ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXVIII-XXIX / 2001, s. 71–70*

Michał HELLER

Wydział Filozoficzny PAT
Kraków

CO TO JEST MATEMATYKA?

1. PYTANIE

W jednym z poprzednich artykułów[1] postawiłem tezę, stwierdzającą, że światu należy przypisać pewną *obiektywną* cechę, dzięki której szczególnie skutecznie można go badać przy pomocy matematyki. Cechę tę nazwałem matematycznością świata. Zakłada ona pewnego rodzaju obiektywizm samych struktur matematycznych. Gdyby matematyka była tylko tworem ludzkiego umysłu, trudno byłoby wyjaśnić, jak świat mógłby obiektywnie posiadać cechę matematyczności. Tymczasem wśród filozofów (nie tylko wśród nich) panuje bardzo rozpowszechnione przekonanie, że matematyka jest tworem ludzkiego umysłu. Co więcej, zwolennicy tego poglądu coraz częściej powołują się na osiągnięcia nowoczesnych nauk o mózgu i tzw. nauk kognitywnych, które jakoby miały to przekonanie potwierdzać, odkrywając nawet, „jak mózg tworzy matematykę".[2] Tego rodzaju argumenty opierają się — moim zdaniem — na głębokim nieporozumieniu dotyczącym odpowiedzi na pytanie: co to jest matematyka? Jeżeli bowiem

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

[1] *Czy świat jest matematyczny?* Zagadnienia Filozoficzne w Nauce, 22, 1998, 314.

[2] Por. np. S. Dehaene, *The Number Sense — How the Mind Creates Mathematics*, Oxford University Press, Oxford — New York, 1997; podobne stanowisko zajmuje Changeaux w dyskusji z Connesem: J-P.Changeaux, A. Connes, *Conversations on Mind, Matter and Mathematics*, Princeton University Press, Princeton 1995.

matematyką umówimy się nazywać to, co zawierają nasze podręczniki i monografie matematyczne, to oczywiście taką matematykę tworzymy a nie odkrywamy. Jeżeli natomiast przez matematykę będziemy rozumieć abstrakcyjne prawidłowości, które nasze formuły i równania tylko w jakiś sposób ujmują, to będziemy skłonni tak rozumianej matematyce przypisywać przynajmniej pewien stopień niezależności od naszego umysłu. Ażeby w jak największej mierze uniezależnić się od tego rodzaju terminologicznych konwencji, w moim poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie: co to jest matematyka? będę się odwoływać do tego, jak matematyka rzeczywiście funkcjonuje, i to zarówno w obszarze swoich teoretycznych dociekań, jak i w swoich licznych zastosowaniach (zwłaszcza w teoretycznej fizyce). Ze sposobu działania matematyki będę wnioskować o jej naturze. Celowo mówię o „sposobie działania matematyki" a nie o „różnych sposobach działania matematyków". Sądzę bowiem, że różne sposoby działania matematyków mają pewien wspólny mianownik, który można nazwać sposobem działania matematyki. Jeżeli ktoś wyjdzie poza ten wspólny mianownik, przestaje być matematykiem.

2. LICZENIE I LOGIKA STRUKTUR

Współczesna matematyka ma dwa korzenie: liczenie i logikę struktur. Te dwa korzenie splotły się w jeden pień, rozrastający się w liczne rozgałęzienia. Całe drzewo nie przestaje wydawać obfitych owoców. Bez logiki struktur liczenie redukowałoby się do zwykłych rachunków, a matematyka do „szewskiej roboty" (jak mawiał pewien matematyk). Logika struktur bez liczenia byłaby zapewne matematyką, ale tak abstrakcyjną, że niewiele różniłaby się od uprawiania sztuki dla sztuki. Początki matematyki toną w mroku dziejów, ale wszystko wskazuje na to, że sztuki rachowania nauczyli naszą kulturę starożytni Babilończycy, a logika struktur swymi korzeniami sięga starożytnych Egipcjan. Babilończycy byli mistrzami liczenia. Opierając się na bardzo długich seriach obserwacji położeń planet, przy pomocy niezwykle żmudnych rachunków potrafili przewidywać, z dużą dokładnością, ich przyszłe położenia. Egipcjanom Nil co roku swoimi wylewami niszczył znaki graniczne pomiędzy działkami ziemi, należącymi do różnych właścicieli. Konieczność corocznego odtwarzania skomplikowanej „siatki własności” stworzyła początki geometrii (ślady tego pochodzenia zachowały się w nazwie: geo-metria — pomiary ziemi). Ale nawet w babilońskich rachunkach była obecna logika struktur: ostatecznie w długich kolumnach arytmetycznych znaków klinowych była zaszyfrowana harmonia ruchów ciał niebieskich. Z egipskich pomiarów ziemi Grecy zrobili abstrakcyjną geometrię, ale i abstrakcyjna geometria musiała w końcu zniżyć się do rachunkowego konkretu: każdy właściciel dowiadywał się przecież, gdzie i ile ziemi jemu przypada w udziale. I tak już pozostało. Liczenie i logika struktur tworzą matematykę. Nawet jeżeli niekiedy w zastosowaniach matematyki wydaje się, że wystarczy tylko trochę pomyśleć i policzyć, to zawsze w podtekście tego myślenia kryje się jakaś abstrakcyjna struktura. Jeżeli na przykład znamy drogę i czas, w którym jakieś ciało przebyło tę drogę i chcemy obliczyć prędkość tego ciała, to wydaje się, że w tym celu nie trzeba znać niczego więcej poza elementarnym dzieleniem. Ale to tylko pozór. Głębsze wniknięcie w „tajemnicę ruchu” ujawnia piękną matematyczną strukturę mechaniki klasycznej. Jej zręby stworzył Newton w swoich *Matematycznych zasadach filozofii przyrody*, ale trzeba było trzech wieków żmudnych badań wielu matematyków i fizyków, ażeby tę strukturę w pełni odtworzyć.

Z liczeniem jesteśmy zżyci od małego. Wielu z nas wręcz utożsamia liczenie z matematyką, a niektórzy — zawdzięczając to nudnemu, szkolnemu liczeniu — na zawsze zrazili się do matematyki. Tylko stosunkowo nieliczni wiedzą o tym, że liczenie jest ściśle związane ze strukturami i z nich wywodzi swoją skuteczność. Zresztą sami matematycy stosunkowo późno — jakieś 80 lat temu — zdali sobie w pełni z tego sprawę, że ich dyscyplina ma również strukturalne oblicze.

3. STRUKTURA STRUKTUR

Pojęcie struktury, jak większość naukowych pojęć, wywodzi się z doświadczeń, których wyrazem jest język potoczny. Mówimy na przykład, że jakiś budynek ma bogatą strukturę, jeżeli na jego całość składa się wiele różnorodnych elementów powiązanych ze sobą w jednolitą całość. Analogicznie, gdy krytyk literacki analizuje strukturę jakiegoś utworu, stara się w nim wyróżnić poszczególne wątki, stwierdzić, jak się wzajemnie przeplatają i czy prowadzą do jakiegoś logicznie uzasadnionego rozwiązania. Gromadząc wiele podobnych przykładów, można by uznać, że wyrazu „struktura" najczęściej używamy wtedy, gdy mamy do czynienia z jakimś zestawem elementów i gdy interesują nas ich wzajemne powiązania, sprawiające, że elementy te tworzą jakąś bardziej lub mniej uporządkowaną całość.

Pojęcie struktury zrobiło wielką karierę w filozofii ostatnich kilkudziesięciu lat, a wiele szkół filozoficznych określa siebie mianem różnego rodzaju strukturalizmów. W języku filozofów struktura zwykle znaczy „zbiór elementów, pomiędzy którymi zachodzą pewne relacje". Często filozofowie mówią, że zbiór jest „ustrukturalizowany przez relacje".

Matematyka tak rozumiane pojęcie struktury przejęła, ale je — swoim zwyczajem — wyostrzyła i przetworzyła w skuteczne narzędzie badawcze. W dalszym ciągu nie będę wnikał w szczegóły matematycznych definicji (bo nie jest to celem niniejszego studium), lecz ukażę jak struktury funkcjonują i jaką rolę spełniają we współczesnej matematyce.

Trzeba zacząć od pewnej wstępnej, ważnej uwagi. Matematykę można uznać za „strukturę struktur". Jedne struktury są „nadbudowane" na innych. Jedne są podstrukturami innych. Jedne wynikają z innych. Ten „gmach struktur" narastał w długim, dziejowym procesie rozwoju matematyki i ma on swoje uzasadnienie w historii. Ale matematycy często ingerują w ten historycznie ustalony „porządek struktur", starając się z niego wyłowić, na przykład, struktury najprostsze lub „najbardziej płodne dedukcyjnie" i na nich budować całą resztę matematyki. Niekiedy bywa i tak, że jakaś nowo odkryta struktura rozsadza stary porządek i zmusza do istotnych przetasowań. Przyjmując różne kryteria porządku, można tę hierarchię struktur do pewnego stopnia zmieniać, na przykład uznając za wyjściowe różne struktury.

Zgodnie z najbardziej powszechnie przyjętą dziś przez matematyków strategią, za „podłoże" rozmaitych struktur uważa się zbiory. Zbiór składa się z elementów, które do niego należą. Na przykład wszystkie liczby rzeczywiste należą do zbioru liczb rzeczywistych, ale żadna liczba urojona do tego zbioru nie należy.

Zbiory można wyposażać w różne struktury. Wśród struktur matematycznych można wyróżnić trzy wielkie klasy, a mianowicie: struktury algebraiczne, struktury topologiczne i struktury miary.

Struktury algebraiczne, mówiąc najogólniej, to takie struktury, które umożliwiają „składanie" ze sobą dwu lub więcej elementów danego zbioru. Składanie inaczej nazywa się działaniem. Przykładem takiego działania jest mnożenie w zbiorze liczb rzeczywistych. Działając na parę liczb rzeczywistych (tzn. mnożąc je ze sobą), otrzymujemy inną liczbę rzeczywistą. Działania mają różne własności i niektóre działania wyróżniają niektóre elementy zbioru. Np. działanie mnożenia w zbiorze liczb rzeczywistych wyróżnia „1" i „0": mnożenie przez jeden nie zmienia wyniku, a mnożenie przez zero zawsze daje zero. Algebra zajmuje się badaniem takich działań.

Struktury topologiczne eksploatują pojęcia ciągłości i bliskości. Nawet intuicyjnie widać, że te dwa pojęcia są ze sobą ściśle związane. Jakiś zbiór (np. linię prostą) jesteśmy skłonni nazywać ciągłym, jeżeli jego elementy (punkty) znajdują się „dowolnie blisko siebie".[3] Nieco wbrew potocznym intuicjom, okazuje się, że nie ma jednego „absolutnego" pojęcia ciągłości. Pojęcie to w istotny sposób zależy właśnie od struktury topologicznej. Strukturę tę wprowadza się zwykle definiując rodzinę tzw. podzbiorów otwartych (spełniających odpowiednie aksjomaty). Dwa elementy jakiegoś zbioru są sobie bliskie, jeżeli znajdują się w tym samym podzbiorze otwartym. Na tym samym zbiorze można wprowadzać różne topologie. Na przykład prosta rzeczywista

[3] Ale uwaga! Nie jest to definicja ciągłości.

(zbiór liczb rzeczywistych) jest ciągła w tzw. naturalnej topologii (w tej topologii pracuje nasza intuicja), ale można na niej z łatwością wprowadzić takie struktury topologiczne, w których nie będzie ona ciągła. Własności topologiczne odgrywają ważną rolę w wielu dziedzinach matematyki.

Struktury miary są matematyczną stylizacją (a więc wyabstrahowaniem i uściśleniem) procedur mierzenia znanych z codziennego życia (i z fizyki). Mierzenie pola lub objętości może służyć za typowy przykład. Z tym, że mierzenie w sensie matematycznym jest „maksymalnie wyidealizowane", tzn. uwolnione od wszelkich materialnych skojarzeń. Miarą (w sensie matematycznym) jest pewna funkcja określona na „rodzinie podzbiorów mierzalnych", czyli na rodzinie tych własności, które dają się mierzyć. Wartością tej funkcji na danym podzbiorze mierzalnym (czyli na danej własności) jest liczba, która tę miarę wyraża. Bardzo ważnym pojęciem, które określa się za pomocą miary, jest pojęcie całki.

Każdej matematycznej strukturze odpowiadają charakterystyczne dla niej odwzorowania (przekształcenia). Odznaczają się one tym, że gdy dokonujemy takiego odwzorowania, własności istotne dla danej struktury nie ulegają zmianie. Np. strukturze „zbioru" odpowiada odwzorowanie zwane bijekcją, które każdemu elementowi zbioru przyporządkowuje jednoznacznie element innego zbioru. Jest oczywiste, że po dokonaniu takiego przekształcenia, otrzymujemy zasadniczo ten sam zbiór, co najwyżej inaczej tylko „nazwany". Bardzo często matematycy wolą operować odwzorowaniami niż samymi strukturami. W zasadzie obydwa podejścia są równoważne, ale każde z nich prowadzi do innych skojarzeń wyobrażeniowych. Manipulowanie zbiorami wyposażonymi w struktury sugeruje, że świat matematyki składa się z obiektów. Posługiwanie się odwzorowaniami nasuwa wyobrażenie świata utkanego z relacji pomiędzy abstrakcyjnymi strukturami.

Jeden zbiór może być wyposażony w kilka struktur i wówczas struktury te „oddziaływują na siebie": jedna struktura wymusza na drugiej pewne przystosowania, tak by razem mogły funkcjonować. Np. zbiór liczb rzeczywistych (prosta rzeczywista) posiada i strukturę algebraiczną (liczby można dodawać i mnożyć), i strukturę topologiczną (prosta rzeczywista jest ciągła w naturalnej topologii), i strukturę miary (np. odcinkowi prostej rzeczywistej można przypisać pewną długość). I jest rzeczą oczywistą, że wszystkie te własności nie są od siebie niezależne, lecz ze sobą współgrają (np. dodawanie i miara na prostej rzeczywistej muszą być tak zdefiniowane, żeby dodanie do siebie odcinków o mierze (długości) a i b dało odcinek o mierze $a + b$).

Z „oddziaływania" ze sobą różnych struktur rodzą się nowe działy matematyki. Np. jednym z najbardziej obecnie rozwijanych działów matematyki jest analiza funkcjonalna. Powstaje ona przez „nałożenie" struktur topologicznych lub struktur miary na struktury algebraiczne. Można śmiało powiedzieć, że najciekawsze i najbardziej płodne prace matematyczne, jakie dziś powstają, to prace eksplorujące powiązania i współzależności struktur. We wstępie do jednego z podręczników matematyki współczesnej czytamy: „Kombinowanie ze sobą podstawowych struktur matematycznych prowadzi do niekończącego się strumienia coraz to bardziej ekscytujących systemów i do praktycznie nieograniczonego bogactwa odkryć".[4] I jeszcze jedno, filozoficznie ważne pytanie: Intuicja mówi nam, że struktura musi być strukturą czegoś, że musi istnieć jakieś tworzywo, które ma pewną strukturę. Co jest zatem tworzywem struktur matematycznych? Rzecz w tym, że struktura wcale nie musi być strukturą czegoś, przynajmniej w naukach formalnych (jaką jest matematyka). Na tym właśnie polega istota tego, co filozofowie lubią nazywać „abstrakcją matematyczną". Jak powiedział znany matematyk, J. Dieudonné: „Matematyka jest logicznym studium *relacji* pomiędzy pewnymi bytami, a nie studium natury tych bytów".[5] Matematyka eksploruje więc nieskończone *universum* struktur, ale struktur pustych, które nie muszą być strukturami czegokolwiek.

---

[4] P. Roman, *Mathematics for Physicists and Other Outsiders*, vol. 2, Pergamon Press, New York — Toronto, 1975, p. 382.

[5] Cyt. za P. Roman, dz. cyt., vol. 1, s. XXIII; podkreślenie Dieudonné'a.

Filozof zapewne powiedziałby, że oczywiście struktura musi być strukturą czegoś, a jedynie matematyczna abstrakcja polega na tym, iż abstrahuje się od tego „czegoś", zwracając uwagę jedynie na związki formalne kształtujące to „coś". Być może tak jest, ale utrzymywanie, że tak być musi, jest narzucaniem matematyce pewnej wizji filozoficznej. A tego nauka nie toleruje.

4. ARCHITEKTURA STRUKTUR A AKSJOMATYKA

Strukturalne widzenie matematyki ma, w pewnym sensie, swojego konkurenta. Matematycy ciążący w kierunku logiki woleliby w matematyce widzieć naukę o wynikaniu: przyjmuję pewne (dowolne) założenia i badam, co z nich wynika. Ukoronowaniem takiego podejścia jest uprawianie matematyki metodą aksjomatyczną. Metoda ta ma długą tradycję: od Euklidesa aż po wyrafinowane techniki francuskiej grupy Bourbaki. Doprowadzenie tej metody do szczytowego wyrafinowania stanowi czysta formalizacja, która zamienia uprawianie matematyki w grę symboli nieskażoną żadną interpretacją.

Należy jednak z naciskiem podkreślić, że matematyka, czy to uprawiana metodą struktur, czy metodą aksjomatyczną, jest tą samą matematyką i obydwie metody, współpracując ze sobą, ujawniają coś z dość kapryśnej natury królowej nauk. Warto uświadomić sobie, że prawdopodobnie nikt tak nie przyczynił się do rozszyfrowania międzystrukturalnych powiązań matematycznych teorii jak właśnie skłonna do formalizacji grupa Bourbaki. Wybierając (dowolnie, ale zgodnie z metalogicznymi regułami) aksjomaty, trafiamy w jakiś obszar pewnej matematycznej struktury. Łańcuchy dedukcji z aksjomatów prowadzą nas po różnych powiązaniach logicznych wewnątrz tej struktury i jej relacji z innymi strukturami. I tu właśnie pojawiła się niespodzianka — twierdzenia Gödla (i inne tzw. twierdzenia limitacyjne).

Niektórzy matematycy uważają (jest takich niemało), że twierdzenia Gödla oznaczają nieporównywalny z niczym dotychczasowym kryzys w podstawach matematyki. Bo oto okazuje się, że matematyka wcale nie jest szczytem ścisłości. Nie jest bowiem tak (jak to sobie wyobrażał Hilbert, tworząc swój słynny program), że dobierając właściwe założenia i właściwe reguły wnioskowania, będzie można całą matematykę zamienić w jedną wielką dedukcyjną maszynę do otrzymywania, w zasadzie, wszystkich możliwych wyników. Tak nie jest. Gödel udowodnił, że żaden system aksjomatyczny przynajmniej tak bogaty jak arytmetyka (zaksjomatyzowana przez Peano) nie może być równocześnie zupełny i niesprzeczny. Chcąc uchronić się przed sprzecznością, rujnujemy zupełność. Chcąc utrzymać zupełność, wpadamy w sidła sprzeczności.

Wprawdzie do dziś filozoficzne konsekwencje twierdzeń limitacyjnych nie zostały do końca zrozumiane, nie sądzę jednak, że wraz z ich udowodnieniem zaczęły walić się fundamenty matematyki. Jeżeli można tu mówić o kryzysie, to jest to niewątpliwie kryzys wzrostu — trudny proces osiągania głębszego zrozumienia. A zrozumienie, moim zdaniem, polega na uświadomieniu sobie, że matematyka po prostu nie jest „formalną maszyną dedukcyjną". Aksjomatyka jest dobrą metodą, jeżeli chce się uporządkować pewien fragment matematyki, ale zawodzi, gdy chce się nią ogarnąć zbyt bogate obszary matematycznych struktur. Twierdzenia limitacyjne są tego wyrazem. Aksjomatyka jest wynalezioną przez nas metodą i, co za tym idzie, jest „dopasowana" do sposobu działania naszego umysłu. A kto nam zagwarantował, że ten sposób działania („nasza logika") wystarczy do tego, by ogarnąć cały świat matematycznych struktur? Przekonanie, że „naszą logiką" potrafimy skatalogować i uporządkować wszystkie matematyczne struktury zakrawa na „przedkopernikański antropocentryzm". Ani Wszechświat fizyczny, ani (chciałoby się powiedzieć: tym bardziej!) świat matematyki nie musi być skrojony na miarę naszych możliwości.

Następująca filozoficzna hipoteza wydaje się być dobrze uzasadniona: Świat matematycznych struktur jest czymś, w pewnym sensie, przez nas zastanym.[6] Ze sporym trudem i ze znacznym nakładem wysiłków odkrywamy jego niektóre obszary, ale gdy usiłujemy je wtło-

[6]Struktury matematyczne są przez nas zastane także w sensie historycznym: pole naszych obecnych badań jest, w znacznej mierze, wyznaczone przez wyniki dociekań naszych poprzedników.

czyć w ramy wymyślonej przez nas metody, nie zawsze okazuje się to możliwe. Jeżeli świat struktur matematycznych nie podporządkowuje się „naszej logice”, wcale to nie znaczy, że nie podporządkowuje się żadnej logice. A jeżeli „logika matematyki” jest bogatsza od „naszej logiki”, to znaczy, że matematyka nie jest naszym wytworem. Tylko dla kogoś, kto nadal upiera się przy tym, że to człowiek stworzył matematykę, odkrycie twierdzeń limitacyjnych oznacza „największy kryzys wszechczasów” — bo oto człowiek stworzył szczyt ścisłości, który okazał się... otwartą drogą do sprzeczności.

Oczywiście to, co znajduje się w naszych książkach i czasopismach, w pamięci komputerów i ich programach jest naszym wytworem. Ewolucja matematyki jest procesem historycznym, uwikłanym w rozmaite społeczne i kulturowe uwarunkowania. Twierdzić inaczej byłoby skrajną naiwnością. Ale podobnie jak historia geologii (jako nauki) nie jest tym samym, co historia Ziemi (jako planety), dziejowość matematyki nie jest tym samym co uwikłanie w czas i zmienność matematycznych struktur. Nasze książki i artykuły zawierają odkrytą przez nas matematykę, wyrażoną w naszym, podległym czasowi, zmiennym języku. Właśnie dlatego z matematyką „nie możemy robić, co się nam podoba”, bo wyraża ona pewne prawidłowości, które od nas nie zależą. Nie mamy nad nimi władzy. I tylko w tym sensie twierdzę, że matematyki nie tworzymy, lecz ją odkrywamy.

5. MATEMATYKA I ZASTOSOWANIA

Rozważając naturę matematyki, nie sposób pominąć problemu jej zastosowań. Niezwykła skuteczność matematyki w badaniu świata niewątpliwie mówi nam coś o samej matematyce. Myślę, że dotychczas fakt ten nie był w wystarczającym stopniu brany pod uwagę w dyskusjach nad podstawami matematyki i być może było to jednym z powodów, dla których dyskusja ta tkwiła w martwym punkcie.

Swoje najpiękniejsze i najbardziej skuteczne zastosowania matematyka znalazła w fizyce. Można wręcz powiedzieć, że fizyka jest niczym innym jak tylko „królewską drogą zastosowań matematyki”.

W zastosowaniach tych nie można oddzielić od siebie strukturalnej i rachunkowej strony matematyki. Teorie fizyczne są po prostu odpowiednio zinterpretowanymi strukturami matematycznymi, a niebywała zgodność uzyskiwanych w fizyce przewidywań teoretycznych z wynikami eksperymentalnymi jest następstwem tego, że struktury matematyczne pozwalają wyliczać niektóre występujące w nich współczynniki i – kierując się odpowiednią interpretacją danej struktury — porównywać je z wynikami rzeczywiście przeprowadzanych pomiarów. Jeżeli do dziś w fizyce występują „kryzysy" (np. we wszelkich dotychczasowych próbach połączenia mechaniki kwantowej z ogólną teorią względności), to przede wszystkim z tego powodu, że nie udawało się znaleźć odpowiedniej struktury matematycznej, która by problem rozwiązywała.

Jak wyjaśnić tak wielki sukces metody, polegający na „odpowiednim" interpretowaniu „odpowiednich" struktur matematycznych, czyli na tworzeniu (i empirycznym sprawdzaniu) fizycznych teorii? Naturalne wyjaśnienie jest następujące: widocznie konstrukcja świata odpowiada pewnym matematycznym strukturom (a być może ostatecznie jakiejś jednej, „wielkiej" matematycznej superstrukturze). Albo inaczej: pewne aspekty struktury świata odpowiadają pewnym strukturom matematycznym (lub: struktura świata odpowiada jakiejś jednej strukturze matematycznej, którą obecnie potrafimy jedynie przybliżać pewnymi „podstrukturami"). Przyjmijmy to jako wyjaśniającą hipotezę, ale aby to mogła być hipoteza przekonywająca, musimy wprowadzić pewne znaczeniowe rozróżnienia.

Wyżej powiedziałem, że tworzona przez nas matematyka wyraża pewne prawidłowości, które od nas nie zależą i to właśnie tym prawidłowościom (zapewne tylko niektórym z nich) odpowiada konstrukcja świata. Ponieważ jednak do tych prawidłowości mamy dostęp tylko przez tworzone przez nas struktury matematyczne, możemy twierdzić, że struktura świata odpowiada pewnym „naszym strukturom matematycznym".

Co więcej, istnieją poważne racje, by sądzić, że „nasze struktury matematyczne" nie pozostają w jedno-jednoznacznym stosunku do tych prawidłowości, które „odzwierciedlają”. Raczej jest tak, że chwytają one tylko pewne aspekty tych prawidłowości. Dobrym porównaniem mogłoby tu być odwołanie się do obrazu figury geometrycznej i jej rzutów na różne płaszczyzny. Prawidłowości, o których mowa, są nam dostępne tylko przez niektóre ich „rzuty”. Ponieważ cień jest w istocie rzutem, mamy tu piękną analogię z platońską metaforą cieni doskonałych idei.[7] Jeżeli istotnie struktura świata odpowiada prawidłowościom a nie ich „rzutom”, należy się spodziewać, że ta sama teoria fizyczna może być (z porównywalnym skutkiem) wyrażona przez różne „nasze struktury matematyczne” (różne „rzuty”). Tak jest w istocie. Np. znamy kilka (niezupełnie równoważnych) ujęć mechaniki kwantowej: przy pomocy teorii operatorów na przestrzeni Hilberta, przy pomocy C*-algebr, przy pomocy całek po drogach Feynmana. Jeżeli moja wyjaśniająca hipoteza jest słuszna, to są to trzy różne „nasze struktury”, będące trzema różnymi „rzutami” jakiejś nieznanej nam bezpośrednio i niezależnej od nas struktury, której „podlega” świat kwantów i cząstek elementarnych.

Zaproponowana w niniejszym rozdziale hipoteza wyjaśniająca naturę matematyki pozostawia wiele kwestii otwartych. Przede wszystkim nie podejmuje ona próby udzielenia odpowiedzi na pytanie, w jakim sensie istnieją prawidłowości, które „nasze struktury matematyczne odzwierciedlają” (czy „reprezentują”). Rozmaite filozofie matematyki są tu możliwe.

[7]K. Maurin w podobnym kontekście odwołuje się do matematycznego pojęcia reprezentacji. Dostępne są nam tylko reprezentacje niektórych „prawidłowości”; por. np. jego pracę: „Mathematik als Sprache und Kunst”, w: *Offene Systeme II: Logik und Zeit*, red.: K. Maurin, K. Michalski, E. Rudolph, Klett-Cotta, Stuttgart 1981, ss. 118-241; zwłaszcza rozdz. II, 6.