ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXXVIII / 2006, s. 61–75*

Michał HELLER

Wydział Filozoficzny PAT
Kraków

GENEZA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

1. PRAWDOPODOBIEŃSTWO W ŻYCIU I FIZYCE KLASYCZNEJ

Istnieje w nas głęboko zakorzeniony instynkt, który każe nam traktować często zachodzące zdarzenia za niewymagające uzasadnienia. To, co się zdarza rzadko, trzeba jakoś uzasadnić; to, co się zdarza często, jest normalne. Gdy chcemy to przekonanie uzasadnić bardziej „naukowo", mówimy, że to, co się zdarza często, jest wysoce prawdopodobne. Powołujemy się więc na rachunek prawdopodobieństwa. Wysoki stopień prawdopodobieństwa jest dla nas wystarczającym uzasadnieniem. To, co zdarza się rzadko, jesteśmy skłonni nazywać przypadkiem. Tak rozumiane przypadki „zaburzają" naturalny bieg świata: jeżeli nie zyskują specjalnego wyjaśnienia, pozostają intruzami w ciągu wydarzeń. W ten sposób rachunek prawdopodobieństwa staje się teorią świata. Zwykle matematykę stosujemy do świata za pośrednictwem teorii fizycznych, natomiast rachunek prawdopodobieństwa, a więc teoria czysto matematyczna, wyjaśnia coś, co zachodzi w świecie, a zatem niejako przejmuje zadanie fizyki.

Jest to jednak tylko pozór. W rzeczywistości matematyk, chcąc zastosować rachunek prawdopodobieństwa do świata (np. do wyjaśnienia rzutów kostką), najpierw konstruuje *model probabilistyczny*

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

sytuacji, którą chce matematycznie modelować. Definiuje więc *przestrzeń probabilistyczną*, która reprezentuje ogół możliwych wyników i na tej przestrzeni określa tzw. *funkcję rozkładu prawdopodobieństwa*, która mówi, jak często w przestrzeni probabilistycznej pojawiają się różne zdarzenia przy wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia. Obie te definicje muszą być tak dobrane, ażeby „opisywały" modelowaną sytuację zgodnie z intuicją i — oczywiście — tak ażeby były spełnione aksjomaty wymagane przez rachunek prawdopodobieństwa. Trafność całej konstrukcji potwierdza lub falsyfikuje zgodność otrzymywanych teoretycznie przewidywań z rzeczywiście przeprowadzanymi doświadczeniami. Rachunku prawdopodobieństwa nie stosuje się więc bezpośrednio do świata, lecz za pośrednictwem modelu probabilistycznego. Ten ostatni odgrywa rolę teorii fizycznej, ale jest to teoria tak prosta, że najczęściej konstruuje ją sam matematyk, nie korzystając z pomocy fizyka. Fakt ten, połączony z ogromną skutecznością modeli probabilistycznych, wydaje się być jeszcze jednym argumentem na rzecz przeświadczenia o swojego rodzaju naturalności rachunku prawdopodobieństwa.

Przeświadczenie to jest w nas tak głęboko zakorzenione, że — znowu niemal instynktownie — sądzimy, iż pewne zdarzenia uznajemy za przypadkowe, ponieważ brak nam pełnej informacji na ich temat. Gdybyśmy taką informację posiadali, znalibyśmy wszystkie warunki ich zachodzenia lub niezachodzenia, zniknąłby element przypadkowości, bieg świata wróciłby do „normalności". Rodzi to poczucie niepewności, które — z psychologicznego punktu widzenia — wręcz utożsamiamy z pojęciem prawdopodobieństwa. Fakt ten znajduje swój wyraz w dość licznych komentarzach matematyków. Na przykład w rozdziale wstępnym do pewnego podręcznika rachunku prawdopodobieństwa czytamy: „W ramach tej teorii wynikowi $x \in A$ — przypisuje się liczbę zwaną *prawdopodobieństwem*, będącą miarą niepewności związanej z tym wynikiem"[1]. Nie bez wpływu na tego rodzaju przekonanie pozostaje geneza rachunku prawdopodobieństwa,

[1] A. Pacut, *Prawdopodobieństwo — Teoria — Modelowanie probabilistyczne w technice*, Wydawnictwa Naukowo–Techniczne, Warszawa 1985, s. 20.

który — jak wiadomo — narodził się ze spekulacji dotyczących gier hazardowych.

Brak wiedzy o danym układzie może być spowodowany jego wielką złożonością. Na przykład układ może składać się z tak wielkiej liczby elementów, że śledzenie każdego z nich z osobna byłoby rzeczą niemożliwą. W takich przypadkach do opisu układu stosujemy statystykę, czyli metody analizy oparte na rachunku prawdopodobieństwa. Dlatego też z chwilą gdy zaczęto stosować zasady mechaniki klasycznej do ciał (lub układów ciał) składających się z ogromnej liczby cząstek (atomów lub molekuł), metody statystyczne okazały się niezbędne. Jako przykład rozpatrzmy szklankę wody[2]. Jeślibyśmy w jakiś sposób oznaczyli wszystkie cząsteczki (molekuły) wody, znajdujące się w szklance, równomiernie zmieszali tę wodę z wodą wszystkich oceanów na kuli ziemskiej, a następnie ponownie zaczerpnęli wodę z któregoś z oceanów do szklanki, okazałoby się, że w szklance znajduje się około stu oznaczonych uprzednio cząstek wody. Wynika stąd, że liczba cząstek wody w szklance jest ok. sto razy większa niż liczba szklanek wody we wszystkich oceanach. Chcąc śledzić ruch cząstek w szklance wody, musimy stosować metody statystyczne. W ten sposób narodziła się mechanika statystyczna.

Nic więc dziwnego, że w mechanice klasycznej najbardziej rozpowszechnione jest tzw. *epistemiczne* rozumienie prawdopodobieństwa. W takim rozumieniu prawdopodobieństwo jest miarą wiedzy idealnego obserwatora o danym systemie. Ograniczenie się do idealnego obserwatora ma zwrócić uwagę na fakt, że w fizyce chodzi o tzw. wiedzę intersubiektywną, która nie zależy od indywidualnego wykształcenia i zdolności obserwatora[3]. Można zatem powiedzieć, ze zarówno w życiu codziennym, jak i w fizyce klasycznej posługiwanie się rachunkiem prawdopodobieństwa i statystyką jest w pewnym sensie złem koniecznym. Tam, gdzie nie jesteśmy w stanie posługiwać się

---

[2]Przykład ten pochodzi od Kelvina; przytaczam za: A.I. Anselm, *Podstawy fizyki statystycznej i termodynamiki*, PWN, Warszawa 1980, s. 12.

[3]Por. Ch. J. Isham, *Lectures on Quantum Theory — Mathematical and Structural Foundations*, Imperial College Press — London, World Scientific — Singapore, 1995, s. 131.

„metodami dokładnymi”, musimy odwoływać się do probabilistyki, ale podstawowa teoria świata nie może być oparta na prawdopodobieństwie. Przynajmniej tak wierzono przed powstaniem mechaniki kwantowej.

2. PRAWDOPODOBIEŃSTWO W FIZYCE KWANTOWEJ

Wraz z pojawieniem się mechaniki kwantowej sytuacja uległa drastycznej zmianie. Jeżeli pominąć interpretację mechaniki kwantowej odwołującą się do tzw. ukrytych parametrów[4], to teoria ta domaga się przemyślenia problemu prawdopodobieństwa od podstaw. Swoistą ucieczką od tej konieczności jest *stanowisko pragmatyczne*. Zwolennicy tego stanowiska odwołują się do faktu, że mechanika kwantowa z wielką dokładnością przewiduje względną częstość wyników pomiarów wykonywanych odpowiednio dużą liczbę razy na tak samo przygotowanych układach. Tym musimy się zadowolić; mechanika kwantowa po prostu nie mówi nic na temat indywidualnych obiektów. Jest ona zbiorem przepisów do otrzymywania trafnych wyników, ale nie daje „wglądu do rzeczywistości”. Istotnymi elementami w mechanice kwantowej są te własności, które daje się obserwować (mierzyć) czyli *obserwable* (stanowisko takie zwane jest również *instrumentalizmem*). John Bell, chcąc ukazać kontrast fizyki klasycznej z fizyką kwantową, mawiał, że o ile ta pierwsza dotyczyła „byciabli” (*beables*), czyli tego co jest, o tyle ta druga zadowala się „obserwablami”, czyli tym, co daje się obserwować[5]. Instrumentalizm często prowadzi do bardziej radykalnych poglądów utrzymujących, że w me-

[4]W niniejszej pracy interpretację tę całkowicie pomijam. Objęcie jej dyskusją domagałoby się odrębnego studium. O interpretacji ukrytych parametrów (w ujęciu jej zwolennika) można przeczytać w: J.T. Cushing, *Quantum Mechanics: Historical Contingency and the Copenhagen Hegemony*, The University of Chicago Press, Chicago, 1994, lub (w ujęciu jej przeciwnika): B. d’Espagnat, *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics*, wyd. 2., Addison–Wesley, Redwood City — Reading — New York, 1976.

[5]J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

chanice kwantowej bądź nie ma sensu mówić o indywiduach posiadających takie czy inne cechy, bądź że indywidua takie po prostu nie istnieją. W tym ostatnim przypadku mamy do czynienia z wyraźnie *ontologicznym* stanowiskiem. Pociąga ono za sobą również *ontologiczne* rozumienie prawdopodobieństwa głoszące, że sama rzeczywistość ma cechy *probabilistyczne*. W tym duchu proponowano rozmaite koncepcje. Już w r. 1949 Henry Margenau twierdził, że prawdopodobieństwa w mechanice kwantowej odnoszą się do pewnych „ukrytych własności", które, choć istnieją obiektywnie, „ujawniają się" z pewnym prawdopodobieństwem[6]. Później autor ten mówił o „polu prawdopodobieństwa", które jest tak samo rzeczywiste jak rzeczywistymi są trajektorie ciał w fizyce klasycznej; co więcej, jest ono „wielkością pierwotną", nieredukowalną do żadnej innej wielkości[7]. Werner Heisenberg prawdopodobieństwa w mechanice kwantowej interpretował w duchu arystotelesowskiej potencjalności[8], a interpretację tę znacznie potem rozbudował Czesław Białobrzeski[9]. Znana jest również propozycja Poppera, by prawdopodobieństwo rozumieć jako pewnego rodzaju obiektywną *skłonność (propensity)* i odpowiednio do tego rozumienia interpretować mechanikę kwantową[10]. Zupełnie jednak niezależnie od tego rodzaju doktryn filozoficznych wśród fizyków utrwala się przekonanie, że stosowanie metod probabilistycznych do fizyki nie jest wynikiem naszej nieznajomości pewnych parametrów lub jakiegoś nadzwyczajnego skomplikowania badanych układów, lecz tego, że świat w swoich najgłębszych warstwach jest probabilistyczny. Przekonanie to wytworzyły i utrwaliły wielkie sukcesy fizyki kwantowej (a trzeba dodać, że wszystkie one zostały osiągnięte przy pomocy stan-

---

[6] H. Margenau, „Reality in Quantum Mechanics", *Phil. Science* 16, 1949, 287–302.

[7] Tenże, *Il Miracolo della Esistenza*, Amando, Roma 1987, ss. 109–110.

[8] W. Heisenberg, *Philosophic Problems of Nuclear Science*, Pantheon, New York 1952.

[9] Cz. Białobrzeski, *Podstawy poznawcze fizyki świata atomowego*, PWN, Warszawa 1984 (pierwsze wydanie w r. 1956).

[10] K.R. Popper, *Quantum Theory and the Schism in Physics*, Hutchinson, London 1956.

dardowych metod opartych na prawdopodobieństwie, a nie metodami rachunkowymi proponowanymi przez zwolenników interpretacji ukrytych parametrów) oraz fakt, że wszelkie liczące się próby poszukiwania „teorii ostatecznej" zakładają podejście probabilistyczne. Poszukując takiej teorii, najczęściej po prostu „rozciąga się" (lub uogólnia) na nowe obszary badawcze metody stosowane w zwykłej mechanice kwantowej, a te są probabilistyczne. Ponieważ tego rodzaju postępowanie, milcząco przypisujące światu własności związane z pojęciem prawdopodobieństwa, na ogół nie wynika ono z jakichś głębokich przemyśleń, lecz raczej z praktyki naukowej, która po prostu każe widzieć świat probabilistycznie.

Jest to drastyczna zmiana w rozumieniu prawdopodobieństwa i jego zastosowania do rozumienia świata.

3. GEOMETRIA, ALGEBRA I FIZYKA

Wielkim przełomem w rozwoju matematyki było odkrycie przez Kartezjusza geometrii analitycznej. Polegało ono na spostrzeżeniu, że każdej krzywej w przestrzeni odpowiada pewne równanie algebraiczne. Wprawdzie równania są mniej poglądowe niż krzywe, ale równaniami łatwiej jest operować niż krzywymi: zawiłe manipulowanie krzywymi sprowadza się do stosunkowo prostego wykonywania rachunków. Metoda Kartezjusza do tego stopnia zadomowiła się w geometrii, że z czasem zaczęto ją uważać po prostu za metodę geometryczną.

Dostojną, grecką geometrię (nawet wzbogaconą metodami Kartezjusza) jesteśmy skłonni uznawać za naukę o niezmiennych cechach przestrzeni. Ale przecież w przestrzeni może odbywać się ruch (mogą poruszać się ciała); czy ruch ten da się opisać geometrycznie? Jak wiadomo, Newton i Leibniz wynaleźli rachunek różniczkowy właśnie po to, by zmatematyzować zjawisko ruchu. I tym razem geometria okazała się zaborcza: połączenie geometrii z rachunkiem różniczkowym stworzyło geometrię różniczkową i umożliwiło matematyczny opis ruchu. W XX wieku, głównie dzięki szczególnej i ogólnej teorii względności, geometria różniczkowa stała się jednym z głównych narzędzi fizyki teoretycznej. Odpowiednikiem intuicyjnego pojęcia przestrzenni w geometrii różniczkowej jest pojęcie *rozmaitości różniczkowej* (lub krótko *rozmaitości*). Można nawet powiedzieć, że geometria różniczkowa to po prostu teoria rozmaitości różniczkowych.

Najbardziej typowe metody rachunkowe „na rozmaitości" posługują się metodą Kartezjusza: wykorzystując współrzędne, krzywe na rozmaitości (i inne obiekty geometryczne) zastępuje się równaniami i wszelkie obliczenia przeprowadza się przy pomocy tych równań. I tu jeszcze raz powtórzyła się „rewolucja kartezjańska": okazuje się, że tak rozumianą geometrię można zalgebraizować w jeszcze większym stopniu niż dotychczas przypuszczano.

Trzeba jednak uświadomić sobie, że tymczasem sama algebra uległa daleko idącej ewolucji, a metody algebraiczne zawojowały wielkie obszary nowoczesnej matematyki. Intuicyjnie i ogólnikowo można powiedzieć, że algebra jest nauką o bardzo ogólnych strukturach matematycznych, a technicznie przez *algebrę* rozumie się zbiór dowolnych elementów, które można: (1) dodawać do siebie, (2) mnożyć przez siebie i (3) mnożyć przez liczby (rzeczywiste lub zespolone); przy czym wszystkie te działania muszą spełniać bardzo naturalne aksjomaty[11]. Na przykład rodzina wszystkich gładkich funkcji[12] na rozmaitości jest algebrą, ponieważ funkcje należące do tej rodziny można dodawać do siebie, mnożyć przez siebie i mnożyć przez liczby. Spełnione są także wszystkie wymagane aksjomaty. W procesie, który nas teraz interesuje, ważną rolę odegrała praca L. Koszula[13], w której matematyk ten pokazał, że chcąc rozwijać geometrię na rozmaitości, można

[11]Aksjomaty te wyrażają własności dodawania i mnożenia bardzo podobne do własności, jakie mają dodawanie i mnożenie liczb rzeczywistych. Godną zalecenia książką, wprowadzającą Czytelnika do metod współczesnej algebry, jest: E. Fried, *O algebrze abstrakcyjnej* (Biblioteka Problemów), PWN, Warszawa 1978. Definicja algebry podana jest na s. 242 tej książki. Polecam również: R. Lidl, *Algebra dla przyrodników i inżynierów*, PWN, Warszawa 1983. Definicja algebry na ss. 84–85.

[12]Tzn. różniczkowalnych dowolnie wiele razy.

[13]L. Koszul, *Fibre Bundles and Differential Geometry*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960.

w gruncie rzeczy „zapomnieć" o rozmaitości a operować tylko algebrą gładkich funkcji na niej. Kolejnym krokiem, ważnym dla fizyki, okazała się praca R. Gerocha[14], który wykorzystując metodę Koszula, udowodnił, że również ogólną teorię względności można przedstawić w języku algebraicznym.

Ujęcia geometrii różniczkowej w języku współrzędnych i w języku algebry gładkich funkcji są równoważne, ale to drugie ujęcie okazało się podatniejsze do kolejnych uogólnień. Można na przykład zamiast algebry gładkich funkcji na rozmaitości rozważać dowolną algebrę i założyć, że ona również opisuje jakąś przestrzeń. W zależności od rozważanej algebry przestrzeń ta może być bardzo „dziwna". Szczególnie ważną pod tym względem okazała się jedna własność rozważanych algebr. Algebry funkcyjne (tzn. takie algebry, których elementami są funkcje) mają własność przemienności (są przemienne), ponieważ „funkcja f razy funkcja g" to dokładnie to samo, co „funkcja g razy funkcja f"[15]. Ale istnieją algebry, które tej własności nie posiadają; nazywamy je *algebrami nieprzemiennymi*. Otóż okazuje się, że przestrzenie określone przy pomocy algebr nieprzemiennych (nazywamy je *przestrzeniami nieprzemiennymi*) bardzo różnią się od zwykłych przestrzeni. Są one w zasadzie tworami całkowicie globalnymi; to znaczy wszelkie pojęcia, związane z „zajmowaniem miejsca" są w nich bezsensowne. Na przykład pojęcie punktu i jego otoczenia w zasadzie nie pojawiają się w kontekście geometrii nieprzemiennej. Przestrzeń nieprzemienna jest więc daleko idącym uogólnieniem zwykłej przestrzeni. Jest rzeczą zaskakującą, że bez pojęcia punktu (i innych pojęć lokalnych) w ogóle można uprawiać jakąś geometrię. Okazuje się jednak, że można; i to z dużym powodzeniem.

Jest wielką zasługą Alaina Connesa, że do geometrii nieprzemiennej wprowadził metody różniczkowe. Głównie dzięki jego pracom powstała nieprzemienna geometria różniczkowa[16] i mogły rozwinąć

[14]R. Geroch, "Einstein Algebras", *Communications in Mathemayical Physics* 26, 1972, 271–275.

[15]Przy zwykłej definicji mnożenia funkcji.

[16]Podstawową jego monografią jest książka: *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London 1994.

się jej, już liczne, zastosowania do fizyki[17]. W nieprzemiennej geometrii różniczkowej ważną rolę odgrywa pewna klasa algebr, zwanych C^*–algebrami (czytaj „algebry C z gwiazdką"). Pojawiły się one w fundamentalnej pracy I.M. Gelfanda i M.A. Naimarka[18] (ale jeszcze nie nazwane) jako naturalne uogólnienie algebry funkcji ciągłych, ale bez wymagania przemienności. Wkrótce teoria C^*–algebr znacznie się rozwinęła i znalazła zastosowanie w różnych działach matematyki. Warto zwrócić uwagę na fakt, że algebry funkcji gładkich (a więc i ciągłych) na rozmaitościach są trywialnie C^*–algebrami.

I tu kolejny zwrot w dziejach pojęć i związków pomiędzy nimi. Dzięki szeregu pracom wielu fizyków, z których zwieńczającą była praca R. Haaga i D. Kastlera[19], stało się jasnym, że mechanikę kwantową można również przedstawić w języku C^*–algebr. Co więcej ujęcie to jest nie tylko bardziej eleganckie od tradycyjnego ujęcia w języku przestrzeni Hilberta, ale także nieco bardziej ogólne. Można je stosować w takich sytuacjach, w których tradycyjne ujęcie zawodzi. W algebraicznym ujęciu mechaniki kwantowej wielkości obserwowalne (tzw. obserwable) są elementami C^*–algebry, a niektóre zaskakujące własności tej fizycznej teorii okazują się być prostymi następstwami nieprzemienności. Na przykład słynne relacje nieoznaczoności Heisenberga wynikają z tego, że odpowiednie obserwable (np. położenia i pędu) mnoży się w sposób nieprzemienny.

Zwróćmy uwagę na trzy, pozornie różne własności C^*–algebry:

- można przy jej pomocy zdefiniować przestrzeń nieprzemienną (prace Connesa),

- można w jej języku przedstawić ogólną teorię względności (praca Gerocha),

---

[17] Por. np.: J. Madore, *An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and Its Physical Applications*, 2 wyd., Cambridge University Press, Cambridge 1999.

[18] I.M. Gelfand, M.A. Naimark, „On the Embedding of Normed Rings into the Ring of Operators in Hilbert Space", *Matematiczeskij Sbornik*, 12, 1943, 197–213.

[19] R. Haag, D. Kastler, „An Algebraic Approach to Quantum Field Theory", *Journal of Mathematical Physics* 5, 1964, 848–861.

- można w jej języku przedstawić mechanikę kwantową (praca Haaga i Kastlera).

Wręcz narzuca się myśl, by poszukać takiej C^*–algebry, która jednoczyłaby w sobie ogólną teorię względności i mechanikę kwantową, równocześnie definiując pewną przestrzeń nieprzemienną. Byłoby to geometryczne uogólnienie obu tych teorii, z których tradycyjna teoria względności i tradycyjna mechanika kwantowa powinny wynikać jako szczególne przypadki. Wraz z moimi współpracownikami udało się nam znaleźć taki nieprzemienny model[20]. W następnym paragrafie posłużę się zasadniczą ideą tego modelu, by ukazać jeszcze dalej idącą ewolucję pojęć i nieoczekiwanych związków pomiędzy nimi. To, co chcę przedstawić, w zasadzie nie zależy od tego, czy nasz model okaże się słuszny, czy nie. Jeżeli jego matematyczna struktura jest niesprzeczna, to ukazuje ona poprawnie związki pomiędzy pojęciami, jakie są w nią wbudowane. A w niniejszym studium chodzi mi przede wszystkim o związki między pojęciami.

4. DYNAMIKA I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

W naszym modelu zakładamy, że na poziomie fundamentalnym (poniżej tzw. *progu Plancka*, który charakteryzują rozmiary $l_{Pl} = 10^{-33}$cm) panuje reżim nieprzemienny. Podstawową strukturą matematyczną, modelującą ten reżim, jest pewna nieprzemienna C^* – algebra (oznaczmy ją przez A), która definiuje pewną nieprzemienną przestrzeń i uogólnia (a także jednoczy) ogólną teorię względności i mechanikę kwantową. Model nasz zapewnia również mechanizm,

[20]Por.: M. Heller, Z. Odrzygóźdź, L. Pysiak and W. Sasin, "Noncommutative Unification of General Relativity and Quantum Mechanics. A Finite Model", *General Relativity and Gravitation* 36, 2004, 111–126; L. Pysiak, M. Heller, Z. Odrzygóźdź and W. Sasin, "Observables in a Noncommutative Approach to the Unification of Quanta and Gravity: A Finite Model", *General Relativity and Gravitation* 37, 2005, 541–555; M. Heller, L. Pysiak and W. Sasin, "Noncommutative Dynamics of Random Operators", *International Journal of Theoretical Physics* 44, 2005, 619–628; M. Heller, L. Pysiak and W. Sasin, "Noncommutative Unification of General Relativity and Quantum Mechanics", *Mathematical Journal of Physics* 46, 2005, 122501–16.

który sprawia, że po przejściu przez próg Plancka algebra A staje się przemienna, co reprodukuje ogólną teorię względności i mechanikę kwantową w ich znanej obecnie postaci.

Geometria nieprzemienna, rządząca reżimem nieprzemiennym, jest nielokalna, a więc nie dopuszcza istnienia czasu i przestrzeni w ich zwykłym rozumieniu, tzn. jako zbioru chwil i punktów. Dzięki temu jednoczy ona wiele pojęć, które w reżimie nieprzemiennym wydawały się być zupełnie niezależne od siebie. Do takich pojęć należą m.in. dynamika i prawdopodobieństwo. Przyjrzyjmy się temu nieco dokładniej.

W geometrii nieprzemiennej nie ma punktów, ale sensowne pozostaje pojęcie stanu układu. Stan bowiem jest pojęciem globalnym: cały układ może się znajdować w tym lub innym stanie. Z każdą C^*–algebrą związana jest pewna inna algebra, zwana *algebrą von Neumanna*[21]. Nieco rzecz upraszczając, można powiedzieć, że algebra von Neumanna jest taką C^*–algebrą, która wyróżnia pewien stan[22]. Wyróżnienie stanu przez algebrę von Neumanna spełnia równocześnie dwie funkcje:

Po pierwsze, sprawia, że gdy układ znajduje się w tym wyróżnionym stanie, można w nim zdefiniować pewien parametr t, który imituje czas. I posługując się tym jakby–czasem, można zdefiniować dynamikę, tzn. napisać równania dynamiczne, określające zachowanie się układu[23]. W ten sposób nie uzyskujemy jednak czasu, lecz tylko jakby–czas, ponieważ ten jakby–czas (parametr t) jest ściśle zależny od stanu. Gdy układ przechodzi do innego czasu, zmienia się również parametr t.

Po drugie, stan wyróżniony przez algebrę von Neumanna można interpretować jako uogólnione prawdopodobieństwo. Nieco ściślej: wyróżniony stan odgrywa rolę uogólnionej miary prawdopodobień-

[21]Powiadamy, że każda C^*–algebra generuje pewną algebrę von Neumanna.

[22]Por. J. Madore, dz. cyt., s. 155.

[23]Technicznie: na mocy twierdzenia Tomity–Takesakiego można zdefiniować jedno–parametrową grupę odwzorowań algebry von Neumanna w siebie; t jest parametrem tej jedno–parametrowej grupy.

stwa[24]. Jest to niewątpliwie prawdopodobieństwo uogólnione w porównaniu do tego, z jakim mamy do czynienia w zwykłym rachunku prawdopodobieństwa: brak zindywidualizowanych punktów w reżimie nieprzemiennym powoduje, że nie możemy mówić o prawdopodobieństwie poszczególnych zdarzeń, a brak czasu w jego zwykłym znaczeniu sprawia, że wykluczona jest niepewność oczekiwanego wyniku, jaką zwykle wiążemy z prawdopodobieństwem. Jeżeli w ogóle możemy tu sobie coś wyobrażać, to „nieprzemienne prawdopodobieństwo" podobne jest raczej do jakiegoś pola globalnych możliwości, ale możliwości, które już mają jakiś stopień urzeczywistnienia.

Nieprzemienny rachunek prawdopodobieństwa, zwany również swobodnym (*free*) rachunkiem prawdopodobieństwa, stworzył D.V. Voiculescu[25]. Rozwija się on jako samodzielna dyscyplina matematyki, niekoniecznie w związku z geometrią nieprzemienną[26]. Swobodny rachunek prawdopodobieństwa jest silnym uogólnieniem zwykłego rachunku prawdopodobieństwa. W przeciwieństwie do tego ostatniego, istnieje w nim wiele różnych miar prawdopodobieństwa[27]. Można więc powiedzieć, że algebra von Neumanna jest równocześnie „obiektem dynamicznym" i „obiektem probabilistycznym". W reżimie nieprzemiennym każda dynamika jest probabilistyczna i każde prawdopodobieństwo ma charakter dynamiczny. Oczywiście, po przejściu przez próg Plancka, następuje separacja: dynamika i prawdopodobieństwo stają się niezależne od siebie. Jeszcze tylko w mechanice kwantowej zachowuje się pewien związek dynamiki z prawdopodobieństwem, choć i on ulega pewnemu złamaniu, co przejawia się w akcie pomiaru, podczas którego zachodzi tzw. *redukcja wektora falowego* (zwana także *kolapsem funkcji falowej*). Zjawisko to polega na tym, że w mechanice kwantowej przed dokonaniem pomiaru ewoluują prawdopodobieństwa: w każdej chwili czasu możliwe są różne

[24]A. Connes, dz. cyt., rozdz. 1.

[25]Por.: D.V. Voiculescu, K.J. Dykema, A. Nica, *Free Random Variables*, American Mathematical Society, Providence 1992.

[26]Por.: Ph. Biane, *Free Probability for Probabilists*, <arXiv: math.PR/9809193>

[27]W zwykłym rachunku prawdopdobieństwa istnieje w zasadzie tylko jedna miara prawdopodobieństwa (miara Lebesgue'a).

wyniku pomiaru, każdy wynik z określonym prawdopodobieństwem. W momencie pomiaru następuje „redukcja" tych możliwości do jednego konkretnego wyniku[28].

5. PRZESŁANIE FILOZOFICZNE

Jeżeli nasz model lub jakiś inny podobny do niego (tzn. zakładający, że poziom fundamentalny jest modelowany przez pewną nieprzemienną algebrę von Neumanna) jest słuszny, to mamy prawo twierdzić, że prawdopodobieństwa występujące w mechanice kwantowej nie są wynikiem naszej ignorancji (jakichś „ukrytych" parametrów) lecz stanowią podstawową własność świata. Na poziomie fundamentalnym (poniżej progu Plancka) świat jest probabilistyczny w uogólnionym sensie. W takiej sytuacji mielibyśmy więc do czynienia z ontologiczną interpretacją nieprzemiennej miary probabilistycznej.

Analizy przeprowadzone w niniejszym studium pozwalają także sformułować wnioski ogólniejszej natury[29]. Każde pojęcie ma swój obszar stosowalności. Nawet pojęcia, które dotychczas uważaliśmy za uniwersalne (tzn. obowiązujące w całym fizycznym świecie), takie jak: przestrzeń składająca się z punktów, czas, prawdopodobieństwo..., funkcjonują poprawnie tylko w ograniczonych obszarach naszego doświadczenia. Wychodząc poza ten obszar, musimy być świadomi konieczności odpowiedniego przystosowywania (na ogół uogólniania) pojęć. Modele matematyczne dostarczają do tego odpowiednich narzędzi. Poza matematyką jesteśmy skazani na spekulacje. Nie jestem przeciwko spekulacjom, ale trzeba zawsze zdawać sobie sprawę z ich wysoce hipotetycznego charakteru.

Nasze „zwykłe" pojęcia powstawały w środowisku makroskopowym, a bardzo często przy pomocy tych pojęć usiłujemy „mierzyć" wszystko, tzn. *implicite* rozciągamy je na całą rzeczywistość. Tymcza-

[28]Por.: R. Penrose, *The Road to Reality*, Jonathan Cape, London 2004, rozdział 30.

[29]Por. również mój art.: „Nieprzemienna unifikacja dynamiki i prawdopodobieństwa", *Filozofia Nauki* 12, 2004, 7–17.

sem, jak widzieliśmy, jest to zabieg co najmniej ryzykowny. Istnieją poważne racje, by sądzić, że poziom fundamentalny jest radykalnie odmienny od tego wszystkiego, co znamy z poziomu makroskopowego. Rzeczywistość jest po prostu bogatsza od naszej intuicji. Nie widać żadnych powodów, dla których struktura Wszechświata miałaby być „przykrojona" do możliwości naszego rozumu.

SUMMARY

THE ORIGIN OF PROBABILITY

After briefly reviewing classical and quantum aspects of probability, basic concepts of the noncommutative. calculus of probability (called also free calculus of probability) and its possible application to model the fundamental level of physics are presented. It is shown that the pair $(M, *)$, where M is a (noncommutative) von Neumann algebra, and $*$ a state on it, is both a dynamical object and a probabilistic object. In this way, dynamics and probability can be unified in noncommutative geometry. Some philosophical consequences of such an approach are indicated.