ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
VI / 1984, s. 18–26*

Michał HELLER

DOŚWIADCZENIE MATEMATYKI

„Dobrze jest podkreślić, że gdybym we śnie znalazł jakąś dowodliwą prawdę, matematyczną lub inną (co jest rzeczywiście możliwe), okazałaby się ona równie pewna na jawie. To pokazuje, jak bardzo prawda zrozumiała niezawisła jest od istnienia poza nami rzeczy zmysłowych materialnych lub też od ich prawdy".

Leibniz, *List do Zofii Karoliny Pruskiej.*

Matematyka nie jest nauką doświadczalną, ale sama jest doświadczeniem. Zarówno doświadczeniem całej ludzkości, jak i doświadczeniem każdego „liczącego człowieka" z osobna. Ożyłem tu cudzysłowu, gdyż daleki jestem od twierdzenia, że całą matematykę da się sprowadzić do rachunkowych recept, chociaż z drugiej strony praktyczne wykonywanie rachunków — czyli liczenie właśnie — stanowi istotny element tego, co nazwałbym indywidualnym doświadczeniem matematycznym. Jeśli „liczenie" rozumieć na tyle szeroko, by zmieścić w tym pojęciu wszystkie operacje zwane rozumowaniem termalnym, to należy stwierdzić, iż wśród intelektualnych czynności człowieka nie ma takiej, która dawałaby podobne poczucie bezpieczeństwa, w sensie nieuniknioności wniosku, jeżeli przyjmuje się przesłanki: To poczucie bezpieczeństwa jest tak silne (tak doświadczalne), że św. Augustyn z Hippony, aby je wyjaśnić, uznał za konieczne odwołać się do oświecenia umysłu przez Boga (teoria iluminacji). Jego zdaniem skończony umysł ludzki nie może być źródłem „prawd wiecznych", a więc prawd pod pewnym względem nieskończonych.

W gruncie rzeczy ten sam problem stanął przed Kartezjuszem, chociaż Kartezjusz inaczej rozegrał cały argument. W swoich poszukiwaniach niepowątpiewalnej prawdy pisał: „Bo czy czuwam, czy śpię, to $2 + 3 = 5$, a kwadrat nie więcej ma boków niż cztery, i zdaje się jest nie-

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

możliwe, by tak oczywiste prawdy popadły w podejrzenie, jakoby były fałszywe”[1]. Ale i tu, zdaniem Kartezjusza, jest miejsce na wątpienie: nie można przecież wykluczyć, że ulegam złudzeniu: może Bóg chce, bym był tak oszukiwany? Augustiańskie oświecenie zostaje tu zastąpione hipotetycznym mamieniem. I dopiero kartezjańskie *Cogito ergo sum* — myślę więc jestem — stanowi przełamanie zaklętego kręgu wątpienia. „Teraz znalazłem! Tak: to myślenie! Ono jedno nie daje się ode mnie oddzielić Ja jestem, ja istnieję; to jest pewne”[2]. Niedoskonałość myślącego ja prowadzi Kartezjusza do uznania istnienia Istoty Najdoskonalszej — Boga. Istnienie Boga jest z kolei gwarancją poprawności naszego myślenia i naszego poznania zmysłowego: Najdoskonalsza Istota nie może być źródłem mamienia i wprowadzania w błąd.

Kartezjańskie wątpienie jest niewątpliwie bardziej krytyczne od augustiańskiej iluminacji, ale z drugiej strony, o ile Augustynowi Bóg był potrzebny do uzasadnienia matematyki (prawd wiecznych), o tyle w systemie Kartezjusza Bóg przejął także funkcje usprawiedliwienia poznania opartego na doświadczeniu. Wbrew pozornie ogromnej różnicy w poglądach obaj filozofowie są zasadniczo zgodni: istotnie, trzeba by Bożej wszechmocy do tego, by sprawić, żeby poprawnie przeprowadzone wnioskowanie matematyczne było tylko złudzeniem. Takie jest zdanie Kartezjusza; można je uznać za negatywną postać teorii iluminacji.

Skąd Kartezjusz wie, że *cogito, ergo sum* daje niepowątpiewalną pewność? Ponieważ stosuje tu swoje kryterium prawdziwości, jakim jest jasność i wyraźność poznania. Nie ulega wątpliwości, że kryterium takie mógł sformułować tylko Kartezjusz–matematyk: doświadczenie matematyczne jest pierwowzorem jasności i wyraźności. Nie przypadkiem Kartezjusz sformułował swój program filozoficzny bezpośrednio po napisaniu szkicu nowej geometrii. Podczas kilku zimowych miesięcy 1619 roku, w odosobnieniu spowodowanym mrozami i śniegiem, narodziła się geometria analityczna i filozofia kartezjańska. Jeszcze raz filozofia zaciągnęła dług wobec matematyki.

Zagadnienie doświadczenia matematyki podjął Leibniz. W liście do Zofii Karoliny Pruskiej, „dotyczącym tego, co jest niezależne od zmysłów i od materii”[3], zauważył, że jakości poznawane zmysłami nie są wcale wyraźne: „Na przykład, czy czerwień jest wirowaniem pewnych małych kulek, z których ma się podobno składać światło; czy ciepło jest

---

[1] René Descartes, *Medytacje o pierwszej filozofii*, przekł. M. i K. Ajdukiewicz, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, 1958, s. 27.

[2] Tamże, s. 36.

[3] *Wyznanie wiary filozofa... oraz inne pisma filozoficzne*, opracowanie: S. Cichowicz, Biblioteka Klasyków Filozofii, PWN, 1969, s. 253–265.

kłębem bardzo subtelnego pyłu; czy dźwięk rozchodzi się w powietrzu, jak koła na wodzie, gdy się w nią rzuci kamień, jak to utrzymują pewni filozofowie — nie widzimy tego wcale, a nawet nie potrafimy zrozumieć, jak te wirowania, skłębienia i koła — gdyby nawet były prawdziwe — miałyby się składać na nasze postrzeżenia czerwieni, ciepła, hałasu"[4]. Jednakże, zdaniem Leibniza, poprzez zmysły dochodzimy do pojęć jasnych i wyraźnych. „Jednym z takich pojęć jest idea *liczby*, występująca na równi w dźwiękach, kolorach i dotknięciach. Tak samo również uprzytamniamy sobie *kształty*, które są wspólne kolorem i dotknięciem..."[5]. Leibniz uznaje istnienie tzw. zmysłu wspólnego, którym poznajemy tego rodzaju jasne i wyraźne pojęcia. Pojęcie te „stanowią przedmiot nauk matematycznych, mianowicie arytmetyki i geometrii będących czystymi naukami matematycznymi oraz przedmiot zastosowania tych nauk do natury, będący dziełem mieszanych nauk matematycznych. Poszczególne jakości zmysłowe poddają się — jak widzimy — wyjaśnieniom i rozumowaniom tylko w tej mierze, w jakiej mają w sobie coś, co jest wspólne przedmiotom wielu zmysłów zewnętrznych i należy do zmysłu wewnętrznego"[6]. Leibniz porusza tu inny, głęboko nietrywialny problem: dlaczego przyroda może być opisywana matematycznie? Do zagadnienia tego powrócimy przy innej okazji. Obecnie istotne jest to, że Leibniz dostrzega „matematyczność" w czymś, co jest wspólnym przedmiotem poznania wielu zmysłów. Ale i tego jeszcze za mało. Gdyby pewność matematyki opierała się tylko na zmysłach (choćby to był „zmysł wspólny"), to matematyka „polegałaby na zwykłej indukcji lub obserwacji". I tu Leibniz odwołuje się do „*siły konsekwencji* rozumowania", która stanowi „cześć tego, co się zwie *naturalną światłością*"[7]. „Na podstawie tej naturalnej światłości uznaje się również pewniki matematyczne... Powracając do *prawd koniecznych* należy stwierdzić, że na ogół poznajemy je rzeczywiście dzięki tej naturalnej światłości, żadną zaś miarą dzięki doświadczeniu zmysłowemu. Albowiem zmysły pozwalają jakoś poznać to, co jest, lecz nie pozwalają poznać tego, co być powinno lub nie może być w inny sposób"[8]. I oto znowu mamy teorie iluminacji, z tym, że bezpośrednie oświecenie przez Boga, postulowane przez św. Augustyna, Leibniz zastępuje „światłością naturalną". Czym jest ta „światłość naturalna"? Usiłując odpowiedzieć na to pytanie, Leibniz wyprzedza Kanta: „Światłość naturalna" jest czymś tkwiącym w strukturze umysłu i bę-

[4]Tamże, s. 254.
[5]Tamże, s. 255.
[6]Tamże, s. 256.
[7]Tamże, s. 258.
[8]Tamże, s. 259.

dącym warunkiem a priori wszelkiego poznania rozumowego. „...prócz tego, co *zmysłowe* (przedmiot poznania zmysłowego) — pisze Leibniz — i tego, co *wyobrażalne* (przedmiot zmysłu wspólnego), istnieje coś, co jest wyłącznie zrozumiałe, będąc *przedmiotem samego intelektu*, i taki jest przedmiot mej myśli, gdy myślę o sobie”[9]. Jest to wyraźne echo Kartezjuszowego *cogito*, ale w całym kontekście bardziej przygotowuje ono do Kanta niż kontynuuje Kartezjusza. Bo oto dalej czytamy: „To też rzec można, że nie ma w intelekcie nic, co by nie pochodziło ze zmysłów, oprócz samego intelektu, czyli tego, kto pojmuje”[10].

Augustyn, Kartezjusz, Leibniz zmagali się z problemem doświadczenia matematycznego. Jeśli ciągu tych myślicieli nie zacząłem od Platona i nie skończyłem na Kancie, to tylko dlatego, żeby nie powtarzać rzeczy nazbyt znanych, ale tak naprawdę wszystko, co dotychczas zostało powiedziane na ten temat, można uważać za komentowanie Platona z różnych punktów widzenia, a żaden z tych komentarzy nie mógłby się obejść bez bodaj wzmianki o Kancie. Nie jest tu moim zamiarem pisanie historii problemu matematycznego doświadczenia: pragnę tylko pokazać głęboką nietrywialność zagadnienia. Chcąc ten problem wyjaśnić (lub tylko rozjaśnić), Augustyn, Kartezjusz i Leibniz budowali, jak widzieliśmy, misterne konstrukcje metafizyczne. Nie sądzę, by były one czymś dużo więcej niż tylko postawieniem pytania. W gruncie rzeczy wszyscy trzej odwołali się do teorii iluminacji. Według Augustyna oświecenie pochodzi bezpośrednio od Boga; według Leibniza dokonuje się ono za pośrednictwem „naturalnego światła”; Kartezjusz sądzi, że matematyka mogłaby być złudzeniem, ale do zaaranżowania takiego złudzenia trzeba by Bożej wszechmocy (negatywna iluminacja: fałszywe światło). Odwołanie się do „teorii światła” trudno uznać za zadowalające rozwiązanie filozoficzne, ale jest ono — jak sądzę — bardzo mocnym podkreśleniem, że idzie o rzecz istotnie nietrywialną, o zagadnienie posiadające fundamentalne znaczenie dla całej filozofii. I istotnie, jeśli prawdą jest — jak twierdzi Whitehead — że całą historię europejskiej filozofii da się sprowadzić do kilku przypisów do Platona, to cała filozofia europejska zaczęła się właśnie od tego zagadnienia, gdyż to ono dało początek platońskiej teorii idei. I jeżeli prawdą jest, że ojcem nowożytnej filozofii nauki jest Kant, który pierwszy wyraźnie postawił pytanie o aprioryczne warunki doświadczenia, to nie co innego, lecz pytanie o sens doświadczenia matematycznego (chociaż często wprost sobie nieuświadamiane) leży u podstaw współczesnej filozofii nauki.

[9] Tamże, s. 256.
[10] Tamże, s. 257.

Od czasów Platona aż prawie do epoki Kanta naturalnym środowiskiem matematyki była filozofia i nic dziwnego, że pytanie o doświadczenie matematyczne było wypowiadane w kontekście metafizycznym. Wkrótce jednak po okresie Kanta matematyka sama zaczęła kształtować swoje własne środowisko naturalne. Psychologizm można uznać za formę przejściową między tymi okresami (choć nie koniecznie w sensie chronologicznym). Psychologiści nie szukali usprawiedliwienia matematyki w racjach metafizycznych, lecz w psychice, którą utożsamiali z „biologią mózgu": nasz sposób rozumowania jest cechą gatunkową, inny gatunek biologiczny w procesie ewolucji mógłby wykształcić zupełnie inną logikę. Kierunek ten upadł dzięki jednemu rozróżnieniu: owszem, akty psychiczne, jakimi rozumujemy, są funkcjami mózgu — zajmuje się nimi psychologia myślenia, ale przedmioty tych aktów, o czym myślimy, nie zależą od biologicznego wyposażenia naszego umysłu — przedmiotami tymi zajmuje się logika i matematyka. Więc w poszukiwaniu usprawiedliwienia doświadczenia matematycznego zwrócono się do metalogiki i meta–matematyki.

Każdy problem polega na jakimś zawęźleniu, i jednym z bardzo aktualnych sposobów odpowiedzi na problem jest jego „rozwiązanie", usunięcie węzła, pokazanie, że problemu nie ma. W tym kierunku zdawały się zmierzać meta–badania. Przede wszystkim zwrócono uwaga na hipotetyczny charakter matematyki. Wszystkie twierdzenia matematyki są w istocie okresami warunkowymi: „jeżeli..., to...". Jeżeli słuszne są założenia — aksjomaty, to wynikają z nich takie a nie inne wnioski — twierdzenia. Założenia przyjmuje się całkowicie dowolnie, a wynikanie odbywa się na mocy również arbitralnie przyjętych reguł wnioskowania. Konieczność twierdzeń matematyki (i logiki) zostaje zredukowana do umowy (konwencji).

Ale jest to tylko unik. Nie rozwiązuje on problemu, jedynie przesuwa go o jedno meta–pietro wyżej. Na poziomie języka przedmiotowego matematyki wszystko sprowadza się do mechanicznych przepisów na przekształcanie formuł. Ale problem powraca na poziomie meta: dlaczego metoda, właśnie ta hipotetyczno–konwencjonalna metoda matematyki jest tak skuteczna? Dlaczego — jak powiadamy — jest to metoda niezawodna? Co sprawia, że z danych założeń, przy pomocy danych reguł wnioskowania dochodzi się do *takich* a *nie innych* wniosków, i to *zawsze* do takich a nie innych wniosków? Metanaukowe rozważania pozwoliły poprawnie sformułować pytanie, ale nie udzieliły odpowiedzi. Problem nie został „rozwiązany", węzeł trwa nadal.

W okresie działalności Koła Wiedeńskiego osiągnięcia filozofii matematyki (meta–matematyki) jeszcze raz wydawały się likwidować problemu doświadczenia matematycznego. Miało to miejsce wtedy, gdy neopozytywiści z Wiednia, niewątpliwie pod wpływem *Traktatu logiczno–filozoficznego* Wittgensteina, w pełni zdali sobie sprawę z tautologiczności twierdzeń logiki i matematyki. Zrozumieli oni, że w żadnym twierdzeniu matematyki nie ma więcej treści niż w zdaniu: „stół jest stołem". Konieczność redukuje się do nieistnienia treści. Trywialna identyczność podmiotu i orzecznika jest wszystkim, co matematyka ma do powiedzenia. Trywialność zasady tożsamości wydaje się wstrząsająca i niewymagająca żadnych „usprawiedliwień". Chwila refleksji pokazuje jednak, że odkrycie tautologicznego charakteru twierdzeń matematyki bynajmniej nie likwiduje zagadnienia, stawia je tylko w całej ostrości, czyni je pytaniem nagim, odartym ze wszystkich terminologicznych (frazeologicznych?) upiększeń. Bo co nam każe przyjąć, że „stół = stół"? Dla chorego na schizofrenię stół może równać się rewolucji społecznej lub wiatrakowi; dlaczego logikę schizofrenika uznajemy za patologię, a zasadę identyczności za tak trywialnie konieczną, że pozbawioną treści? Na tych uwagach można by poprzestać, ale sądzę, że odkrycie tautologiczności twierdzeń nauk formalnych tak doskonale sięga do prymitywnej (w sensie najbardziej pierwotnej) istoty całego zagadnienia, iż warto mu będzie w przyszłości poświecić nieco więcej uwagi.

Tymczasem pora na wyciągnięcie wniosków z tego zmagania się ludzkich umysłów z zagadnieniem matematycznego doświadczenia. Widzieliśmy, że różne interpretacje interesującego nas pytania pokrywają wielki obszar: od filozoficznego maksymalizmu Platona i Augustyna aż do skrajnego minimalizmu (redukcjonizmu do zera) Koła Wiedeńskiego i jego licznych neopozytywistycznych zwolenników. Minimalizm z założenia jest bardzo szkodliwą, i w pewnym sensie właśnie maksymalistyczną, metafizyką, ale posunięty aż do ascezy umiar w wyciąganiu wniosków nie ma z nim nic wspólnego. Niech więc nasze wnioski będą ascetycznie umiarkowane. A więc sądzę, że cała dotychczasowa dyskusja wykazała przynajmniej, co następuje:

(1) Problem matematycznego doświadczenia jest głęboko nietrywialnym zagadnieniem; zawiera on co najmniej dwie rzeczywiste składowe, a mianowicie:

(2) Pytanie o naturę matematyki: co takiego mieści się w samej matematyce, że jej rozumowania uważamy za niezawodne, a jej twierdzenia za całkowicie bezpieczne?

(3) Pytanie o naturę naszego poznania matematycznego: co takiego mieści się w strukturze naszego umysłu, że uznaje on bez zastrzeżeń nieuniknioność wniosków poprawnie wyprowadzonych z przyjętych założeń na podstawie uznanych reguł wnioskowania? Krótko: dlaczego umysł myśli matematycznie?

Nie sądzę, bym potrafił odpowiedzieć na te pytania. Ale właśnie rozważanie pytań, na które nie zna się odpowiedzi (byleby to nie były pytania pozorne), jest czynnością wiedzotwórczą, zezwala ono także na formułowanie odpowiedzi hipotetycznych; przy starannym obwarowaniu tego rodzaju odpowiedzi wszelkimi niezbędnymi zastrzeżeniami, mają one wartość choćby tylko z tego względu, że pozwalają głębiej wniknąć w samo pytanie, otwierają je niejako szerzej na dalsze dociekania. Co więcej, przy zachowaniu odpowiedniej ascezy myślowej rozważania takie mogą prowadzić do nietrywialnego poszerzenia horyzontów, a określenie swojego miejsca względem nietrywialnych horyzontów nazywam życiową filozofią.

Popper w *Open Society* zastanawia się, jak racjonalnie można uzasadnić postulat kierowania się racjonalnością. Cała nauka jest wynikiem (i definicją, w pewnym sensie) racjonalności działania, a więc w pytaniu Poppera idzie nie o co innego jak o „usprawiedliwienie" metody naukowej. Wyniki nauki nie są w tym sensie usprawiedliwieniem nauki, bo jeżeli ktoś nie chce kierować się racjonalnością, czyli jeżeli ktoś jest programowo irracjonalistą, to nie zależy mu na żadnych racjonalnych (ani irracjonalnych zresztą) wynikach. I dlatego, zdaniem Poppera, opowiedzenie się za racjonalnością jest po prostu wyborem moralnym, jest wyborem czegoś, co uważamy za Wartość. Uznanie wartości doświadczenia matematycznego jest częścią tej moralności.