Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 2, S. 177—203 (1956)

EXPLIZITE DEFINITIONEN EINIGER EIGENSCHAFTEN VON ZEICHENREIHEN [1])

Von KLAUS HÄRTIG in Berlin

Einleitung

Eine Zeichenreihe, die in einer formalisierten mathematischen Theorie auftritt, erhält man durch Hintereinanderschreiben endlich vieler „Grundzeichen" (oder „Atomzeichen" oder „Buchstaben") des betreffenden Kalküls. Wie manche Autoren[2]) wollen wir auch die „leere Zeichenreihe" benutzen.

„Strukturelle" Eigenschaften oder Relationen betreffen die einzelnen konkreten Zeichenreihen[3]) (z. B. aus Kreide oder Tinte) nur „bei Identifizierung der gleich aussehenden"; nach TARSKI faßt man deshalb jeweils alle Zeichenreihen, die mit einer vorgegebenen „gleichgestaltet" sind, zu einer *Zeichengestalt*[4]) zusammen und führt die grundlegenden Relationen — wie z. B. Verkettung und Einsetzung — nicht im Bereich der Zeichenreihen selbst, sondern im Bereich der Zeichengestalten ein.[5]) Der leeren Zeichenreihe möge die „Leergestalt" ⚲[6]) entsprechen. Die Atomzeichen verteilen sich auf die „Atomgestalten". Es ist bekannt[7]), daß — bezüglich Verkettung — die kleinste Menge von Zeichengestalten, die erstens ⚲ sowie vorgegebene Atomgestalten enthält und zweitens in bezug auf Verkettung abgeschlossen ist, eine *freie Halbgruppe* mit ⚲ als Einheitselement bildet, deren Erzeugenden gerade die vorgegebenen Atomgestalten sind.

Wir können also von einer freien Halbgruppe (mit Einheitselement ⚲ und nichtleerer Basis) ausgehen. Aus dem Zusammenhang wird ersichtlich sein, welche großen und kleinen lateinischen Buchstaben (evtl. mit Indizes) als Variable für Halbgruppenelemente fungieren. Für die Halbgruppenverknüpfung führen wir kein besonderes Symbol ein, sondern bezeichen mit „XY" das Resultat der Verknüpfung von X und Y (in dieser Reihenfolge!); wegen der Assoziativität der Verknüpfung dürfen wir auch z. B. einfach

$$Z_2Z_1Z_3Z_1aZ_5$$

---

[1]) Über die vorliegende Arbeit, die von Herrn Professor Dr. KARL SCHRÖTER angeregt worden war, habe ich in Göttingen auf der Jahrestagung 1955 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung berichtet. Ich danke den beiden Herausgebern der Zeitschrift für mehrere mir wertvolle Ratschläge.

[2]) HERMES [6], MARKOV [8], ROSENBLOOM [16] ("null string"), SCHRÖTER [17—19]; ohne ⚲ arbeiten BERNAYS [1], QUINE [12—14], TARSKI [21, 22].

[3]) CARNAP: sign-events; MARKOV: конкретные слова (konkrete Wörter).

[4]) CARNAP: sign-design; MARKOV: абстрактное слово (abstraktes Wort).

[5]) TARSKI [21] S. 100, [22] S. 269; HERMES [6] S. 5; SCHRÖTER [17] S. 14, [18] S. 72.

[6]) [6] S. 8, [19] S. 8.

[7]) SCHRÖTER [17] S. 16, [18] S. 72—74.

schreiben, ohne durch Klammern die Reihenfolge der auszuführenden Operationen festlegen zu müssen. Außer „♀" werden auch andere „Konstante", nämlich Zeichen für spezielle, festgehaltene Halbgruppenelemente, auftreten. Kommen in einem Satz bzw. Beweis außer „♀" keine solchen Konstanten vor, so zählen wir ihn zur „*reinen* Semiotik".[1])

Statt „Halbgruppenelement" sagen wir — im Hinblick auf die Anwendung, die uns hier allein interessiert — einfach „Zeichenreihe", statt „Verknüpfung" „Verkettung", statt „Element der Basis" einfach „Atom".

Wie in den zitierten Arbeiten von QUINE ist auch unser Gebiet die elementare Semiotik: solche strukturellen Redeweisen, die man im Rahmen der Prädikatenlogik der ersten Stufe (mit Identität)[2]) aussprechen kann. Im Unterschied zu QUINE formalisieren wir unsere elementaren strukturellen Redeweisen nicht, formulieren sie jedoch so, daß sie gewissermaßen auf der Schwelle zur Formalisierung stehen. Als erste Beispiele können die folgenden Definitionen dienen, durch die wir einige (z. T. sehr häufig benutzte) Hilfsbegriffe einführen.

Z beginnt mit X (oder: *X ist Anfang*[3]) *von Z, oder*: $Z = X\ldots$)
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt ein Y mit $Z = XY$.

Z endet auf Y (oder: *Y ist Endstück*[4]) *von Z*, oder: $Z = \ldots Y$)
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt ein X mit $Z = XY$.

Z' in Z (oder: *Z' ist Abschnitt von Z*, oder: $Z = \ldots Z' \ldots$)
$\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt ein X und ein Y mit $Z = XZ'Y$.

Ein Anfang (bzw. Endstück bzw. Abschnitt) W von Z heißt *echter* Anfang (bzw. echtes Endstück bzw. echter Abschnitt) genau im Falle $W \neq Z$.

X in Z nur vorne $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes W: $Z = WX\ldots$ genau dann, wenn $W = ♀$.
Y in Z nur hinten $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes W: $Z = \ldots YW$ genau dann, wenn $W = ♀$.
a ist Atom $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes Z_1, Z_2: Wenn $a = Z_1Z_2$, so entweder $Z_1 = ♀$ oder $Z_2 = ♀$.
A ist a-Molekül[5]) $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes x: Wenn x Atom und x in A, so $x = a$.
A ist längstes a-Molekül in Z[6]) $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes A':
A' ist sowohl a-Molekül als auch in Z genau dann, wenn A' in A.

Begriffe wie „*Länge* einer Zeichenreihe", „*k-te Stelle* einer Zeichenreihe", „*Anzahl des Vorkommens* des Atoms a in Z", „*Anzahl der Zeichenreihen* Z mit der Eigen-

---

[1]) Die Bezeichnungen „Semiotik" (von H. SCHOLZ eingeführt) und „Syntax" könnte man synonym gebrauchen. Wir beziehen „Syntax" immer auf einen bestimmten Kalkül (vgl. [6] S. 20). Zur Verwendung der beiden Termini in der Literatur siehe [2] S. 238f.
[2]) Also u. a. mit Quantifikation nur bezüglich Zeichenreihenvariablen. — Präzisiert in [12] S. 561f., [13] S. 115, [14] S. 106.
[3]) ROSENBLOOM: head.
[4]) ROSENBLOOM: tail.
[5]) QUINE: tally.
[6]) Vgl. QUINE [14] S. 109.

schaft $\mathfrak{H}(Z)$" und auch *Mengen*[1]) oder *Folgen*[2]) von Zeichenreihen liegen natürlich außerhalb der elementaren Semiotik. Dagegen sind beispielsweise

„Das Atom a kommt in X *gleich oft* vor wie in Y"

und

„X ist *länger* als Y"

Relationen (im Bereich der Zeichenreihen), die wir in § 5 elementar explizit durch Verkettungen definieren werden — übrigens deshalb erst so spät, weil man zweckmäßigerweise zuvor die vierstellige *Substitutions*relation („Setzt man in Z_1 für Z_0 *überall* Z_{00} ein, so entsteht Z_2" — präzisiert in § 1) mittels Verkettungen definiert (§ 1). Sie ist eine Verschärfung der (in § 4 behandelten) *Ersetzungs*relation („Ersetzt man in Z_1 *nach Belieben* Z_0 durch Z_{00}, so kann man Z_2 erhalten"). Mit Hilfe der Substitution lassen sich nicht nur *simultane Substitutionen* elementar explizit definieren (§ 2), sondern auch die *Verkettung* selbst (§ 3), und zwar ist dies letztere so erheblich einfacher (und obendrein allgemeiner) als das Umgekehrte (Substitution durch Verkettungen), daß man eigentlich einer elementaren Semiotik als undefinierten Grundbegriff besser die Substitution als die Verkettung zugrunde legte. Doch auch lediglich auf die Ersetzung könnte man sich stützen: Zwar nachweislich nicht zu $Z = XY$, durchaus aber zu jedem abgeschlossenen aus Verkettungen elementar aufgebauten Ausdruck läßt sich ein äquivalenter elementarer Ausdruck „in Ersetzung allein" konstruieren — so daß man in einem abgeschwächten Sinn Verkettungen durch Ersetzungen definierbar nennen kann (§ 4). — Wir überblicken die wechselseitige Definierbarkeit der (wohl wichtigsten) strukturellen Relationen Verkettung, Substitution, Ersetzung (§§ 1, 3, 4).

In § 6 verlassen wir die reine Semiotik und wenden uns der Syntax hauptsächlich des Aussagenkalküls[3]) zu (den wir als Musterbeispiel wählen), vor allem mehreren Definitionen der *(sinnvollen) Ausdrücke,* auch einer der *Ableitbarkeit,* die sich ohne weiteres z. B. auf die formalisierte Arithmetik übertragen lassen.

In seiner Abhandlung "On derivability" [13] hat QUINE in großer Allgemeinheit rekursive Definitionen rückgängig gemacht, und zwar in einer elementaren (in Verkettung formulierten) Semiotik mit zwei festen Atomen. Gerade solch eine systematische Untersuchung interessiert uns hier nicht, sondern wir beschäftigen uns mit einer Reihe ganz spezieller, bei syntaktischen Überlegungen unentbehrlicher Eigenschaften von Zeichenreihen. Wo auch wir zu vorhandenen rekursiven Definitionen äquivalente elementare explizite angeben, geschieht es jedesmal ad hoc, dabei in mehreren Fällen so, wie es hier am Beispiel der Ausdrucksbestimmung für den Aussagenkalkül angedeutet werde:

---

1) Etwa bei Term- und Ausdrucksbestimmungen wie im vorliegenden Band auf S. 3, Fußn. 3.

2) Vgl. z. B. QUINE [13] S. 117: „$Y_{i1}, \ldots, Y_{iq_i}$" — wobei die Nummern q_i nicht konstant sind, sondern von Zeichenreihen W_i abhängen.

3) Ohne und mit Benutzung der klammerfreien Schreibweise.

Aus einem Ausdruck Z geht wieder einer hervor, wenn man in Z an einer Stelle eine Aussagenvariable p etwa durch $\sim p$ oder $(p \to q)$ oder $(p \wedge q)$ ersetzt[1]; den Nachweis z. B., daß

$$((p \to q) \to ((\sim p \vee r) \to (p \to (q \wedge r))))$$

Ausdruck ist, führt man der Reihe nach zurück auf den entsprechenden Nachweis für

$$\begin{array}{l}(p \to ((\sim p \vee r) \to (p \to (q \wedge r)))),\\ (p \to ((p \vee r) \to (p \to (q \wedge r)))),\\ (p \to (p \to (p \to (q \wedge r)))),\\ (p \to (p \to (p \to q))),\\ (p \to (p \to p)),\\ (p \to p),\\ p.\end{array}$$

Statt nun von einer solchen „Abbau"-*Folge*[2]) zu sprechen (die von Z ausgeht und — weil Z hier Ausdruck ist — bei einer Aussagenvariablen ankommt), reiht man in einer einzigen Zeichenreihe Z^*[2]) die Zwischenerzeugnisse des Abbauens hintereinander, wobei man jeweils zwischen zwei konsekutive ein geeignetes *Trennzeichen* einschiebt — etwa (), eine Zeichenreihe, die weder in einem Ausdruck noch „überlappend" mit einem Ausdruck vorkommen kann.

Auf dieses Trennzeichenverfahren — hier nur im Spezialfall und deshalb besonders einfach — bin ich nicht als erster gekommen; es findet sich in allen drei genannten Arbeiten von QUINE.

Es ist nicht uninteressant, aber außerordentlich langwierig, aus Axiomen[3]) die im folgenden bewiesenen Sätze lückenlos herzuleiten; ich unterdrücke fast alle diese Deduktionen.

§ 1. Definition der Substitution mit Hilfe der Verkettung

1. Wir beginnen mit einer nicht-elementaren (wenn auch expliziten) Definition:

$Sub\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt Zeichenreihen-Folgen $\{U_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$, $\{V_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$ und $\{W_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m-1}$ derart, daß:

(1) $U_1 = \text{♀}$, $V_1 = Z_1$.

(2) Für $1 \leqq \mu \leqq m-1$: (a) $V_\mu = W_\mu Z_0 V_{\mu+1}$,
(b) Z_0 in $W_\mu Z_0$ nur hinten,
(c) $U_{\mu+1} = U_\mu W_\mu Z_{00}$.

(3) (a) Z_0 nicht in V_m,
(b) $U_m V_m = Z_2$.

---

[1]) In den Formeln dieses Beispiels ist natürlich z. B. „)" nicht ein technisches Zeichen, sondern ein Zeichen für ein bestimmtes Halbgruppenelement (für eine bestimmte Zeichengestalt).

[2]) Vgl. S. 196.

[3]) Siehe — neben [18] — auch [6] S. 8, [17] S. 7/8 u. 15, [1] S. 78, [16] S. 189 und schon (für die Syntax eines speziellen Kalküls) [21] S. 100, [22] S. 289.

Es ist einleuchtend, daß *Sub* die übliche[1]) *Substitution* (= *Einsetzung an allen Stellen*) erfaßt. Die U_μ sind immer länger werdende[2]) Anfangsstücke des Resultats Z_2, die zusammenschrumpfenden V_μ dagegen Endstücke der Ausgangszeichenreihe Z_1. Nach Konvention beginnt das (einmalige) Substituieren in Z_1 ganz links (1) und wird nach jedem Schritt rechts von ihm (2c,a), aber so weit links wie möglich (2b), wiederholt — so lange es geht (3a). Bei schon konstruiertem U_μ und V_μ sucht man in praxi auch wirklich zunächst das früheste Vorkommen von Z_0 in V_μ, bestimmt also W_μ und den Rest $V_{\mu+1}$ gemäß (2a, b), und bildet danach $U_{\mu+1}$ gemäß (2c).

So „naturgemäß" diese Definition wohl gewählt ist — für das folgende (Abschnitt 2. und 3.) brauchen wir, obwohl es zunächst weitschweifig erscheinen mag, eine Variante von ihr:

$Sub'\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt Folgen $\{X_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$, $\{Y_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$ und $\{Q_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m-1}$ derart, daß:

(1) $X_1 = Y_1$, Z_0 nicht in X_1.

(2) Für $1 \leqq \mu \leqq m-1$: $X_{\mu+1} = Q_\mu Z_0 X_\mu$, wobei Z_0 in $Q_\mu Z_0$ nur hinten;
$Y_{\mu+1} = Q_\mu Z_{00} Y_\mu$.

(3) $X_m = Z_1$, $Y_m = Z_2$.

Diesmal „wachsen" also die X_μ und die Y_μ „nach vorne" (2), bis sie zu Z_1 bzw. Z_2 angewachsen sind.

Die Relationen *Sub* und *Sub'* sind umfangsgleich; der Übergang von den U_μ, V_μ, W_μ zu den X_μ, Y_μ, Q_μ oder umgekehrt wird durch die Beziehungen

$$X_\mu = V_{m+1-\mu},\ U_{m+1-\mu} Y_\mu = Z_2\ (1 \leqq \mu \leqq m);\quad Q_\mu = W_{m-\mu} (1 \leqq \mu \leqq m-1)$$

hergestellt, mit deren Hilfe man jeweils eine der (sieben) Bedingungen der ersten Definition als mit einer der (sieben) Bedingungen der zweiten Definition äquivalent erweist.

Für $\boldsymbol{R} = Sub'$ (und damit zugleich für $\boldsymbol{R} = Sub$) gelten die folgenden Sätze:

(I) Vor. $Z_0 = ♀$.
Beh. Es gibt kein Z_2 mit $\boldsymbol{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$.

(II) Vor. Z_0 nicht in Z_1.
Beh. $\boldsymbol{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ genau dann, wenn $Z_1 = Z_2$.

(III) Vor. Z_0 in $Q Z_0$ nur hinten.
Beh. (a) $\boldsymbol{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ genau dann, wenn $\boldsymbol{R}\, Q Z_0 Z_1\, Z_0\, Z_{00}\, Q Z_{00} Z_2$.
(b) Wenn $\boldsymbol{R}\, Q Z_0 Z_1\, Z_0\, Z_{00}\, Z$, so $Z = Q Z_{00} \ldots$

Ganz klar ist (I), denn (1) ist für $Z_0 = ♀$ nicht erfüllbar.

Zu (II): Aus $Sub'\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ würde im Falle $m \geqq 2$, entgegen der Voraussetzung, $Z_1 = Q_{m-1} Z_0 X_{m-1}$ folgen; mit $m = 1$ aber ergibt sich $Z_1 = X_1 = Y_1 = Z_2$. Wird umgekehrt $Z_1 = Z_2$ vorausgesetzt, so kann man (1) bis (3) mit $m = 1$ erfüllen.

Der Nachweis für (IIIa) läuft darauf hinaus, bei den drei Folgen je ein weiteres X_μ, Y_μ und Q_μ anzuhängen bzw. jeweils das letzte fortzuschneiden. Aus den Voraussetzungen von (IIIb) schließlich folgert man sofort $m > 1$ und $Z = Y_m = Q_{m-1} Z_{00} Y_{m-1}$.[3])

---

[1]) Die Bezeichnung — Reihenfolge der Argumentwerte! — ist allerdings in der Literatur nicht einheitlich.

[2]) Genau genommen: nicht kürzer werdende (Beispiel: a Atom, $Z_1 = aaaaa$, $Z_0 = aa$, $Z_{00} = ♀$, $Z_2 = a$).

[3]) Der Nachweis von (III) direkt für $\boldsymbol{R} = Sub$ ist etwas weniger trivial.

Durch diese drei Sachverhalte ist die Substitutionsrelation eindeutig charakterisiert. *Sind nämlich* $\mathbf{R}_1$ *und* $\mathbf{R}_2$ *vierstellige Relationen im Bereich der Zeichenreihen, und sind die Forderungen* (I), (II), (III) *sowohl für* $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1$ *als auch für* $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2$ *befriedigt, so folgt:*

(A) $\mathbf{R}_1\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ *genau dann, wenn* $\mathbf{R}_2\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$.

Unabhängig von (A) ergibt sich *für jede Relation* $\mathbf{R}$, *auf die die Feststellungen* (I) *bis* (III) *zutreffen:*

(B) *Je nachdem, ob* $Z_0 = \text{♀}$ *oder* $Z_0 \neq \text{♀}$, *existiert* *kein* Z_2 *oder genau ein* Z_2 *mit* $\mathbf{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$.[1])

Eine Behauptung über Zeichenreihen Z ist sicherlich dann für jedes Z wahr, wenn man bei beliebigem Z zeigen kann: Trifft die Behauptung auf alle echten Abschnitte von Z zu, so auch auf Z selbst. — Durch diese Art vollständiger Induktion — und zwar bezüglich Z_1 — beweisen wir die beiden Sätze. Für alle echten Abschnitte von Z_1 sollen (A) und (B) wahr sein (*).

Durch (I) ist beide Male der Fall $Z_0 = \text{♀}$ erledigt, durch (II) der Fall, daß Z_0 nicht in Z_1 vorkommt. Sei jetzt $Z_0 \neq \text{♀}$ und Z_0 in Z_1. Es gibt, eindeutig bestimmt übrigens, solche Zeichenreihen Q und Z_1', daß

$$Z_1 = Q Z_0 Z_1' \text{ und } Z_0 \text{ in } Q Z_0 \text{ nur hinten.}$$

Wir beachten, daß Z_1' echtes Endstück von Z_1 ist (weil $Z_0 \neq \text{♀}$ sein sollte).

Zu (A). Wenn $\mathbf{R}_1 Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$, so gibt es nach (IIIb) ein Z_2' mit $Z_2 = Q Z_{00} Z_2'$, und man erhält $\mathbf{R}_1\, Z_1' Z_0 Z_{00} Z_2'$ (IIIa), $\mathbf{R}_2\, Z_1' Z_0 Z_{00} Z_2'$ (*), $\mathbf{R}_2\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ (IIIa).

Zu (B). Es gibt ein Z_2' mit $\mathbf{R}\, Z_1' Z_0 Z_{00} Z_2'$ (*) und $\mathbf{R}\, Z_1\, Z_0\, Z_{00}\, Q Z_{00} Z_2'$ (IIIa). Zu zeigen bleibt: Wenn $\mathbf{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ und $\mathbf{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} \overline{Z}_2$, so $Z_2 = \overline{Z}_2$. Nach (IIIb) dürfen wir $Z_2 = Q Z_{00} Z_2'$ und $\overline{Z}_2 = Q Z_{00} \overline{Z}_2'$ setzen; (IIIa) ergibt $\mathbf{R}\, Z_1' Z_0 Z_{00} Z_2'$ und $\mathbf{R}\, Z_1' Z_0 Z_{00} \overline{Z}_2'$, so daß $Z_2' = \overline{Z}_2'$ (*), mithin $Z_2 = \overline{Z}_2$ sein muß.

2. Eine äquivalente elementare explizite Definition geben wir zunächst für den Fall, daß unendlich viele Atome vorhanden sind.[2]) Kommen voneinander verschiedene Atome a und b weder in Z_1 noch in Z_2 vor — solche a, b gibt es ja dann stets —, so auch in keinem X_μ (weil $Z_1 = \ldots X_\mu$) und in keinem Y_μ (weil $Z_2 = \ldots Y_\mu$). Die m Zeichenreihen $X_\mu b Y_\mu$ fügen wir mit dem anderen „Trennzeichen"[3]) a in der einen Zeichenreihe Z^* aneinander, z. B., falls $m = 3$, so:

$$Z^* = a X_1 b Y_1\, a X_2 b Y_2\, a X_3 b Y_3\, a.$$

Denkt man sich alle von a und b verschiedenen Atome gelöscht, so treten in Z^* die Trennzeichen a und b immer abwechselnd auf; das wird unten in (1) zum Ausdruck gebracht. Die Bedingungen aus der Definition von *Sub'* brauchen wir jetzt lediglich sinngemäß zu modifizieren.

$Sub_\infty Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Zu fast allen[4]) voneinander verschiedenen Atomen a und b gibt es ein Z^* mit folgenden Eigenschaften:

---

[1]) Das gilt für beliebiges Z_1, Z_0, Z_{00}. Hermes definierte die Substitution (nicht-elementar) mit Hilfe des Begriffes „Quasiatom" nur für gewisse Argumentwerte; siehe in [6] S. 16/17.

[2]) Elementar ausgedrückt: daß es keine Zeichenreihe gibt, in der jedes Atom vorkommt. Abzählbarkeit der Basis können wir nicht elementar charakterisieren.

[3]) Vgl. Einleitung.

[4]) „Die Relation ... besteht zwischen fast allen Atomen a und b" soll bedeuten: Es gibt ein $\hat{Z}$ derart, daß die betreffende Relation auf je zwei Atome, die nicht in $\hat{Z}$ vorkommen, zutrifft.

(1) Für jedes Z: Wenn aZa in Z^*, so b in Z; wenn bZb in Z^*, so a in Z.

(2) Es gibt ein X_1 mit (a) $Z^* = aX_1bX_1a \ldots$,
(b) Z_0 nicht in X_1.

(3) Für jedes X, X', Y, Y': Wenn $aXbYaX'bY'a$ in Z^*, aber weder a noch b in $XX'YY'$, dann gibt es ein W derart, daß
$X' = WZ_0X$, wobei Z_0 in WZ_0 nur hinten, und
$Y' = WZ_{00}Y$.

(4) $Z^* = \ldots aZ_1bZ_2a$.

Es hätte nahegelegen, das Definiens mit

„Zu je zwei verschiedenen nicht in Z_1Z_2 vorkommenden Atomen a, b gibt es . . ."

beginnen zu lassen (und so die Redewendung „fast alle" zu vermeiden); dann würde aber, wovon sich der Leser schnell überzeugen kann, die Bestätigung der charakteristischen Eigenschaft (IIIa) in der einen Richtung schwierig. Ebenfalls sieht man sofort, daß ein Beweis für (III) recht unangenehm würde, wenn wir die dritte Definition der ersten statt der zweiten nachgebildet hätten. — Diese beiden Bemerkungen gelten, mutatis mutandis, auch für Abschnitt 3.

Wir beweisen (I), (II), (III) für $\mathbf{R} = Sub_\infty$.

Im Hinblick auf (2b) ist (I) wieder trivial.[1])

Zu (II). Wenn $Sub_\infty Z_1Z_0Z_{00}Z_2$, so existieren voneinander verschiedene und nicht in Z_1Z_2 vorkommende Atome a und b sowie eine Zeichenreihe Z^* gemäß Bedingung (1) bis (4). Käme a mindestens dreimal in Z^* vor, so könnte man wegen (4) ansetzen:

$$Z^* = \ldots aUaZ_1bZ_2a;\ a \text{ nicht in } U$$

— und wegen (1):

$$Z^* = \ldots aXbYaZ_1bZ_2a;\ a,\ b \text{ weder in } X \text{ noch in } Y.$$

Nach (3) wäre dann $Z_1 = \ldots Z_0 \ldots$ — im Widerspruch zur Voraussetzung. Also muß a genau zweimal in Z^* auftreten (und b genau einmal); ein Vergleich von (2a) und (4) liefert: $Z_1 = X_1 = Z_2$. — Setzt man umgekehrt $Z_1 = Z_2$ voraus, so leistet $Z^* = aZ_1bZ_1a$ das Verlangte — bei jedem a, das nicht in Z_1, und jedem b, das nicht in Z_1a vorkommt.

Zu (III). Stets wenn die Atome a und b verschieden und nicht in $\hat{Z}$ sind, gebe es ein Z^* gemäß (1) bis (4). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf man annehmen, daß QZ_0Z_1 und $QZ_{00}Z_2$ Abschnitte jenes $\hat{Z}$ seien. Für ebendiese a und b bleiben (1) bis (4) wahr, wenn man „Z_1" in „QZ_0Z_1", „Z_2" in „$QZ_{00}Z_2$" und „Z^*" in „$Z^*QZ_0Z_1bQZ_{00}Z_2a$" abändert. Damit ist (IIIa) „von links nach rechts" bestätigt. — Jetzt gehen wir aus von $Sub_\infty QZ_0Z_1 Z_0 Z_{00} Z$ und nehmen an:

a, b nicht in QZ_0Z_1, Z; $a \neq b$;

(1) bis (4) erfüllt mit „QZ_0Z_1" statt „Z_1", „Z" statt „Z_2", „Z^{**}" statt „Z^*".

Um die andere Richtung von (IIIa) zu beweisen, werden wir ein Z^* angeben, auf das — wenn $Z = QZ_{00}Z_2$ — die unveränderten Bedingungen (1) bis (4) zutreffen. Käme a nur zweimal in Z^{**} vor, so wäre wegen (4) und (2) Z_0 nicht in QZ_0Z_1; folglich steht a mindestens dreimal in Z^{**}. Setzen wir daher

$$Z^{**} = Z^*QZ_0Z_1bZa$$

und

$$Z^* = \ldots aXbZ_2a\ (a,\ b \text{ nicht in } X,\ Z_2),$$

so führt (3) zu $Z = QZ_{00}Z_2$ — damit haben wir (IIIb) — und $X = Z_1$ — damit haben wir (4) (unverändert); evident sind (1), (2), (3) (unverändert).

[1]) — aber natürlich nicht allgemeingültig, falls es nur endlich viele Atome gibt!

3. Im jetzt folgenden Abschnitt verlangen wir nur noch, daß die Zeichenreihen-Halbgruppe mindestens zwei Atome besitzt. Zwei verschiedene, a und b, nehmen wir her, bilden ein „sehr langes"[1]) a-Molekül A sowie ein „sehr langes" b-Molekül B und verwenden die beiden Zeichenreihen bAb und aBa[2]) als Trennzeichen anstatt, wie soeben, a und b selbst. 1936 schon hat sich QUINE bei seiner elementaren expliziten Substitutionsdefinition [12] auf ein Trennzeichenverfahren mit einem solchen "tally" B, "*insulated* by the atom a" (wie er es später in [14] nannte), gestützt.

$Sub_2 Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Bei je zwei verschiedenen Atomen a und b gibt es zu fast allen a-Molekülen A[3]) und fast allen b-Molekülen B ein Z^* mit folgenden Eigenschaften:

(1) Für jedes Z: Wenn $bAbZbAb$ in Z^*, so aBa in Z;
wenn $aBaZaBa$ in Z^*, so bAb in Z.

(2) Es gibt ein X_1 mit (a) $Z^* = bAbX_1aBaX_1bAb\ldots$,
(b) Z_0 nicht in X_1.

(3) Für jedes X, X', Y, Y': Wenn $bAbXaBaYbAbX'aBaY'bAb$ in Z^*, aber weder A noch B in X, X', Y, Y', dann gibt es ein W derart, daß
$X' = WZ_0X$, wobei Z_0 in WZ_0 nur hinten, und
$Y' = WZ_{00}Y$.

(4) $Z = \ldots bAbZ_1aBaZ_2bAb$.

Völlig analog wie für $\boldsymbol{R} = Sub_\infty$ bestätigt man die drei charakteristischen Bedingungen für $\boldsymbol{R} = Sub_2$.

4. Wir wissen, daß

(A) *stets* $Sub\, Z_1Z_0Z_{00}Z_2$ *genau dann, wenn* $Sub_2Z_1Z_0Z_{00}Z_2$ — *falls zwei Atome vorhanden sind.*

Ohne diese Einschränkung war schon vorhin bewiesen, daß

(B) *im Falle* $Z_0 \neq \text{♀}$ (*bei sonst beliebigem* Z_1, Z_0, Z_{00}) *genau ein* Z_2 *mit* $Sub\, Z_1Z_0Z_{00}Z_2$ *existiert,*

welches üblicherweise durch

$$Z_1{}^{Z_0}\!/_{Z_{00}} \tag{*}$$

bezeichnet wird. Mit „Sub_2" statt „Sub" und mit der Prämisse, daß mindestens zwei Atome vorhanden sind, gehört dieser letztere Satz samt Beweis zur elementaren reinen Semiotik.[4])

---

[1]) Um eine konkrete Vorstellung zu haben, wähle man etwa $A = A_1A_2a$, wenn A_1 bzw. A_2 längstes a-Molekül in Z_1 bzw. Z_2 (vgl. Einleitung) ist.

[2]) Solche aBa heißen bei MARKOV (a, b)-звенья (звено = Kettenglied); über sie in [8] S. 34—40.

[3]) „Die Eigenschaft ... kommt fast allen a-Molekülen zu" soll bedeuten: Es gibt ein a-Molekül $\hat{A}$ derart, daß die betreffende Eigenschaft auf jedes a-Molekül A mit $A = \hat{A}\ldots$ zutrifft.

[4]) — desgleichen z. B., falls man unendlich viele Atome hat, die dann allgemeingültige Äquivalenz von $Sub_\infty Z_1Z_0Z_{00}Z_2$ und $Sub_2Z_1Z_0Z_{00}Z_2$. Und desgleichen auch, bei Existenz zweier Atome, Satz (C).

Nachdem die Verwendung der Termschreibweise (*) — d. h. des bestimmten Artikels — gerechtfertigt ist, gewinnt man aus (II) und (III) folgenden Satz:

$$\text{(C)}\quad Z_1{}^{Z_0}/_{Z_{00}} = \left\{\begin{array}{l} Z_1,\ \text{wenn } Z_0 \text{ nicht in } Z_1; \\ QZ_{00}Z_1'{}^{Z_0}/_{Z_{00}},\ \text{wenn } Z_1 = QZ_0Z_1' \\ \qquad\qquad \text{und } Z_0 \text{ in } QZ_0 \text{ nur hinten.} \end{array}\right\} \quad (Z_0 \neq \text{♀})$$

Das ist eine „induktive Definition" für (*), die man mit Vorteil statt der komplizierten expliziten Definitionen in Beweisen ausnutzt, wie ein Beispiel zeigen mag:

Satz. *Es sei* $Z_0 \neq$ ♀, *und es gebe kein* $\bar{X}$, $\bar{Y}$ *mit* $X = \ldots\bar{X}$, $\bar{X} \neq$ ♀, $Y = \bar{Y}\ldots$, $\bar{Y} \neq$ ♀, $XY = Z_0$.[1]) *Dann ist* $(XY)^{Z_0}/_{Z_{00}} = X^{Z_0}/_{Z_{00}}\, Y^{Z_0}/_{Z_{00}}$.

Beweis (induktiv über X).

1. Ist Z_0 weder in X noch in Y, so — in Anbetracht der Voraussetzung — auch nicht in XY. Die Behauptung reduziert sich vermöge (C) auf $XY = XY$.

2. Ist Z_0 nicht in X, wohl aber in Y, so wählen wir Q und Y' so, daß $Y = QZ_0Y'$ und Z_0 in QZ_0 nur hinten. Auch in XQZ_0 kommt Z_0 nur hinten vor. Auf Grund von (C) wird

$$(XY)^{Z_0}/_{Z_{00}} = (XQZ_0Y')^{Z_0}/_{Z_{00}} = XQZ_{00}Y'^{Z_0}/_{Z_{00}} = X(QZ_0Y')^{Z_0}/_{Z_{00}} = X^{Z_0}/_{Z_{00}}\, Y^{Z_0}/_{Z_{00}}.$$

3. Kommt Z_0 in X vor, dann wählen wir Q und X' so, daß $X = QZ_0X'$ ist, wobei Z_0 in QZ_0 nur hinten steht. Diesmal wird

$$(XY)^{Z_0}/_{Z_{00}} = QZ_{00}(X'Y)^{Z_0}/_{Z_{00}} \overset{2)}{=} QZ_{00}X'^{Z_0}/_{Z_{00}}Y^{Z_0}/_{Z_{00}} = X^{Z_0}/_{Z_{00}}\, Y^{Z_0}/_{Z_{00}}.$$

Korollar. $(XY)^{a}/_{Z} = X^{a}/_{Z}\,Y^{a}/_{Z}$ sicherlich dann, wenn a Atom.

5. Falls die freie Halbgruppe genau ein Atom besitzt, ist es nicht möglich, die Substitution explizit elementar durch Verkettungen zu definieren. Hat man nämlich etwa nur das eine Atom $|$, und bedeutet ξ, η, ζ bzw. die Länge (im anschaulichen Sinne) der Zeichenreihe X, Y, Z, so ist $Z = XY$ mit $\zeta = \xi + \eta$ und $Sub\, X \mid YZ$ mit $\zeta = \xi \cdot \eta$ äquivalent. Das PRESBURGERsche Axiomensystem der elementaren Arithmetik[3]) in Addition allein ist vollständig — im Hinblick auf den GÖDELschen Unvollständigkeitssatz (für die „volle Arithmetik" der natürlichen Zahlen, in Addition und Multiplikation) kann also schon $Sub\, X \mid YZ$ nicht durch Verkettungen elementar ausdrückbar sein.

6. Wir erwähnen abschließend, daß wir zu unserem Vorteil die leere Zeichenreihe zuließen: Substitutionen mit $Z_{00} =$ ♀ — *Streichungen* also — sind im allgemeinen Falle mit behandelt.

§ 2. Simultane Substitution

1. Ist k eine natürliche Zahl und $k \geqq 2$, so soll die $(2k+2)$-stellige Relation $Sub^k(Z_1; a_1, X_1, \ldots, a_k, X_k; Z_2)$ besagen, daß Z_1 in Z_2 übergeht, wenn man „gleichzeitig" X_1 für $a_1, \ldots, X_k$ für a_k einsetzt. SCHRÖTER hat diese *k-fach simultane Substitution* sehr allgemein (induktiv und nicht-elementar) definiert[4]), doch wir beschränken uns auf den Fall, daß $a_1, \ldots, a_k$ lauter verschiedene Atome sind. Dann existiert stets ein eindeutig bestimmtes Substitutionsresultat Z_2 — es werde

[1]) Z_0 soll also nicht die „Naht" in XY „überlappen".

[2]) Hier erst wird die Induktionsvoraussetzung herangezogen.

[3]) In [11]: der ganzen Zahlen; bei sinngemäßer Modifikation: der natürlichen Zahlen.

[4]) [17] S. 21—23.

$Z_1 {}^{a_1}/_{X_1} \ldots {}^{a_k}/_{X_k}$ genannt. Bei der Bezeichnung iterierter Substitutionen dagegen kommt es auf die Klammern an, denn z. B. ist

$$((ab)\, {}^{a}/_{b})\, {}^{b}/_{a} = aa, \quad ((ab)\, {}^{b}/_{a})\, {}^{a}/_{b} = bb, \quad (ab)\, {}^{a}/_{b}\, {}^{b}/_{a} = (ab)\, {}^{b}/_{a}\, {}^{a}/_{b} = ba.$$

Hermes hat — mit seinen Hilfsmitteln und für den Fall unendlich vieler Atome — simultane Substitutionen durch Iteration gewöhnlicher ausgedrückt.[1]) Ich gebe eine elementare explizite Definition von Sub^k, bei der im Definiens — außer Verkettungen — zwischen $(k+1)^2$ und $(k+2)^2$ gewöhnliche Substitutionen auftreten.

Wir behandeln zuerst den Fall $k = 2$. Dabei sollen a und b verschiedene Atome sein; ob es weitere gibt, spielt keine Rolle.

$$X^0_\varkappa \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} (X_\varkappa\, {}^{b}/_{ab})\, {}^{a}/_{ab} \qquad (\varkappa = 1, 2)\ ^{2)},$$

$$Z\, {}^{a}/_{X_1}\, {}^{b}/_{X_2} \underset{\mathrm{Df}}{\equiv} ((((Z\, {}^{a}/_{aa})\, {}^{b}/_{X^0_2})\, {}^{aa}/_{X^0_1})\, {}^{abb}/_{b})\, {}^{ab}/_{a}.$$

Neunmal kommt gewöhnliche Substitution in diesem Definiens von $Z\, {}^{a}/_{X_1}\, {}^{b}/_{X_2}$ vor.

Ohne den bestimmten Artikel kann man der Definition z. B. folgende Form geben:

$Sub^2(Z; a, X_1, b, X_2; W) \underset{\mathrm{Df}}{\equiv}$ Für gewisse $X'_1, X^0_1, X'_2, X^0_2, W_1, W_2, W_3, W_4$ gilt

$$\begin{array}{ll} Sub\ X_1\ b\ ab\ X'_1, & Sub\ X_2\ b\ ab\ X'_2, \\ Sub\ X'_1\ a\ ab\ X^0_1, & Sub\ X'_2\ a\ ab\ X^0_2, \end{array}$$

$Sub\ Z\ a\ aa\ W_1,$

$Sub\ W_1\ b\ X^0_2\ W_2,$

$Sub\ W_2\ aa\ X^0_1\ W_3,$

$Sub\ W_3\ abb\ b\ W_4,$

$Sub\ W_4\ ab\ a\ W.$

Und jetzt sei $k \geqq 3$. Die Konstruktion geht aus dem Einzelfall $k = 4$ genügend deutlich hervor. Es seien a, b, c, d voneinander verschiedene Atome; ob es weitere gibt, ist wieder belanglos. Setzen wir — ähnlich wie vorhin —

$$(((X_\varkappa\, {}^{b}/_{ab})\, {}^{a}/_{ab})\, {}^{c}/_{abbb})\, {}^{d}/_{abbbb} = X'_\varkappa \text{ (das ist } X_\varkappa\, {}^{a}/_{ab}\, {}^{b}/_{abb}\, {}^{c}/_{abbb}\, {}^{d}/_{abbbb}),$$

dann wird

$$((((((Z\, {}^{a}/_{X'_1}\, {}^{b}/_{X'_2})\, {}^{c}/_{X'_3})\, {}^{d}/_{X'_4})\, {}^{abbbb}/_{d})\, {}^{abbb}/_{c})\, {}^{abb}/_{b})\, {}^{ab}/_{a} = Z\, {}^{a}/_{X_1}\, {}^{b}/_{X_2}\, {}^{c}/_{X_3}\, {}^{d}/_{X_4}.$$

In dieser Definition treten $k^2 + 2k - 2$ gewöhnliche Substitutionen und eine 2-fach simultane auf, im ganzen also $k^2 + 2k + 7$ gewöhnliche.

Ohne auf die Zusammenhänge auch hier wieder näher einzugehen, stellen wir noch der elementaren expliziten eine elementare rekursive Definition von Sub^4 gegenüber:

$$Z\, {}^{a_1}/_{X_1}\, {}^{a_2}/_{X_2}\, {}^{a_3}/_{X_3}\, {}^{a_4}/_{X_4} = \begin{cases} ♀, \text{ falls } Z = ♀; \\ Z'\, {}^{a_1}/_{X_1}\, {}^{a_2}/_{X_2}\, {}^{a_3}/_{X_3}\, {}^{a_4}/_{X_4}\ Y \\ \quad \text{mit } Y = \begin{cases} X_i, \text{ falls } Z = Z' a_i \ (1 \leqq i \leqq 4). \\ x, \quad \text{falls } Z = Z' x,\ x \text{ Atom}, \\ \qquad x \neq a_i \text{ für } i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \end{cases}$$

---

1) [6] S. 19.

2) Anschaulich ist klar: $X^0_\varkappa = X_\varkappa\, {}^{a}/_{ab}\, {}^{b}/_{abb}$.

2. Neben den „k-fach simultanen" hat man auch solche simultanen Substitutionen, bei denen die Anzahl der gleichzeitig an Z_1 auszuführenden gewöhnlichen Substitutionen variabel ist, nämlich von dem jeweiligen Z_1 abhängt, und dabei keine endliche Schranke besitzt. Ein solcher Fall wird uns in § 6 (**4.**) beschäftigen. Wir begnügen uns hier mit nur einem Beispiel aus der reinen Semiotik:

Es seien a, b, c drei verschiedene von unendlich vielen Atomen. In Z_1 soll c für alle von a und b verschiedenen Atome eingesetzt und gleichzeitig a mit b vertauscht werden. Dafür, daß Z_2 das Substitutionsresultat ist, ist notwendig und hinreichend: Wählt man irgendein von a, b, c verschiedenes Atom d, so gibt es eine Zeichenreihe Z^*, in der (auf die uns schon geläufige Weise) gewisse X, in denen d nicht vorkommt, mit dem Trennzeichen d hintereinandergereiht sind; das erste dieser X ist $Z_1\, {}^{a}\!/_{b}\, {}^{b}\!/_{a}\, {}^{d}\!/_{c}$, das letzte die Zeichenreihe Z_2, in der kein von a, b, c verschiedenes Atom auftritt, und zu je zwei konsekutiven X — etwa X' und X'' — existiert ein von a und b verschiedenes Atom x derart, daß $Sub\, X' x c X''$.

3. Ein sehr allgemeiner Typ simultaner Substitutionen soll wenigstens erwähnt werden: Eine Relation zwischen Atomen x und Zeichenreihen Z — nehmen wir an: die elementar formulierte Beziehung $\mathfrak{H}(x, Z)$ — sei vorgegeben; Z_1 soll dadurch in Z_2 übergehen, daß man gleichzeitig für jedes Atom x eine Zeichenreihe Z, die der Bedingung $\mathfrak{H}(x, Z)$ genügt, einsetzt, und zwar für jedes bestimmte x an jeder Stelle in Z_1 das gleiche Z.

Hier einige Beispiele dieses Substitutionstyps:

Wählt man für $\mathfrak{H}(x, Z)$ den Ausdruck

Wenn $x = \mathfrak{a}_i$ *mit* $1 \leqq i \leqq 4$, *so* $Z = \mathfrak{X}_i$; *wenn* $x \neq \mathfrak{a}_i$ *für* $i = 1, 2, 3, 4$, *so* $Z = x$,

so erhält man die Relation Sub^4.

Nimmt man für $\mathfrak{H}(x, Z)$ den Ausdruck

Wenn $x = a$, *so* $Z = b$; *wenn* $x = b$, *so* $Z = a$; *wenn* $x \neq a$ *und* $x \neq b$, *so* $Z = c$,

so erhält man die oben (**2.**) als Beispiel behandelte Relation.

Wählt man (innerhalb der Syntax des Aussagenkalküls)

Wenn x *Aussagenvariable, so ist* Z *Ausdruck; sonst ist* $Z = x$,

so bekommt man die bereits erwähnte in § 6 zu definierende Beziehung

Z_2 *entsteht aus* Z_1 *durch Einsetzung von Ausdrücken in die Aussagenvariablen.*

Wählt man

Wenn x *Aussagenvariable, so* $Z = \sim x$; *wenn nicht, so* $Z = x$,

so erhält man die Relation

Z_1 *geht in* Z_2 *über, wenn man vor jede Aussagenvariable das Atom* $\sim$ *einschiebt.*

§ 3. Definition der Verkettung mit Hilfe der Substitution

Bevor wir die dreistellige Verkettungsrelation $Vk\, XYZ$ — d. h. $Z = XY$ — durch Substitutionen ausdrücken, verschaffen wir uns Hilfsbegriffe.[1])

[1]) Man könnte übrigens auch ⚲ und die Identität definitorisch einführen:

$$Z \text{ leer} \begin{cases} \overset{=}{\scriptstyle\mathrm{Df}}\; Vk\, ZZZ. \\ \overset{=}{\scriptstyle\mathrm{Df}}\; \text{Es ist nicht wahr, daß } Sub\, ZZZZ. \end{cases}$$

$$X = Y \begin{cases} \overset{=}{\scriptstyle\mathrm{Df}}\; \text{Für jedes } Z\text{: Wenn } Z \text{ leer, so } Vk\, XZY. \\ \overset{=}{\scriptstyle\mathrm{Df}}\; X \text{ und } Y \text{ beide leer oder } Sub\, XXYX. \end{cases}$$

$W\ in\ Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es trifft nicht zu: $Sub\, Z\, W \underset{|}{\circ}\, Z$.[1])

$a\ ist\ Atom \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Für jedes Z: Wenn Z in a, so entweder $Z = \underset{|}{\circ}$ oder $Z = a$.

Die hieran anknüpfende Definition der Redeweise „A ist längeres a-Molekül als [jedes a-Molekül] in Z“ bleibe dem Leser überlassen.

Nehmen wir als erste Möglichkeit an, es gebe mindestens zwei Atome. Zunächst wird die Verkettung zweier Atome a, b ($a \neq b$) definiert. Offenbar ist

$$Sub\, Z a \underset{|}{\circ}\, b \quad und \quad Sub\, Z b \underset{|}{\circ}\, a \tag{*}$$

genau dann erfüllt, wenn $Z = ab$ oder $Z = ba$ ist. Wie den ersten Fall vor dem andern auszeichnen? Für $Z = ab$ ist $(Z\, {}^{a}/_{bb})\, {}^{bb}/_{a} = (bbb)\, {}^{bb}/_{a} = ab = Z$, für $Z = ba$ dagegen $(Z\, {}^{a}/_{bb})\, {}^{bb}/_{a} = (bbb)\, {}^{bb}/_{a} = ab \neq Z$. Nun läßt sich aber $B_2 = bb$ z. B. durch

$$(*) \quad und \quad Sub\, Z a b B_2$$

ausdrücken. Wenn also a und b Atome und verschieden sind:

$Vk'\, abZ \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt Zeichenreihen B_2 und B_3 mit

$$\begin{array}{lll} Sub\, Z a \underset{|}{\circ}\, b, & Sub\, Z a b B_2, & Sub\, Z a B_2 B_3, \\ Sub\, Z b \underset{|}{\circ}\, a, & & Sub\, B_3 B_2 a Z. \end{array}$$

Und für beliebiges X, Y:

$Vk\, XYZ \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt ein W sowie Atome a und b derart, daß $a \neq b$ und $Vk'\, abW$ und

$$Sub^2(W;\, a, X, b, Y;\, Z). \tag{**}$$

(**) wurde in § 2 bereits definiert, aber in unserm Spezialfall hier sagen wir für (**) einfacher:

Es gibt ein A derart, daß A längeres a-Molekül als in Y und $Z = ((W\, {}^{a}/_{A})\, {}^{b}/_{Y})\, {}^{A}/_{X}$.

Nun zu der anderen Möglichkeit, daß es genau ein Atom, etwa nur das Atom a, gibt. Die „Nachfolgerbeziehung“ ist schnell erklärt: $Z = Xa$ bedeutet, daß X längster echter Abschnitt von Z ist (daß also X echt in Z, nie aber sowohl X echt in Y als auch Y echt in Z ist). Für den Bereich der natürlichen Zahlen ausschließlich 0 hat JULIA ROBINSON die Addition durch Multiplikation und Nachfolgerbildung ausgedrückt[2]):

$$\xi + \eta = \zeta \text{ genau dann, wenn } (\xi \cdot \zeta)' \cdot (\eta \cdot \zeta)' = ((\xi \cdot \eta)' \cdot (\zeta \cdot \zeta))';$$

darin darf auch noch $\xi = 0$ oder $\eta = 0$ sein. Genau analog setzen wir, der Kürze halber die Termschreibweise statt „Sub“ benutzend:

$Vk\, XYZ \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Wenn $Z = \underset{|}{\circ}$, so $X = \underset{|}{\circ}$ und $Y = \underset{|}{\circ}$;
wenn $Z \neq \underset{|}{\circ}$, so $((X\, {}^{a}/_{Z})\, a)\, {}^{a}/_{((Y^{a}/_{Z})a)} = (((X\, {}^{a}/_{Y})\, a)\, {}^{a}/_{(Z\, {}^{a}/_{Z})})\, a$.

[1]) Anders bei CHWISTEK [3] S. 709 (letzte Zeile).

[2]) [15] S. 100.

Ein zweiter Weg:

Vk XYZ $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ Wenn Y echt in X, so ist Z kürzestes W mit *Sub* WX♀Y und $W \neq X$;
wenn X echt in Y, so ist Z kürzestes W mit *Sub* WY♀X und $W \neq Y$;
wenn $X = Y \neq$ ♀, so ist Z kürzestes W mit *Sub* WX♀♀ und $W \neq$ ♀ und $W \neq X$;
wenn $X = Y =$ ♀, so ist $Z =$ ♀.

Anmerkung 1. Die in § 2 behandelten simultanen Substitutionen sind nicht nur (im Hinblick auf § 1) elementar explizit durch *Vk* allein definierbar, sondern auch durch *Sub* allein.

Anmerkung 2. Bedeuten $\alpha_1, \alpha_0, \alpha_{00}, \alpha_2$ anschaulich die Längen der a-Moleküle A_1, A_0, A_{00}, A_2, so gilt *Sub* $A_1 A_0 A_{00} A_2$ genau dann, wenn

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (\alpha_{00} - \alpha_0)\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right].\,^{1)} \qquad (*)$$

Die vierstellige Relation (*) ist für die Arithmetik fundamental. Mit $\alpha_0 = 1$ erhält man die *Multiplikations*relation $\alpha_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_{00}$; daß die Nachfolgerbeziehung und damit auch die Addition elementar durch (*) ausdrückbar ist, sahen wir oben. Mit $\alpha_{00} = 0$ gewinnt man — darauf wies schon SCHRÖTER hin[2]) — die auch in der Metamathematik so wichtige Relation

$$\alpha_2 \textit{ ist Rest von } \alpha_1 \textit{ bei Division durch } \alpha_0;$$

für $\alpha_2 = 1$ entsteht

$$\alpha_1 \equiv 1 \mod \alpha_0,$$

also jene zweistellige Relation, aus der MYHILL [10] die üblichen arithmetischen Relationen hergestellt hat.

Anmerkung 3. CHWISTEK nennt in [3] die Substitution das „wichtigste Element" seines dort (und anderwärts) dargestellten Systems, und er gibt Axiome über sie an. Da finden wir[3]) u. a. Ersetzbarkeitstheoreme für die erste, zweite, dritte, vierte Stelle bei *sub* $Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ (dort in anderer Bezeichnung), weiter die eindeutige Bestimmtheit an der vierten Stelle, aber auch — mit einer Einschränkung — an der dritten:

$$\textit{Wenn } Z_0 \textit{ in } Z_1 \textit{ und sub } Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \textit{ und sub } Z_1 Z_0 Z'_{00} Z_2, \textit{ so } Z_{00} = Z'_{00},$$

ferner Identitäten wie *sub* $XYYX$ und *sub* $XXYY$.

Ein plausibles und nachweislich hinreichend starkes semiotisches Axiomensystem „in Substitution allein" scheint noch zu fehlen. Einerseits leuchten CHWISTEKS Formeln in [3] zwar ein,[4]) aber ihre Tragweite müßte man an Folgerungen sehen. Andererseits wüßten wir jetzt zwar — etwa in den Halbgruppenaxiomen oder in Satz (C) des § 1 — *Vk* durch *Sub* auszuschalten, aber man wünscht sich einfachere, überzeugendere *Sub*-Axiome.

---

1) Der Einschränkung $A_0 \neq$ ♀ beim Substituieren entspricht das „Verbot" der Division durch 0.

2) [17] S. 23.

3) Formeln 0,712 bis 0,82 auf S. 719.

4) Die von CHWISTEK in [4], S. 16, aufgestellten Axiome für die Substitution habe ich nicht ganz verstehen können.

§ 4. Ersetzung

1. Aus dem Definiens von $Sub\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ (§ 1, **1.**) machen wir ein Definiens von $Ers\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$, indem wir die Bedingungen (2b) und (3a) streichen. Oder wir sagen:

$Ers\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt Folgen $\{X_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$, $\{Y_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$, $\{Q_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m-1}$ mit;

(1) $X_1 = Y_1$.

(2) Für jedes μ mit $1 \leqq \mu \leqq m-1$: $X_{\mu+1} = X_\mu Z_0 Q_\mu$ und $Y_{\mu+1} = Y_\mu Z_{00} Q_\mu$.

(3) $X_m = Z_1$, $Y_m = Z_2$.

Es ist klar, daß *Ers* die *Ersetzung „an manchen Stellen“* (möglicherweise auch an gar keiner oder an allen) bedeutet. Im Falle $Z_0 = \text{ϙ}$, $Z_{00} \neq \text{ϙ}$ haben wir *Einschiebungen* vor uns, im Falle $Z_0 \neq \text{ϙ}$, $Z_{00} = \text{ϙ}$ *Streichungen.*

An die Stelle der für *Sub* charakteristischen Eigenschaften (I), (II), (III) aus § 1 können hier diese drei (offensichtlich für $\boldsymbol{R} = Ers$ zutreffenden) treten:

(I) Wenn $\boldsymbol{R}\, Z_1 \text{ϙ}\text{ϙ} Z_2$, so $Z_1 = Z_2$.

(II) $\boldsymbol{R}\, Z Z_0 Z_{00} Z$.

(III) Vor. $Z_1 \neq Z_2$.
Beh. $\boldsymbol{R}\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ genau dann, wenn Zeichenreihen Z_1', Z_2', Q existieren, für die $Z_1 = Z_1' Z_0 Q$, $Z_2 = Z_2' Z_{00} Q$, $\boldsymbol{R}\, Z_1' Z_0 Z_{00} Z_2'$.

Aus (I), (II), (III) mit $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1$ und mit $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_2$ zusammen folgt, daß stets $\boldsymbol{R}_1\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ genau dann, wenn $\boldsymbol{R}_2\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$.

Dies beweist man, wenn $Z_0 \neq \text{ϙ}$, induktiv über Z_1: Während im Falle $Z_1 = Z_2$ das Behauptete aus (II) ersichtlich ist, ist im Falle $Z_1 \neq Z_2$ die in (III) genannte Zeichenreihe Z_1' wegen $Z_0 \neq \text{ϙ}$ ein echter Anfang von Z_1, so daß die Induktionsvoraussetzung in Kraft tritt. — Entsprechend verwendet man, falls $Z_{00} \neq \text{ϙ}$, Induktion bezüglich Z_2. Ist aber $Z_0 = Z_{00} = \text{ϙ}$, so schließt man von $\boldsymbol{R}_1\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ auf $Z_1 = Z_2$ (I) und weiter auf $\boldsymbol{R}_2\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$ (II).

Erinnert man sich an den Übergang von *Sub'* zu Sub_∞ bzw. Sub_2 (in § 1), so liegt auf der Hand, wie die obige Definition von *Ers* in eine elementare explizite umgebaut werden kann — was also hier nicht ausgeführt werde. Das zu benutzende Trennzeichenverfahren macht wieder die Existenz mindestens zweier Atome erforderlich. Daß andernfalls *Ers* nicht elementar durch *Vk* ausgedrückt werden kann, sehen wir unten in Abschnitt **4.**

2. Im Hinblick auf § 3 läßt sich *Ers* durch *Sub* gewiß dann elementar explizit definieren, wenn zwei Atome vorhanden sind. Diese Einschränkung ist sogar überflüssig. Gibt es nämlich nur das eine Atom a und bedeutet wieder α_i die Länge von A_i, so gilt $Ers\, A_1 A_0 A_{00} A_2$ genau dann, wenn ein λ mit

$$0 \leqq \lambda \left(\leqq \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right], \text{ falls } \alpha_0 \neq 0\right) \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \alpha_1 + (\alpha_{00} - \alpha_0) \cdot \lambda$$

existiert. Das „übersetzt“ man:

$Ers\, A_1 A_0 A_{00} A_2 \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Wenn $A_0 = \text{ϙ}$, so gibt es ein L mit $A_2 = A_1 A_{00}\, {}^{a}/_{L}$;
wenn $A_0 \neq \text{ϙ}$, so gibt es ein L_0 und ein L mit
$A_1 L_0 = A_1\, {}^{A_0}/_{(A_0 a)}$ [1], L in L_0, $A_2 A_0\, {}^{a}/_{L} = A_1 A_{00}\, {}^{a}/_{L}$.

---

[1] Zurückübersetzt: $\alpha_1 + \lambda_0 = \alpha_1 + (\alpha_0 + 1 - \alpha_0) \cdot \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right]$, also: $\lambda_0 = \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right]$.

3. Wir haben untersucht, wann und wie *Sub* und *Ers* durch *Vk*, *Vk* und *Ers* durch *Sub* ausdrückbar sind. Und *Vk* durch *Ers*, *Sub* durch *Ers*?

Die Redeweisen

a ist Atom

und

A ist längeres a-Molekül als in Z

können wir wie in § 3 erklären, nachdem wir definiert haben:

$$X \text{ in } Z \underset{\mathrm{Df}}{=} \text{Wenn } X \neq \underset{|}{\circ}, \text{ so gibt es ein } W \text{ mit } Ers\, Z X \underset{|}{\circ} W \text{ und } W \neq Z.$$

Falls mindestens zwei Atome da sind — das setzen wir für das folgende in diesem Abschnitt voraus —, liegt die Schwierigkeit, *Vk* oder *Sub* durch *Ers* zu definieren, darin, durchweg eine „Seite" vor der anderen, etwa die linke vor der rechten, auszuzeichnen.

$\overline{X}$ bedeute die Zeichenreihe, die man erhält, wenn man die Atome von X in umgekehrter Reihenfolge verkettet.[1]) $\overline{Vk}\, XYZ$ bedeute $Z = YX$, also auch wieder die Verkettung in verkehrter Reihenfolge. Anschaulich ist klar:

$$\overline{\overline{Z}} = Z; \qquad [\alpha]$$

$$Z_1 = Z_2 \text{ genau dann, wenn } \overline{Z}_1 = \overline{Z}_2; \qquad [\beta]$$

$$Vk\, XYZ \text{ genau dann, wenn } \overline{Vk}\, \overline{X}\overline{Y}\overline{Z}; \qquad [\gamma]$$

$$Ers\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2 \text{ genau dann, wenn } Ers\, \overline{Z}_1 \overline{Z}_0 \overline{Z}_{00} \overline{Z}_2. \qquad [\delta]\,^{2)}$$

Satz 1. *Vk ist nicht explizit elementar durch Ers definierbar.*

Beweis. Angenommen, $\mathfrak{H}$ sei ein aus Ersetzungen (und natürlich Identitäten) elementar zusammengesetzter definierender Ausdruck für $Vk\, XYZ$. In $\mathfrak{H}$ kommen „X", „Y", „Z" vollfrei und alle sonstigen Zeichenreihenvariablen quantifiziert vor. $\mathfrak{H}'$ entstehe aus $\mathfrak{H}$ durch Überstreichung aller in Teilausdrücken der Form „$Ers\, Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$" oder „$Z_1 = Z_2$" auftretenden Variablen. Bei Überstreichung nur der vollfreien gehe $\mathfrak{H}''$ aus $\mathfrak{H}$ hervor. Es gilt dann:

$Vk\, XYZ$ genau dann, wenn $\mathfrak{H}$;

$\mathfrak{H}$ genau dann, wenn $\mathfrak{H}'$ (wegen [β] und [δ]);

---

[1]) Mit Hilfe des Begriffes „gleich lang" (§ 5) läßt sich die Relation $Y = \overline{X}$ wie folgt elementar charakterisieren: X und Y sind gleich lang; stets wenn $X'a$ (a Atom) Anfang von X und bY' (b Atom) Endstück von Y ist, wobei X' und Y' die gleiche Länge haben, ist $a = b$.

[2]) Zu [δ]: Ändert man in unserer expliziten Definition bei Bedingung (2)

„$X_\mu Z_0 Q_\mu$" in „$Q_\mu Z_0 X_\mu$"

und

„$Y_\mu Z_{00} Q_\mu$" in „$Q_\mu Z_{00} Y_\mu$"

ab, so ist die Äquivalenz des abgeänderten Definiens mit dem alten leicht nachzuprüfen. Äquivalent ist ferner

$$X_1 = Y_1 \quad \text{mit} \quad \overline{X}_1 = \overline{Y}_1 \quad \text{(wegen } [\beta]),$$

$$X_{\mu+1} = Q_\mu Z_0 X_\mu \quad \text{mit} \quad \overline{X}_{\mu+1} = \overline{X}_\mu \overline{Z}_0 \overline{Q}_\mu \quad \text{(wegen } [\gamma]),$$

usw. Nach dieser zweiten Umformung sind sämtliche in (1), (2), (3) auftretenden Zeichenreihenvariablen überstrichen. Läßt man die Überstreichungen der gebundenen wieder fort — auch das ist eine äquivalente Umformung —, so steht das Definiens von $Ers\, \overline{Z}_1 \overline{Z}_0 \overline{Z}_{00} \overline{Z}_2$ da.

$\mathfrak{H}'$ genau dann, wenn $\mathfrak{H}''$ (denn bei den gebundenen Variablen können wir die Überstreichungen wieder weglassen: „Für jedes Z: $\mathfrak{H}_0(\overline{Z})$" ist äquivalent mit „Für jedes Z: $\mathfrak{H}_0(Z)$"[1]), analog für Partikularisationen);

$\mathfrak{H}''$ genau dann, wenn $Vk\,\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ (nach Definition von $\mathfrak{H}$);

$Vk\,\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ genau dann, wenn $\overline{Vk}\,XYZ$ (wegen $[\gamma]$ und $[\alpha]$).

Demnach wäre

$$XY = YX$$

allgemeingültig, und das ist ja falsch.

Auch Sub ist nicht explizit elementar durch Ers definierbar, denn sonst wäre es (nach § 3) Vk ebenfalls.

Trotz dieses negativen Resultats gibt es einen gewissen Ersatz. Sind

$$\left.\begin{array}{l} c_1 \text{ und } c_2 \text{ Atome und} \\ c_1,\ c_2,\ C_1,\ C_2 \text{ vier verschiedene Zeichenreihen, für die} \\ Ers\; C_i c_1 \,\text{?}\, c_2 \text{ und } Ers\; C_i c_2 \,\text{?}\, c_1 \quad (i = 1, 2), \end{array}\right\} \tag{1}$$

so ist offenbar entweder

$$C_1 = c_1 c_2 \quad \text{und} \quad C_2 = c_2 c_1 \tag{2}$$

oder

$$C_1 = c_2 c_1 \quad \text{und} \quad C_2 = c_1 c_2, \tag{3}$$

und in beiden Fällen trifft (1) auch wirklich zu. Daß

$$\text{ein } Y' \text{ mit } Ers\; C_1 c_2 Y' Y \text{ existiert,} \tag{4}$$

ist im Falle (2) mit $Y = c_1 \ldots$, im Falle (3) mit $Y = \ldots c_1$ äquivalent. Wir führen eine siebenstellige Hilfsrelation ein:

$Vk^*\, c_1 c_2 C_1 C_2 XYZ \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Falls nicht (4), so gibt es ein M, U_1, U_2 derart, daß
M längeres c_1-Molekül als in Y,
$Ers\; C_1 c_1 M U_1$ und — wenn $M \neq c_1$ — $U_1 \neq C_1$,[2])
$Ers\; U_1 c_2 Y U_2$ und — wenn $Y \neq c_2$ — $U_2 \neq U_1$,[3])
$Ers\; U_2 M X Z$ und — wenn $X \neq M$ — $Z \neq U_2$;[4])
falls hingegen (4), so gibt es ein N, V_1, V_2 derart, daß
N längeres c_2-Molekül als in Y,
$Ers\; C_2 c_2 N V_1$ und — wenn $N \neq c_2$ — $V_1 \neq C_2$,
$Ers\; V_1 c_1 Y V_2$ und — wenn $Y \neq c_1$ — $V_2 \neq V_1$,
$Ers\; V_2 N X Z$ und — wenn $X \neq N$ — $Z \neq V_2$.

Man überzeugt sich leicht, daß bei festgehaltenem c_1, c_2, C_1, C_2 entweder — im Falle (2) nämlich —

für jedes X, Y, Z : $Vk^*\, c_1 c_2 C_1 C_2 XYZ$ *genau dann, wenn* $Vk\, XYZ$,

oder — im Falle (3) nämlich —

für jedes X, Y, Z : $Vk^*\, c_1 c_2 C_1 C_2 XYZ$ *genau dann, wenn* $\overline{Vk}\, XYZ$.

---

[1]) Natürlich soll hierbei $\mathfrak{H}_0(Z)$ ein elementarer struktureller Ausdruck sein, in dem „Z" vollfrei vorkommt und aus dem, wenn man „$\overline{Z}$" für „Z" einsetzt, $\mathfrak{H}_0(\overline{Z})$ entsteht.

[2]) Im Falle (2): $U_1 = M c_2$, im Falle (3): $U_1 = c_2 M$.

[3]) Im Falle (2): $U_2 = MY$, im Falle (3): $U_2 = YM$.

[4]) Im Falle (2): $Z = XY$, im Falle (3): $Z = YX$.

Hilfssatz. *Ist $\mathfrak{H}$ irgendein abgeschlossener elementarer Vk-Ausdruck*[1]) *und ist $\overline{\mathfrak{H}}$ derjenige Ausdruck, der entsteht, wenn man in $\mathfrak{H}$ überall „Vk" durch „$\overline{Vk}$" ersetzt, so ist $\mathfrak{H}$ mit $\overline{\mathfrak{H}}$ äquivalent.*

In $\mathfrak{H}$ sowohl sämtliche Zeichenreihenvariablen, die in Teilausdrücken der Form „$Vk\,XYZ$" oder „$X = Y$" stehen, als auch überall „Vk" zu überstreichen, ist nämlich nach $[\gamma]$ und $[\beta]$ eine äquivalente Umformung. Die Überstreichungen der (ja ausnahmslos gebundenen!) Variablen können aber äquivalent wieder gelöscht werden.

Satz 2. *Zu jedem abgeschlossenen elementaren Vk-Ausdruck $\mathfrak{H}$ läßt sich ein äquivalenter elementarer Ers-Ausdruck angeben.*

Beweis. Aus $\mathfrak{H}$ werde $\mathfrak{H}^*$, wenn man „$Vk^*\,c_1 c_2 C_1 C_2$" für „Vk" einsetzt. Bei festem c_1, c_2, C_1, C_2 ist $\mathfrak{H}^*$ unter der Voraussetzung (2) mit $\mathfrak{H}$ äquivalent und unter der Voraussetzung (3) mit $\overline{\mathfrak{H}}$ — also nach dem Hilfssatz ebenfalls mit $\mathfrak{H}$. Folglich ist die elementare *Ers*-Aussage

Für jedes die Bedingungen (1) *erfüllende c_1, c_2, C_1, C_2 gilt $\mathfrak{H}^*$*
mit $\mathfrak{H}$ äquivalent.

4. Falls es nur das eine Atom a gibt, definieren wir zunächst *Sub* durch *Ers* und erst durch *Sub* die Verkettung.

$$Sub\,A_1 A_0 A_{00} A_2 \underset{\mathrm{Df}}{=} A_0 \neq \text{♀} \text{ und } \begin{cases} \text{wenn } A_0 \text{ kürzer}^{2)} \text{ bzw. länger}^{2)} \text{ als } A_{00}, \\ \quad \text{so ist } A_{\cancel{00}2} \text{ längstes bzw. kürzestes } A \\ \quad \text{mit } Ers\,A_1 A_0 A_{00} A; \\ \text{wenn } A_0 = A_{00}, \text{ so } A_1 = A_2. \end{cases}$$

Als Korollar stellen wir fest, daß *Ers* bei Existenz nur eines Atoms nicht explizit elementar durch *Vk* definiert werden kann. Sonst wäre nämlich, wie wir sehen, auch *Sub* elementar durch *Vk* ausdrückbar — was in § 1 (**5.**) widerlegt wurde.

§ 5. Drei weitere strukturelle Redeweisen

1. Zwei verschiedene Atome a und b seien fest gewählt.

Z_1 ist *gleich lang* wie Z_2 (1) | a kommt in Z_1 *gleich oft* vor wie in Z_2 (2′)

genau dann, wenn es Zeichenreihen Z_1^*, Z_2^* und ein a-Molekül A derart gibt, daß für $i = 1$ und $i = 2$ gilt:

$$Z_i^* = bZ_i\,{}^{b}/_{a}\,b\ldots; \qquad | \qquad Z_i^* = bZ_i\,{}^{b}/_{\text{♀}}\,b\ldots;$$

$$Z_i^* = \ldots bAb;$$

zu jedem das Atom b nicht enthaltenden X und Y mit $Z_i^* = \ldots bXbYb\ldots$ existieren ein X', ein X'' und ein von a verschiedenes Atom x derart, daß $X = X'xX''$ und

$$Y = X'aX''. \qquad | \qquad Y = X'X''.$$

---

[1]) Das heißt ein nur aus Verkettungen elementar aufgebauter Ausdruck ohne freie Variable.

[2]) „A' in A" hatten wir durch *Ers* ausgedrückt.

a kommt in X *gleich oft* vor wie b in Y (2)

genau dann, wenn a in X gleich oft vorkommt wie in $(Y\, {}^{a}/_{\underset{|}{\circ}})\, {}^{b}/_{a}$.

Z_1 geht durch *Umstellung* seiner Atome in Z_2 über (3)

genau dann, wenn jedes Atom in Z_1 gleich oft vorkommt wie in Z_2.

2. Man kann (3) auch direkter elementar definieren. Gibt es nur die zwei Atome a, b, so kann

$$Z_1\, {}^{b}/_{\underset{|}{\circ}} = Z_2\, {}^{b}/_{\underset{|}{\circ}} \quad \text{und} \quad Z_1\, {}^{a}/_{\underset{|}{\circ}} = Z_2\, {}^{a}/_{\underset{|}{\circ}}$$

als Definiens dienen. Sind mehr Atome vorhanden, so wählt man drei verschiedene: a, b, c. In $Z_1\, {}^{b}/_{ab}\, {}^{c}/_{abb}$ schiebt man vor jede nicht von b besetzte Stelle ein c-Molekül ein, und zwar der Reihe nach $c, cc, ccc, \ldots$ (Im Beispiel $Z_1 = accdb$ wird also erst

$$aabbabbdab$$

und dann

$$caccabbcccabbccccdcccccab$$

gebildet.) Das Umstellen der „Moleküle“ ca, $ccabb$, $cccabb$ usw. der zuletzt gebildeten Zeichenreihe Z_1^* zu neuen Zeichenreihen Z_2^* läßt sich leicht elementar charakterisieren. Die Z_2 mit $Z_2 = ((Z_2^*\, {}^{c}/_{\underset{|}{\circ}})\, {}^{abb}/_{c})\, {}^{ab}/_{b}$ sind genau diejenigen, auf die (3) zutrifft.

Wir drücken noch (2′) durch (3) aus:

Es gibt ein a-freies Z_1', ein a-freies Z_2' und ein a-Molekül A derart, daß man Z_1 in AZ_1' und Z_2 in AZ_2' umstellen kann.

3. Gelegentlich wird eine Behauptung über Zeichenreihen Z „induktiv über die Häufigkeit des Vorkommens des Atoms a in Z“ bewiesen[1]):

$\mathfrak{H}(Z)$ ist wahr für jedes Z sicher dann, wenn man für mindestens ein Atom a bei beliebigem Z zeigen kann: *Wenn $\mathfrak{H}(Z')$ für jedes Z', in dem a seltener vorkommt als in Z', so $\mathfrak{H}(Z)$.*

Gebräuchlich sind Beweise durch „vollständige Induktion über die Länge von Z“[2]):

$\mathfrak{H}(Z)$ ist wahr für jedes Z sicher dann, wenn man bei beliebigem Z zeigen kann: *Wenn $\mathfrak{H}(Z')$ für jedes Z', das kürzer ist als Z, so $\mathfrak{H}(Z)$.*

Diese beiden Schlußregeln (bzw. Schemata allgemeingültiger Implikationen) haben wir der elementaren Semiotik eingegliedert.

§ 6. Zur Syntax des Aussagen- und des Prädikatenkalküls

1. Induktive Definitionen der Ausdrücke eines Kalküls sind allgemein verbreitet. Gebräuchlich ist es, sie als Elemente des Durchschnitts aller der Mengen zu charakterisieren, die gewisse einfachste Ausdrücke (in Aussagenkalkülen: die Aussagenvariablen) enthalten und in bezug auf gewisse Zusammensetzungsmöglichkeiten abgeschlossen sind. Manchmal führt man auch zunächst „Ausdrücke

---

[1]) Anwendungsbeispiel: § 6, **1.** (am Schluß).

[2]) Anwendungsbeispiel: § 6, **3.** (am Schluß).

n-ter Stufe" (für jede natürliche Zahl n) und erst dann die Ausdrücke selbst ein. In den ersten beiden Abschnitten dieses Paragraphen geht es um *explizite* Ausdrucksbestimmungen für den (klassischen) Aussagenkalkül.

Zugrunde legen wir eine freie Halbgruppe mit den sieben verschiedenen Atomen $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, (,) und mindestens einem sonstigen.

Alle Atome, die von den eben genannten verschieden sind, nennen wir *Aussagenvariablen.* Über deren Anzahl machen wir keine weiteren Vorschriften. Zur Abkürzung benutzen wir das Symbol „$\circ$" als eine (natürlich prinzipiell entbehrliche) „Variable für die zweistelligen Funktoren $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$", außerdem „p", „q", „r" als Zeichenreihenvariablen, deren Variabilitätsbereich auf die Menge der Aussagenvariablen eingeschränkt ist.

$\mathfrak{Ausd}_1\, Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt eine Folge $\{X_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$ mit $X_m = Z$, so daß für $1 \leqq \mu \leqq m$ gilt:
X_μ ist Aussagenvariable
oder es gibt ein μ_0 mit $1 \leqq \mu_0 < \mu$ und $X_\mu = \sim X_{\mu_0}$
oder es gibt ein μ_1, ein μ_2 und ein $\circ$ mit
$1 \leqq \mu_1 < \mu$, $1 \leqq \mu_2 < \mu$ und $X_\mu = (X_{\mu_1} \circ X_{\mu_2})$.

Statt „$1 \leqq \mu_i < \mu$" kann man hierin offenbar auch „$1 \leqq \mu_i \leqq m$" schreiben, ferner „in der Z vorkommt" statt „mit $X_m = Z$". Der so abgeänderten Definition nachgebildet ist die folgende elementare:

$Ausd_1^*\,[Z, X^*] \underset{\mathrm{Df}}{=}$ [a] ( ) nicht in Z.
[b] $X^* = (\,)\ldots(\,)$.
[c] $(\,)Z(\,)$ in X^*.
[d] Für jedes X: Wenn $(\,)X(\,)$ in X^* und ( ) nicht in X, so ist X Aussagenvariable oder es gibt ein U, ein V und ein $\circ$ mit
$X = \sim U$ oder $X = (U \circ V)$,
$(\,)U(\,)$ in X^*, $(\,)V(\,)$ in X^*.

$Ausd_1\, Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt ein X^* mit $Ausd_1^*\,[Z, X^*]$.

Hier einige unmittelbare Folgerungen:

[α] *$Ausd_1\, p$,*
denn $Ausd_1^*\,[p, (\,)p(\,)]$.

[β] *$Ausd_1 Z$ genau dann, wenn $Ausd_1 \sim Z$.*
Wenn nämlich $Ausd_1^*\,[Z, X^*]$, so $Ausd_1^*\,[\sim Z, X^* \sim Z(\,)]$. Wenn andrerseits $Ausd_1^*\,[\sim Z, X^*]$, so auch $Ausd_1^*\,[Z, X^*]$.[1]

[γ] *Wenn $Ausd_1 Z_1$ und $Ausd_1 Z_2$, so $Ausd_1 (Z_1 \circ Z_2)$.*
Wenn nämlich $Ausd_1^*\,[Z_i, X_i^*]$ für $i = 1$ und $i = 2$, so $Ausd_1^*\,[(Z_1 \circ Z_2), X_1^*(Z_1 \circ Z_2)X_2^*]$.[1]

[δ] *Wenn $Ausd_1 Z$ und weder Z Aussagenvariable noch $Z = \sim \ldots$, so gibt es ein Z_1, ein Z_2 und ein $\circ$ mit $Ausd_1 Z_1$, $Ausd_1 Z_2$, $Z = (Z_1 \circ Z_2)$.*
Unter der Voraussetzung $Ausd_1^*\,[Z, X^*]$ wird nämlich das fragliche Z_1, Z_2 und $\circ$ [als U, V, $\circ$] wegen [c] und [a] von [d] geliefert, und man sieht: $Ausd_1^*\,[Z_i, X^*]$.[1]

[1] Hier wirkt sich als bequem aus, daß wir statt „$X^* = \ldots (\,)Z(\,)$" nur [c] in die Definition aufnahmen.

Die Sätze [α], [β], [γ], [δ] gelten auch mit „$\mathfrak{Ausd}_1$" statt „$Ausd_1$". Sie könnten zur Charakterisierung der Ausdruckseigenschaft dienen; dazu werden wir jedoch statt ihrer andere verwenden.

Hilfssatz 1. *Wenn* $Ausd_1 Z'pZ''$ *und* $Ausd_1 H$, *so* $Ausd_1 Z'HZ''$.

Hilfssatz 2. *Wenn* $Ausd_1 Z' \sim pZ''$, *so* $Ausd_1 Z'pZ''$.

Hilfssatz 3. *Wenn* $Ausd_1 Z'(p \circ q)Z''$, *so* $Ausd_1 Z'pZ''$.

Hilfssatz 4. *Wenn* $Ausd_1 Z$ *und* Z *nicht Aussagenvariable, so gibt es ein* p, *ein* q *und ein* $\circ$ *derart, daß* $\sim p$ *in* Z *oder* $(p \circ q)$ *in* Z.

Alle vier Hilfssätze gewinnt man aus [α], [β], [γ], [δ] allein. Wir führen nur den (etwas weniger trivialen) Beweis für Hilfssatz 3 aus, und zwar durch Induktion über Z, nachdem wir $Z'(p \circ q)Z'' = Z$ gesetzt haben. Nach [δ] kommen zwei Fälle in Frage:

I. $Z' = \sim Z_0'$. Dann schließt man von $Ausd_1 Z$ über $Ausd_1 Z_0'(p \circ q)Z''$ [β] und $Ausd_1 Z_0' pZ''$ [Induktionsvoraussetzung] auf $Ausd_1 Z'pZ''$ [β].

II. $Z = (Z_1 \circ Z_2)$, $Ausd_1 Z_i$. Dann gibt es diese drei Möglichkeiten:

$$\begin{aligned}&(Z_1 = Z'(p \circ q)\ldots;\\ &Z'(p = (Z_1 \text{ und } q)Z'' = Z_2);\\ &Z_2) = \ldots (p \circ q)Z''.\end{aligned}$$

Wäre bei der ersten Möglichkeit $Z' = \text{♀}$, so hätte man $Z_1 = p \circ q) \ldots$, im Widerspruch zu [δ]. Also ist $Z' = (\ldots$, etwa $Z' = (Z_0'$ und damit $Z_1 = Z_0'(p \circ q) \ldots$, so daß man die Induktionsvoraussetzung auf Z_1 anwenden (und danach [γ] ausnutzen) kann. Entsprechend zieht man sie, bei der dritten Möglichkeit, für Z_2 heran. Kann auch die zweite Möglichkeit eintreten? Wenn ja, so müssen Z' und Z'' beide leer sein, denn für $Z' \neq \text{♀}$ hätte man $Z_1 = \ldots (p$, für $Z'' \neq \text{♀}$ hingegen $Z_2 = q) \ldots$ — was beides unmöglich ist.[1]) So bleibt nur: $Z_1 = p$ und $Z_2 = q$; hierfür geht die Behauptung in [α] über.

Wir knüpfen jetzt an das Beispiel aus der Einleitung (S. 180) an und definieren:

$\mathfrak{Ausd}_2 Z \underset{\text{Df}}{=}$ Es gibt eine Folge $\{Y_\lambda\}_{1 \leq \lambda \leq l}$ derart, daß

$Y_1 = Z$;

bei jedem λ mit $1 \leq \lambda \leq l-1$ existiert je ein $p, q, \circ, Y', Y''$ mit

$$Y_\lambda = Y' \sim pY'' \quad \text{oder} \quad Y_\lambda = Y'(p \circ q)\, Y'',$$
$$Y_{\lambda+1} = Y'pY'';$$

Y_l ist Aussagenvariable.

Nun elementar explizit:

$Ausd_2^*[Z, Y^*] \underset{\text{Df}}{=}$ [a] ( ) nicht in Z.

[b] $Y^* = (\,)Z(\,)\ldots$

[c] Es gibt ein r mit $Y^* = \ldots (\,) r (\,)$.

[d] Für jedes Y_{I}, Y_{II}: Wenn $(\,)\, Y_{\mathrm{I}}\, (\,)\, Y_{\mathrm{II}}\, (\,)$ in Y^* und ( ) nicht in Y_{I}, Y_{II}, dann existiert je ein $p, q, \circ, Y'$ und Y'' mit

$$Y_{\mathrm{I}} = Y' \sim pY'' \quad \text{oder} \quad Y_{\mathrm{I}} = Y'(p \circ q)\, Y'',$$
$$Y_{\mathrm{II}} = Y'pY''.$$

---

[1]) $Z_1 = \ldots (p$ widerlegt man so: Ist N ein $\sim$-Molekül, $Z_1 = NZ_1'(p$ und $Z_1' \neq \sim \ldots$, so lehrt [β], daß $Ausd_1 Z_1'(p$, und aus [δ] folgt $Z_1'(p = \ldots)$, also $p =)$!

$Ausd_2 Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt ein Y^* mit $Ausd_2^*[Z, Y^*]$.

Für $k = 2$ (und offensichtlich gleichfalls mit „$\mathfrak{Ausd}_2$" statt „$Ausd_k$") gelten nachstehende Sätze:

[I] *$Ausd_k p$.*

[II] *Wenn $Ausd_k Z'pZ''$, so $Ausd_k Z' \sim pZ''$ und $Ausd_k Z'(p \circ q)Z''$.*
Wenn nämlich $Ausd_2^*[Z'pZ'', Y^*]$, dann $Ausd_2^*[Z, ()ZY^*]$ sowohl für $Z = Z' \sim pZ''$ als auch für $Z = Z'(p \circ q)Z''$.

[III] *Wenn $Ausd_k Z$ und Z nicht Aussagenvariable, so gibt es ein p, q, $\circ$, Z', Z'' derart, daß*

$$Z = Z' \sim pZ'' \quad \textit{oder} \quad Z = Z'(p \circ q)Z'',$$
$$Ausd_k Z'pZ''.$$

Wenn nämlich $Ausd_2^*[Z, Y^{**}]$, so kommt ( ) in Y^{**} wegen [b] und [c] mindestens dreimal vor. Man darf demnach ansetzen: $Y^{**} = ()ZY^*$, $Y^* = ()Y()\ldots$, ( ) nicht in Y. Zeichenreihen p, q, $\circ$, Z', Z'' mit den verlangten Eigenschaften sind die Zeichenreihen p, q, $\circ$, Y', Y'', die man aus [d] für $Y_{\mathrm{I}} = Z$, $Y_{\mathrm{II}} = Y$ erhält; man findet: $Y = Z'pZ''$, $Ausd_2^*[Y, Y^*]$.

Aber auch für $k = 1$ treffen [I], [II], [III] zu, wie die schon bereitgestellten Hilfssätze 1 bis 4 erkennen lassen: [I] ist [α]. [II] ergibt sich aus [α], [β], [γ] und Hilfssatz 1. [III] resultiert aus 4,2 und 3. Die Äquivalenz unserer verschiedenen Ausdrucksbestimmungen gewährleistet der Satz:

Gelten [I] *bis* [III] *für $k = i$ und für $k = j$, so folgt:*
$Ausd_i Z$ genau dann, wenn $Ausd_j Z$.

Den Beweis führt man induktiv über die Länge von Z — gemäß § 5 (3.).

2. Das folgende nicht auf dem Trennzeichenverfahren beruhende explizite elementare Kriterium für die Ausdruckseigenschaft im Aussagenkalkül teilte mir K. SCHRÖTER mit.

Der Übersichtlichkeit halber führen wir zwei Hilfsbegriffe ein.

X ist *normal* $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ $X = (\ldots)$, und) gleich oft[1]) in X wie (.

X ist *ausgeglichen* $\underset{\mathrm{Df}}{=}$ In X kommen $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ zusammen[2]) gleich oft vor wie) und wie (.

Hilfssatz. *X sei normal, besitze aber keinen normalen echten Anfang. Dann kommt in jedem nicht-leeren echten Anfang X_0 von X das Atom (häufiger vor als).*

Beweis. Der Anfangsfall $X_0 =$ (ist klar. Wir schließen von X_0 auf $X_0 a$ [a Atom], wobei wir $X_0 a$ als echten Anfang von X voraussetzen. Für $a \neq$) kommt auch in $X_0 a$ das Zeichen (häufiger vor als), für $a =$ (sogar erst recht. Für $a =$) gäbe es, falls in X_0 das Atom (genau einmal häufiger aufträte als), gleich viele (wie), und wegen $X_0 a = (\ldots)$ wäre $X_0 a$ sogar normal — im Widerspruch zur Voraussetzung. Für $a =$) dürfen wir also annehmen, daß (mindestens zwei Male mehr in X_0 auftritt als); dann befindet sich aber in $X_0 a$ mindestens ein (mehr als).

[1]) Definition in § 5.

[2]) Das heißt: In $[[X\ {}^{\vee}/_{\wedge}]^{\rightarrow}/_{\wedge}]^{\leftrightarrow}/_{\wedge}$ kommt $\wedge$ gleich oft vor wie ...

$Ausd_3 Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ [A_1] Z beginnt mit einer Aussagenvariablen oder mit $\sim$ oder mit (.

[A_2] Auf (, $\sim$, $\circ$ folgt[1]) in Z stets[2]) entweder eine Aussagenvariable oder $\sim$ oder (.

[A_3] Auf) und auf jede Aussagenvariable folgt in Z stets entweder ein $\circ$ oder (oder gar nichts mehr.[3])

[B] Z ist ausgeglichen.

[C] Jedes mit (beginnende Endstück von Z besitzt einen Anfang, der sowohl *der kürzeste normale* als auch *ausgeglichen* ist.

Die charakteristischen Bedingungen [I], [II], [III] *gelten auch für* $k = 3$. Als Beispiel beweisen wir [III], und zwar zunächst:

Wenn $Ausd_3 Z$, *aber* Z *nicht Aussagenvariable, so existiert ein* p, q, $\circ$ *derart, daß* $\sim p$ *oder* $(p \circ q)$ *in* Z *vorkommt.*

Erster Fall. Ist (nicht in Z, so wegen [B] auch weder) noch $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Also besteht Z höchstens aus lauter $\sim$ und Aussagenvariablen. Wegen [A_1] ist $Z \neq$ ♀, besitzt also ein letztes Atom, das jedoch wegen [A_2] nicht $\sim$ sein kann. Sei etwa $Z = Z'p$. Nach Voraussetzung ist $Z' \neq$ ♀, und zwar endet Z' auf $\sim$, weil es wegen [A_3] nicht auf eine Aussagenvariable enden kann. Somit ist $Z = \ldots \sim p$.

Zweiter Fall. In Z kommt (vor. Wegen [C] gibt es einen Abschnitt Z_0, der mit dem letzten (beginnt, auf das erste rechts von diesem (stehende) endet und genau ein Zeichen $\circ$ enthält. Sei $Z_0 = (Z_0' \circ Z_0'')$; in Z_0' und Z_0'' kommen (,), $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ nicht vor. Wegen [A_2] gilt: $Z_0' \neq$ ♀, $Z_0' \neq \ldots \sim$, $Z_0'' \neq$ ♀, $Z_0'' \neq \ldots \sim$. Also enden Z_0' und Z_0'' auf Aussagenvariablen, etwa auf p bzw. q; wir setzen $Z_0 = (Y'p \circ Y''q)$. Wegen [A_3] können Y' und Y'' nicht auf eine Aussagenvariable enden. Also ist $Y' = \ldots \sim$ oder $Y'' = \ldots \sim$ oder aber sowohl $Y' =$ ♀ als auch $Y'' =$ ♀. In Z kommt folglich $\sim p$ oder $\sim q$ oder $(p \circ q)$ vor.

Weiter zeigt man:

Wenn $Ausd_3 Z' \sim pZ''$ *oder* $Ausd_3 Z'(p \circ q)Z''$, *so* $Ausd_3 Z'pZ''$.

Etwas Mühe bereitet nur die Bestätigung von [C] für die zweite Hälfte dieser Implikation. Wir setzen $Z'(p \circ q)Z'' = W$ sowie $Z'pZ'' = Z$ und nehmen an: $Ausd_3\, W$, $Z = \ldots Y$, $Y = (\ldots$. Zu finden ist eine ausgeglichene Zeichenreihe Y_0, die kürzester normaler Anfang von Y ist.

Fall 1: Y liegt noch ganz in Z''. Dann ist Y Endstück auch von W, und das verlangte Y_0 existiert nach Voraussetzung.

Fall 2: $Y = (\ldots pZ''$, etwa $Y = Y'pZ''$. Da $Y'(p \circ q)Z''$ Endstück von W ist, gibt es eine Zeichenreihe V_0, die kürzester normaler Anfang von Y' ist [*].

Unterfall a: V_0 liegt noch in Y'. Dann leistet V_0 als Y_0 das Verlangte.

Unterfall b: $V_0 = Y'(p \circ q)Y''$. Wir setzen $Y'pY'' = Y_0$ und beweisen die geforderten Eigenschaften von Y_0.

---

[1]) Unmittelbar, d. h. als nächstes Atom.

[2]) Das heißt „an allen Stellen von Z“.

[3]) [A_3] beispielsweise lautet ausführlich:
Für jedes X und Y: Wenn $Z = \ldots XY$ und $X = p$ oder $X = $), so $Y =$ ♀ oder $Y = $) $\ldots$ oder es gibt ein $\circ$ mit $Y = \circ \ldots$

α. Die Atome) und (treten gleich häufig in V_0 auf, also offenbar in Y_0 ebenfalls. $Y' = (\ldots$ war Voraussetzung bei Fall 2. Dafür, daß auch $Y'' = \ldots$), ist wegen der Normalität von V_0 hinreichend: $Y'' \neq$ ⚲. Wäre $Y'' =$ ⚲, so stünden infolge der Normalität von $Y'(p \circ q)$ auch in Y' gleich viele) und (. Das ist aber nach [*] und dem Hilfssatz unmöglich. Y_0 ist normal.

β. Angenommen, ein echter Anfang Y_{00} von Y_0 wäre normal. Weil wegen [*] kein Anfang von Y' normal ist, müßte etwa $Y_{00} = Y' p Y_0''$ und dabei Y_0'' echter Anfang von Y'' sein. Dann wäre natürlich auch $Y'(p \circ q) Y_0''$ normal — ein Widerspruch zu [*].

γ. Mit $Y'(p \circ q) Y''$ ist auch $Y' p Y''$ ausgeglichen.

Zusammenfassend stellen wir fest:

$Ausd_i Z$ genau dann, wenn $Ausd_j Z$ $[i, j = 1, 2, 3]$.

Satz und Beweis gehören zur elementaren Semiotik. — Überdies gilt:

$\mathfrak{Ausd}_i Z$ genau dann, wenn $Ausd_j Z$ $[i = 1, 2;\ j = 1, 2, 3]$.

3. Nach dem bekannten von Łukasiewicz erfundenen Verfahren kann man Aussagenkalküle aus einem „Satz" Aussagenvariablen und einem „Satz" Funktoren ohne Benutzung weiterer Grundzeichen — also ohne Klammern — aufbauen. Gebräuchlich[1]) ist es dabei, unendlich viele Atome als „feste Zeichen" zugrundezulegen, nämlich etwa alle Zeichen p_j und gewisse Zeichen F_i^k, bei denen allen die Indizes i, j, k natürliche Zahlen bezeichnen.

Wir übernehmen in diesem Abschnitt die Beschränkung auf abzählbar viele Variable und brauchen dann zum elementaren Aufbau nur die fünf „festen Zeichen" ⚲, f, p, o, ı; wir fordern, daß f, p, o, ı verschiedene Atome sind, und zwar die einzigen. Die (unteren) Unterscheidungsindizes und die (oberen) Stellenindizes lassen wir durch o-Moleküle bzw. ı-Moleküle vertreten. Beispielsweise schreiben wir ııı$f$oo$p$ooooo$p$$p$oo statt $F_2^3 p_5 p_0 p_2$.[2]) (Die neue Zeichenreihe besteht aus 16 Atomen, die alte aus 4). Z heiße *Aussagenvariable* genau dann, wenn es ein o-Molekül N mit $Z = pN$ gibt. Und Z nennen wir einen *Funktor* genau dann, wenn es ein o-Molekül N und ein ı-Molekül E mit $Z = EfN$ gibt. Je nach dem zu konstruierenden Kalkül sind alsdann durch zusätzliche Bedingungen (über die E und N der letzten Definition) die „eingeführten Funktoren" als spezielle Funktoren zu definieren. Natürlich kann man, wenn man will, alle Funktoren als eingeführte gelten lassen. Schließlich soll Z genau dann ein *einfacher Ausdruck* heißen, wenn es einen eingeführten Funktor F und eine weder f noch ı enthaltende, nicht mit o beginnende Zeichenreihe Z' mit $Z = FZ'$ gibt, wobei p ebenso oft in Z' vorkommt wie in ı in F.[3])

$ausdr_1 Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ Es gibt eine Folge $\{Z_\mu\}_{1 \leqq \mu \leqq m}$, für die gilt:
Z_1 ist Aussagenvariable;
$Z_m = Z$;
bei jedem μ mit $1 \leqq \mu \leqq m - 1$ gibt es Zeichenreihen Z', Z'', eine Aussagenvariable V und einen einfachen Ausdruck H derart, daß $Z'' \neq \mathrm{o} \ldots$, $Z_\mu = Z' V Z''$ und $Z_{\mu+1} = Z' H Z''$.

---

1) Siehe z. B. [19], S. 8/9.

2) Vgl. die Beispiele für Ausdrücke des Prädikatenkalküls bei Rosenbloom [16], S. 107, ex. 1; schrieben wir jedoch in genauer Analogie zu dort fııoo statt F_2^3, so würde die Definition von *$ausdr_2$* unbrauchbar.

3) — wobei also $F\,{}^{f}/_{⚲}\,{}^{0}/_{⚲} = Z'\,{}^{p}/_{1}\,{}^{0}/_{⚲}$ ist.

Es ist nicht schwer, diese Definition nach dem Verfahren des Hintereinanderreihens (mit geeignetem Trennzeichen) in eine ihr äquivalente elementare Definition umzuwandeln.

Zu Anfang der dreißiger Jahre gaben JAŚKOWSKI[1]) und MENGER [9], unabhängig voneinander, eine elementare explizite Ausdrucksbestimmung für den C-N-Kalkül an, die ŁUKASIEWICZ für den E-Kalkül [7] nur etwas zu modifizieren brauchte. Dieses Kriterium wurde 1943 von SCHRÖTER[2]) verallgemeinert und in der allgemeinen Form 1947 von GERNETH [5] noch einmal gefunden. Wir stimmen die JAŚKOWSKI-SCHRÖTERsche Ausdrucksbestimmung, die sich auf Atome F_i^k und p_j bezieht, auf unseren oben begonnenen Aufbau ab. Ehe wir die Definition von $ausdr_2$ endgültig formulieren, geben wir die fünf zusammen für Ausdrücke Z charakteristischen Eigenschaften in Stichworten an:

1a) Einem nach links nicht weiter ausdehnbaren nicht-leeren o-Molekül in Z geht stets entweder f oder p voran.

1b) Auf ein nach rechts nicht weiter ausdehnbares nicht-leeres ι-Molekül in Z folgt stets f.

1c) Ein weder nach links noch nach rechts weiter ausdehnbarer Funktor in Z ist stets eingeführter Funktor.

2) In jedem echten Anfang[3]) von Z:
Anzahl der f + Anzahl der $p \leqq$ Anzahl der ι.

3) In Z selbst:
Anzahl der f + Anzahl der $p = 1 +$ Anzahl der ι.

$ausdr_2\, Z \underset{\mathrm{Df}}{=}$ (1) Für jedes Z', Z'', F:

(a) Wenn $Z = Z'\mathrm{o}\ldots$, so $Z' = \ldots f$ oder $Z' = \ldots p$ oder $Z' = \ldots \mathrm{o}$.

(b) Wenn $Z = \ldots \iota Z''$, so $Z'' = f\ldots$ oder $Z'' = \iota \ldots$.

(c) Wenn $Z = Z'FZ''$ und F ist Funktor und $Z' \neq \ldots \iota$ und $Z'' \neq \mathrm{o}\ldots$, so ist F eingeführter Funktor.

(2) Für jeden echten Anfang X von Z:

$$X\, {}^{f}\!/_{1}\, {}^{p}\!/_{1}\, {}^{0}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{1}\!/_{\underset{|}{\circ}} \text{ in } X\, {}^{f}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{p}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{0}\!/_{\underset{|}{\circ}}.^{4)}$$

(3)
$$Z\, {}^{f}\!/_{1}\, {}^{p}\!/_{1}\, {}^{0}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{1}\!/_{\underset{|}{\circ}} = \iota Z\, {}^{f}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{p}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{0}\!/_{\underset{|}{\circ}}.$$

Da in [5] und in dem Lehrbuch [16], S. 154—156, der Äquivalenzbeweis ausgeführt vorliegt, dürfen wir uns, was unsere Variante hier betrifft, mit der bloßen Aufzählung der für $i = 1, 2$ gültigen je vier Hilfssätze begnügen, aus denen sich die Äquivalenz der beiden Definitionen ergibt:

---

1) Siehe [7], S. 149.

2) [19] S. 10.

3) [7] und [19] haben statt 2) eine entsprechende Forderung für die Endstücken von Z.

4) Offensichtlich gilt: $X\, {}^{f}\!/_{1}\, {}^{p}\!/_{1}\, {}^{0}\!/_{\underset{|}{\circ}}\, {}^{1}\!/_{\underset{|}{\circ}} = [[[X\, {}^{0}\!/_{\underset{|}{\circ}}]\, {}^{1}\!/_{\underset{|}{\circ}}]\, {}^{f}\!/_{1}]\, {}^{p}\!/_{1}$, usw.

I. *Wenn V Aussagenvariable, so* $ausdr_i V$.

II. *Wenn* $ausdr_i Z' V Z''$ *und V Aussagenvariable und* $Z'' \neq \circ\ldots$ *und H einfacher Ausdruck, so* $ausdr_i Z' H Z''$.

III. *Wenn* $ausdr_i Z' H Z''$ *und* $Z' \neq \ldots\imath$ *und H einfacher Ausdruck und V Aussagenvariable, so* $ausdr_i Z' V Z''$.

IV. *Wenn* $ausdr_i Z$ *und Z nicht Aussagenvariable, so gibt es* Z', Z'', H *derart, daß* $Z' \neq \ldots\imath$ *und H einfacher Ausdruck und* $Z = Z' H Z''$.

Bei dem Äquivalenzbeweis versagt die Induktion über die Länge, denn eine Aussagenvariable kann ja länger sein als ein einfacher Ausdruck; statt dessen benutzt man Induktion über die Anzahl der Atome *f*, wie sie in § 5 (**3.**) beschrieben wurde.

4. Wir wenden uns wieder den Ausdrucksmitteln zu, die wir in Abschnitt **1.** und **2.** untersuchten. Über die Definition der Ableitbarkeit aus einem Axiomensystem genüge die Bemerkung, daß man die endlich vielen Zwischenergebnisse des Ableitens, die ja alle Ausdrücke sind und daher ( ) nicht enthalten, mit dem Trennzeichen ( ) zu einer leicht elementar beschreibbaren Zeichenreihe Z^* aufreihen kann.[1]) Die X, für die $()X()$ in Z^*, aber ( ) nicht in X, sind Axiome oder hängen durch *Schlußregeln* mit „früheren“ X zusammen. Zur Syntax des Aussagenkalküls gehört neben der *Abtrennungs-* die *Einsetzungsregel*, die in einer allgemeinen Form davon spricht, daß in einem Ausdruck H gleichzeitig für alle Aussagenvariablen Ausdrücke eingesetzt werden. Das ist simultane Substitution in einer Vielfachheit, die von H abhängt. Man erinnert sich, daß in einem Ausdruck niemals zwei Aussagenvariablen direkt nebeneinander stehen (**2.**, Definition von $Ausd_3$, $[A_3]$), und wendet einen Kunstgriff an, durch den vermieden wird, daß im Laufe des Einsetzens in einem „schon fertigen Teilstück“ nochmals für eine Aussagenvariable etwas anderes eingesetzt wird:

In H werden nach und nach alle Aussagenvariablen „verdoppelt“; in der so entstandenen Zeichenreihe H' wird eine „verdoppelte“ Aussagenvariable nach der andern jeweils an allen Stellen durch ein und denselben Ausdruck ersetzt — bis eine Zeichenreihe H'' entstanden ist, die keine Aussagenvariablen mehr doppelt enthält. Mit dem Trennzeichen ( ) kann man in einem Z^* die Schritte von H nach H' „aufspeichern“, in einem Z^{**} den Übergang von H' zu H''. Für je zwei benachbarte „Glieder“ Z', Z'' aus Z^* beispielsweise legt man fest: Es gibt ein p derart, daß pp nicht in Z' und $Sub\, Z' p\, pp\, Z''$.

5. In Prädikatenkalkülen werden einerseits die üblichen Definitionen der durch die Quantifikation bedingten Redewendungen — kommt *gebunden* bzw. *frei* bzw. *vollfrei* vor, *Wirkungsbereich, abgeschlossen* etc. — und andererseits die auf ihnen fußenden *Schlußregeln* von vornherein elementar formuliert.[2])

[1]) In einem semantisch so einfachen Kalkül wie z. B. einem endlichwertigen Aussagenkalkül kann man auch die Allgemeingültigkeitsdefinition elementar fassen. Die Rolle der *Wahrheitswerte* übernehmen etwa Zeichenreihen $(\wedge)$, $(\wedge\wedge)$, $(\wedge\wedge\wedge)$, ... Der Funktionsbegriff wird umgangen, an Stelle der *Belegungen* der auftretenden Aussagenvariablen mit Wahrheitswerten verwendet man simultane Substitutionen. Die schrittweise Berechnung des *Wertes* eines Ausdrucks bei einer Belegung wird nachgebildet und in einer Zeichenreihe etwa mit dem Trennzeichen () zusammengerafft. — Es lohnt sich nicht, die ziemlich umständliche elementare Allgemeingültigkeitsdefinition auch nur für den klassischen Aussagenkalkül in extenso mitzuteilen.

[2]) Siehe z. B. [20], S. 63 bzw. 68.

Eine Bemerkung zur Bildung der einfachsten, der *prädikativen Ausdrücke*: Rosenbloom möchte „avoid an alphabet of infinitely many signs"[1]) und kommt mit 8 fixierten Atomen aus[2]); so legt er sich auf je $\aleph_0$ Prädikaten- und Individuenvariablen (die nun keine Atome mehr sind) fest. Da aber „die Verwendung überabzählbar unendlich vieler Variablen gerade in Formalismen, die als Teilgebiete der Logik interpretiert sind, von großer Bedeutung ist"[3]), wollen wir die Mächtigkeit der Menge der Individuen- und Prädikatenvariablen wenigstens ganz offenhalten, z. B. so:

An Atomen sollen diese:

$$A,\ a,\ \iota,\ \sim,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ (\ ,\ )$$

und mindestens ein weiteres vorhanden sein.

Z ist *Index* $\underset{\text{Df}}{=}$ Z ist Atom, aber gleich keinem jener zwölf.

Z ist *Individuenvariable* $\underset{\text{Df}}{=}$ Es gibt einen Index i mit $Z = ai$.

Z ist *Prädikatenvariable* $\underset{\text{Df}}{=}$ Es gibt ein nicht-leeres ι-Molekül E und einen Index i mit $Z = AEi$.

Z ist *prädikativer Ausdruck* $\underset{\text{Df}}{=}$ Es gibt ein Z' und eine Prädikatenvariable P derart, daß:

1. Für jedes x: Wenn x Atom und x in Z', so $x = a$ oder x ist Index.
2. $Z' = a \ldots$
3. Für jedes Z'' und i:
   Wenn $Z' = \ldots aZ''$, so gibt es einen Index j mit $Z'' = j \ldots$; wenn hingegen $Z' = \ldots iZ''$ und i Index, so ist $Z'' = a \ldots$ oder $Z'' = \circ$.
4. $Z = PZ'$.
5. In P kommt ι ebenso oft[4]) vor wie a in Z'.

Entsprechend kann man klammerfreie Aussagenkalküle auch bei völlig freibleibender Aussagenvariablen-Anzahl elementar konstituieren.

6. Die elementare explizite Definierbarkeit einer Eigenschaft $\mathfrak{H}$ von Zeichenreihen Z etwa der elementar formalisierten Peanoschen Arithmetik impliziert die *semantische Definierbarkeit* von $\mathfrak{H}$ in folgendem Sinne:

Ist jeder Zeichenreihe Z umkehrbar eindeutig die (ihrer Gödel-Zahl entsprechende) *Gödel-Ziffer* zugeordnet[5]), so gibt es eine Zeichenreihe H, die eindimensionaler arithmetischer Ausdruck (etwa mit der vollfreien Variablen a) ist und für die bei jedem Z gilt:

$\mathfrak{H}$ genau dann, wenn, falls Z^* Gödel-Ziffer von Z ist, $H\,{}^{a}/_{Z^*}$ wahr ist.

Will man (etwa in einer Zahlentheorie-Vorlesung) die Unvollständigkeit des Peanoschen Axiomensystems ad hoc beweisen, so kann man nach dem Muster unserer bisherigen Definitionen ohne Mühe eine elementare explizite Term-, dann Ausdrucks-, schließlich Ableitbarkeitsbestimmung angeben und aus ihr die weder beweisbare noch widerlegbare Gödelsche Aussage bilden.

---

1) [16] S. 91.
2) — indem er z. B. $a0$, $a00$, $a0000$ statt a_1, a_2, a_3 schreibt (S. 92); vgl. oben Abschnitt **3.**
3) [20] S. 42.
4) Definition in § 5.
5) *Ziffern* sind Zeichenreihen ON, in denen N ein $'$-Molekül ist.

Literatur

[1] P. BERNAYS, Besprechung von [17]. J. Symb. Log. **8** (1943), 77—79.
[2] R. CARNAP, Introduction to semantics, 3. Aufl. Cambridge (Mass.) 1948.
[3] L. CHWISTEK, Neue Grundlagen der Logik und Mathematik. Math. Z. **30** (1929), 704—724.
[4] ———, La méthode générale des sciences positives. Actual. sci. industr. **1014**, Paris 1946.
[5] D. C. GERNETH, Generalization of Menger's result on the structure of logical formulas. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 803—804.
[6] H. HERMES, Semiotik. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, N. F., Heft **5**, Leipzig 1938.
[7] J. ŁUKASIEWICZ, Der Äquivalenzkalkül. Collectanea logica **1** (1939), 145—169.
[8] A. A. Марков (A. A. MARKOV), Теория алгорифмов (Theorie der Algorithmen). Труды матем. инст. им. В. А. Стеклова (Arbeiten des Steklov-Instituts) **42**, Moskau-Leningrad 1954.
[9] K. MENGER, Eine elementare Bemerkung über die Struktur logischer Formeln. Ergebnisse eines math. Kolloquiums, Heft **3** (1932) (Gesammelte Mitteilungen des Jahres 1930/31), 22—23.
[10] J. R. MYHILL, A reduction in the number of primitive ideas of arithmetic. J. Symb. Log. **15** (1950), 130.
[11] M. PRESBURGER, Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. Sprawozdanie z I Kongresu Matematyków Krajów Słowiańskich (Comptes-rendus du I Congrès des Mathématiciens des Pays Slaves) Warszawa 1929, Warschau 1930, 92—101 und 395.
[12] W. V. QUINE, Definition of substitution. Bull. Amer. Math. Soc. **42** (1936), 561—569.
[13] ———, On derivability. J. Symb. Log. **2** (1937), 113—119.
[14] ———, Concatenation as a basis for arithmetic. J. Symb. Log. **11** (1946), 105—114.
[15] J. ROBINSON, Definability and decision problems in arithmetic. J. Symb. Log. **14** (1949), 98—114.
[16] P. C. ROSENBLOOM, The elements of mathematical logic. New York 1950.
[17] K. SCHRÖTER, Ein allgemeiner Kalkülbegriff. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, N. F., Heft **6**, Leipzig 1941.
[18] ———, Was ist eine mathematische Theorie? J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. **53** (1943), 69—82.
[19] ———, Axiomatisierung der Fregeschen Aussagenkalküle. Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, N. F., Heft **8**, Leipzig 1943.
[20] ———, Theorie des logischen Schließens. Diese Zeitschr. **1** (1955), 37—86.
[21] A. TARSKI, Einige Betrachtungen über die Begriffe der ω-Widerspruchsfreiheit und der ω-Vollständigkeit. Monatsh. Math. Phys. **40** (1933), 97—112.
[22] ———, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. Studia philosophica **1** (1935), 261—405.

(Eingegangen am 25. Juli 1956)