers la turbulence faible dans un système déterministe de petite dimension, et après un petit nombre de bifurcations de Hopf, et en introduisant le concept d'attracteur étrange), rendant la boîte à outils plus spécialisée et performante, mais que Lorenz avait déjà su se servir de cette boîte pour interpréter le comportement de son système.

Ce chapitre présente une étude visant à montrer comment Lorenz, dans deux articles de 1963 et 1964, explore les propriétés des systèmes chaotiques par des allers-retours entre une déduction mathématique (basée sur la théorie des systèmes dynamiques) et une étude des solutions numériques du système dit « de Lorenz » dans un régime d'instabilité. J'illustrerai comment l'établissement de ces allers-retours dans le travail de Lorenz rend mutuellement utiles la déduction mathématique et les solutions numériquement calculées, afin d'établir une connaissance de type qualitatif sur les flots étudiés. Préalablement à cette étude, je reviendrai, dans la section suivante, sur le chapitre III de la deuxième partie de *La Théorie physique* de Pierre Duhem, car il contient l'un des premiers écrits épistémologiques sur les limitations dans la prédictibilité physique d'un flot présentant la propriété de sensibilité aux conditions initiales. En commentant les propriétés des géodésiques sur une surface à courbure négative, qu'il connaît grâce au travail du mathématicien Jacques Hadamard, Duhem utilise la célèbre expression « exemple de déduction mathématique à tout jamais inutilisable ». Il est intéressant de considérer le point de vue de Duhem à ce propos, dans le cadre de sa vision représentationnelle et vouée aux prédictions quantitatives d'une théorie physique. Nous verrons en effet que Lorenz rencontre les mêmes limitations indiquées par Duhem concernant les prédictions qu'on peut faire pratiquement pour un système sensible aux conditions initiales, mais face à ces limitations il met en place une approche qualitative qui lui permet, partialement, de les contourner. Le dépassement de ces limitations correspond au passage d'une approche purement quantitative (celle de Duhem) à une approche qualitative (basée sur des considérations topologiques dans l'espace des phases et la mise en relation entre l'imprédictibilité du flot et des itérations simples).

1] Une déduction mathématique à jamais inutilisable pour le physicien ?

Que des systèmes déterministes puissent donner lieu à des comportements imprévisibles, à cause de l'inévitable finitude dans l'estimation des conditions initiales d'un système physique, était une propriété déjà connue au début du siècle par Poincaré. Dans son célèbre article sur le hasard, il émet l'hypothèse que la difficulté dans les prévisions météorologiques tient à cette propriété, aujourd'hui connue comme sensibilité aux conditions initiales[17]. Dans *La Théorie physique*, paru en 1906,

[17] Le lecteur pourra se rapporter au chapitre IV, dédié au hasard, de H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, 1908.

Duhem écrit, de son côté, sur les limites dans les prédictions qu'on peut faire pratiquement (pour un système physique) grâce à une déduction mathématique, due à Hadamard, sur les géodésiques d'une surface à courbures opposées[18]. Sans entrer dans la définition mathématique de telles surfaces, Duhem se borne à en donner l'exemple suivant : « Imaginons le front d'un taureau, avec les éminences d'où partent les cornes et les oreilles ; mais allongeons sans limite ces cornes et ces oreilles, de telle façon qu'elles s'étendent à l'infini[19]. »

Duhem, suivant Hadamard, classe les comportements possibles des géodésiques :

> Il est, d'abord, des géodésiques qui se ferment sur elles-mêmes. Il en est aussi qui, sans jamais repasser exactement par leur point de départ, ne s'en éloignent jamais infiniment ; les uns tournent sans cesse autour de la corne droite, les autres autour de la corne gauche, ou de l'oreille droite, ou de l'oreille gauche ; d'autres, plus compliquées, font alterner suivant certaines règles les tours qu'elles décrivent autour d'une corne avec les tours qu'elles décrivent autour de l'autre corne, ou de l'une des oreilles. Enfin, sur le front de notre taureau aux cornes et aux oreilles illimitées, il y aura des géodésiques qui s'en iront à l'infini, les unes en gravissant la corne droite, les autres en gravissant la corne gauche, d'autres encore en suivant l'oreille droite ou l'oreille gauche[20].

Si on imagine le mouvement d'un point matériel dont on connaît les conditions initiales, glissant le long de ces géodésiques, il s'agit d'une déduction mathématique concernant un problème déterminé. L'épistémologie développée par Duhem, notamment le rôle qu'il attribue aux méthodes de mesure pour traduire des faits pratiques en faits mathématiques (et *vice versa*), lui permet de mettre explicitement en évidence que la limitation dans les prédictions qu'on peut faire à partir de la connaissance mathématique d'un système déterministe de ce type dépend de l'impossibilité, pour une mesure physique, d'être exécutée avec une précision infinie. Si parmi les infinis faits théoriques qui représentent un certain fait pratique (condition initiale), il y en a qui correspondent à une ligne géodésique qui ne s'éloigne pas à l'infini (tournant par exemple indéfiniment autour de

[18] P. Duhem, *La Théorie physique. Son objet, sa structure* [1906], Vrin, 2007. J. Hadamard, « Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques », J. Math. Pures et Appl. IV, 1898, p. 27-73 ; *Œuvres*, II, éd. du CNRS, 1968, p. 729-775.

[19] Duhem, *op. cit.*, 2007, p. 199.

[20] *Ibid.*

la corne droite), Duhem remarque que « la Géométrie nous permet d'affirmer ceci : parmi les données mathématiques innombrables qui correspondent aux mêmes données pratiques, il en est qui déterminent une géodésique s'éloignant indéfiniment de son point de départ ; après avoir tourné un certain nombre de fois autour de la corne droite, cette géodésique s'en ira à l'infini soit sur la corne droite, soit sur la corne gauche, soit sur l'oreille droite, soit sur l'oreille gauche[21] ».

Duhem comprend aussi que plus on augmente la précision de mesure de deux conditions initiales proches, plus la divergence de leurs trajectoires tardera à se manifester. Mais ce qui nous intéresse ici est que, pour lui, une telle déduction mathématique est inutilisable pour le physicien. Le point de vue de Duhem sur le sujet s'inscrit dans sa réflexion sur la relation entre la déduction mathématique et la théorie physique, qui fait explicitement l'objet du chapitre III de la seconde partie de *La Théorie physique*, chapitre dont le titre, « La déduction mathématique et la théorie physique », a évidemment inspiré le titre de la présente étude.

Dans ce chapitre, Duhem reprend et analyse en détail l'une des quatre opérations par lesquelles se forme une théorie physique, qu'il avait introduites dans le chapitre II de la première partie : il s'agit de la troisième opération. Cette opération consiste à combiner ensemble les divers principes ou hypothèses d'une théorie selon les règles de l'analyse mathématique. Rappelons que, pour Duhem, une théorie physique est « un système de propositions mathématiques qui ont pour but de représenter aussi simplement, aussi complètement et aussi exactement que possible un ensemble de lois expérimentales[22] ».

Avant de considérer cette troisième opération, il ne sera pas inutile ici de rappeler dans quelques détails les autres opérations qui, toutes ensemble, concourent à définir la vision représentationnelle de théorie physique selon Duhem.

La première : l'opération de mesure qui fait correspondre des symboles mathématiques aux propriétés physiques qu'on choisit de représenter. Duhem spécifie, en cohérence avec l'une des thèses principales qu'il défend dans son livre, selon laquelle une théorie physique n'est pas une explication des lois expérimentales établies, que « ces sym-

[21] *Ibid.*, p. 200.
[22] *Ibid.*, p. 44.

boles mathématiques n'ont, avec les propriétés qu'ils représentent, aucune relation de nature ; ils ont seulement avec elles une relation de signe à chose signifiée ; par les méthodes de mesure, on peut faire correspondre à chaque état d'une propriété physique une valeur du symbole représentatif et inversement[23] ». La deuxième : la formulation d'hypothèses ou principes par l'établissement de relations entre ces grandeurs, hypothèses ou principes « qui ne prétendent en aucune façon énoncer des relations véritables entre les propriétés réelles des corps[24] ». La quatrième : la traduction des diverses conséquences tirées des hypothèses par l'analyse mathématique en jugements sur les propriétés physiques des corps, à travers un « vocabulaire » (l'expression est de Duhem) fixé par les « méthodes propres à définir et à mesurer ces propriétés physiques ». Ces propriétés seront à comparer aux lois expérimentales que la théorie se propose de représenter.

L'ensemble de ces quatre opérations, par lequel se forme selon Duhem une théorie physique, définit une approche quantitative de la connaissance physique. Nous allons voir que c'est au sein de cette approche représentationnelle et quantitative de la théorie physique que Duhem arrive à mettre en évidence, avec une lucidité remarquable pour son époque, la limitation sur la prédictibilité des trajectoires imposée par la sensibilité aux conditions initiales.

Venons-en donc à la troisième opération, la déduction mathématique, que Duhem considère comme un « intermédiaire[25] », dans le sens qu'« elle a pour objet de nous enseigner qu'en vertu des hypothèses fondamentales de la théorie, la réunion de telles circonstances entraînera telles conséquences ; que tels faits se produisant, tel autre fait se produira[26] ».

Si les calculs mathématiques permettent de faire des déductions, pour que ces déductions aient un sens physique il sera nécessaire de faire, à nouveau, une opération de traduction, du faisceau de faits mathématiques aux faits physiques qui lui correspondent. C'est dans cette perspective que Duhem analyse la déduction mathématique fournie par Hadamard comme un exemple de déduction mathéma-

[23] *Ibid.*
[24] *Ibid.*
[25] *Ibid.*, p. 190.
[26] *Ibid.*

tique à jamais inutilisable par le physicien, et qu'il décrète l'inutilité d'une telle déduction à cause de l'impossibilité d'annoncer, grâce à elle, ce qui doit arriver en des circonstances déterminées. Selon Duhem, une déduction mathématique « issue des hypothèses sur lesquelles repose une théorie peut donc être utile ou oiseuse selon que, des conditions *pratiquement données* d'une expérience, elle permet ou non de tirer la prévision *pratiquement déterminée* du résultat[27] ».

Nous savons aujourd'hui que, pour des systèmes « sensibles aux conditions initiales » – ou hyperboliques –, le taux de croissance des incertitudes initiales peut-être quantifié (par exemple par les exposants de Lyapunov ou l'entropie de Kolmogorov-Sinai[28]). Il est donc possible d'évaluer les limites temporelles des prédictions sur les trajectoires. Malgré ces limitations, nous savons aussi que la théorie des systèmes dynamiques permet d'étudier de façon rigoureuse, même si qualitative, le comportement des systèmes hyperboliques. C'est au prix du passage d'une vision à la Duhem, prenant en compte les aspects purement quantitatifs d'une théorie physique et se bornant à vouloir prédire exactement les trajectoires des systèmes déterministes, à une vision qui s'intéresse aussi à certaines de ses propriétés qualitatives, comme les comportements asymptotiques du système dans l'espace des phases – telles que la théorie des systèmes dynamiques peut les prendre en compte – qu'un certain type de prédictibilité peut être récupéré pour ces systèmes[29].

Avant de considérer l'exemple de l'utilisation des solutions numériques dans l'article pionner de Lorenz, il me semble intéressant de considérer quelques idées de Ruelle sur les modifications que la théorie des systèmes dynamiques entraîne dans l'idéalisation en physique[30]. Il s'agit du point de vue rétrospectif de l'un des fondateurs de la physique du chaos déterministe, qui indique comment la théorie des sys-

[27] *Ibid.*, p. 204-205.

[28] À ce propos, on pourra consulter le travail de G. Boffetta *et al.*, « Predictability : a way to characterize complexity », *Phys. Rep.*, 356, 2002, p. 367-474.

[29] Dans S. Franceschelli, « Some remarks on the compatibility between determinism and unpredictability », *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 110, 2012, p. 61-68, j'illustre comment le type de prédictibilité qu'on peut retrouver grâce à la notion de scénario de transition doit prendre en compte des considérations de nature probabiliste.

[30] D. Ruelle, « Idéalisation en physique », *in* J. Petitot (dir.), *Logos et théorie des catastrophes. À partir de l'œuvre de René Thom*, Actes du Colloque de Cerisy, Patiño, 1982, p. 337-344.

tèmes dynamiques permet un traitement rigoureux du non-linéaire, qui s'accompagne d'un passage du quantitatif au qualitatif, y compris en termes de prédictibilité.

En physique, on recherche, selon Ruelle, la bonne idéalisation pour isoler un phénomène physique intéressant en le mettant dans un cadre conceptuel précis et approprié. Pour lui, une théorie physique s'obtient en «collant une théorie mathématique sur un morceau de réalité». Il ne s'agit pas d'un point de vue très différent de celui de Duhem. Mais, par rapport à ce dernier (auquel, disons-le par souci de clarté, il ne se réfère pas), Ruelle se détache d'une vision purement quantitative de la théorie physique. Nous avons vu que dans la perspective quantitative adoptée par Duhem le gage de validité d'une théorie physique est sa capacité à faire des prédictions quantitatives expérimentalement vérifiables. Mais nous avons aussi vu qu'une théorie physique à la Duhem bute contre l'imprédictibilité des trajectoires pour des systèmes sensibles aux conditions initiales. Ruelle adopte un point de vue qualitatif qui lui permet de sortir de l'impasse, tout en renonçant à faire des prédictions quantitatives sur les trajectoires. Par rapport aux quatre opérations par lesquelles une théorie physique se constitue selon Duhem, le mouvement de Ruelle – du point de vue quantitatif à un point de vue qualitatif – vient enrichir la troisième opération, en proposant plus d'outils pour réaliser la déduction mathématique. Par conséquent, la quatrième opération, consistant à comparer les conséquences d'une théorie physique avec les résultats expérimentaux, se trouvera, dans la vision de Ruelle, modifiée aussi. Ruelle met en évidence, selon le type d'idéalisation utilisée, trois manières d'aborder l'étude d'un problème en mécanique classique :

– La physique linéaire, basée sur l'exploitation des propriétés de l'oscillateur harmonique : la force de rappel est, pour de petites déformations, presque proportionnelle à la déformation. Il s'agit pour le physicien de trouver de bonnes approximations linéaires pour les phénomènes qu'il étudie. Ruelle la qualifie de «très utile» du point de vue de la prédictibilité. (Remarquons que la vision de Duhem colle parfaitement à ce type de physique.)

– La physique à la Landau[31], où l'on approche les problèmes non linéaires par des approximations (linéaires) successives ; il s'agit

[31] Telle qu'on la rencontre, par exemple, dans l'approche à la Landau-Hopf, évoquée plus haut, pour la transition vers la turbulence.

encore une fois d'une approximation, et on peut s'attendre à des désaccords avec l'expérience, qu'on voit effectivement au niveau des résultats au voisinage du point critique. (Pour ce type de physique, la vision de Duhem de la théorie physique continue à fonctionner, dans la limite des approximations effectuées.)

– Et finalement, la théorie qualitative des systèmes dynamiques, qui traite les aspects non linéaires sans approximation et de manière mathématiquement rigoureuse. (C'est le type de physique qui met en évidence la sensibilité aux conditions initiales, qui marque l'arrêt de la prédictibilité purement quantitative d'une théorie physique à la Duhem, mais qui permet aussi de poser d'autres questions concernant les propriétés topologiques dans l'espace des phases, dans une approche qualitative.)

Selon Ruelle, la physique linéaire est la plus superficielle, mais la plus utile ; la physique à la Landau est un peu plus profonde, mais un peu moins utile ; les idées de dynamique qualitative, qui sont les plus profondes, ont une valeur surtout interprétative, plutôt que prédictive. Devons-nous penser qu'elles sont donc les plus inutiles ? Pas complètement, comme nous allons le voir par l'étude de cas sur le système de Lorenz. La section qui suit vise à montrer comment Lorenz, de façon complètement indépendante à la fois de Duhem et de Ruelle et Takens, se trouvant face à des limitations de prédictibilité quantitative, opère un passage du quantitatif au qualitatif, anticipant, du point de vue des pratiques de raisonnement, les travaux des physiciens qui feront écho, presque une quinzaine d'années plus tard, à l'article de Ruelle et Takens.

2] De l'utilisation d'une déduction mathématique et de solutions numériques concernant un système déterministe instable

L'article de Lorenz dans lequel il introduit son célèbre attracteur[32] nous intéresse ici en tant qu'exemple d'une approche basée sur les allers-retours entre l'exploration de la théorie mathématique des systèmes dynamiques, l'utilisation de l'ordinateur pour le calcul numérique des solutions d'un système d'équations différentielles non linéaires dans un régime d'instabilité et, même – peut-être dans une moindre mesure – la recherche d'une pertinence pour l'application de

[32] Lorenz, *op. cit.*, 1963, p. 130-141.

ces idées et de ces résultats à certaines situations expérimentales. Nous verrons que, contrairement à l'opinion de Duhem, une déduction mathématique montrant qu'un système déterministe est sensible aux conditions initiales peut être utile à l'étude des propriétés de systèmes chaotiques.

Dans l'article de Lorenz, la référence à des comportements observables expérimentalement est posée d'emblée. Quand il fait l'étude numérique de son système, il a en effet connaissance de travaux expérimentaux sur la convection thermique dans des cylindres en rotation[33] qui montrent, parmi les différents comportements du fluide, des comportements de type irrégulier, apparemment aléatoire, lesquels, même après un long temps d'observation, ne semblent pas reproduire leur histoire précédente. Puisqu'il estime intéressant, dans le cadre des prévisions atmosphériques à court terme, d'étudier les comportements de type irrégulier du point de vue asymptotique (sans s'intéresser à l'état transitoire), il choisit de travailler sur des systèmes d'équations qu'il considère comme des idéalisations de systèmes hydrodynamiques. Il propose l'étude d'un système particulier d'équations censé représenter la convection thermique dans l'atmosphère, puisqu'il est une simplification du système d'équations décrivant la convection thermique dans une couche horizontale de fluide d'extension infinie, chauffée par sa partie inférieure (phénomène de convection de Rayleigh-Bénard)[34]. Nous rappelons ici les équations du célèbre

[33] Il s'agit de D. Fultz *et al.*, « Studies of Thermal Convection in a Rotating Cylinder with Some Implications for Large-Scale Atmospheric Motion », *Meteorol. Monographs* (American Meteorological Society), 21, 1959, p. 194, et R. Hide, « Some Experiments on Thermal Convection in a Rotating Liquid », *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 79, 1958, p. 161. Dans ces travaux, le système étudié est composé par un récipient cylindrique contenant de l'eau. On fait tourner ce récipient autour de son axe, on le chauffe près de son bord et on le refroidit près de son centre (d'une façon stationnaire et symétrique).

[34] Nous rappelons que les équations rendant compte d'un tel phénomène sont : l'équation de Navier-Stokes, l'équation imposant l'incompressibilité du fluide et l'équation de propagation de la chaleur. Dans une cellule de convection de Rayleigh-Bénard, on enferme le fluide entre deux plaques horizontales, bonnes conductrices de chaleur, la plaque inférieure étant plus chaude que la plaque supérieure. Sous l'effet de la différence de température appliquée à la couche, le fluide plus chaud, donc moins dense, situé au bas de la couche, a tendance à monter, alors que le fluide plus dense du haut de la couche tendra à descendre. Mais cet effet déstabilisant est combattu par l'effet stabilisant de la viscosité et de la diffusivité thermique. L'équilibre entre effets déstabilisants et stabilisants est régi par un nombre sans dimension : le nombre de Rayleigh R_a qui est proportionnel

système de Lorenz. Il s'agit d'un système d'équations différentielles couplées à trois variables (X, Y, Z) et trois paramètres :

$$dX/dt = \sigma(Y - X),$$
$$dY/dt = -XZ + rX - Y,$$
$$dZ/dt = XY - bZ,$$

où r, le paramètre de contrôle, est variable, tandis que les paramètres σ et b sont gardés constants.

Lorenz a obtenu son système par une simplification du système utilisé par le météorologue Barry Saltzman[35], dans ses travaux sur la convection thermique d'amplitude finie. C'est en suivant Saltzman que Lorenz fixe les valeurs pour les paramètres σ (= 10) et b (= 8/3), valeurs qui seront très souvent utilisées, par la suite, par les chercheurs travaillant sur le système de Lorenz.

Du point de vue de la signification physique, le paramètre r est proportionnel au nombre de Rayleigh ; le paramètre σ est le nombre de Prandtl[36] et le paramètre b est un indicateur de l'allure du système des rouleaux de convection. La variable X est proportionnelle à l'intensité du mouvement convectif, Y est proportionnel à la différence de température entre les courants ascendants et descendants. Z est proportionnel à la distorsion du profil vertical de la température de la linéarité.

Le système choisi par Lorenz est déterministe. Il présente toutefois un comportement temporel non périodique, comme c'est le cas, parfois, dans les systèmes expérimentaux que Lorenz connaît. On peut donc dire que le système choisi par Lorenz présente une analogie, sur la base des variables et des équations qui le définissent, avec certains systèmes expérimentaux qui l'intéressent ; il s'agit de voir si cette ana-

à la différence de température imposée. Les mouvements du fluide n'apparaissent que si la différence de température est assez importante, donc si le nombre de Rayleigh est supérieur à un certain nombre critique R_{ac}. Au-dessous de ce seuil, l'état stable de la couche fluide est l'état de repos à vitesse nulle. Au-dessus de ce seuil critique R_{ac}, l'état de repos devient instable au profit d'un nouvel état d'équilibre : l'état convectif. Pour une autre valeur critique du nombre de Rayleigh, encore plus élevée, il est possible d'observer un comportement turbulent (pour plus de détails, on pourra se rapporter à P. Bergé, Y. Pomeau & C. Vidal, *L'Ordre dans le chaos*, Paris, Hermann, 1984).

[35] B. Saltzman. « Finite amplitude free convection as an initial value problem. I », *J. Atmos. Sci.*, 19, 1962, p. 329-341.

[36] Ce nombre désigne le rapport (sans dimension) de la viscosité cinématique du fluide à sa diffusivité thermique. Il est caractéristique du fluide considéré ; il dépend avant tout de la nature de celui-ci et, dans une moindre mesure, de la température.

logie sera retrouvée dans les comportements temporels produits, et sur quelle base on peut la reconnaître.

Que les trajectoires non périodiques de son système sont « instables du point de vue des prédictions pratiques » (c'est-à-dire qu'elles sont sensibles aux conditions initiales), c'est ce que Lorenz entend montrer dans son article. Son argument est organisé en deux étapes. La première est purement analytique, elle est basée sur des théorèmes de la théorie des systèmes dynamiques appliqués à un système d'équations tout à fait général : elle ne fait donc pas référence à son système. Cette première étape sert à Lorenz pour établir mathématiquement que des trajectoires non périodiques dans un système déterministe dissipatif sont instables du point de vue des prédictions pratiques.

C'est sur la base de concepts et outils de la théorie des systèmes dynamiques, qu'il connaît par les travaux de Poincaré et de Birkhoff, que Lorenz, dans la première partie de son article, raisonne analytiquement sur un système déterministe dissipatif tout à fait général. Comme nous l'avons précisé plus haut, dans cette première étape de son argument il ne se réfère pas au système dit « de Lorenz », sur lequel il travaillera dans la deuxième étape de son argument en s'appuyant sur les valeurs de ses solutions numériquement calculées. Pour ce qui est de la première étape de son raisonnement, purement analytique, il travaille à l'extension de la classification des trajectoires possibles, dans l'espace des phases[37], d'un système dissipatif tout à fait général. Il s'appuie, à cette fin, sur la classification des solutions d'un système conservatif dans l'espace des phases, classification établie par George Birkhoff en 1927[38], selon laquelle les trajectoires dans l'espace des phases peuvent être classées en trois manières : selon la présence ou non de propriétés transitoires (en particulier, elles sont dites centrales si elles contiennent leurs trajectoires limites[39], non centrales dans le cas contraire), selon la stabilité ou l'instabilité des trajectoires par rapport à des petites modifications, et selon la présence ou non de périodicité.

[37] Chaque point de l'espace des phases d'un système représente un état instantané possible pour le système. Lorenz connaît l'espace des phases par les auteurs précédemment cités (Poincaré et Birkhoff), ainsi que grâce aux travaux de Gibbs en physique statistique.

[38] G.D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, 1927.

[39] Une trajectoire limite est définie par l'ensemble des points limites d'une trajectoire donnée. Un point limite d'une trajectoire est un point auquel la trajectoire s'approche arbitrairement près et arbitrairement souvent.

Lorenz fait état d'un théorème stipulant qu'une trajectoire non périodique centrale sera instable par rapport aux petites modifications[40]. Il appelle « instabilité par rapport aux modifications de petite amplitude[41] » la propriété que nous appelons aujourd'hui la sensibilité aux conditions initiales, en soulignant l'impossibilité d'établir des prédictions pour un état instantané d'un système de ce type, à cause de la précision, nécessairement finie, sur les conditions initiales. Cette propriété est capitale pour les écoulements déterministes non périodiques dont il est question.

Après l'établissement de la propriété de sensibilité aux conditions initiales d'un point de vue purement mathématique (grâce à la théorie des systèmes dynamiques), Lorenz veut montrer que des solutions non périodiques, présentant donc la propriété d'instabilité du point de vue des prédictions pratiques, existent dans le cas d'un système particulier. C'est à ce moment qu'il introduit « son » système. Soulignons que Lorenz n'est pas dans la position de qui possède un cadre théorique défini, mais il est dans l'exploration à la fois d'un nouveau phénomène (tel que les solutions numériques le présentent) et d'une nouvelle théorie mathématique qui permettrait d'appréhender les comportements physiques associés à certaines propriétés mathématiques. Il s'agit pour lui de construire une mise en relation significative entre ces deux plans d'exploration.

Par une analyse de stabilité linéaire, il lui est possible de trouver les valeurs du paramètre r pour lesquelles on passe d'un état stationnaire à un état oscillatoire. Mais pour savoir comment le système se comporte pour des valeurs plus élevées du paramètre, il s'appuie sur les tables des valeurs X, Y, et Z obtenues numériquement grâce à l'ordinateur. Lorenz évalue en détail le poids d'erreurs d'arrondi. Il s'agit d'un aspect déterminant lorsqu'on s'interroge sur la pertinence d'un calcul numérique à partir un système mathématique, lorsqu'il est paramétré dans un régime d'instabilité. À cause de l'instabilité même, en effet, quelle est la garantie que la trajectoire calculée et la trajectoire continue (la trajectoire mathématique inconnue qu'on voudrait calculer) ont quelque chose en commun ? Des résultats ultérieurement obtenus (au cours des années 1970) par Rufus Bowen, les

[40] Pour les preuves des théorèmes évoqués, Lorenz renvoie à V.V. Nemytskii & V.V. Stepanov, *Qualitative theory of differential equations*, Princeton, 1960.

[41] Lorenz, *op. cit.*,1963, p. 132.

théorèmes de *shadowing,* stipulent que, pour un système hyperbolique, une trajectoire calculée numériquement est «suivie» («*shadowed*») par une trajectoire mathématique.

Pour certaines valeurs fixées des paramètres σ et b ($\sigma = 10$ et $b = 8/3$), Lorenz travaille avec une valeur de r ($r = 28$) légèrement supérieure au nombre de Rayleigh critique pour la déstabilisation du mouvement stationnaire ($r = 470/19 = 24{,}74$). Les points de convection stationnaire sont représentés par les points ($6\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, 27) et ($-6\sqrt{2}$, $-6\sqrt{2}$, 27) dans l'espace des phases, tandis que l'état non convectif correspond à l'origine (0,0,0). Comme condition initiale, Lorenz choisit un point à petite distance de l'état non convectif, c'est-à-dire (0,1,0). Un tableau fournissant le nombre d'itérations N et les valeurs de X, Y, Z en correspondance de chaque N (toutes les cinq itérations jusqu'à 160 itérations) est fourni à partir des résultats des calculs numériques[42]. Pour interpréter ce tableau, Lorenz utilise l'image du mouvement ascendant du fluide chaud et descendant du fluide froid dans une cellule de convection thermique. On pourrait dire qu'il visualise, à partir de ces valeurs numériques, leurs signes, leurs magnitudes respectives toujours en train de changer les unes par rapport aux autres, le mouvement d'un fluide imaginaire.

Il remarque que les trois variables croissent rapidement. Le fluide froid en train de baisser est remplacé par du fluide encore plus froid d'en haut, et le fluide chaud en train de monter est remplacé par du fluide plus chaud provenant d'en bas[43].

Lorenz poursuit les itérations jusqu'à 3 000 et il trace un graphique de Y en fonction du temps[44]. Il observe qu'après 1 650 itérations on trouve un point critique (c'est-à-dire un point en correspondance duquel le portrait de phase change).

C'est en projetant la trajectoire sur les plans X-Y et Y-Z pour les itérations 1 400-1 900 que Lorenz met en évidence son attracteur, sur lequel on peut voir que, à partir de l'itération 1 650, la trajectoire qui auparavant s'enroulait autour de l'un des deux points de la convection stationnaire, C', traverse le plan X-Z et tourne autour de l'autre point de convection stationnaire, C (cf. **figure 1**).

[42] *Ibid.*, p. 136, tableau 1.
[43] Pour suivre dans les détails la description de Lorenz : *ibid.*, p. 137.
[44] *Ibid.*, p. 137, figure 1 dans l'original.

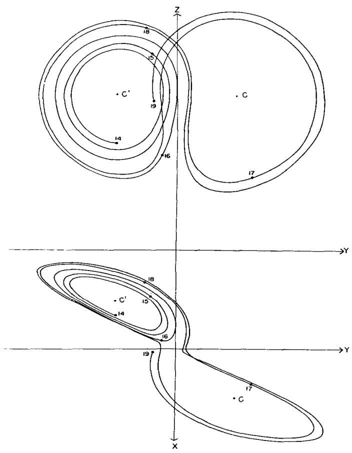

FIGURE 1. D'après Lorenz, *op. cit.*, 1963, p. 137, figure 2. Solutions numériques des équations de convection. Projections sur le plan *X-Y* et sur le plan *Y-Z* dans l'espace des phases de la trajectoire entre l'itération 1 400 et l'itération 1 900. *C* et *C'* indiquent les deux états de convection stationnaire. (©) American Meteorological Society. Avec leur permission.

Après un tour, la trajectoire revient autour de C' pour un certain temps, et elle commence à s'enrouler alternativement autour de *C* et de *C'*, en traversant le plan *X-Z* à des intervalles irréguliers. Il «semble»[45] que la trajectoire laisse une spirale seulement après avoir dépassé une certaine distance critique du centre. En outre c'est en fonction du dépassement de cette distance critique que, «apparemment», le point d'entrée dans l'autre spirale est déterminé. À son tour, ce point d'entrée «semble» déterminer le nombre de circuits qui seront parcourus avant de changer à nouveau de spirale.

C'est à partir de cette remarque que Lorenz pense à un comportement de type «itération»: il semble en fait qu'une caractéristique donnée d'un circuit donné puisse prédire la même caractéristique dans le circuit suivant. Il pense alors choisir la valeur maximale de Z (qui est obtenue quand le circuit a été presque complété) et construire grâce aux solutions numériques un autre tableau pour X, Y et Z en choisissant seulement ces itérations N pour lesquelles la valeur de Z est un maximum (relatif)[46]. Remarquons que cela revient à faire une coupe de Poincaré[47] de l'attracteur suivant la surface d'équation: $XY - bZ = 0$

[45] Soulignons que l'utilisation du verbe «sembler» est de Lorenz. On peut interpréter l'emploi par Lorenz, ici et dans les lignes qui suivent, de termes comme «semble» et «apparemment» comme l'expression de son étonnement face au comportement qu'il voit se dessiner grâce aux valeurs des variables *X*, *Y* et *Z* calculées numériquement.

[46] Lorenz, *op. cit.*, 1963, p. 136, tableau 2.

[47] Une «coupe de Poincaré» ou «section de Poincaré» est une section transversale de l'espace des phases d'un flot qui est intersectée par la majorité de ses orbites.

(c'est-à-dire $dZ/dt = 0$ dans la troisième équation du modèle de Lorenz). La succession de circuits autour de C et de C' sera alors indiquée par la succession de signes positifs et négatifs de X et de Y. C'est-à-dire que grâce à cette réduction on peut retrouver, de manière extrêmement simple, l'essentiel des propriétés dynamiques du modèle. Avec la série constituée par les valeurs des Z, que Lorenz appelle M_n, on obtient une application de premier retour[48] : il s'agit en fait d'une relation précise deux-à-un entre chaque M_n et son successeur. Cette application peut être dessinée, avec en abscisse M_n et en ordonnée son successeur M_{n+1} (cf. figure 2). Cette figure peut être idéalisée par les relations suivantes, établies sur une séquence M_0, M_1…, où M_1 est compris entre 0 et 1 :

$M_{n+1} = 2\, M_n$, si $M_n < 1/2$
M_{n+1} est indéfini, si $M_n = 1/2$
$M_{n+1} = 2 - 2M_n$, si $M_n > 1/2$

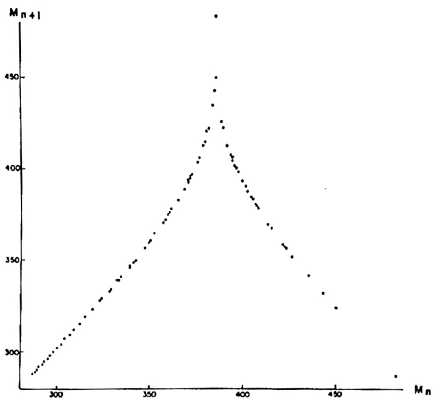

FIGURE 2. D'après Lorenz, *op. cit.*, 1963, p. 139, figure 4. Figure obtenue en traçant M_{n+1} en fonction de M_n pour les premières 6000 itérations. © American Meteorological Society. Avec leur permission.

Or (cf. figure 3), ce que Lorenz veut montrer dans cette étape de son argument, c'est que dans son système des comportements non périodiques existent. S'il est en mesure de défendre cette affirmation, il sera aussi en mesure, sur la base des théorèmes présentés dans la première étape de son argument, d'affirmer que de tels comportements non périodiques sont instables, c'est-à-dire sensibles aux conditions initiales. L'affirmation que des comportements non périodiques existent, dans le cas en étude qui n'est évidemment pas soumis à une approche analytique, se base uniquement sur les observations que nous venons de relater sur le comportement du système de Lorenz, à partir des valeurs numériques des solutions du système même. Il se trouve que Lorenz est en train d'étudier son sys-

[48] Une « application de premier retour », ou « application de Poincaré » est une itération dont l'espace des phases est une section de Poincaré de l'espace des phases d'un flot, et dans laquelle les images successives d'un point sont définies par les intersections successives d'une orbite du flot avec la section de Poincaré.

tème pour une valeur du paramètre $r = 28$. Pour cette valeur, la trajectoire se trouve sur un attracteur étrange. Rétrospectivement, nous pouvons dire que tous les mouvements seront instables, mais il ne s'agit pas de la démarche de Lorenz, qui suit le raisonnement suivant. Il considère le module de la pente de la tangente à la courbe dessinée par l'itération : il est en chaque point supérieur à 1. De cela il déduit que chaque point de la trajectoire est instable. Il y aura un nombre infini et dénombrable de comportements périodiques ou quasi périodiques (toutefois instables) et le reste des comportements sera non périodique. Une remarque de Lorenz souligne le déplacement qu'il a accompli pour pouvoir caractériser qualitativement son attracteur, mais aussi pour faire des prédictions empiriques sur son comportement : « Il s'ensuit qu'un chercheur, qui ne connaîtrait pas la nature des équations gouvernant le flot, pourrait formuler un schéma de prédiction empirique des “données” représentées dans les figures 2 et 4[49]. »

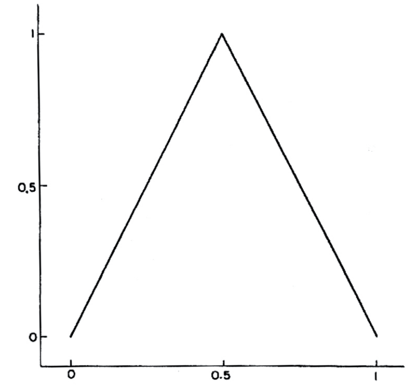

FIGURE 2. D'après *ibid.*, figure 5. Fonction $M_{n+1} = 2M_n$ si $M_n < 1/2$; $M_{n+1} = 2 - 2M_n$ si $M_n > 1/2$ (idéalisation du lieu des points représentés en fig. 1). © American Meteorological Society. Avec leur permission.

Lorenz a pu ainsi caractériser un flot déterministe non périodique comme étant instable (problème qu'il avait posé aussi sur la base de sa connaissance de la théorie des systèmes dynamiques) grâce à l'utilisation des valeurs obtenues numériquement à partir d'un modèle simple – et dans l'hypothèse qu'une section de Poincaré peut rendre compte des propriétés de ce flot. Toutefois, il ne fournit pas une démonstration de ces propriétés, mais il se limite à les montrer : « Ces conclusions sont basées sur un segment fini d'une solution déterminée numériquement. Elles ne peuvent pas être considérées comme étant prouvées mathématiquement, même si l'évidence en leur faveur est forte[50]. »

Il lui reste à comprendre un autre problème ayant trait à la structure de l'objet dessiné : comment peut-on réconcilier ce qui se présente

[49] Lorenz, *op. cit.*, 1963, p. 139.
[50] *Ibid.*, p. 140.

comme un «mélange» des deux surfaces contenants chacune une spirale avec l'impossibilité, pour les trajectoires du système, de se croiser[51] ? Lorenz explique qu'en fait ce «mélange» des deux surfaces est seulement apparent, en réalité les deux surfaces restent distinctes. Si on suit ces surfaces le long d'une trajectoire, autour de *C* ou *C'* – nous dit Lorenz –, nous voyons que chaque surface est, en réalité, composée par deux surfaces de sorte que, là où elles semblent se mêler, il y a de fait quatre surfaces : «Si on continue ce processus pour un autre circuit, on voit qu'en réalité il y a huit surfaces, etc. Nous concluons ainsi qu'il y a un complexe infini de surfaces, chacune extrêmement proche de l'une ou de l'autre des deux surfaces qui sont censées se mêler[52].»

Grâce à l'étude de son système d'équations, Lorenz met en évidence un comportement non périodique dans un flot déterministe. Mais rappelons-nous que sa question concernait la possibilité de faire des prévisions à court terme dans l'atmosphère. Quelle est la relation entre le système de Lorenz et l'atmosphère ? Il s'agit de la question centrale dans l'article de 1964[53].

Lorenz considère dans cet article un problème fondamental de la climatologie théorique : celui de déduire le climat à partir des équations qui le gouvernent, ce qui peut être vu comme un cas particulier du problème plus général de déduire les statistiques des solutions de systèmes fermés d'équations à partir des équations même. C'est dans ce cadre que nous devons comprendre ce que Lorenz entend par climat, même si son usage du terme peut sembler surprenant par rapport à la notion de sens commun que nous pouvons avoir de «climat». Lorenz entend par climat la moyenne à long terme des solutions des équations qui sont censées le définir. Lorenz pose dans son article une question plus radicale : ces moyennes existent-elles ? Rien, affirme Lorenz, ne nous assure que ces moyennes existent donc, selon la définition qu'il donne de climat, que le climat même existe[54]. Pour aborder le problème de l'existence du climat (la moyenne à long terme), Lorenz étudie l'itération quadratique connue comme «équation logistique». L'expression de cette itération est la suivante : $X_{n+1} = X_n\, a(1\text{-}X_n)$, où X

[51] Impossibilité qui tient au théorème d'existence et d'unicité.

[52] Lorenz, *op. cit.*, 1963, p. 140.

[53] Lorenz, *op. cit.*, 1964.

[54] Lorenz évoque le fait que, très vraisemblablement, le temps des 12 000 ans passés ne ressemble pas à celui des 12 000 ans précédents.

est une variable comprise entre 0 et 1 et a un paramètre que l'on peut faire varier de 0 à 4. Les X_n représentent les amplitudes successives, à chaque période n, d'un comportement de base périodique.

Lorenz itère l'équation pour diverses valeurs du paramètre a et il observe que, pour des petites valeurs, le système atteint un point fixe stable (dans ce cas, il l'affirme, on a affaire à un climat). Pour des valeurs plus élevées du paramètre, on observe le système osciller entre deux points (et là encore le système converge vers une moyenne). Mais pour des valeurs du paramètre plus grandes, au-delà d'une certaine valeur, le système a un comportement que Lorenz qualifie de complètement «irrégulier» (dans le sens de non-périodique). Or Lorenz n'a pas justifié physiquement le choix de cette itération et il ne prétend donc pas qu'elle ressemble effectivement à l'atmosphère du point de vue des variables représentées dans les équations. Toutefois, il conclut que, concernant le type de comportements observé, cette itération présente des ressemblances avec certains systèmes hydrodynamiques (comme ceux qu'il cite dans son article de 1963), dont le comportement varie en fonction d'un paramètre de contrôle (dans le cas en question, le rapport de rotation). Il établit une analogie entre le paramètre de contrôle de l'équation logistique et celui des expériences réelles. En fonction de la variation de ces paramètres, dans le système numérique comme dans le système expérimental, on peut assister à des comportements stationnaires, périodiques ou non périodiques.

D'un côté, nous avons montré que Lorenz pose le problème de la relation entre le comportement temporel défini par un modèle mathématique (dont les solutions sont obtenues numériquement) et les propriétés mathématiques du chaos (sensibilité aux conditions initiales et structure géométrique des attracteurs étranges). De l'autre côté, Lorenz pose ici le problème de la relation entre un modèle mathématique et un système expérimental. L'établissement de cette relation, comme nous venons de le voir, n'est pas basé sur la recherche de bonnes variables pour représenter certaines grandeurs physiques, comme la construction d'une théorie physique à la Duhem le prévoit. Lorenz se concentre en revanche sur la reconnaissance d'une analogie (Lorenz utilise le terme «ressemblance») entre les transitions d'un régime et l'autre, transitions qui se présentent tant dans le modèle mathématique que dans le système expérimental. Il s'exprime ainsi: «L'auteur pense que cette ressemblance n'est pas purement accidentelle, mais que l'équation aux différences finies capture la mathématique, sinon la physique, de la transition entre un régime et l'autre et, à vrai dire, du phénomène d'instabilité dans sa globalité[55].»

3] Discussion

En étudiant les articles de Lorenz, nous avons vu comment une déduction mathématique analogue à celle considérée par Duhem, mais pour le cas dissipatif, s'est révélée finalement utile pour le physicien.

Lorenz commence son article sur une déduction mathématique comparable à celle de l'exemple de Duhem. Il s'agit d'une classification des systèmes dissipatifs dans l'espace des phases, sur la base des propriétés de leurs trajectoires. Lorenz en déduit, comme Duhem, que cette propriété peut avoir des conséquences remarquables lorsqu'on souhaite faire des prévisions pratiques, du fait de la sensibilité aux conditions initiales.

Mais Lorenz ne s'arrête pas à l'impossibilité de faire des prédictions sur des trajectoires, au contraire, la prise en compte théorique de la propriété de sensibilité aux conditions initiales ouvre, pour lui, un questionnement : des solutions non périodiques existent-elles ? La question se pose pour Lorenz tant du point de vue mathématique que du point de vue physique, c'est-à-dire du point de vue de l'existence de systèmes matériels présentant cette propriété.

Affirmer du point purement mathématique que des solutions non périodiques existent est une tâche délicate pour Lorenz, au vu de l'impossibilité de fournir une solution analytique pour le système traité et de devoir recourir à des solutions numériques, qui comportent des *round-off*. Un paragraphe de l'article de Lorenz est voué à évaluer la pertinence des solutions numériques pour évaluer si les solutions numériques représentent fidèlement les solutions du système d'origine[56].

De l'analyse que je propose de l'article de Lorenz, il émerge que les solutions numériques fournissent quelque chose de très utile pour explorer les propriétés des systèmes instables, dans l'hypothèse que, à la fois les systèmes mathématiques, les séries numériques obtenues par le calcul numérique et les observations à partir de systèmes physiques partagent tous quelques propriétés communes.

[55] Lorenz, *op. cit.*, 1964.

[56] Comme évoqué dans la section précédente, nous avons aujourd'hui à ce sujet, pour les systèmes hyperboliques, les théorèmes de *shadowing*.

C'est cette conviction qui peut dispenser de se concentrer sur le pouvoir représentationnel des variables impliquées dans le système de Lorenz, pour se concentrer sur des propriétés dynamiques simples, capturées par des modèles de type itération (par exemple l'itération logistique), qui semblent contenir l'essentiel pour comprendre le comportement dynamique du système et permettent aussi de récupérer une certaine forme de prédictibilité.

D'une part, l'utilisation des solutions numériques permet à Lorenz d'étudier en détail certaines propriétés dynamiques du système, grâce à une analyse dans l'espace des phases – et d'obtenir un certain degré de prédictibilité sur ces propriétés grâce à l'utilisation d'itérations simples. D'autre part, la reconnaissance que des comportements physiques observables peuvent se présenter comme erratique encourage Lorenz à considérer son étude comme pertinente pour l'étude de la convection thermique dans l'atmosphère, sur la base de l'établissement d'une analogie entre comportements dynamiques sous la variation d'un paramètre de contrôle.

Comme Duhem le théorise dans son livre concernant la structure d'une théorie physique, Lorenz travaille dans l'établissement d'un jeu relationnel entre théorie mathématique et observations expérimentales. Cet établissement peut se faire par l'intermédiaire des trajectoires calculées numériquement.

L'analyse des travaux de Lorenz met en lumière des pratiques conceptuelles pertinentes, qui savent « voir juste » sans avoir connaissance des théorèmes qui justifieraient toutes les étapes du travail mené – pratiques conceptuelles qui, en quelque sorte, anticipent des résultats qui seront conceptualisés ultérieurement.

Remerciements. L'auteur souhaite remercier Philippe Huneman et Sebastien Dutreuil pour leurs remarques sur une version antérieure de ce texte.