Horizons philosophiques

Multiplicités
Théorie générale de la polynomie

Yvon Gauthier

Volume 8, numéro 1, automne 1997

Le Monde de Michel Serres

URI : https://id.erudit.org/iderudit/801060ar
DOI : https://doi.org/10.7202/801060ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Collège Édouard-Montpetit

ISSN

1181-9227 (imprimé)
1920-2954 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Gauthier, Y. (1997). Multiplicités : théorie générale de la polynomie. *Horizons philosophiques*, *8*(1), 55–68. https://doi.org/10.7202/801060ar

MULTIPLICITÉS THÉORIE GÉNÉRALE DE LA POLYNOMIE

0. Introduction.

Le thème de multiplicité est central dans les travaux de Michel Serres du *Système de Leibniz* (1968) à la théorie «hermétique» de *La communication* (1969), *L'interférence* (1972) et *La traduction* (1974). Si Michel Serres a choisi de traiter ce problème leibnizien par excellence dans le style concret des «multiplicités représentatives», des «multiplicités historiques» et des «multiplicités monadiques», il n'a pas manqué de voir qu'une théorie formelle des multiplicités était possible. C'est cette théorie que je nomme polynomie, théorie des formes ou polynômes qui est présente déjà dans l'*ars combinatoria* (et la théorie des séries) et qui est omniprésente dans le savoir mathématique et physique contemporain. Mon propos est donc de reprendre le fil thématique de ce que Michel Serres appelle l'ichnographie (l'ébauche d'un dessin) dans ce que j'appellerai volontiers la polygraphie formelle, c'est-à-dire l'écriture polynomiale du multiple dont la forme générale est

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

pour des coefficients entiers a et des indéterminées x.

Polynomie désigne la multiplicité réticulaire des concepts qu'une théorie de la logique interne du discours mathématique et scientifique veut unifier dans une forme générale, la figure caténaire de l'enlacement universel ou de la convolution unique. Mais la séquence des marques est ordonnée par la suite des nombres qui évalue leur poids, situe leur emplacement et distribue leur signe. Les savoirs deviennent alors des phénomènes où la croissance s'exhibe et où le divers se déploie. Le motif secret de cette vaste spirale, le trajet téléonomique de cette «φυσις» sans fin, nous l'avons appelé «logique interne». Mais plutôt qu'une eidétique ou théorie des formes, remontant Aristote jusqu'à sa source platonicienne et au-delà, c'est la théorie des nombres ou arithmétique qui nous sert de fil conducteur dans le labyrinthe idéal des entrelacs et des connexions. Le vocabulaire de la botanique avec ses nœuds et entrenœuds, ses ramifications et ses verticilles, ses limbes et ses frondes, ses faîtes et ses rhizomes, serait sans doute plus approprié pour décrire la géométrie abstraite des cycles et hypercycles ou des ellipses et des spirales, mais le langage de métaphores exactes qu'est la mathématique sert sans doute mieux le dessein d'une théorie qui veut embrasser le paysage conceptuel plutôt que parcourir nu avec les mots sauvages d'une science descriptive les champs de l'expérience sensible qu'une nouvelle innocence aura redécouverts. C'est donc la syntaxe polynomiale qui nous servira de guide dans l'algèbre des symboles univoques, loin de la forêt sémantique d'un style philosophique trop arborescent.

La polynomie dit la théorie générale des formes (ou polynômes homogènes) et la logique interne n'est que l'énucléation du contenu des formes ou l'extraction du noyau polynomial que l'on retrouve aussi bien dans la théorie des séries infinies — séries de puissances dont le support polynomial est fini — dans la théorie des probabilités (par la distribution binomiale), dans la théorie des équations différentielles (par la notion de série encore), en théorie des nombres et en géométrie arithmétique. Non seulement les mathématiques, mais la physique, de la théorie quantique des champs à la cosmologie, est innervée par la trame polynomiale (géométrie différentielle et théorie symplectique des singularités). Ainsi, c'est bien la logique interne des formes plutôt que la logique formelle qui peut prétendre à la théorie générale du discours mathématique et scientifique. D'où le nom de polynomie, syntagme du multiple formel et arithmétique générale, *allgemeine Arithmetik*, selon l'expression de Kronecker. Les structures polynomiales sont donc, pour nous, l'architectonique des formes géométriques, le calcul exact du formel, l'algorithme interne du monde mesurable.

1. Logique.

Qu'en est-il de nouveau et enfin de la logique? De prime abord, la réponse la plus simple, c'est-à-dire la réponse traditionnelle, reprise donc par les logiciens traditionnels, répète que la logique est la théorie de l'inférence valide et de ses extensions conservatrices. L'idée de consécution, de suite, de conséquence est le cœur du problème. Conservation de quoi? Conservation du contenu dans l'uniformité, dans la même forme. L'idée d'une logique formelle se réduit à la conception d'une préservation du contenu dans la structure formelle qui absout le contenu, le transporte intact d'une forme à une autre et *ainsi de suite* jusque dans une forme finale que l'on appellera conclusion, forme terminale qui devra être *conforme* au contenu originel tout en l'accroissant d'une *information* nouvelle qui n'était pas manifeste au point de départ et qui se trouve exhibée au point d'arrivée. La syllogistique d'Aristote n'avait pas d'autre fonction que cette production «stérile», ce transport d'un contenu à la fin mis à nu dans la chaîne déductive. La syllogistique, d'où l'on a tiré la logistique, ne peut enfanter, si ce n'est des monstres (contradictions) dans le cas de la théorie des ensembles, selon la leçon retenue de Brunschvicg et Poincaré. Frege, qui avait créé une écriture plus serrée des concepts, son *Begriffschrift*, n'avait pas su régimenter assez le contenu pour l'emprisonner dans la rigidité du calcul des formes. L'inférence est un transport de proche en proche dans une concaténation sans faille — dans ce sens la métaphore n'est qu'une téléportation ou une déportation du sens et il ne peut y avoir de logique de la métaphore.

La logique formelle ne serait donc qu'un phénomène de surface. La relation centrale de conséquence logique peut être inscrite de deux façons, la syntaxique et la sémantique

$$\vdash_X A \supset B \text{ et } \models_M A \supset B$$

dans un calcul ou dans un modèle. D'un côté, la logique est une théorie de la déductibilité (Gentzen), de l'autre une théorie de la vérité (Tarski). Leur parfaite correspondance (symétrie)

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \models \varphi$$

a donné la complétude de la logique classique — la logique des prédicats du 1[er] ordre. La théorie de la vérité logique repose sur une sémantique ensembliste qui a engendré une vérité ramifiée, de la vérité dans tous les modèles d'une théorie donnée à la vérité dans tous les mondes possibles et la logique modale n'a fait que consacrer ces modalités du vrai dont la seule garantie était transcendante, i.e. logée dans $\aleph 0$, l'ensemble infini dénombrable des nombres naturels. La tradition Cantor, Dedekind, Peano, Tarski s'oppose à la tradition Kronecker, Hilbert, Gentzen et bien que leurs destins se croisent parfois (chez Gödel), ils ne se confondent pas.

Nous savons comment les notions de conséquence logique, de déductibilité, les propriétés opératoires de sous-formule et de constante (avec indéterminées) peuvent être traitées dans un calcul polynomial. Si la relation de conséquence est primordiale, la notion de vérité est dérivée — la vérité est relative à un langage et on peut supposer que l'arithmétique est plus primitive que la logique (du 1[er] ordre). C'est parce que la logique classique, de Frege à Tarski et plus loin d'Aristote à Frege, a voulu faire de la vérité et des conditions de vérité un concept absolu (donc inaccessible) qu'elle s'est confortablement installée dans la sémantique ensembliste d'une théomathématique infinitaire. Pourtant, la logique et les mathématiques constructivistes (e.g. intuitionnistes), la théorie des structures finies, de nombreuses théories mathématiques (e.g. arithmétique, topologie, géométrie algébrique et physique, e.g. la Mécanique quantique) échappent à l'empire de la logique classique et sa théorie de la vérité inhérente. Les antiréalistes en philosophie du langage (dont Dummett) ont montré comment la théorie de la vérité devait se transformer en théorie de la signification (et de la compréhension), si on adoptait la logique intuitionniste comme point de départ. Les prétentions universalistes de la logique classique — défendues notamment par Quine — ne correspondent pas à la réalité logique et mathématique et elles sont aussi désuètes que le programme logiciste dont le réalisme est un héritier de droit divin.

La notion de vérité logique étant relative à un langage, la notion de constante logique ne saurait avoir de statut privilégié puisqu'elle dépend du langage qui la définit. En dernière analyse, c'est la notion de logique elle-même qu'il faut réduire.

La logique serait, du point de vue classique de Tarski et Quine, la structure invariante des formes linguistiques et de leurs transformations. De nouveau, la relativité des langages (des langues) enlève au concept d'invariant «logique» tout caractère définitif. On le voit bien, c'est l'idée de conservation ou préservation du contenu qui occupe la première place et une logique interne se substitue ici à une logique formelle[1]. Comment garantir que le contenu est conservé (dans une extension conservatrice) sinon en préservant la forme, la structure formelle par des règles de transformation uniforme (e.g. *modus ponens*, généralisation)?

En quoi consiste donc la forme logique? Simplement en une structure «générale» de consécution ou d'engendrement des expressions (des énoncés) d'un langage. Cette définition minimale n'octroie pas davantage le statut d'irréductibilité à la logique (et encore moins à l'espèce classique de la logique). La logique arithmétique, par exemple, construite sur un calcul et des constantes arithmétiques revendique ce caractère de minimalité propre à fonder la hiérarchie des logiques. Les opérations d'addition, multiplication, exponentiation, somme et produit ne sont pas moins fondamentales que les constantes logiques, en fait elles sont premières opérationnellement, comme Gentzen l'aurait sans doute dit, lui qui différenciait règles opérationnelles et règles structurelles. La logique effective des opérations est d'essence arithmétique ou combinatoire, ce qui signifie calcul polynomial. Nous avons traduit l'implication

$$a \rightarrow b = (\bar{a} + b)^n$$

Cette traduction, la plus simple qu'il soit possible d'imaginer,

1. C'est le thème fondamental d'un triptyque *De la logique interne* (Paris, Vrin, 1991), *La logique interne des théories physiques* (Paris-Montréal, Vrin-Bellarmin, 1992) et *La logique interne. Modèles et applications* à paraître (à Paris, chez Diderot) en 1997. C'est dans ce dernier ouvrage que l'on trouvera la matière dont est tiré le présent article.

est adéquate dans la mesure où elle épuise le contenu combinatoire de l'implication. Implication matérielle, formelle, stricte, forte, pertinente, intuitionniste ou encore intuitionniste pertinente (N. Tennant) peuvent toutes être dérivées de cette représentation arithmétique. En tant que traduction polynomiale de l'interprétation topologique de la logique intuitionniste (Beth, Scott), elle échappe à la sémantique ensembliste pour donner une version radicalement constructive de l'implication. Elle garantit aussi la transformation de l'implication classique

$$a \to b = \neg a \vee b$$

aussi bien qu'intuitionniste par la décidabilité de

$$(\bar{a}+b)^n$$

où $a = \bar{1} - a$, le complément relatif (topologique) qui devient la différence arithmétique $1-a$ correspond à la négation booléenne dans les situations symétriques finies, comme l'entendait déjà Boole dans sa *Mathematical Analysis of Logic* (1847). Sans l'exposant n, la formule correspond donc à la négation booléenne pour les ensembles infinis. En réintroduisant l'exposant n, l'information de l'implication pertinente (*relevant implication*) se trouve contenue dans la combinatoire finie de l'algorithme polynomial; de même, l'ensemble des points intérieurs In de l'interprétation topologique

$$a \to b = \mathrm{In}\,((X - a) \cup b)$$

est récupéré dans l'univers combinatoire des cœfficients du polynôme (binôme) par $(\bar{a}+b)^n$. Du même coup, la propriété de sous-formule est exhibée dans la chaîne des cœfficients qui apparaissent dans une suite ordonnée (i.e. la série). L'arrangement sériel apparaît alors comme la consécution la plus naturelle et le produit de convolution qui entrelace les contenus de l'antécédent et du conséquent comme la véritable logique interne de l'implication. Les paradoxes de l'implication matérielle et stricte s'évanouissent d'eux-mêmes, de l'axiome médiéval *ex falso sequitur quodlibet* à l'implication «adamite» (ex *impossibili sequitur quodlibet*); la forme canonique $(\bar{a}+b)^n$ interdit le mélange combinatoire dont l'implication matérielle est le signe par les valeurs de vérité (0 + 0) = 1. La négation locale prévient aussi bien le cas où $(1 + 0) = 0$ que celui $(0 + 1) = 0$ ou encore $(0 + 1)^n = 0$, puisque la somme et le produit de polynômes non nuls ne sont jamais nuls.

On nous objectera que la forme polynomiale ne peut être la forme générale en vertu de son import existentiel, mais la forme polynomiale n'est remplie par un contenu intégral que par substitution des indéterminées. Ce sont les indéterminées qui assurent la plus grande généralité au calcul polynomial et si elles n'ont pas le statut de variables fonctionnelles, elles jouent le rôle de variables formelles qu'on peut adjoindre aux formes (et les en éliminer) librement.

La forme logique générale est une syntaxe qui génère une interprétation sémantique; en cela même, la sémantique est une «métaphore» plus ou moins fidèle de la structure syntaxique. La syntaxe dont il est question est aussi bien la syntaxe du discours mathématique (et scientifique en général) que celle des langues naturelles. Une logique arithmétique peut-elle accommoder les deux avec un égal bonheur? La quantification ramifiée ou indépendante, les langages du second ordre et d'ordre supérieur, aussi bien pour les structures finies que pour les structures infinies, trouvent-ils leur lieu dans une logique arithmétique? Dans la mesure où l'univers combinatoire de la logique arithmétique est ouvert, d'une part la quantification multiple indépendante s'y trouve naturellement réalisée si l'on considère que les formules sont ordonnées selon l'ordre croissant ou décroissant de leur puissance qu'on pourrait associer à une propriété (ou sous-ensemble) et, d'autre part, étant ouvert, l'univers arithmétique peut accueillir les structures effinies (indéterminées associées) à côté des structures finies. Une logique (ou arithmétique) du second ordre ici ne devient pas nécessairement infinitaire (ou analyse) puisqu'on n'y ajoute pas d'abord de point(s) à l'infini — ou d'ensemble infini dénombrable ou non. L'exhibition des cœfficients dans les expressions polynomiales équivaut à un calcul sur les sous-formules d'une formule logique dans une réduction purement arithmétique. Y a-t-il un résidu logique que la logique arithmétique ne saurait récupérer? Les notions de conséquence logique et d'enchaînement (*entailement*), de déduction (et de dérivation) tirent leur sens du principe général de consécution et de suite. La linéarité, ce que Gentzen appelait *lineares Räsonnieren* et qui est devenu la logique linéaire, s'exprime d'abord dans la série polynomiale, la somme des cœfficients. L'inférence est dans cette concaténation qui signifie une implication, c'est-à-dire une relation de contenu à contenant, $a \supset b$ étant $b \subset a$, ce que Kronecker a désigné dans son arithmétique générale des formes ou des polynômes comme *Enthalten-Sein*, «être-contenu-dans». On peut voir dans cette relation la forme générale de l'énoncé conditionnel de la logique élémentaire, de la théorie élémentaire des probabilités où la probabilité conditionnelle

$$(p \to q) \to Pr\,(q/p) = 1$$

est un cas particulier d'une théorie du contenu probabilitaire — avec comme point culminant le théorème de la limite centrale dont on a une version finitaire (et polynomiale par la distribution binomiale).

Doit-on parler de nécessité du lien conséquentiel? La notion de nécessité est une notion modale et elle n'a pas le caractère contraignant que voudrait d'abord lui imposer la logique modale qui reproduit les paradoxes de l'implication matérielle. Les modalités, pour la logique interne, sont superflues, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas nécessaires pour assurer le passage évidentiel de l'antécédent au conséquent, la consécution de contenant à contenu ou vice-versa étant interne et le dévidage du fil logique, continu.

Une logique arithmétique n'a pas les ressources infinies ou les ressources finies mais infiniment recyclables de la logique classique et de sa sémantique ensembliste infinitaire: les théorèmes de complétude, compacité, Löwenheim-Skolem ne lui sont pas accessibles. Cette carence est le prix à payer pour la finitude. Mais la consistance suffit à garantir les énoncés d'une logique qui n'est incomplète que parce qu'elle est ouverte. Une logique arithmétique constructive veut davantage que les énoncés d'une logique du premier ordre et les avantages de cette dernière ne sont que le contrepoids d'une pauvreté théorétique (en contenu théorique) du point de vue mathématique. On sait que même la théorie classique du second ordre n'arbore pas ces beaux attributs de la complétude et de la compacité — j'exclus, bien entendu, les modèles généraux qui réduisent le second ordre à un premier ordre avec plusieurs sortes de variables. Les modèles principaux des théories du second ordre correspondent en réalité à des structures finies — d'ordre fini ou de cardinalité finie fixe — qui n'obtiendraient leur catégoricité qu'à la condition d'être équivalentes ou égales dans leur consistance, ce qu'on appelle isomorphisme. Ce qui veut dire que ce ne sont pas les ensembles infinis qui peuvent nous apprendre quoi que ce soit sur le fini, mais les manipulations finies des infinis, i.e. des indéterminées, nous renseignent sur le contenu de nos calculs dans la mesure où elles révèlent le caractère finitaire de l'attribution et de la prédication (logique) et les limites qui séparent la construction conceptuelle et la structure idéale. Une théorie — philosophique ou autre — qui ne parviendrait pas à distinguer nettement les objets idéaux de leurs supports concrets dans la visée (ou visualisation abstraite) d'une pratique effective serait impuissante à rendre compte critiquement de l'activité mathématique (et scientifique). Que signifie enfin «logique interne»? Ne peut-on dégager une forme générale de tous les discours qui serait une logique formelle, une logique des formes abstraites et non seulement une logique des formes ou polynômes au sens de Kronecker? Mais cette logique formelle est une arithmétique des énoncés, quantifiés ou non, au même titre que la théorie des formes est une arithmétique des polynômes. La première est directement traduisible dans la seconde : c'est ce que nous avons appelé la logique arithmétique. La théorie des systèmes formels, la métamathématique de Hilbert, est fondée sur la méconnaissance de ce passage de l'une à l'autre. C'est pour avoir ignoré la véritable logique arithmétique ou polynomiale de Kronecker que Hilbert a voulu assurer un autre passage aux éléments idéaux, la logique traditionnelle ou aristotélicienne qu'il augmente de sa fonction de choix transfinie représentée par le symbole e. Le détour, *Umweg*, est opéré par la logique, mais le détour est doublement inutile : une première fois parce que le passage peut être effectué par la théorie des polynômes avec les indéterminées *Unbestimmte* de l'arithmétique générale de Kronecker, une seconde fois par le retour chez Hilbert lui-même à l'idée de consistance finitaire. Ce que Hilbert a bien vu, c'est que la consistance doit être établie par des moyens finitaires. Mais le pont érigé entre le fini et l'infini par la logique ne donne que l'illusion de la solidité par l'accès aux éléments idéaux. Il faut encore démonter ce pont, ce que Gentzen, Ackermann et Gödel n'ont pas tout à fait réussi, puisque l'induction transfinie — ou l'induction sur tous les types finis pour Gödel — n'est pas rétractable jusqu'à un tronçon fini. La thèse de Kronecker, reprise par d'autres moyens par Gödel dans ses preuves d'incomplétude, exige que si l'introduction de l'infini assure sa complétude, elle projette la consistance plus loin que l'infini, i.e. ω jusqu'à ε_0, d'où il n'y a pas de retour possible dans le fini; si l'on veut avant tout la consistance, il faut rester dans le fini (ou l'indéfini) pour pouvoir redescendre par descente infinie ou indéfinie (de Fermat) — qui est en réalité finie. En dernière analyse, Kronecker, le mal-aimé de Hilbert, s'est vengé par la main de Gödel qui a montré qu'une fois l'infini abordé, i.e. l'ensemble infini des entiers dans le postulat d'induction de l'arithmétique de Peano, la consistance est repoussée dans un exil toujours plus lointain, paradis gris des éléments idéaux que pas même Hilbert n'aurait voulu habiter.

La logique (formelle) devient-elle dès lors inutile? Nous avons déjà répondu par l'affirmative. Mais disons-le, la logique formelle est un phénomène de surface qui est en même temps un *révélateur* (des profondeurs!). Ce qui se montre dans le passage de Kronecker à Hilbert, de l'arithmétique générale à l'arithmétique transfinie, passage que Hilbert a voulu garantir par la logique, c'est le détour ou la mathématique détournée, si l'on veut insister sur l'opposition Kronecker-Cantor. Au-delà de la polémique cependant, le détour devient inutile (inefficace) si l'on adopte la méthode directe de Kronecker qui consiste à substituer aux indéterminées des coefficients intégraux au lieu d'accorder un statut ontologique aux transfinités dérivées. Mais la fonction de révélateur qu'a en même temps la logique s'évanouit dès que l'on a atteint les profondeurs, i.e. la logique interne d'une théorie mathématique. Cette vocation ancillaire de la logique est pérenne. D'Aristote à Hilbert, la logique a joué ce rôle d'indicateur formel du contenu. C'est un rôle important dans la mesure où le contenu n'est pas apparent, mais c'est un rôle subalterne parce que la mise au jour de la logique interne du discours mathématique révèle plus que ne laissaient soupçonner les indications superficielles (de surface) de la logique formelle. Comme le montre le cas paradigmatique de Hilbert, il faut bien que la logique remonte à la surface avant de disparaître, sorte de bouée dont une mer (ou un espace) étale n'a nul besoin, seul le point critique (la crise) en révèle la nécessité. Mais la crise n'était qu'apparente et il eût suffi de revenir à Kronecker!

2. Conclusion.

La double internalisation de la logique par l'arithmétique est le résultat le plus concret auquel nous soyons arrivés. D'une part, la traduction ou l'immersion arithmétique de la logique nous a donné l'ancrage nécessaire pour «polynomialiser» connecteurs et quantificateurs. Cette version «directe» a l'avantage d'être immédiatement computable. L'induction naturelle sur les ordinaux *finis*, i.e. la descente infinie dans la version polynomiale, fait l'économie de l'induction transfinie sur les ordinaux infinis jusqu'à ε_0, puisque c'est uniquement la forme normale, i.e. le polynôme ordinal, qui est requis pour assurer la consistance de l'arithmétique. Renonçant du même coup au postulat de Peano pour l'induction sur l'ensemble infini des nombres naturels, nous récupérons la consistance par les moyens finis de la descente dans l'arithmétique générale de Kronecker qui n'est autre que l'arithmétique polynomiale. Or, en vertu même de la structure polynomiale, nous sommes en mesure de démontrer l'auto-consistance de l'arithmétique pour la simple raison que les seuls termes polynomiaux suffisent à définir le degré de tout polynôme. La théorie kroneckerienne de l'anneau «naturel» des entiers naturels et du corps des entiers algébriques (extensions algébriques) fournit, en tant que théorie finitaire, un premier exemple d'auto-consistance. En nous inspirant du théorème de

Kronecker sur l'équivalence des polynômes, nous pouvons généraliser le résultat à toute forme logique finie, c'est-à-dire à toute expression logique traduisible dans le langage de l'arithmétique polynomiale. La descente infinie de Fermat permet de rester dans les limites de l'arithmétique «naturelle», i.e. l'anneau naturel des entiers et le corps naturel de ses extensions algébriques. Qu'au-delà de Cantor et en-deçà de Hilbert, Kronecker ait formulé la théorie finitaire des formes algébriques, et qu'il ait pu tracer exactement la démarcation entre extensions algébriques et extensions transcendantes tout en refusant à ces dernières un statut ontologique autonome, c'est là la marque première d'un constructivisme arithmétique qui influencera Hilbert, Poincaré et Brouwer.

Si le rêve de jeunesse *Jungendtraum* de Kronecker n'est pas encore devenu réalité, ce que nous avons appelé son programme a été réalisé pour une part importante par Kronecker lui-même — la théorie arithmétique des grandeurs algébriques. Le programme de Kronecker, moins ambitieux que celui de Hilbert, mais plus précis, est réalisable. L'arithmétique de Peano apparaît alors comme le passage à la limite de l'arithmétique de Kronecker ou de l'arithmétique de Fermat. En tout cas, l'arithmétique transfinie de Cantor n'aura servi que de cas-limite pour la consistance de l'arithmétique (infinie) de Peano.

Par ailleurs, si les courbes elliptiques elles-mêmes sont transcendantes, les systèmes et les formes modulaires, qui «paramètrent» les courbes elliptiques, sont des expressions polynomiales qui, comme les motifs algébriques ou les invariants polynomiaux, définissent les relations arithmétiques d'une polynomie générale dont on peut penser qu'elle est la version contemporaine de la *mathesis universalis* souhaitée par Leibniz. Mais le savoir polynomial n'est pas infini, il est toujours de degré fini dans son itération effinie et on ne peut rêver à une boucle hégélienne de la *mathesis* dans un savoir absolu.

Que seules les suites «effinies» soient admissibles est une conséquence du fait que la descente infinie est en réalité finie et qu'elle n'autorise qu'une induction effinie au sens de l'extension indéfinie du fini — rappelons que Fermat disait descente infinie ou indéfinie. La quantification universelle sur les éléments d'une suite sans borne post-positionnelle ne saurait avoir d'autre signification. L'illusion de quantification sur un ensemble infini (même dénombrable) est dissipée par une descente infinie qui résout le problème de l'induction en le ramenant à la réduction de l'infini dans le fini (ou de l'indéfini au défini) par la voie indirecte de la contradiction finitaire. L'arithmétique doit emprunter ce détour par le fini — et non pas par les éléments idéaux comme chez Hilbert — pour fermer la boucle de sa propre consistance.

Le retour ultime à Fermat confirme le caractère naturel de la descente infinie. Ce que Kronecker appelait «nombre fini d'essais» dans une terminologie qui sera reprise par Skolem dans sa formulation de l'arithmétique récursive primitive en 1923 — s'inspirant directement de Kronecker — n'est autre que ce que Poincaré désigne par «nombre fini d'hypothèses» dans son texte de 1912 sur «Les propriétés arithmétiques des courbes algébriques» et qui est pour lui la définition de la descente infinie. À rebours donc de Cantor et Peano et la logique formelle depuis Frege et Russell et à rebours du programme de Hilbert de la métamathématique, nous retrouvons dans sa pureté (i.e. auto-consistance) l'arithmétique telle qu'en elle-même l'ont conçue Fermat, Gauss, Kronecker et leurs héritiers. La polynomie (la division multiple) a engendré la *multiplicitas*, la multiplicité qui a donné *manifold* en anglais et en allemand *Mannigfaltigkeit*, multiplicité ou variété qui a engendré à son tour les espaces de Riemann, la théorie de l'extension de Grassmann et les ensembles que Cantor avait d'abord appellés multiplicités. Husserl voudra faire de sa *Mannigfaltigkeitslehre* la théorie de toutes les théories déductives. La multiplicité, dont le vrai nom devrait être multiplexité (mieux que «plexité» ou «implexité»), synthèse du simple et du complexe, signifie à la fois la division du nombreux, le pliage de l'espace ou le pli du continu; ici la symplectique serait un synonyme de la polynomie, qui est à la fin la construction des rapports et des proportions — ou raisons d'après le latin *ratio* qui veut aussi dire calcul mieux que *calculus*, caillou — de toutes choses, ce qui a voulu dire arithmétique à l'origine. C'est à partir de ce noyau arithmétique que nous avons voulu déployer la polynomie dans ses ramifications extensibles à *l'effini*; c'est là le dessein d'une logique arithmétique ou polynomiale, c'est-à-dire d'un calcul du multiple.

Yvon Gauthier
Université de Montréal