Complessità e Riduzionismo

a cura di

Vincenzo Fano
Enrico Giannetto
Giulia Giannini
Pierluigi Graziani

Isonomia *Epistemologica*

Isonomia – Epistemologica

Volume 2

COMPLESSITÀ E RIDUZIONISMO

Volume 1
Il Realismo Scientifico di Evandro Agazzi
Mario Alai, ed.

Volume 2
Complessità e Riduzionismo
Vincenzo Fano, Enrico Giannetto, Giulia Giannini, Pierluigi Graziani, eds.

ISONOMIA - Epistemologica Series Editor
Gino Tarozzi gino.tarozzi@uniurb.it

COMPLESSITÀ E RIDUZIONISMO

a cura di

Vincenzo Fano
Enrico Giannetto
Giulia Giannini
Pierluigi Graziani

ISSN 2037-4348

Scientific Director: Gino Tarozzi
Managing Director: Pierluigi Graziani
Department of Foundation of Sciences
P.za della Repubblica, 13 – 61029 Urbino (PU)

http://isonomia.uniurb.it/

Design by massimosangoi@gmail.com

Sommario

Riflettendo su complessità e riduzionismo

Vincenzo Fano
Università degli Studi di Urbino Carlo Bo
vincenzo.fano@uniurb.it

Enrico Giannetto
Università degli Studi di Bergamo
egiannet@unibg.it

Giulia Giannini
Centre Alexandre Koyré, Paris
giulia.giannini@gmail.com

Pierluigi Graziani
Università degli Studi di Urbino Carlo Bo
pierluigi.graziani@uniurb.it

Il volume raccoglie gli atti della XIII Scuola Estiva di Filosofia della Fisica, tenutasi a Cesena dal 13 al 18 settembre 2010. A partire dal 1998, il Centro Interuniversitario di ricerca in Filosofia e Fondamenti della Fisica (Urbino, Bologna, Salento e Insubria) organizza annualmente una scuola estiva in collaborazione con la Società Italiana di Logica e Filosofia delle Scienze (SILFS) e il Comune di Cesena. La scuola, diventata ormai punto di riferimento annuale per studenti, insegnanti e studiosi di varie discipline, affronta ogni anno un tema differente invitando i maggiori esperti italiani sull'argomento. Dedicata a "Complessità e Riduzionismo", l'edizione del 2010 si è avvalsa anche della collaborazione della Scuola di Dottorato in Antropologia ed Epistemologia della Complessità dell'Università degli

"Riflettendo su complessità e riduzionismo", in *Complessità e riduzionismo*, pp. 1-5
Published by Isonomia, Rivista online di Filosofia – Epistemologica – ISSN 2037-4348
Università degli Studi di Urbino Carlo Bo
http://isonomia.uniurb.it/epistemologica

Studi di Bergamo che, dal 2002, promuove in Italia e nel mondo la formazione e il perfezionamento di ricercatori esperti nella complessità storica, filosofica e antropologica delle scienze naturali e umane.
Come mostrano i contributi qui raccolti, durante i lavori della scuola, complessità e riduzionismo sono stati affrontati dai relatori a partire da prospettive diverse e sotto differenti punti di vista.

Gian-Italo Bischi, dopo aver brevemente delineato la storia della progressiva matematizzazione dell'economia, si è concentrato soprattutto sull'utilizzo di modelli dinamici non lineari. Sviluppati inizialmente in ambito fisico e basati su equazioni di evoluzione, tali modelli deterministici vengono utilizzati per prevedere – ed eventualmente controllare – l'evoluzione temporale di sistemi reali. Secondo Bischi, la scoperta che modelli dinamici non lineari (tipici dei sistemi sociali che presentano continue interazioni e meccanismi di feed-back) possono esibire comportamenti di caos deterministico, caratterizzato dalla proprietà di amplificare in modo difficilmente prevedibile perturbazioni arbitrariamente piccole, ha suscitato un certo imbarazzo e nel contempo creato nuove possibilità. Imbarazzo perché la presenza di caos deterministico rende insostenibile l'ipotesi dell'agente economico razionale, ovvero capace di prevedere correttamente; ma apre anche nuove possibilità, poiché tale scoperta mostra che quei sistemi economici e sociali caratterizzati da fluttuazioni in apparenza casuali potrebbero in realtà essere governati da leggi del moto deterministiche (anche se non lineari).

Se Bischi ha affrontato il tema della complessità in ambito economico, Salvo D'Agostino ha invece introdotto e approfondito il problema dei successi e dei fallimenti dell'assiomatizzazione in campo fisico. Uno degli aspetti più dibattuti della complessità sul versante scientifico e filosofico è infatti quello della supposta rinuncia a una generalizzazione dei procedimenti assiomatico-deduttivi come metodo generale della ricerca scientifica. A partire dalla considerazione che la fisica pre-relativistica è spesso stata considerata fondata prevalentemente sul trionfo di tale metodo, D'Agostino ha evidenziato la presenza di una posizione antagonista presente già in Newton e ripresa successivamente da Ampère e Maxwell. Alternativa al metodo assiomatico-deduttivo, tale prospettiva si fonda sul ricorso alla cosiddetta deduzione dai fenomeni. Una variazione sul tema, è stata individuata da D'Agostino anche nel contributo di Einstein in cui alla celebrazione del metodo assiomatico-deduttivo si contrappone una lode dell'osservazione dei fenomeni e della riflessione sugli esperimenti: è proprio ponendo il problema di una scelta o conciliazione fra le due che

Einstein avrebbe, secondo D'Agostino, il merito di aver aperto la via al pensiero scientifico moderno.

Sempre in ambito fisico, Arcangelo Rossi ha tracciato, da un punto di vista storico, il passaggio dai modelli riduzionistici che hanno caratterizzato lo studio delle realtà fisica nella scienza classica all'emergere della questione della complessità nella scienza contemporanea. In particolare, a partire dall'affermazione di Ernst Cassirer secondo cui la piena transizione da un'accezione sostantiva ed esplicativa dei modelli a una formale e funzionale sarebbe rintracciabile già alle origini della scienza moderna, Rossi ha mostrato come la visione della natura che emerge dalla scienza classica illuminista fosse comunque realista e riduzionista. Benché alcuni aspetti e alcune visioni non propriamente qualificabili come riduzioniste e meccaniciste siano già presenti all'interno della scienza classica, la tematica della complessità comincia a svilupparsi in fisica solo alla fine dell'Ottocento.

Sergio Chibarro, Lamberto Rondoni e Angelo Vulpiani hanno affrontato il ruolo del caos e l'emergenza di proprietà collettive all'interno della meccanica statistica. In particolare, hanno mostrato l'esistenza di due posizioni nettamente diverse: da una parte il punto di vista "tradizionale", risalente a Boltzmann e parzialmente formalizzato da Khinchin, secondo cui la meccanica statistica sarebbe caratterizzata in primo luogo dall'enorme numero di gradi di libertà; dall'altro la scuola "moderna" cresciuta intorno a Prigogine e ai suoi collaboratori, che considera il caos come l'ingrediente fondamentale. Anche attraverso alcune simulazioni numeriche, gli autori hanno mostrato come anche all'interno della meccanica statistica si faccia avanti il problema della complessità e del riduzionismo. Sebbene i risultati di Khinchin non siano in grado di rispondere in modo definitivo a tutti i problemi sollevati dalla relazione fra termodinamica e meccanica statistica, il numero estremamente grande di gradi di libertà che tale approccio prende in considerazione permette *l'emergere*, nei sistemi macroscopici, di proprietà del tutto assenti in sistemi piccoli.

Giorgio Turchetti ha introdotto il problema del passaggio dai modelli fisici ai sistemi complessi mostrando come i limiti che il disegno riduzionista incontra già per i sistemi fisici diventino decisamente più forti nel caso dei sistemi complessi. La grande differenza tra un sistema fisico e un sistema complesso risiederebbe infatti, secondo Turchetti, nel fatto che il primo, fissate le condizioni esterne, ha sempre le medesime proprietà, mentre il secondo cambia con il fluire del tempo, perché la sua organizzazione interna muta non solo al cambiare di fattori ambientali ma anche con il succedersi delle generazioni. È in tale prospettiva che egli giunge a definire complessi non tanto i sistemi caratterizzati da proprietà emergenti e da interazioni non lineari tra i loro componenti (definibili come sistemi dinamici), ma piuttosto i sistemi viventi o quelli di vita artificiale che ne condividono le proprietà essenziali.

Il problema di complessità e riduzionismo in campo biologico è stato poi affrontato in maniera diretta da Luciano Boi e da Roberto Serra. Il primo ha mostrato come lo studio del comportamento dinamico delle strutture cellulari non possa essere descritto con sufficiente accuratezza né dalla convenzionale dinamica dell'equilibrio né da modelli statici e richieda quindi nuovi strumenti. In particolare, egli ha affrontato la necessità – per una comprensione del comportamento dei sistemi (dinamici) complessi – di un'adeguata conoscenza delle caratteristiche cinetiche e topologiche delle loro componenti. A differenza dello studio dei meccanismi molecolari, l'analisi del comportamento dinamico delle strutture cellulari non necessita tanto di una profonda e dettagliata conoscenza del comportamento di ogni singola molecola, ma piuttosto delle regole che governano il comportamento globale e collettivo dei sistemi.

In consonanza con il contributo di Boi, Serra ha spiegato come la scienza dei sistemi complessi abbia mostrato l'esistenza di "leggi" in gran parte indipendenti dalle specifiche caratteristiche delle entità microscopiche che tuttavia ne descrivono il comportamento e l'interazione. Se la ricerca di proprietà generali ha ormai assunto una grande rilevanza in ambito fisico, nelle scienze biologiche si trova ancora nei suoi primi stadi di vita. Attraverso una serie di esempi, Serra ha mostrato come tale approccio, da considerarsi non in opposizione alla biologia molecolare classica ma a essa complementare, sembra però portare anche in ambito biologico a importanti e promettenti risultati. Emblematico in questo senso è per Serra il lavoro di Kauffman che rivela come un sistema dinamico di geni che interagiscono fra loro mostri delle proprietà di auto-organizzazione che spiegano alcuni aspetti della vita, fra cui l'esistenza di un numero limitato di tipi cellulari in ogni organismo multicellulare.

Pierluigi Graziani ha affrontato invece il problema della complessità computazionale in riferimento alla decidibilità della geometria elementare di Tarski. A partire soprattutto dai lavori di Fisher, Rabin e Meyers e in confronto con il lavoro di Tarski, Graziani ha analizzato come il problema della decisione si trasformi nella determinazione di quanto tempo e spazio di memoria impieghi un algoritmo di decisione per una teoria a determinare se un enunciato della teoria ne sia o meno un teorema. In teoria della complessità computazionale, infatti, si assume che siano computazionalmente intrattabili quei compiti che richiedono risorse di tempo e spazio di memoria (le cosiddette risorse computazionali) che crescono esponenzialmente con la lunghezza dell'input; e che siano computazionalmente trattabili quelli che richiedono risorse che crescono al più in modo polinomiale con la lunghezza dell'input. In tale prospettiva, la complessità computazionale non concerne dunque quante risorse richiede lo svolgere un determinato compito, bensì quanto aumentano le risorse richieste al crescere delle dimensioni dei dati.

Claudio Calosi e Vincenzo Fano hanno mostrato come il problema della complessità e del riduzionismo riguardi anche il rapporto fra psicologia e fisica. In particolare, hanno proposto qui un nuovo esperimento mentale che hanno chiamato Shem-Shaun – dal nome dei due gemelli protagonisti del *Finnegan's Wake* di Joyce – e che solleva un problema per il Fisicalismo minimale in filosofia della mente. Il fisicalismo minimale viene infatti caratterizzato come quella tesi secondo cui le proprietà mentali sopravvengono nomologicamente sulla proprietà fisiche, una forma di riduzionismo per cui, stabilite le proprietà fisiche del mondo, quelle mentali sarebbero necessariamente determinate. Gli autori sostengono che, o il Fisicalismo minimale è incapace di dare un resoconto adeguato dell'esperimento Shem-Shaun o ne deve dare un resoconto che è in forte tensione con la nostra attuale immagine scientifica del mondo.

Nel loro insieme, i lavori presentati testimoniano da un lato la vivacità degli studi epistemologici sulla complessità e dall'altro l'importanza del concetto di complessità per la filosofia della scienza e, in particolare, della fisica.

Elementare ma complessa:
la prospettiva della complessità computazionale attraverso il caso studio della geometria di Tarski

Pierluigi Graziani
Università degli Studi di Urbino Carlo Bo
pierluigi.graziani@uniurb.it

Sul finire degli anni venti dello scorso secolo, nei suoi corsi all'Università di Varsavia, Alfred Tarski elaborò un sistema di assiomi per la geometria elementare (lo indicheremo con T^2_{GE}) che presentò, con diverse semplifica-vzioni ed aggiunte, nei lavori *The completeness of elementary algebra and geometry* del 1940 (ma pubblicato solo nel 1967), *A decision method for elementary algebra and geometry* del 1948 e *What is elementary geometry?* del 1959[1].

Il sistema elaborato da Tarski è per molte ragioni differente da quello hilbertiano[2] e da altre assiomatizzazioni storicamente presentate[3]. Tale sistema, infatti, descrive un universo contenente solo punti e due relazioni tra elementi primitivi: quella di *essere tra* e quella di *equidistanza*. Tale scelta caratterizza una visione della geometria in cui le linee e i piani sono insiemi di punti e rende più facile il confronto con l'approccio algebrico in cui tutte le figure sono appunto viste come luoghi di punti, insiemi definibili di punti (nel piano, insiemi di coppie di numeri). Tuttavia, quella di Tarski è un'assiomatizzazione per la *geometria elementare* euclidea ovvero per quella parte della geometria euclidea non basata su nozioni insiemistiche e

---

[1] Per un'analisi storica dell'assiomatizzazione tarskiana si veda l'articolo di Alfred Tarski e Steven Givant (1999).
[2] Hilbert (2009).
[3] Vedi Graziani (2001).

"Elementare ma complessa: la prospettiva della complessità computazionale attraverso il caso studio della geometria di Tarski", in *Complessità e riduzionismo*, pp. 57-72
Published by Isonomia, Rivista online di Filosofia – Epistemologica – ISSN 2037-4348
Università degli Studi di Urbino Carlo Bo
http://isonomia.uniurb.it/epistemologica

che può essere sviluppata in un linguaggio in cui non si suppone – come nel linguaggio della geometria hilbertiana – di poter quantificare sui numeri naturali o su insiemi qualunque di punti[4]. Dunque, tutte le variabili *x,y,z,…* che occorrono in questa teoria sono assunte variare sopra elementi (punti) di un *insieme fissato* (spazio). Le costanti logiche della teoria sono i connettivi $\neg, \supset, \vee, \wedge, \exists, \forall$, e lo speciale predicato binario =, mentre come costanti non logiche o simboli primitivi della teoria abbiamo il predicato ternario β usato per denotare la relazione di *essere tra* ed il predicato quaternario δ usato per denotare la relazione di *equidistanza*. Leggeremo, dunque, la formula $\beta(xyz)$ come *y giace tra x e z* (senza escludere il caso in cui *y* coincide con *x* o *z*); e la formula $\delta(x,y,z,u)$ come *x è distante da y come z da u*, vale a dire *il segmento* $\overline{xy}$ *è congruo al segmento* $\overline{zu}$.

Diamo dunque gli assiomi del sistema tarskiano, considerando per semplicità, l'assiomatizzazione per la geometria elementare del piano presentata in *What is elementary geometry?*.[5]

A1 (Assioma di identità per la relazione β)

$$\forall xy\left[\beta(xyx) \supset (x = y)\right]$$

A2 (Assioma di transitività per la relazione β)

$$\forall xyzu\left[\beta(xyu) \wedge \beta(yzu) \supset \beta(xyz)\right]$$

A3 (Assioma di connessione per β)

---

[4] In T^2_{GE} non possiamo avere enunciati del tipo "per ogni poligono", ma solo enunciati che riguardano poligoni con un numero fissato di vertici. Per avere, infatti, enunciati del tipo "per ogni poligono" si dovrebbe arricchire il linguaggio di T^2_{GE} con nuove variabili X,Y,… varianti su insiemi *finiti* di punti. Ciò consentirebbe di avere simboli per denotare figure geometriche (insiemi di punti), classi di figure geometriche etc. L'assioma di continuità, che daremo tra breve, stabilisce l'esistenza su di una retta *r* di un minimo confine superiore per ogni insieme X *definibile*, non per *insiemi arbitrari*, dove dire che X è definibile significa che esiste una formula $\alpha(x, y_1,...,y_n)$ ed individui $b_1,...,b_n$ per cui in ogni modello $\mathcal{A}$, $\{a \in |\mathcal{A}| : \mathcal{A} \vDash \alpha[a,b_1,...,b_k]\} = X$. Dai risultati di Tarski segue che in questa teoria non sono definibili i numeri naturali, altrimenti, via Teorema di Gödel, essa sarebbe incompleta.

[5] È possibile estendere i risultati tarskiani per la geometria bidimensionale al caso di geometrie *n* dimensionali per un intero positivo *n*, modificando gli assiomi A11 e A12. Per maggiori delucidazioni su tali argomenti si veda l'articolo di Tarski e Givant (1999).

$\forall xyzu\left[\beta(xyz)\wedge\beta(xyu)\wedge(x\neq y)\supset\beta(xzu)\vee\beta(xuz)\right]$

A4 (Assioma di riflessività per δ)
$\forall xy\left[\delta(xyyx)\right]$

A5 (Assioma di identità per δ)
$\forall xyz\left[\delta(xyzz)\supset(x=y)\right]$

A6 (Assioma di transitività per δ)
$\forall xyzuvw\left[\delta(xyzu)\wedge\delta(xyvw)\supset\delta(zuvw)\right]$

A7 (Assioma di Pasch)
$\forall txyzu\exists v\left[\beta(xtu)\wedge\beta(yuz)\supset\beta(xvy)\wedge\beta(ztv)\right]$

A8 (Assioma di Euclide)
$\forall txyzu\exists vw\left[\beta(xut)\wedge\beta(yuz)\wedge(x\neq y)\supset\beta(xzv)\wedge\beta(xyw)\wedge\beta(vtw)\right]$

A9 (Assioma dei cinque segmenti)
$$\forall xx'yy'zz'uu'[\delta(xyx'y')\wedge\delta(yzy'z')\wedge\delta(xux'u')\wedge\delta(yuy'u')\wedge$$
$$\wedge\beta(xyz)\wedge\beta(x'y'z')\wedge(x\neq y)\supset\delta(zuz'u')]$$

A10 (Assioma di costruzione per segmenti)
$\forall xyuv\exists z\left[\beta(xyz)\wedge\delta(yzuv)\right]$

A11 (Assioma inferiore di dimensionalità)
$\exists xyz\left[\neg\beta(xyz)\wedge\neg\beta(yzx)\wedge\neg\beta(zxy)\right]$

A12 (Assioma superiore di dimensionalità)
$\forall xyzuv\left[\delta(xuxv)\wedge\delta(yuyv)\wedge\delta(zuzv)\wedge(u\neq v)\supset\beta(xyz)\vee\beta(yzx)\vee\beta(zxy)\right]$

A13 (Assiomi elementari di continuità)
Tutti gli enunciati della forma

$$\forall vw...\left\{\exists z\forall xy\left[\varphi\wedge\psi\supset\beta(zxy)\right]\supset\exists u\forall xy\left[\varphi\wedge\psi\supset\beta(xuy)\right]\right\}$$

dove φ sta per una formula nella quale le variabili x,v,w,…, ma né y, né z, né u, occorrono libere, e similmente per ψ, con x ed y interscambiati.

In generale – come in Hilbert - l'assioma di continuità è un enunciato non elementare poiché contiene variabili del secondo ordine che variano su insiemi *arbitrari* di punti (in aggiunta a variabili del primo ordine che variano su punti), ovvero l'assioma di continuità può essere formulato come

$$\forall XY\left\{\exists z\forall xy\left[x\in X\wedge y\in Y\supset\beta(zxy)\right]\supset\exists u\forall xy\left[x\in X\wedge y\in Y\supset\beta(xuy)\right]\right\}$$

e asserisce che due insiemi X e Y tali che gli elementi di X precedono gli elementi di Y rispetto ad un punto *a* (cioè $\beta(zxy)$ ogni qual volta *x* è in X e *y* è in Y) sono separati da un punto *u*. Tarski sostituì questo assioma con A13, ovvero con una collezione infinita di assiomi elementari di continuità che ci danno la completezza di Dedekind solo per insiemi *definibili*. Dal punto di vista analitico, come Tarski dimostra, ciò significa che i modelli di T_{GE}^{2} saranno isomorfi a *spazi cartesiani* su campi che non necessariamente coincidono con $\mathbb{R}$, ma con quelli che sono noti come *campi reali chiusi*. Torneremo più avanti su questo punto.

Come è noto, l'importanza del sistema tarskiano risiede anche e soprattutto nel fatto che per esso è possibile dimostrare la *coerenza*, la *completezza* e la *decidibilità*.

Intuitivamente, l'idea di Tarski è quella, dimostrata la coerenza, completezza e decidibilità della teoria dei campi reali chiusi (T_{CRCO}), di interpretare T_{GE}^{2} in T_{CRCO} provando la trasferibilità dei risultati di coerenza, completezza e decidibilità da T_{CRCO} a T_{GE}^{2}. In generale, dimostrando che T_{CRCO} ha l'eliminazione dei quantificatori[6] Tarski dimostra la decidibilità dei campi reali chiusi. Per il fatto poi che: se T_{CRCO} ha l'eliminazione dei quantificatori allora è model-completa e se è model-completa avendo un modello primo (un modello cioè che è sottostruttura elementare di ogni modello) allora è completa, Tarski dimostra anche la completezza di T_{CRCO}.

[6] Per chiarezza ricordiamo che una formula α è equivalente alla formula γ nella teoria *T* se $\vdash_T \alpha\leftrightarrow\gamma$ e che *T* quindi ammette l'eliminazione dei quantificatori se ogni formula di *T* è equivalente in *T* ad una formula aperta. Per una introduzione alla *Teoria dei Modelli* si veda Hodges (1993); Keisler (1977). Per un'introduzione alla decidibilità si veda Rabin (1977). Si veda anche Renegar (1992).

La coerenza discende immediatamente dalla esistenza di un modello di T_{CRCO}.[7]

Più in dettaglio, per poter interpretare T^2_{GE} in T_{CRCO} provando la trasferibilità dei risultati di coerenza, completezza e decidibilità da T_{CRCO} a T^2_{GE}, il primo passo da fare è risolvere il cosiddetto *problema di rappresentazione* per T^2_{GE} che consiste nel caratterizzare tutti i modelli di T^2_{GE}, $\mathcal{M} = <\mathrm{M,B,D}>$ tali che:

(i) M è un insieme non vuoto;

(ii) B e D sono, rispettivamente, una relazione ternaria e quaternaria su M;

(iii) Tutti gli assiomi di T^2_{GE} valgono in $\mathcal{M}$ se tutte le variabili sono assunte variare su elementi di M e le costanti β e δ denotano, rispettivamente, le relazioni B e D.

---

[7] Senza però ricorrere, come fa Tarski, al teorema di Sturm (si vedano, oltre ai lavori di Tarski: Jacobson 1985, vol. I, cap. 5; Prestel 1984), per dimostrare che T_{CRCO} ha l'eliminazione dei quantificatori, è necessario e sufficiente, come mostrato da Shoenfield (1967), provare che essa soddisfa le due condizioni seguenti:

Condizione dell'isomorfismo: per ogni due modelli $\mathfrak{A}$ ed $\mathfrak{A}^*$ di T_{CRCO} e ogni isomorfismo φ di una sottostruttura di $\mathfrak{A}$ e una sottostruttura di $\mathfrak{A}^*$, esiste un'estensione di φ che è un isomorfismo di un sottomodello di $\mathfrak{A}$ ed un sottomodello di $\mathfrak{A}^*$;

Condizione del sottomodello: per ogni modello $\mathfrak{B}$ di T_{CRCO}, ogni sottomodello $\mathfrak{B}^*$ di $\mathfrak{B}$ e ogni formula chiusa semplicemente esistenziale α di $\mathcal{L}^{\mathfrak{B}^*}$ abbiamo $\mathfrak{B}^* \vDash \alpha \equiv \mathfrak{B} \vDash \alpha$.

Dimostrato che T_{CRCO} soddisfa le due condizioni precedenti, è possibile dimostrare la model-completezza di T_{CRCO}. Poiché è dimostrabile che se una teoria è model-completa ed ha un modello primo allora è completa, T_{CRCO} è anche completa. La decidibilità di T_{CRCO} scende dal fatto che la teoria è completa e assiomatizzata o dal fatto che la teoria dei campi ordinati reali chiusi ha l'eliminazione dei quantificatori. Attraverso l'eliminazione dei quantificatori, infatti, trasformiamo un dato enunciato α di *T* in un altro enunciato γ di T tale che $T \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$ e γ appartiene ad un insieme *K* di enunciati per i membri del quale possiamo in un numero finito di passi determinare se sono teoremi di *T* o no.

Come evidenziato, i più familiari modelli di T^2_{GE} sono certamente gli spazi cartesiani bidimensionali (che indicheremo con $C^2_{\mathfrak{F}}$) su particolari campi ordinati $\mathfrak{F} = < \mathrm{F}, +, \cdot, -, \leq, 0, 1 >$ (dove F è appunto un insieme non vuoto) che soddisfano il teorema di Bolzano ristretto alle funzioni polinomiali. Sono questi i campi reali chiusi.
Tarski riesce a dimostrare che *tutti* e soli i modelli di T^2_{GE} sono isomorfi a spazi cartesiani di questo tipo dove l'assioma elementare di continuità corrisponde alla proprietà di Bolzano per i polinomi:

Teorema di Rappresentazione
Affinché $\mathcal{M}$ sia un modello di T^2_{GE} è necessario e sufficiente che $\mathcal{M}$ sia isomorfo allo spazio cartesiano su un campo reale chiuso $C^2_{\mathfrak{F}^*}$.

Risolto il problema della rappresentazione è possibile per Traski passare al problema della completezza e decidibilità di T^2_{GE}. Come anticipato, sfruttando il teorema di Sturm, Tarski può dimostrare che in T_{CRCO} ogni formula è equivalente a una priva di quantificatori e provare che T_{CRCO} è completa e decidibile. Il lavoro è quello di trasportare queste proprietà da T_{CRCO} a T^2_{GE}. Per comodità tipografica invece di scrivere $C^2_{\mathfrak{F}}$ scriveremo $\mathfrak{U}$ e consideriamo $\mathfrak{U} \vDash T_{CRCO}$, a partire da $\mathfrak{U}$ per il linguaggio formale $\mathcal{L}$ possiamo, dunque, come si è visto, costruire una struttura $\mathcal{M}_{\mathfrak{U}} = < M^{\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}}, D^{\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}}, B^{\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}} >$, per il linguaggio formale $\mathcal{L}^*$, che sia modello di T^2_{GE} ed il modo in cui abbiamo costruito $\mathcal{M}_{\mathfrak{U}}$ da $\mathfrak{U}$ ha come correlato sintattico la definizione di una *traduzione* di T^2_{GE} in T_{CRCO}.
Possiamo, infatti, associare ad ogni formula α di $\mathcal{L}^*$ una formula $\tilde{\alpha}$ di $\mathcal{L}$ tale che

$$\mathfrak{U} \vDash \tilde{\alpha}\left[a_1 a_1' \ldots a_n a_n'\right] \text{ sse } \mathcal{M}_{\mathfrak{U}} \vDash \alpha\left[\langle a_1 a_1' \rangle \ldots \langle a_n a_n' \rangle\right]$$ [8]

[8] Dove $\tilde{\alpha}$ ha 2n variabili libere, se α ne ha n. Conveniamo per ogni variabile *x* di $\mathcal{L}^*$ di scegliere due variabili x, x' di $\mathcal{L}$: intuitivamente ciò significa che mentre in $\mathcal{L}^*$ parliamo di punti $< a_j, a_j' >$, in $\mathcal{L}$ parliamo di coordinate a_j e a_j'. Vedi Tarski e Givant 1999, 201, per una descrizione intuitiva.

definendo una *traduzione*

$$\lambda : Form_{\mathcal{L}^*} \longrightarrow Form_{\mathcal{L}}$$

ponendo, ove si supponga $x = <x, x'>$ e $y = <y, y'>$, che per le formule atomiche:

$\lambda(x = y) = (x = y \wedge x' = y')$

$\lambda(D(x, y, z, w)) = (x - y)^2 + (x' - y')^2 = (z - w)^2 + (z' - w')^2$

$\lambda(B(x, y, z)) = [(x - y) \cdot (y' - z') = (x' - y') \cdot (y - z)] \wedge [0 \leq (x - y) \cdot (y - z)] \wedge [0 \leq (x' - y') \cdot (y' - z')]$

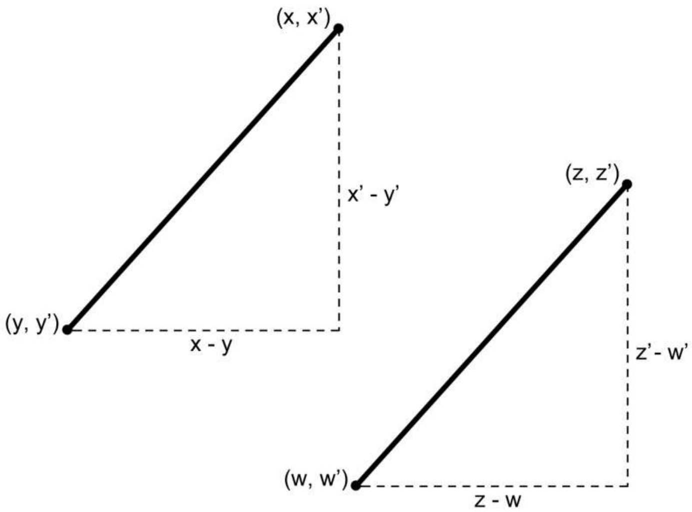

Figura 1. La definizione di *equidistanza* nel piano cartesiano

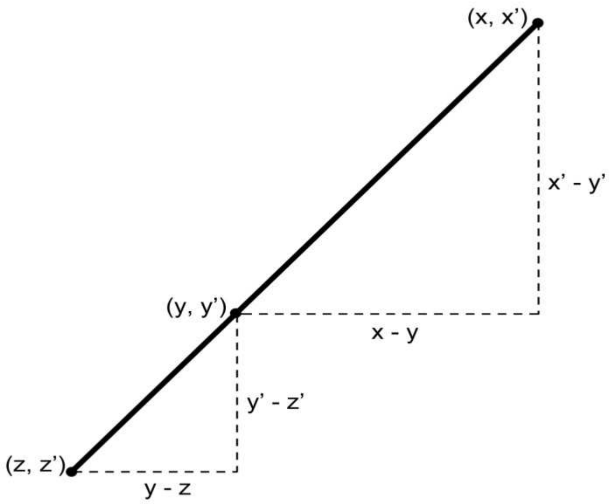

Figura 2. La definizione di *essere tra* nel piano cartesiano.

e supponendola letterale per le altre formule:

$$\lambda(\alpha \wedge \gamma) = \lambda\alpha \wedge \lambda\gamma$$
$$\lambda(\alpha \vee \gamma) = \lambda\alpha \vee \lambda\gamma$$
$$\lambda(\alpha \rightarrow \gamma) = \lambda\alpha \rightarrow \lambda\gamma$$
$$\lambda(\neg\alpha) = \neg\lambda\alpha$$
$$\lambda(\exists x\alpha) = \exists x\lambda\alpha$$
$$\lambda(\forall x\alpha) = \forall x\lambda\alpha$$

Sia ora $\tilde{\alpha} = \lambda\alpha$.
Posto ciò è possibile dimostrare il seguente *Teorema di Interpretazione*:

Per ogni enunciato α *di* $\mathcal{L}^*$, $T^2_{GE} \vdash \alpha \Rightarrow T_{CRCO} \vdash \tilde{\alpha}$

Dimostrato il teorema di interpretazione[9] disponiamo di una traduzione di $\mathcal{L}^*$ in $\mathcal{L}$ per cui vale $T^2_{GE} \vdash \alpha \supset T_{CRCO} \vdash \tilde{\alpha}$, ovvero disponiamo di una

[9] Ogni traduzione di $\mathcal{L}^*$ in $\mathcal{L}$ per cui valga $T^2_{GE} \vdash \alpha \supset T_{CRCO} \vdash \tilde{\alpha}$ sarà chiamata *interpretazione* di T^2_{GE} in T_{CRCO} .

interpretazione di T^2_{GE} in T_{CRCO}. Ciò ci consente di dimostrare la *coerenza* di T^2_{GE}, ma non ancora di trasferire i risultati di completezza e decidibilità da T_{CRCO} a T^2_{GE}.

Per poter trasferire la completezza e la decidibilità da T_{CRCO} a T^2_{GE} è necessario non solo che la nostra traduzione sia una interpretazione, ma anche che la nostra interpretazione sia *fedele* ovvero che valga il seguente teorema:

Teorema di fedeltà dell'interpretazione
$T^2_{GE} \vdash \alpha \leftrightarrow T_{CRCO} \vdash \tilde{\alpha}$
la cui dimostrazione utilizza il teorema di rappresentazione ed il teorema di interpretazione.

Posto che la traduzione λ è un'interpretazione fedele, è possibile provare la trasferibilità dei risultati di completezza e decidibilità da T_{CRCO} a T^2_{GE}. La decidibilità è ovvia – tenuto conto dell'assiomatizzabilità - una volta provata la completezza. Per avere la completezza, posta la coerenza di T^2_{GE}, si supponga $T^2_{GE} \nvdash \alpha$, dove α è un enunciato di $\mathcal{L}^*$, allora si deve provare che $T^2_{GE} \vdash \neg\alpha$. Per la fedeltà si ha che $T_{CRCO} \nvdash \tilde{\alpha}$ e, poiché T_{CRCO} è completa, $T_{CRCO} \vdash \neg\tilde{\alpha}$. Per definizione $\neg\tilde{\alpha} = \widetilde{(\neg\alpha)}$, così $T_{CRCO} \vdash \widetilde{(\neg\alpha)}$ e poiché λ è fedele $T^2_{GE} \vdash \neg\alpha$.

Sebbene i risultati di *coerenza* e di *completezza* siano già di grande rilievo per un sistema assiomatico, l'interesse per il sistema tarskiano deriva soprattutto dalla possibilità di poter dimostrare per esso anche la proprietà di *decidibilità* che, dopo la famosa conferenza di Parigi di Hilbert, era divenuto uno dei problemi di maggiore interesse e indagine da parte dei matematici e logici. Fu proprio il tentativo di analizzare tale concetto che condusse a raffinatissimi contributi non solo nel campo della *teoria dei modelli,* ma anche in quello della *teoria della ricorsività*[10].

Uno dei grandi problemi degli studi fondazionale posti da Hilbert era, infatti, la questione di *decidere per ogni teoria T quali sono i suoi teoremi*. E' questo il cosiddetto *Entscheidungsproblem* o problema della decisione. La riflessione su tale nozione portò subito in primo piano la necessità di una chiara definizione del concetto di *algoritmo di decisione* o di *computo* ovvero la necessità di definire, relativamente a problemi differenti, un

[10] Si veda Rabin (1977).

complesso di istruzioni *deterministiche*, *meccaniche* e *generali*. Esempi noti di tali procedure sono l'algoritmo euclideo per la ricerca del massimo comune divisore fra due numeri naturali o l'algoritmo delle tavole di verità mediante cui stabilire se una data formula proposizionale è o no una tautologia. Sebbene in matematica ed in logica esistano numerosi esempi di algoritmi, l'importanza della ricerca di tali procedure risiede nel fatto che esistono altrettanti problemi noti per i quali non conosciamo un algoritmo in grado di offrirci una soluzione, ad esempio il problema della decisione per la logica del primo ordine (LP): data una qualunque formula α scritta nel linguaggio della logica del primo ordine, è possibile decidere in un numero finito di passi se α è un teorema o meno del sistema considerato? Ovvero, considerata la classe C di tutte le formule di LP è possibile dare un algoritmo per isolare in essa una sottoclasse T costituita da tutte e sole quelle formule che sono teoremi di LP? Ovvero è possibile decidere per ogni formula α di LP se $\alpha \in T$ oppure no? Un errore molto facile in cui è possibile cadere è quello di pensare che tale algoritmo esista[11] e che sia proprio rappresentato da un sistema di assiomi per LP con le sue regole di derivazione; infatti è possibile decidere per ogni formula α di LP se essa è o no un assioma ed è anche possibile decidere se, data una successione finita di formule, essa è una derivazione di formule in LP. Ma ciò non dà affatto una risposta alla domanda dell' *Entscheidungsproblem*. Per determinare quando una data formula è un teorema dobbiamo essere in grado di sapere se *esiste* una sua dimostrazione, ciò significa che dobbiamo in qualche modo avere a che fare con il dominio infinito delle dimostrazioni. Il carattere effettivo delle regole di derivazione e della proprietà di essere assioma ci consente di determinare, data una successione di formule, se essa è una dimostrazione, ma non di sapere se, data una formula α, *esiste* una successione di formule che sia una sua dimostrazione. Una semplice riflessione ci mostra allora che per la decidibilità di una teoria è sufficiente che sia assiomatizzabile e completa. Ciò che, dunque, Tarski riuscì a dimostrare per T^2_{GE} è che l'insieme dei teoremi di T^2_{GE} è decidibile, cioè data una qualunque formula di $\mathcal{L}^*$ siamo in grado in un numero finito di passi e del tutto meccanicamente di stabilire se essa è o no un teorema di T^2_{GE}. Questo discende dalla completezza di T^2_{GE} e dalla sua assiomatizzabilità. Alternativamente possiamo sfruttare la decidibilità di T_{CRCO} e la traduzione

[11] A. Church diede una risposta negativa al problema della decisione per la logica del primo ordine. Vedi Church (1936a); (1936b).

λ. Il risultato dimostrato da Tarski è che l'interpretazione $\lambda : Form_{\mathcal{L}^*} \to Form_{\mathcal{L}}$ è effettiva, ovvero dato α di $\mathcal{L}^*$ è possibile, in un numero finito di passi, determinare $\tilde{\alpha}$ di $\mathcal{L}$. Dato α in $\mathcal{L}^*$ si deve decidere se $T^2_{GE} \vdash \alpha$ o no. Applicando λ, dopo un numero finito di passi abbiamo $\tilde{\alpha}$. Poiché T_{CRCO} è decidibile, dopo un numero finito di passi sappiamo se $T_{CRCO} \nvdash \tilde{\alpha}$ o no. Per fedeltà sappiamo se $T^2_{GE} \vdash \alpha$ o no.

In una certa ampia misura, come correttamente sottolinea Rabin[12], sino agli anni sessanta dello scorso secolo «in the spirit of Hilbert's Program and of Turing's analysis of computabilità, it is tacitly assumed that for a theory T proved decidable, the question whether a given sentence is a theorem of T is a trivial one. For one needs only to mechanically apply the decision procedure in order to answer any such question. No creative or intelligent thinking is required for this process». Tale prospettiva iniziò a modificarsi sotto la spinta dei lavori di Fisher, di Rabin[13] e Meyers[14] che posero l'attenzione in modo particolare sulla *complessità computazionale* della soluzione di problemi di decisione[15]. Così, la questione non era più quella del problema della decisione, bensì la seguente: dato un algoritmo di decisione per una teoria *T*, quanto *tempo e spazio di memoria*[16] tale algoritmo impiega per decidere se un enunciato della teoria è un suo teorema?

In teoria della complessità computazionale si assume che siano *computazionalmente intrattabili* quei compiti che richiedono risorse di tempo e spazio di memoria (le cosiddette risorse computazionali) che

[12] Rabin (1977, 599).
[13] Fischer and Rabin (1974).
[14] Meyer (1975).
[15] Vedi anche Stockmeyer (1987). Si veda anche Papadimitriou (1994); Sipser (2005).
[16] Come opportunamente sottolineato da Frixione e Palladino (2004, 381): «queste due risorse hanno un ruolo, per così dire, 'asimmetrico': in un certo senso il tempo di calcolo è prioritario rispetto allo spazio di memoria, in quanto, se un calcolo richiede un certo spazio di memoria, esso deve necessariamente richiedere un tempo che sia almeno dello stesso ordine di grandezza. Se ad esempio un calcolo richiede uno spazio di memoria che cresce esponenzialmente, esso deve impiegare un numero di passi di calcolo almeno esponenziale, in quanto altrimenti non avrebbe il tempo sufficiente per operare su tutta la memoria richiesta. Non è detto però che valga il viceversa. Un calcolo può richiedere un tempo esponenziale anche se gli è sufficiente uno spazio di memoria polinomiale». Ovviamente, come Frixione e Palladino notano, questo vale certamente per computazioni sequenziali, nel caso del calcolo parallelo le cose meritano analisi ulteriori.

crescono esponenzialmente con la lunghezza dell'input[17]; e che siano *computazionalmente trattabili* quelli che richiedono risorse che crescono al più in modo polinomiale[18] con la lunghezza dell'input. In tale prospettiva, come correttamente si dice, la complessità computazionale non concerne quante risorse richiede di svolgere un determinato compito, bensì quanto aumentano le risorse richieste al crescere delle dimensioni dei dati.

Il confronto della nuova prospettiva con il lavoro tarskiano sembrò da subito fondamentale. Proprio studiando la complessità computazionale degli algoritmi di decisione, nel 1974, Fischer e Rabin provarono *in primis* per l'aritmetica di Presburger (dimostrata decidibile) che per ogni algoritmo di decisione esistono enunciati α di misura (numero dei simboli) n tali che l'algoritmo richiede 2^{2^n} passi per decidere α; ed in secondo luogo che l'algoritmo tarskiano[19] per la geometria elementare è inefficiente in quanto *esponenzialmente complesso*: essi mostrarono, infatti, che dato un qualunque algoritmo per la geometria euclidea elementare esistono infiniti enunciati della teoria tali che l'algoritmo non è in grado di decidere se è oppure no un teorema della teoria in meno di 2^{cn} passi, dove $c > 0$ (c dipende dalla codificazione usata) ed n la lunghezza dell'enunciato; e posero (senza dimostrazione) che esiste un $c > 0$ tale che l'algoritmo di Tarski verificherà o refuterà un enunciato della geometria elementare di lunghezza n in al più 2^b passi con $b = 2^{cn}$.

Dunque, dal punto di vista della complessità computazionale, ciò significa, come evidenziato da Stockmeyer, che la usuale distinzione tra teorie decidibili ed indecidibili viene ad offuscarsi in quanto per un essere umano le teorie decidibili che ammettono algoritmi inefficienti equivalgono a teorie indecidibili:

> The fact that $Th(R,+)$ and $Th(R,+,\cdot)$ are decidible is of little use in designing practical decision algorithms. The exponential growth of the time required to accept $Th(R,+)$ suggests that any decision procedure for this problem will use hopelessly large amounts of time on relatively short

---

[17] Tali lunghezze sono misurate in modo opportuno ed in maniera diversa a seconda dei casi: nel caso in questione potremmo considerare il numero di simboli ricorrenti nell'enunciato da decidere.

[18] Dunque un algoritmo è considerato efficiente se esiste una funzione polinomiale P tale che, per ogni enunciato della teoria in questione, l'algoritmo richiede un numero di passi minori o uguale a $P(n)$ (dove n è la lunghezza dell'enunciato) per decidere se l'enunciato è o meno un teorema della teoria.

[19] Per ulteriori dettagli storici si veda Stockmeyer (1987). Un secondo interessante caso studio è quello proposto da D'Agostino (1992).

> sentences, and therefore that $Th(R,+)$ is "practically undecidable" even thoug it is tecnically decidable. Even though the value of c and the density of sentences for which the theorem applies have not yet been determined well enough to draw solid conclusions, the term practical undecidability seems apt, since classical undecidability results are prone to similar objections. At the very least, an exponential lower bound on the time complexity of a problem serves as a warning not to seek a uniformly efficient decision algorithm but either to settle for an algorithm which does not work in all cases or to simplify the problem so that it becomes tractable.[20]

Tali risultati, ovviamente, non implicano una rinuncia a lavorare sulla geometria tarskiana dal punto di vista della dimostrazione automatica[21], perché in generale questo tipo di applicazioni è motivato anche dall'obiettivo di verificare la validità di nuovi algoritmi.

In conclusione, la teoria della complessità computazionale non ci insegna qualcosa di importante e di cui tener conto solo per la progettazione di nuovi algoritmi[22] e per l'informatica *tout court*, ma qualcosa che deve spronarci ad una riflessione più generale che senza dubbio raffinerebbe le analisi di molti problemi filosofici: dalla filosofia del linguaggio alla filosofia della matematica, dalla filosofia della fisica alla filosofia dell'economia, dalla filosofia della mente alla filosofia della biologia[23].

Ringraziamenti

Ringrazio Silvio Bozzi per avermi introdotto a queste tematiche negli anni di insegnamento all'Università di Urbino: questo testo ha un grande debito con i suoi insegnamenti; ringrazio, inoltre, Fabio Acerbi, Giulia Giannini, Paolo Stellari, Angelo Vistoli, Massimo Sangoi per i loro utilissimi commenti.

[20] Stockmeyer (1987, 3).
[21] Vedi Quaife (1989); Narboux (2007).
[22] Rabin (1974); Simon, (1995).
[23] Si veda l'importante lavoro di Aaronson (2012); si veda anche Cherniak (1984); D'Agostino, Mondadori (1999).

Riferimenti

Aaronson, S., 2012, «Why Philosophers Should Care About Computational Complexity» in: B. J. Copeland, C. Posy, O. Shagrir (a cura di), *Computability: Gödel, Turing, Church and Beyond*, MIT Press.

Caviness, B.F., Johnson, J.R., 1998, *Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition*, Texts and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag.

Cherniak, C., 1984, «Computational Complexity and the Universal Acceptance of Logic», *The Journal of Philosophy*, LXXXI, n. 12, pp. 739-758.

Church, A., 1936a, «An Unsolvable Problem of Elementary Number Theory», *American Journal of Mathematics*, 58, pp. 345-363, e "A Correction", *ivi*, pp. 101-102.

Church , A., 1936b, «A note on Entscheidungsproblem», *The Journal of Symbolic Logic*, 1, n. 1, pp. 40-41.

D'Agostino, M., 1992, «Are tableaux an improvement on truth-tables? Cut-free proofs and bivalence», *Journal of Logic, Language and Information*, 1, pp. 235-252.

D'Agostino, M., Mondadori, M., 1999, «La logica è davvero analitica?», *Bollettino Filosofico del Dipartimento di Filosofia dell'Università della Calabria*, 15, pp. 283-306. Reperibile presso: www.rescogitans.it/download.php?attachment_id=457

Doner, J., Hodges, W., 1988, «Alfred Tarski and Decidible Theories», *The Journal of Symbolic Logic*, 53, n. 1, pp. 20-35.

Fischer, M.J., Rabin, M.O., 1974, «Super-exponential complexity of Pressburger arithmetic», *Complexity of Computation* (AMS-SIAM Proceedings), pp. 7-41, 1974.

Frixione, M., Palladino, D., 2004, *Funzioni, Macchine, Algoritmi. Introduzione alla Teoria della Computabilità*, Carocci, Roma.

Graziani, P., 2001, *Analisi e Sintesi in Geometria. La Prospettiva della Teoria Intuizionista dei Tipi*, Università degli Studi di Urbino.

Hilbert, D., 2009, *Fondamenti della geometria*, Franco Angeli, Milano.

Hodges, W., 1993, *Model Theory*, Cambridge University Press, Cambridge.

Jacobson, N., 1985, *Basic Algebra*, 2 vols., W. H. Freeman and Company, New York.

Keisler, H.J., 1977, «Fundamentals of model theory» in *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise (a cura di), North Holland Publishing Company, Amsterdam, pp. 47-103.

Meyer, A.R., 1974, «The inherent complexity of theories of ordered sets», *Proceedings of the International Congress of Mathematics*, Canadian Mathematical Congress, Vancouver, pp. 477-482.

Narboux, J., 2007, «Mechanical Theorem Proving in Tarski's Geometry» in *Automated Deduction in Geometry*, F. Botana and T. Recio eds., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, pp.139-156.

Papadimitriou, C.H., 1994, *Computational Complexity*, Addison-Wesley.

Prestel, A., 1984, *Lectures on Formally Real Fields*, Springer-Verlag.

Quaife, A., 1989, «Automated Development of Tarski's Geometry», *Journal of Automated Reasoning*, 5, pp. 97-118.

Rabin, M.O., 1974, «Theoretical Impediments to Artificial Intelligence» in: Rosenfeld J. L. (a cura di) *Information Processing 74: Proceedings of IFIP Congress 74*, North-Holland, Amsterdam, pp. 615-619.

Rabin, M.O., 1977, «Decidable Theories» in *Handbook of Mathematical Logic*, J. Barwise (a cura di), North Holland Publishing Company, pp. 595-629.

Renegar, J., 1992, «On the Computational Complexity and Geometry of the First-order Theory of the Reals, Part I: Introduction. Preliminaries. The Geometry of Semi-algebraic Sets. The Decision Problem for the Existential Theory of the Reals», *Journal of Symbolic Computation*, 13, pp. 255-299.

Renegar, J., 1992, «On the Computational Complexity and Geometry o the First-order Theory of the Reals. Part II: The General Decision Problem. Preliminaries for Quantifier Elimination», *Journal of Symbolic Computation*, 13, pp. 301-327.

Renegar, J., 1992, «On the Computational Complexity and Geometry of the First-order Theory of the Reals. Part III: Quantifier Elimination», *Journal of Symbolic Computation*, 13, pp. 329-352.

Shoenfield, J.R., 1967, *Mathematical Logic*, Addison-Wesley, Reading (Mass.).

Simon, H.A., 1995, «Artificial Intelligence: an empirical science», *Artificial Intelligence*, 77, pp. 95-127.

Stockmeyer, L., 1987, «Classifing the Computational Complexity of Problems», *The Journal of Symbolic Logic*, 52, N. 1, pp. 1-43.

Sipser, M., 2005, *Introduction to the Theory of Computation (second Edition)*, Course Technology.

Szczerba, L.W., 1986, «Tarski and geometry», *The Journal of Symbolic Logic*, 51, N. 4, pp. 907-912.

Tarski, A., 1951, *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*, second edition, Berkeley and Los Angeles, University of California Press.
Tarski, A., 1959, «What is Elementary Geometry?» in: *The Axiomatic Method, with Special Reference to Geometry and Physics*, L. Henkin, P. Suppes, and A. Tarski eds., amsterdam, North Holland.
Tarski, A., Givant, S., 1999, «Tarski's System of Geometry», *The Journal of Symbolic Logic,* 5, n. 2, pp. 175-214.
Van Den Dries, L., 1988, «Alfred Tarski's Elimination Theory for Real Closed Fields», *The Journal of Symbolic Logic,* 53, n. 1, pp. 7-19.