¿Cómo utilizar el Teorema de Herbrand para decidir la validez de razonamientos en lenguaje de primer orden, en conformidad con el Teorema de Indecidibilidad de Church?

Franklin Galindo y María Alejandra Morgado
(Universidad Central de Venezuela)

UCV ESCUELA DE FILOSOFÍA
apuntes filosóficos
Vol. 28 No. 55

¿Cómo utilizar el Teorema de Herbrand para decidir la validez de razonamientos en lenguaje de primer orden, en conformidad con el Teorema de Indecidibilidad de Church?

How to use the Herbrand's Theorem to decide the validity of reasoning on first order language, in accordance whit Church's Undecidability's Theorem?

Franklin Galindo y María Alejandra Morgado
(Universidad Central de Venezuela)

Artículo recibido: 22 de octubre de 2019.

Arbitrado: 13 de noviembre de 2019.

Resumen: El objetivo de este artículo es presentar cuatro ejemplos de aplicación del Teorema de Herbrand para decidir la validez de razonamientos en lenguaje de primer orden, en conformidad con el Teorema de Indecidibiliad de Church. Y además decir cuál es el principal problema que se presenta al respecto. En este artículo se trabaja con el cálculo lógico por resolución[1], un método utilizado en inteligencia artificial[2].

Palabras clave: Decidibilidad, Herbrand, Indecidibilidad, Church, Cálculo Por Resolución.

Abstract: This article's objetive is to present four application examples of Herbrand's theorem to decide the validity of reasoning on first order language, in accordance whit Church's Undecidability's theorem. Also, to tell which is the principal problem around it. The logical resolution calculus will be worked on this article, which is a method used in artificial intelligence.

Keywords: Undecidability, Herbrand, Church, Resolution Calculus.

[1] Vale la pena resaltar que el procedimiento para probar la validez de un razonamiento utilizando el teorema de Herbrand es independiente de cualquier sistema de cálculo de la lógica proposicional, por ejemplo, cálculo por resolución, tablas de verdad, forma normal conjuntiva, deducción natural, tablas semánticas, etc.

[2] MANZANO, María y HUERTAS, Antonia. *Lógica para principiantes*, Madrid, Alianza Editorial, 2004.
RUSSELL, Stuart y NORVING, Peter. *Inteligencia Artificial. Un enfoque moderno*. (2a Ed.), Madrid: Pearson Educación, S.A, 2004.

Como es bien sabido, la lógica de primer orden es indecidible. La propiedad meta-teórica de decidibilidad en cualquier sistema deductivo consiste en la presencia de un procedimiento mecánico o algorítmico que permita decidir, en un número finito de pasos, para una fórmula cualquiera A, si esa fórmula es o no deducible en el sistema; es decir, si A es, o no, un teorema formal del sistema; o, en términos semánticos: dada una fórmula A, si ella es válida o no es válida. Esto fue demostrado por Alonzo Church en 1936 mediante un teorema que, en líneas generales, establece que "no existe un procedimiento efectivo que permita resolver el problema de la decisión en la lógica de primer orden"[3]. De manera que, a la hora de querer demostrar la validez o invalidez de una fórmula dada en la lógica de primer orden se puede presentar el problema de la decisión, es decir, la imposibilidad de poder decidir la validez o invalidez de la fórmula en cuestión.

El teorema de indecidibilidad de Church afirma que la lógica de primer orden, considerada como un todo es indecidible. Sin embargo, hay que tener en cuenta que hay determinadas zonas de esta lógica que, considerados de forma aislada, son decidibles. Pero antes de exponer cuáles son estas zonas de solución parcial positiva al problema de la decisión de la lógica de primer orden es pertinente presentar unas observaciones generales sobre los métodos de ataque al problema de la decisión y los criterios de distribución de dichas zonas[4].

El teorema de completitud de Kurt Gödel (1930) se puede enunciar de la siguiente manera: Sea Γ un conjunto de sentencias en un lenguaje L y φ una sentencia, si $\Gamma \vDash \varphi$, entonces $\Gamma \vdash \varphi$[5], hace posible el paso de la validez (verdad) lógica a la deducibilidad. Ya que allí se afirma que todas las sentencias válidas de primer orden son deducibles en el sistema axiomático, esto sirve, en cierto sentido, para abordar el problema de la decisión, ya que si se cuenta con un algoritmo que determine mecánicamente la validez de una fórmula, entonces se da por resuelto el problema de la deducibilidad de esa fórmula en función del mencionado paso (que se da de la completitud a la deducibilidad). Cabe mencionar que la lógica proposicional se presta de esta estrategia mediante el uso de tablas de verdad, tablas semánticas, forma normal conjuntiva, entre otras. Por lo tanto, también es útil, en la lógica de primer orden, buscar un método que determine la validez,

[3] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica*, Madrid, Editorial Tecnos, 2005. Pp. 357.
[4] *Ibíd.* p. 357.
[5] DA SILVA, Ricardo, *El problema de la indecidibilidad de la Lógica de primer orden y el Programa de David Hilbert,* Caracas, Universidad Central de Venezuela, 2014. p. 46.

en vez de la deducibilidad, de una fórmula. Dicho método no puede ser el método de tablas de verdad, ya que no es aplicable a este tipo de lógica. Sin embargo, hay un método que reduce el problema de establecer la validez de una fórmula en la lógica de primer orden, al problema de establecer la validez (tautologicidad) de fórmulas enunciativas equivalentes[6]. Este procedimiento es el propio de la *forma normal prenexa* y *forma normal de Skolem* y es fundamentado por el teorema de Herbrand y el algoritmo de unificación[7], los cuales se expondrán más adelante.

Por otro lado, el concepto semántico de satisfacibilidad está íntimamente conectado con el de verdad o validez. Por lo que a veces resulta más fácil contar con un algoritmo que decida la satisfacibilidad o insatisfacibilidad de una fórmula, que la de directamente la de un algoritmo que decida directamente la validez. Como en el caso de las tablas semánticas y el cálculo por resolución, cuyo caso de la lógica de primer orden, deciden la insatisfacibilidad (ausencia de un contraejemplo) de su negación[8]. En el presente artículo se utilizará como método de cálculo lógico para la decisión de validez al cálculo por resolución.

Dicho esto, es pertinente mencionar los criterios de las zonas de distribución parcial del problema de la decisión en el cálculo de primer orden, los cuales son:

1. La cardinalidad del universo de referencia: Donde la cardinalidad de un universo (dominio) se entiende por el número de individuos que lo integran. Ésta puede ser finita o infinita, cuando el universo al que refieren las fórmulas es finita, entonces la lógica de predicados se reduce a una extensión trivial de la lógica proposicional, y el problema de la decisión, en este caso, se reduce a un problema de construcción de tablas de verdad. Pero cuando el universo al que se refieran las fórmulas de la lógica de primer orden tenga una cardinalidad infinita (como en el caso de la aritmética), entonces se debe tomar en cuenta el segundo factor, explicado a continuación[9].

2. El carácter exclusivamente monádico de los predicados que componen la fórmula: Dentro de la lógica de primer orden hay que diferenciar dos estratos: La lógica monádica, donde

[6] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica, op. cit.* p. 357.
[7] Se pueden encontrar en el libro: NERODE, Anil y SHORE, Richard, *Logic for applications*, New York, Springer, (1997).
[8] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica, op. cit.* pp. 357-358.
[9] *Ibíd.* p. 358.

no se presentan predicados poliádicos; y la lógica poliádica, donde si intervienen estos predicados. La primera, considerada de forma aislada, es decidible, con cualquiera que sea su universo de referencia. Un método que permite decidir la lógica de este tipo se explica mediante el *teorema de Löwenheim*, el cual permite reducir el problema de decisión al contexto de universos finitos. Mientras que en la segunda, no existe solución alguna al problema de la decisión. Sin embargo, hay clases de fórmulas, que aun siendo poliádicas son decidibles, una investigación de fragmentos decidibles e indecidibles de la lógica de primer orden se realiza usando *forma normal prenexa* y observando su prefijo[10]. En el texto de Church *Introduction to mathematical logic,* en el libro de Hilbert y Ackermann *Elementos de la lógica teórica* y en el artículo de Mosterín *El problema de la decisión en la lógica de predicados*, existen variados ejemplos de fragmentos decidibles e indecidibles de la lógica de primer orden.

Dicho esto, Manuel Garrido[11] desglosa el tema de la solución parcial al problema de la decisión de la Lógica de primer orden en los siguientes puntos:

- Decidibilidad de las fórmulas en un universo finito.
- L-validez, *n*-validez y satisfacibilidad.
- Forma normal prenexa.
- Decidibilidad de la lógica de primer orden de predicados monádicos (Teorema de Löwenheim).
- Clases de fórmulas decidibles en la lógica de predicados poliádicos. Reducciones del problema de la decisión.

Teorema de Herbrand

Como ya se mencionó, el teorema de Herbrand es considerado como uno de los fundamentos que permite resolver parcialmente el problema de la decisión en la lógica de primer orden (ya que por el teorema de indecidibilidad de Church, no se puede para todos los casos). Gracias a este teorema se puede relacionar la validez de la lógica de primer orden con la tautologicidad de la lógica proposicional, es decir, se caracteriza la "validez" de toda la lógica de

[10] *Ibíd*. p. 359.
[11] *Ibíd*. p. 360.

primer orden usando "tautologicidad" en la lógica proposicional, pero de manera no decidible, pues no se ofrece un algoritmo para calcular lo *n* términos.

El teorema que se usa (que se demuestra usando el teorema de Herbrand)[12] es el siguiente:

Teorema: Sea φ una sentencia en forma normal prenexa en un lenguaje $\mathscr{L}$ (del cálculo de predicados poliádicos sin identidad), ψ una prenexa equivalente de ¬ φ y θ ($\vec{x}$) una Skolemizacion abierta de ψ en el lenguaje $\mathscr{L}$'. Entonces φ es válida si y solo si hay términos $\vec{t}_1 \ldots \vec{t}_n$, de $\mathscr{L}$' tal que $\neg\, \theta\, (\vec{t}_1) \vee \ldots \vee \neg\, \theta\, (\vec{t}_n)$ es una tautología.

Más adelante se presentará una aplicación de este teorema para la decisión de validez de cuatro fórmulas en lenguaje de primer orden. En dichos ejemplos se buscará reducir dicho lenguaje al de la Lógica proposicional para luego aplicar uno de los métodos de decisión de validez propios de esta (en este caso el cálculo por resolución).

Cálculo por resolución

El cálculo por resolución es un método para calcular la validez de un razonamiento basado en la refutación. Por lo tanto, para demostrar que C se deriva de Γ, se demuestra que $\Gamma\cup\{\neg C\}$ es insatisfacible. Es decir, que se trata de derivar una contradicción a partir de $\Gamma\cup\{\neg C\}$, construyendo una cadena de razonamiento donde el paso de una fórmula a otra se hace aplicando una regla deductiva, llamada regla de resolución. Dicha regla refleja un principio de razonamiento informal y para obtener la contradicción se habrá de construir una cadena de razonamiento o esquema de razonamiento utilizando esa regla[13].

Como este cálculo se presta únicamente de una regla deductiva, las fórmulas a demostrar se habrán de convertir a una forma especial, de modo que permita su aplicación. Por lo tanto, antes de correr cualquier prueba, se deben modificar las fórmulas de $\Gamma\cup\{\neg C\}$ con unas reglas de conversión. La forma especial de la fórmula se llama forma clausular, la cual consiste en la

[12] La versión original del Teorema de Herbrand no se expone en el presente artículo. El que se presenta aquí se demuestra usando el Teorema de Herbrand (cuya formulación y demostración puede encontrarse en el texto de Nerode Anil y Shore Richard. *Logic for applications*. New York: Springer, 1997, entre otros) y que precisamente es la respuesta a la pregunta ¿cómo utilizar el teorema de Herbrand para decidir la validez de razonamientos en primer orden, en conformidad con el teorema de indecibilidad de Church? por lo tanto la versión utilizada es suficiente para el objetivo planteado.

[13] MANZANO, María y HUERTAS, Antonia, *Lógica para principiantes*, *op. cit*. p. 350.

conjunción de todas las cláusulas de una fórmula A. Una cláusula es una fórmula con forma lógica de disyunción y donde sus componentes son literales (esto es, fórmulas atómicas o la negación de ellas). La cláusula [⊥] se llama contradicción o cláusula vacía[14].

Para construir una prueba se hace primero una conversión de las fórmulas a su *forma clausular*, o también llamada *forma normal conjuntiva* (FNC), la cual es definida por Manzano y Huertas de la siguiente manera: una fórmula está en *forma normal conjuntiva* si y solo si es de la forma

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$$

Con $n \geq 1$, donde cada A_i (para cada i $\in \{1,\ldots, n\}$) es una disyunción de literales.

Según las autoras[15] este cálculo tiene las siguientes características:

- Es un procedimiento simple y mecanizable que permite probar la validez de una fórmula por medio de la refutación de la misma.
- Permite probar la inconsistencia de un conjunto de fórmulas al mostrar que la conjunción de sus fórmulas es insatisfacible.
- Es útil para verificar si una fórmula φ es consecuencia de un conjunto de premisas Γ construyendo una prueba por refutación de $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$.
- Tiene como única regla deductiva a la regla de resolución, la cual es la misma que en la lógica proposicional, a saber: de $A \vee B$ y $\neg A \vee C$, se deduce $B \vee C$.

Es importante mencionar que Robinson (creador de este cálculo) se sirvió del Teorema de Herbrand para fundamentar su principio de resolución. Dicho fundamento consiste en establecer que, si una fórmula es satisfacible, es posible calcular para las cláusulas correspondientes un modelo determinado llamado "modelo de Herbrand", que las satisface. Si se demuestra por resolución que ese conjunto de cláusulas no tiene modelo de Herbrand, entonces la fórmula original no es satisfacible. Por lo tanto, el método por resolución puede funcionar para establecer

---

[14] *Ibíd*. p. 350.
[15] *Ibíd*. p. 350.

por refutación la validez o invalidez de muchas (pero no todas) inferencias de lógica de predicados[16].

Aplicación del Teorema de Herbrand a cuatro ejemplos de la Lógica de primer orden

Ahora bien, la transformación de una fórmula en lenguaje de primer orden a su equivalente en lenguaje proposicional, tomando como fundamento al Teorema de Herbrand, se puede efectuar de la siguiente manera:

1. Convertir la fórmula a su *forma normal prenexa* (FNP), esto es, normalizar los cuantificadores de manera que queden al inicio de cada fórmula[17]. Es decir, una fórmula α está en FNP si, y solo si, α tiene la siguiente forma:

$$Q_1x_1,\ldots, Q_nx_n\beta$$

Donde $Q_1,\ldots, Q_n$ son cuantificadores, bien sea universales o existenciales; $x_1,\ldots, x_n$ son variables y β es una fórmula libre de cuantificadores. De esta forma, la reunión de cuantificadores al inicio de la fórmula se le denomina prefijo, mientras que β recibe el nombre de matriz. Por otro lado, los cuantificadores de una FNP no está negados y el alcance de estos afecta a toda la fórmula[18].

Es pertinente mencionar que existe un teorema que afirma que para toda fórmula α cuantificacional existe una fórmula θ en FNP que es equivalente α. Una demostración del mismo puede encontrarse en *Introduction to mathematical logic* de Mendelson.[19]

Ahora bien, tomando como referencia a Da Silva[20] y a Garrido[21], a continuación se expondrá un procedimiento que permite trasformar una fórmula de la *Lógica de primer orden* a su FNP:

a) Se deben eliminar todos los implicadores y coimplicadores en función de las leyes de definición de implicador y eliminación de coimplicador, las cuales son:

[16] Garrido Manuel, *Lógica Simbólica*, *op. cit*. p. 431.
[17] *Ibíd*. p. 362
[18] Da Silva Ricardo, *El problema de la indecidibilidad de la Lógica de primer orden…, op. cit.* pp. 102- 103.
[19] *Ibíd*. p. 103.
[20] *Ibíd*. pp. 103- 105.
[21] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica*, *op. cit.* pp. 362- 364.

(R1) $A \leftrightarrow B \leftrightarrow [(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)]$

(R2) $A \rightarrow B \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$

(R3) $A \rightarrow B \leftrightarrow (\neg A \vee B)$

b) Se interiorizan los negadores que afecten directamente a los cuantificadores, para ello se consideran las leyes de negación de cuantificadores, a saber:

(R4) $\neg\forall x Px \leftrightarrow \exists x \neg Px$

(R5) $\neg\exists x Px \leftrightarrow \forall x \neg Px$

c) Se interiorizan los negadores que ocurran como resultado de las anteriores transformaciones, con la finalidad de que cada negador quede directamente adosado a una fórmula atómica. Para llevar a cabo este paso, se debe recurrir a las leyes de De Morgan:

(R6) $\neg(A \wedge B) \leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

(R7) $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$

d) Se exteriorizan los cuantificadores existentes respecto a toda conjunción y disyunción, considerando las cuatro reglas de distribución condicionada de cuantificador en conjunción y disyunción, a saber:

(R8) Dist.Cond.G-$\wedge$: $A \wedge \forall x Px \leftrightarrow \forall x (A \wedge Px)$

(R9) Dist.Cond.P-$\wedge$: $A \wedge \exists x Px \leftrightarrow \exists x (A \wedge Px)$

(R10) Dist.Cond.G-$\vee$: $A \vee \forall x Px \leftrightarrow \forall x (A \vee Px)$

(R11) Dist.Cond.P-$\vee$: $A \vee \exists x Px \leftrightarrow \exists x (A \vee Px)$

Cabe acotar que para la aplicación de estas cuatro leyes se debe cumplir la condición de que x no esté como variable libre en A. Si este fuera el caso se deben aplicar previamente las reglas de mutación de variables ligadas, con la finalidad de que una tal ocurrencia de x no sea capturada por el cuantificador a exteriorizar, dichas reglas son:

(R12)MVG: $\forall x Px \leftrightarrow \forall y Py$

(R13)MVP: $\exists x Px \leftrightarrow \exists y Py$

e) Con la finalidad de reducir la fórmula lo más que se pueda, se emplearán también las reglas de eliminación de la doble negación y la ley conmutativa de la conjunción y de la disyunción:

(R14) $\neg\neg A \leftrightarrow A$

(R15) $A \wedge B \leftrightarrow B \wedge A$

(R16) $A \vee B \leftrightarrow B \vee A$

f) Este paso es opcional y puede aplicarse para mantener la simpleza en el lenguaje de las fórmulas a normalizar a cambio de aumentar el número de reglas de transformación. Con esto se puede omitir el primer paso en pro de la introducción de las siguientes reglas:

(R17) Dist.Cond.G→1: $\forall x\,(A \rightarrow Px) \leftrightarrow (A \rightarrow \forall xPx)$

(R18) Dist.Cond.P→1: $(A \rightarrow \exists xPx) \leftrightarrow \exists x\,(A \rightarrow Px)$

(R19) Dist.Cond.P→2: $(\forall xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \exists x\,(Px \rightarrow A)$

(R20) Dist.Cond.G→2: $(\exists xPx \rightarrow A) \leftrightarrow \forall x\,(Px \rightarrow A)$

(R21) DGC: $\forall x\,(Px \wedge Qx) \leftrightarrow \forall xPx \wedge \forall xQx$

(R22) DPD: $\exists x\,(Px \vee Qx) \leftrightarrow \exists xPx \text{ v } \exists xQx$

(R23) DPI1: $\exists x\,(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall xPx \rightarrow \exists xQx)$

El procedimiento para calcular la FNP de una fórmula es efectivamente calculable, es decir, que el mismo termina tras un número finito de pasos. Esto se debe a que la fórmula inicial cuenta con elementos finitos, así como también es finito el número de reglas a aplicar[22]. Para comprender mejor el procedimiento acabado de explicar se expondrán algunos ejemplos a continuación:

Ejemplo 1. Encontrar la FNP de la siguiente fórmula:

$$[\forall x(Qx \rightarrow Rx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Rx)$$

1) $[\forall x(Qx \rightarrow Rx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \forall x(Px \rightarrow Rx)$ **Fórmula inicial**

2) $\neg[\forall x(\neg Qx \vee Rx) \wedge \forall x(\neg Px \vee Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee Rx)$ **(R3)**

[22] DA SILVA, Ricardo, *El problema de la indecidibilidad de la Lógica de primer orden…,op. cit.* p. 105.

3)	$[\neg\forall x(\neg Qx \vee Rx) \vee \neg\forall x(\neg Px \vee Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee Rx)$	**(R6)**
4)	$[\exists x\neg(\neg Qx \vee Rx) \vee \exists x\neg(\neg Px \vee \neg Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee Rx)$	**(R4)**
5)	$[\exists x(\neg\neg Qx \wedge \neg Rx) \vee \exists x(\neg\neg Px \wedge \neg Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee Rx)$	**(R7)**
6)	$[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \exists x(Px \wedge \neg Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee Rx)$	**(R14)**
7)	$[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \exists y(Py \wedge \neg Qy)] \vee \forall x(\neg Px \vee Rx)$	**(R13) *x/y***
8)	$[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \exists y(Py \wedge \neg Qy)] \vee \forall z(\neg Pz \vee Rz)$	**(R12) *x/z***
9)	$\forall z[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \exists y(Py \wedge \neg Qy) \vee (\neg Pz \vee Rz)]$	**(R10)**
10)	$\forall z\exists y[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee (\neg Pz \vee Rz)]$	**(R11)**
11)	$\forall z\exists y\exists x[(Qx \wedge \neg Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee (\neg Pz \vee Rz)]$	**(R11) FNP**

Ejemplo 2. Encontrar la FNP de la siguiente fórmula:

$$[\forall x(Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$$

1)	$[\forall x(Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \forall x(Px \rightarrow Qx)] \rightarrow \forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$	**Fórmula inicial**
2)	$\neg[\forall x(\neg Qx \vee \neg Rx) \wedge \forall x(\neg Px \vee Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Rx)$	**(R3)**
3)	$[\neg\forall x(\neg Qx \vee \neg Rx) \vee \neg\forall x(\neg Px \vee Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Rx)$	**(R6)**
4)	$[\exists x\neg(\neg Qx \vee \neg Rx) \vee \exists x\neg(\neg Px \vee Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Rx)$	**(R4)**
5)	$[\exists x(\neg\neg Qx \wedge \neg\neg Rx) \vee \exists x(\neg\neg Px \wedge \neg Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Rx)$	**(R7)**
6)	$[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \exists x(Px \wedge \neg Qx)] \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Rx)$	**(R14)**
7)	$[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \exists y(Py \wedge \neg Qy)] \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Rx)$	**(R13) *x/y***
8)	$[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \exists y(Py \wedge \neg Qy)] \vee \forall z(\neg Pz \vee \neg Rz)$	**(R12) *x/z***
9)	$\forall z[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \exists y(Py \wedge \neg Qy) \vee (\neg Pz \vee Rz)]$	**(R10)**
10)	$\forall z\exists y[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee (\neg Pz \vee \neg Rz)]$	**(R11)**
11)	$\forall z\exists y\exists x[(Qx \wedge Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee (\neg Pz \vee \neg Rz)]$	**(R11) FNP**

Ejemplo 3. Encontrar la FNP de la siguiente fórmula:

$$[\forall x(Qx \rightarrow Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)] \rightarrow \exists x(Px \wedge Rx)$$

1)	$[\forall x(Qx \rightarrow Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)] \rightarrow \exists x(Px \wedge Rx)$	**Fórmula inicial**
2)	$\neg[\forall x(\neg Qx \vee Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)] \vee \exists x(Px \wedge Rx)$	**(R3)**
3)	$[\neg\forall x(\neg Qx \vee Rx) \vee \neg\exists x(Px \wedge Qx)] \vee \exists x(Px \wedge Rx)$	**(R6)**

4) $[\exists x\neg(\neg Qx \vee Rx) \vee \forall x\neg(Px \wedge Qx)] \vee \exists x(Px \wedge Rx)$ **(R5) *y* (R4)**

5) $[\exists x(\neg\neg Qx \wedge \neg Rx) \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Qx)] \vee \exists x(Px \wedge Rx)$ **(R7) *y* (R6)**

6) $[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Qx)] \vee \exists x(Px \wedge Rx)$ **(R14)**

7) $[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \forall y(\neg Py \vee \neg Qy)] \vee \exists x(Px \wedge Rx)$ **(R12) *x/y***

8) $[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \forall y(\neg Py \vee \neg Qy)] \vee \exists z(Pz \wedge Rz)$ **(R13) *x/z***

9) $\exists z[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee \forall y(\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge Rz)]$ **(R11)**

10) $\exists z\forall y[\exists x(Qx \wedge \neg Rx) \vee (\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge Rz)]$ **(R10)**

11) $\exists z\forall y\exists x[(Qx \wedge \neg Rx) \vee (\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge Rz)]$ **(R11)FNP**

Ejemplo 4. Encontrar la FNP de la siguiente fórmula:

$$[\forall x(Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)] \rightarrow \exists x(Px \wedge \neg Rx)$$

1) $[\forall x(Qx \rightarrow \neg Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)] \rightarrow \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **Fórmula inicial**

2) $\neg[\forall x(\neg Qx \vee \neg Rx) \wedge \exists x(Px \wedge Qx)] \vee \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **(R3)**

3) $[\neg\forall x(\neg Qx \vee \neg Rx) \vee \neg\exists x(Px \wedge Qx)] \vee \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **(R6)**

4) $[\exists x\neg(\neg Qx \vee \neg Rx) \vee \forall x\neg(Px \wedge Qx)] \vee \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **(R4) *y* (R5)**

5) $[\exists x(\neg\neg Qx \wedge \neg\neg Rx) \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Qx)] \vee \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **(R4) *y* (R5)**

6) $[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \forall x(\neg Px \vee \neg Qx)] \vee \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **(R14)**

7) $[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \forall y(\neg Py \vee \neg Qy)] \vee \exists x(Px \wedge \neg Rx)$ **(R12) *x/y***

8) $[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \forall y(\neg Py \vee \neg Qy)] \vee \exists z(Pz \wedge \neg Rz)$ **(R13) *x/z***

9) $\exists z[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee \forall y(\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$ **(R11)**

10) $\exists z\forall y[\exists x(Qx \wedge Rx) \vee (\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$ **(R10)**

11) $\exists z\forall y\exists x[(Qx \wedge Rx) \vee (\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$ **(R11) FNP**

2. Una vez obtenida la FNP de la fórmula en cuestión, se procederá a negarla. De esta manera, la FNP negada de los cuatro ejemplos anteriores sería:

Ejemplo 1: $\neg\forall z\exists y\exists x[(Qx\wedge\neg Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee Rz]$

Ejemplo 2: $\neg\forall z\exists y\exists x[(Qx\wedge Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee\neg Rz]$

Ejemplo 3: $\neg\exists z\forall y\exists x[(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge Rz)]$

Ejemplo 4: $\neg\exists z\forall y\exists x[(Qx \wedge Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$

3. Una vez negada la FNP se procede a introducir el negador a la matriz, de manera que ningún cuantificador quede atado a una negación. Para llevar a cabo este paso se utilizan las reglas **(R4)** y **(R5)** según convenga. Siguiendo los mismo ejemplos:

Ejemplo 1:

$\neg\forall z\exists y\exists x[(Qx\wedge\neg Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee Rz]$	**FNP negada**
$\exists z\neg\exists y\exists x[(Qx\wedge\neg Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee Rz]$	**(R4)**
$\exists z\forall y\neg\exists x[(Qx\wedge\neg Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee Rz]$	**(R5)**
$\exists z\forall y\forall x\neg [(Qx\wedge\neg Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee Rz]$	**(R5)**

Ejemplo 2:

$\neg\forall z\exists y\exists x[(Qx\wedge Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee\neg Rz]$	**FNP negada**
$\exists z\neg\exists y\exists x[(Qx\wedge Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee\neg Rz]$	**(R4)**
$\exists z\forall y\neg\exists x[(Qx\wedge Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee\neg Rz]$	**(R5)**
$\exists z\forall y\forall x\neg [(Qx\wedge Rx) \vee (Py\wedge\neg Qy)\vee\neg Pz\vee\neg Rz]$	**(R5)**

Ejemplo 3:

$\neg\exists z\forall y\exists x[(Qx \wedge \neg Rx) \vee (\neg Py \vee \neg Qy) \vee (Pz \wedge Rz)]$	**FNP negada**
$\forall z\neg\forall y\exists x[(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge Rz)]$	**(R5)**
$\forall z\exists y\neg\exists x[(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge Rz)]$	**(R4)**
$\forall z\exists y\forall x\neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge Rz)]$	**(R5)**

Ejemplo 4:

$\neg\exists z\forall y\exists x[(Qx \wedge Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$	**FNP negada**
$\forall z \neg\forall y\exists x[(Qx \wedge Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$	**(R5)**
$\forall z \exists y\neg\exists x[(Qx \wedge Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$	**(R4)**
$\forall z \exists y\forall x\neg [(Qx \wedge Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$	**(R5)**

4. El siguiente paso es eliminar los cuantificadores existenciales por medio de una técnica de normalización expuesta por el lógico Thoralf Skolem (1887-1963). Dicha técnica establece que, si el cuantificador existencial no va precedido de ningún cuantificador universal que lo

incluya en su alcance, este puede eliminarse, sustituyendo su variable ligada por un parámetro o nombre nuevo de individuo, el cual se le llama *constante de Skolem*. Por su parte, si el existencial va precedido por uno o más cuantificadores universales que lo incluyen en su alcance, este puede eliminarse sustituyendo su variable ligada por un nombre nuevo de función cuyos argumentos sean la o las variables a las que afecten los referidos cuantificadores (*función de Skolem*)[23]. Por ejemplo:

$\exists x \forall y Pxy$ se reescribe $\forall y Pay$
$\forall x \exists y Pxy$ se reescribe $\forall y Pxf(x)$
$\forall x \forall y \exists z Pxyz$ se reescribe $\forall x \forall y Pxyf(x, y)$[24].

En honor a su creador, dicho proceso se le llama *skolemización*. Cabe destacar que la fórmula resultante no es equivalente lógicamente a la original. Sin embargo, se podría decir que su potencialidad deductiva, o mejor dicho refutativa le es al menos equivalente. Es decir, que si la fórmula inicial es inconsistente, y por lo tanto, insatisfacible, entonces su resultante también lo será. Por lo que bastará para establecer la prueba por refutación[25].

La *skolemización* de las cuatro fórmulas expuestas en los ejemplos anteriores sería:

Ejemplo 1:

$\exists z \forall y \forall x \neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pz \vee Rz]$
Skolemización: $\forall y \forall x \neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pa \vee Ra]$

Ejemplo 2:

$\exists z \forall y \forall x \neg [(Qx \wedge Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pz \vee \neg Rz]$
Skolemización:$\forall y \forall x \neg [(Qx \wedge Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pa \vee \neg Ra]$

Ejemplo 3:

$\forall z \exists y \forall x \neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge Rz)]$
Skolemización: $\forall z \forall x \neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Pf(z) \vee \neg Qf(z) \vee (Pz \wedge Rz)]$

[23] GARRIDO, Manuel. *Lógica Simbólica, op. cit.*
[24] *Ibíd.*
[25] *Ibíd.*

Ejemplo 4:

$\forall z\ \exists y \forall x \neg\ [(Qx \wedge Rx) \vee \neg Py \vee \neg Qy \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$

Skolemización: $\forall z\ \forall x \neg\ [(Qx \wedge Rx) \vee \neg Pf(z) \vee \neg Qf(z) \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$

5. Una vez eliminado los existenciales, por medio de la *skolemización*, los universales pueden ser omitidos considerando por implícita o supuesta su presencia[26]. Siguiendo con los mismos ejemplos:

Ejemplo 1: $\neg\ [(Qx \wedge \neg Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pa \vee Ra]$

Ejemplo 2: $\neg\ [(Qx \wedge Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pa \vee \neg Ra]$

Ejemplo 3: $\neg\ [(Qx \wedge \neg Rx) \vee \neg Pf(z) \vee \neg Qf(z) \vee (Pz \wedge Rz)]$

Ejemplo 4: $\neg\ [(Qx \wedge Rx) \vee \neg Pf(z) \vee \neg Qf(z) \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$

6. El próximo paso consiste en la *sustitución* y *unificación*. La sustitución consiste en cambiar los símbolos de variables por términos (constante individual, otra variable individual o una función). Debe hacerse de manera uniforme, es decir, por el mismo término en todas las ocurrencias de la variable sustituida en la cláusula donde tiene lugar la operación. Al momento de sustituir hay que tener en cuenta que el término que vaya a sustituir no incluya variables ya presentes en la cláusula en la que va a entrar[27]. Otra forma de definir esta operación es como una función donde a cada término, a cada variable y a cada expresión se le asigna una nueva expresión que resulta de sustituir la variable por el término en la expresión original. Normalmente esta operación consiste en borrar la variable y poner en su lugar a un término[28].

Por su parte, la unificación[29] se aplica cuando se presenta un conjunto de cláusulas que hay que transformar mediante una serie de sustituciones para poder aplicarles la resolución. Se dice que dos expresiones son unificables si hay alguna sustitución que permite convertirlas en idénticas y se le llama unificador a la sustitución que lo consigue[30]. En otras palabras, unificar dos expresiones skolemizadas consiste en aplicar una sustitución que permita hacerlas idénticas o

[26] *Ibíd.*
[27] *Ibíd.* p. 427.
[28] MANZANO, María y HUERTAS, Antonia, *Lógica para principiantes*, *op. cit.* p. 352.
[29] Este es el principal problema que se presenta en el momeno de aplicar el Teorema de Herbrand.
[30] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica*, *op. cit.* P. 427.

adecuadas para aplicar la regla de resolución. Por su parte, un unificador es una secuencia de sustituciones que unifica las expresiones de las cláusulas.[31]

La mecanización del método de *unificación*, que a su vez supone el de *sustitución*, fue la pieza clave que hizo posible que Robinson pusiera en práctica con éxito su principio de resolución. El algoritmo de unificación permite hallar el *unificador general máximo* de dos expresiones, el cual las convierte en sintácticamente idénticas. Es importante tener en cuenta que puede darse el caso de que dos expresiones no sean unificables. Por ejemplo, los términos $f(f(x))$ y $f(g(g(z))$ no lo son porque no existe una sustitución que los convierta en sintácticamente idénticos. Por otro lado, también pueden haber casos en los cuales haya más de un unificador, por ejemplo, en las clausulas Q*wz* y Q*wb* son unificables por las sustitución *z/b* y también mediante la sustitución *w/b*, *z/b*[32].

Es importante tener en cuenta que en la unificación solo se pueden sustituir variables. Es decir, una variable se puede sustituir por una constante, por una función o por otra variable. La excepción a la sustitución de una variable por cualquier término es que esta no puede sustituirse por una función de ella misma[33], por ejemplo, la variable x no puede sustituirse por $f(x)$.

Un tratamiento riguroso de la unificación, el cual describe un algoritmo para realizar la misma y también presenta la prueba de que dicho algoritmo siempre termina en algún paso finito n que pertenece a lo naturales, se puede encontrar en el texto de Nerode y Shore[34]. Como es de suponer, tal algoritmo no siempre logra unificar, a veces termina presentando el mejor resultado posible (que no es una unificación).

Retomando los ejemplos, el paso de unificación y sustitución se llevaría a cabo de la siguiente manera:

Ejemplo 1: $\neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee (Py \wedge \neg Qy) \vee \neg Pa \vee Ra]$

[31] MANZANO, María y HUERTAS, Antonia, *Lógica para principiantes*, *op. cit.* p. 352
[32] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica*, *op. cit.* pp. 427-428.
[33] MANZANO, María y HUERTAS, Antonia, *Lógica para principiantes*, *op. cit.* p. 352.
[34] NERODE, Anil. y SHORE, Richard. *Logic for applications*. New York: Springer. (1997).

En este caso se deben unificar las expresiones Q*x*y ¬Q*y*; ¬R*x*y R*a;* ¬P*a*y P*y*. Para ello se debe sustituir la variable *x* por el término *a*, así como también la variable *y* por el término *a*, de manera que:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = a \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, las cláusulas finales unificadas son:

¬ [(Q*a*∧¬R*a*) ∨ (P*a*∧¬Q*a*)∨ ¬P*a*∨ R*a*]

Ejemplo 2: ¬ [(Q*x*∧R*x*) ∨ (P*y*∧¬Q*y*)∨ ¬P*a*∨¬R*a*]

En este caso se deben unificar las expresiones Q*x*y ¬Q*y*; R*x*y ¬R*a;* ¬P*a*y P*y*. Como en el ejemplo anterior, se debe sustituir la variable *x* por el término *a*, así como también la variable *y* por el término *a*, de manera que:

$$\left.\begin{array}{l} x = a \\ y = a \end{array}\right\}$$

Por lo tanto, las cláusulas finales unificadas son:

¬ [(Q*a*∧ R*a*) ∨ (P*a*∧¬Q*a*)∨ ¬P*a*∨¬R*a*]

Ejemplo 3: ¬ [(Q*x* ∧ ¬R*x*) ∨ ¬P*f(z)* ∨ ¬Q*f(z)* ∨ (Pz ∧ Rz)]

En este caso se deben unificar las expresiones Q*x* y ¬Q*f(z)*; ¬R*x* y Rz*;* ¬P*f(z)*y Pz. Para ello, se debe hacer la siguiente sustitución:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(z) \\ z = f(z) \end{array}\right\}$$

Sin embargo, estas expresiones no van a poder unificarse ya que una variable no puede ser sustituida por una función de ella misma. Asimismo, la función *f(z)* no puede ser sustituida por un término, otra variable o por otra función, ya que son las variables las únicas que pueden ser sustituidas.

Ejemplo 4: ¬ [(Q*x* ∧ R*x*) ∨ ¬P*f(z)* ∨ ¬Q*f(z)*∨ (Pz ∧ ¬Rz)]

En este caso se deben unificar las expresiones Q*x* y ¬Q*f(z)*; R*x* y ¬Rz*;* ¬P*f(z)*y Pz. Para ello, se debe hacer la misma sustitución que en el ejemplo anterior, a saber:

$$\left.\begin{array}{l} x = f(z) \\ z = f(z) \end{array}\right\}$$

Estas expresiones tampoco van a poder unificarse por la misma razón expuesta anteriormente.

En estos dos últimos ejemplos se puede observar el carácter no decidible del procedimiento para calcular los términos. Esto significa que el método por unificación no es suficiente para encontrar los términos a sustituir y el hecho de encontrarlos puede ser una tarea muy complicada de hacer, tanto para los humanos como para las máquinas.

Decisión de validez utilizando cálculo por resolución

Una vez transformadas las fórmulas de primer orden a un lenguaje proposicional, utilizando como fundamento al Teorema de Herbrand, se procederá a demostrar si las fórmulas en cuestión son válidas o no, mediante un procedimiento de decisión propio de la Lógica proposicional, a saber, el cálculo por resolución.

Para ello, la fórmula resultante debe transformarse a su FNC. Para ello, se tomará en cuenta el algoritmo presentado en Garrido para la lógica proposicional. Sin embargo, en este caso se va a omitir el paso de eliminación de las implicaciones y coimplicaciones ya que estas fueron eliminadas mediante el cálculo de la FNP. Dicho procedimiento consiste en:

a. Normalizar los negadores. Esto es interiorizar los negadores que ocurran en el resultado de las anteriores transformaciones, de manera que cada negador afecte directamente a una fórmula atómica. Para ello se usarán las leyes de De Morgan y la de doble negación:

¬(A ∧ ¬B) ↔ ¬A ∨ ¬B **ley de De Morgan**

(¬A ∨ B) ↔ ¬A ∧ ¬B **ley de De Morgan**

¬¬ A ↔ A **Doble negación**

b. Exteriorizar los conjuntores, en todas sus ocurrencias, fuera de los paréntesis. Esto se hace mediante la ley de distribución del disyuntor en cualquiera de estas dos formas:

$A \vee (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

$(A \wedge B) \vee C \leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

Tomando en cuenta los cuatro ejemplos anteriores el cálculo de su FNC sería:

Ejemplo 1:

1. $\neg [(Qa \wedge \neg Ra) \vee (Pa \wedge \neg Qa) \vee \neg Pa \vee Ra]$
2. $\neg (Qa \wedge \neg Ra) \wedge \neg (Pa \wedge \neg Qa) \wedge \neg \neg Pa \wedge \neg Ra)$ **(R7)**
3. $(\neg Qa \vee \neg\neg Ra) \wedge (\neg Pa \vee \neg\neg Qa) \wedge Pa \wedge \neg Ra$ **(R6)**
4. $(\neg Qa \vee Ra) \wedge (\neg Pa \vee Qa) \wedge Pa \wedge \neg Ra$ **(R14). FNC de 1**

Ejemplo 2:

1. $\neg [(Qa \wedge Ra) \vee (Pa \wedge \neg Qa) \vee \neg Pa \vee \neg Ra]$
2. $\neg (Qa \wedge Ra) \wedge \neg (Pa \wedge \neg Qa) \wedge \neg \neg Pa \wedge \neg\neg Ra$ **(R7)**
3. $(\neg Qa \vee \neg Ra) \wedge (\neg Pa \vee \neg\neg Qa) \wedge Pa \wedge Ra$ **(R6)**
4. $(\neg Qa \vee \neg Ra) \wedge (\neg Pa \vee Qa) \wedge Pa \wedge Ra$ **(R14). FNC de 1**

Ejemplo 3:

1. $\neg [(Qx \wedge \neg Rx) \vee (\neg Pf(z) \vee \neg Qf(z)) \vee (Pz \wedge Rz)]$
2. $\neg (Qx \wedge \neg Rx) \wedge \neg \neg Pf(z) \wedge \neg\neg Qf(z) \wedge \neg (Pz \wedge Rz)$ **(R7)**
3. $(\neg Qx \vee \neg\neg Rx) \wedge Pf(z) \wedge Qf(z) \wedge (\neg Pz \vee \neg Rz)$ **(R6)**
4. $(\neg Qx \vee Rx) \wedge Pf(z) \wedge Qf(z) \wedge (\neg Pz \vee \neg Rz)$ **(R14). FNC de 1**

Ejemplo 4:

1. $\neg [(Qx \wedge Rx) \vee \neg Pf(z) \vee \neg Qf(z) \vee (Pz \wedge \neg Rz)]$
2. $\neg (Qx \wedge Rx) \wedge \neg \neg Pf(z) \wedge \neg\neg Qf(z) \wedge \neg (Pz \wedge \neg Rz)$ **(R7)**
3. $(\neg Qx \vee \neg Rx) \wedge Pf(z) \wedge Qf(z)) \wedge (\neg Pz \vee \neg\neg Rz)$ **(R6)**
4. $(\neg Qx \vee \neg Rx) \wedge Pf(z) \wedge Qf(z) \wedge (\neg Pz \vee Rz)$ **(R14). FNC de 1**

Una vez obtenida la FNC se procede a aplicar *la regla de resolución*. La cual se define de la siguiente manera:

De A ∨ B y ¬A ∨ C se deduce B ∨ C[35].

Siguiendo con los ejemplos anteriores, la decisión de validez usando este cálculo sería:

Ejemplo 1: (¬Q*a*∨ R*a*) ∧ (¬P*a*∨Q*a*) ∧ P*a* ∧ ¬R*a*

1. ¬Q*a* ∨ R*a*	
2. ¬P*a*∨Q*a*	
3. P*a*	
4. ¬R*a*	
5. R*a* ∨ ¬P*a*	**Resolución en 1, 2**
6. ¬P*a*	**Resolución en 4,5**
7. [⊥]	**Resolución en 3, 6**

En este ejemplo se puede observar que la prueba de resolución se cierra con una contradicción, esto significa que el conjunto de fórmulas es insatisfascible. Y por lo tanto, el razonamiento original es válido.

Ejemplo 2: (¬Q*a*∨¬R*a*) ∧ (¬P*a*∨Q*a*) ∧ P*a* ∧ R*a*

1. ¬Q*a*∨¬R*a*	
2. ¬P*a*∨Q*a*	
3. P*a*	
4. R*a*	
5. ¬R*a* ∨ ¬P*a*	**Resolución en 1, 2**
6. ¬P*a*	**Resolución en 4,5**
7. [⊥]	**Resolución en 3, 6**

[35] MANZANO, María y HUERTAS, Antonia, *Lógica para principiantes*, *op. cit*. p. 350.

En este ejemplo, se puede observar que la prueba de resolución se cierra con una contradicción, esto significa que este conjunto de fórmulas también es insatisfascible. Y por lo tanto, el razonamiento original es válido.

Ejemplo 3: $(\neg Qx \vee Rx) \wedge Pf(z) \wedge Qf(z) \wedge (\neg Pz \vee \neg Rz)$

En este caso no se puede aplicar cálculo por resolución porque no se logró unificar. Es decir, que para que la resolución pueda aplicarse a dos literales es necesario que la única diferencia entre ambos sea el negador. Por ejemplo, las expresiones Px y $\neg Pa$ no son resolubles porque no constituyen un par complementario. Pero sí lo serán si se sustituye en la primera variable *x* por la constante a[36].

Ejemplo 4: $(\neg Qx \vee \neg Rx) \wedge Pf(z) \wedge Qf(z) \wedge (\neg Pz \vee Rz)$

Tampoco se puede aplicar resolución ya que presenta el mismo problema que el ejemplo anterior. De manera que no va a poder determinarse la validez de estos argumentos utilizando el método expuesto. Estos dos últimos ejemplos dan cuenta que el problema de la decisión en la Lógica de primer orden sigue estando presente, a pesar de que haya soluciones parciales a la misma, tal como lo es el Teorema de Herbrand y sus implicaciones.

[36] GARRIDO, Manuel, *Lógica Simbólica*, *op. cit.* p. 426.