Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 4, S. 249—292 (1958)

EINBETTUNG ELEMENTARER THEORIEN IN ENDLICH AXIOMATISIERBARE[1])

Von KLAUS HÄRTIG in Berlin

Einleitung

KLEENE hat bewiesen[2]): Jede deduktiv abgeschlossene und rekursiv-aufzählbare Menge von Ausdrücken eines *elementaren* Kalküls mit endlich vielen Konstanten wird *endlich axiomatisierbar*, wenn man dessen Ausdrucksmittel durch Hinzunahme geeigneter — endlich vieler — Prädikatenkonstanten erweitert.

Wir werden von vornherein von einer elementaren formalisierten Theorie, d. h. einem Kalkül *mit Interpretation*, ausgehen, in dem eine Menge ax von *allgemeingültigen* Ausdrücken ausgezeichnet ist; dieses ax ist ein *Axiomensystem* (also allgemein-rekursiv) oder auch nur *rekursiv-aufzählbar*. In einer erweiterten elementaren Theorie werden wir ein *endliches* Axiomensystem konstruieren, aus dem man von den Ausdrücken der engeren Theorie einerseits nur dort allgemeingültige (*), andererseits mindestens ax ableiten kann. Hauptzweck der vorliegenden Arbeit ist eine sorgfältige Darstellung der beiden in ihr verwendeten „*Arithmetisierungsverfahren*". Um das für den Beweis Charakteristische anzudeuten, vergleichen wir ihn in einigen Punkten mit dem KLEENEschen Gedankengang[3]).

(1) Aus dem gegebenen Modell von ax bilden wir auf einfache Weise ein neues in einem Bereich von Folgen (gewissen endlichen oder transfiniten Typs), deren Glieder im wesentlichen Elemente des alten Individuenbereichs sind. Dieses Modell wird zu einer Interpretation des erweiterten Kalküls ergänzt. Die Allgemeingültigkeit von dessen Axiomen gewährleistet die (semantische) Widerspruchsfreiheit (*). KLEENE führt erst „nachträglich", in § 6, ein zahlentheoretisches Modell für seinen erweiterten und damit auch den engeren Kalkül ein.

(2) Wir kommen mit einer zusätzlichen Prädikatenkonstanten — nämlich einem Zeichen für die (dreistellige) *Folgenverknüpfungsrelation* — aus, während bei KLEENE die Anzahl der hinzuzunehmenden Zeichen von dem jeweiligen Kalkül abhängt.

[1]) Von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Humboldt-Universität zu Berlin als Habilitationsschrift angenommen. Über den ersten Teil der Arbeit hat der Verfasser in Dresden auf der Jahrestagung 1957 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung berichtet.

[2]) S. C. KLEENE, Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols. Mem. Amer. Math. Soc. 10 (1952), 27—68.

[3]) Wir können uns auf die dortigen §§ 1—6 beschränken und den *finiten* Widerspruchsfreiheitsbeweis (§§ 7—11) hier außer acht lassen.

(3) Bei KLEENES Arithmetisierung (im üblichen, eigentlichen Sinn des Wortes) werden jedem Ausdruck [1]) im allgemeinen unendlich viele natürliche Zahlen, die sogenannten H-Zahlen, zugeordnet — dabei übrigens einigen Grundzeichen je eine natürliche Zahl, anderen je zwei natürliche Zahlen. Ich habe als Grundgedanken die „Arithmetisierung" der Semantik der engeren Theorie im Rahmen der erweiterten besonders hervorgehoben. Den Zeichen, Termen und Ausdrücken werden auf sehr natürliche Weise endliche Folgen zugeordnet, und *Belegungen* sind Folgen vom Typ ω; [2]) der *Wert* (eines Terms bei einer Belegung) und die *Erfüllung* (eines Ausdrucks durch eine Belegung) werden im Bereich der Folgen ausgedrückt. Unsere Axiome geben teils einige allgemeine Eigenschaften der Folgenverknüpfung, teils die grundlegenden semantischen Definitionen, teils einige geläufige strukturelle Beziehungen und schließlich eine Beschreibung der Menge ax wieder, die ableitbar werden soll.

Im Unterschied zu KLEENE brauchen wir im allgemeinen Fall die Individuen- und Funktionenkonstanten des engeren Kalküls nicht zu eliminieren; bei ihrem Vorhandensein wird die Nachbildung der Semantik im Bereich der Folgen um so deutlicher.

(4) Die KLEENEsche Darstellung macht an mehreren Stellen Anleihen bei der Theorie der rekursiven Funktionen und Gebrauch von der allgemeinen Ausschaltung der Individuen- und Funktionenkonstanten nach HILBERT-BERNAYS sowie vom GÖDELschen Vollständigkeitssatz. Die vorliegende Arbeit ist nahezu *ohne Vorkenntnisse* aus Gebieten der mathematischen Logik verständlich. Über rekursive Funktionen wird nur deren Definition herangezogen; nicht einmal der Satz, daß rekursive Mengen rekursiv-aufzählbar sind, wird gebraucht. So erschien es angemessen, die Darstellung ziemlich ausführlich zu halten. Auch die Ableitungen in den beiden § 2 sind fast lückenlos wiedergegeben, wobei die Rolle jedes Axioms deutlich hervortritt.

Meine Untersuchung wurde angeregt durch den Satz von RYLL-NARDZEWSKI[3]), daß bei der elementaren PEANOschen Arithmetik (mit dem *Schema* der vollständigen Induktion) kein endliches widerspruchsfreies Axiomensystem zur Ableitung aller einzelnen Induktionsaxiome ausreicht. Dabei bezieht sich „Ableitbarkeit" — wie bei uns — auf die *üblichen* Schlußregeln für Theorien, die im Prädikatenkalkül der ersten Stufe formalisiert sind. Das ist hervorzuheben, denn HERMES hat gezeigt[4]), daß bei Zulassung *beliebiger* entscheidbarer Schlußrelationen schon eine einzige genügt, sogar jeden Ausdruck der zu axiomatisierenden Menge als einziges Axiom verwendbar zu machen.

[1]) Genau genommen: jedem Ausdruck *und seinen freien Variablen* — in bestimmter Reihenfolge, mit einer ausgezeichneten („scanned variable"); a. a. O., S. 32ff.

[2]) Prinzipiell könnte man auch mit sogenannten *beschränkten* Belegungen arbeiten, weil ja das Erfülltsein eines Ausdrucks nur von den Werten der endlich vielen in ihm frei vorkommenden Variablen abhängt. Erfahrungsgemäß lassen sich jedoch die „unbeschränkten" Belegungen, also die Bewertungen stets *aller* Variabler, bequemer handhaben.

[3]) C. RYLL-NARDZEWSKI, The role of the axiom of induction in elementary arithmetic. Fund. Math. **39** (1952), 239—263. Siehe auch: A. MOSTOWSKI, On models of axiomatic systems. Fund. Math. **39** (1952), 133—158, insbes. Abschnitt 7.

[4]) H. HERMES, Zum Begriff der Axiomatisierbarkeit. Math. Nachr. **4** (1950/51), 343—347.

Die *Teile* I *und* II sind so abgefaßt, daß jeder für sich lesbar ist. Teil I (der übrigens fertiggestellt war, als mir die KLEENEsche Abhandlung zur Kenntnis kam) behandelt den Spezialfall der PEANOschen Arithmetik, Teil II den allgemeinen Fall. Das Verfahren in Teil I weicht in technischen Einzelheiten von der allgemeinen Methode ab; wir nutzen nämlich aus, daß der Individuenbereich der Zahlentheorie *durch Terme* (nämlich die Zeichenreihen $O, O', O'', \ldots$) *ausschöpfbar* ist, d. h. daß zu jedem Individuum ein Term existiert, der bei jeder Belegung dieses Individuum als Wert erhält — was im allgemeinen Fall nicht zuzutreffen braucht. Rekursive Funktionen kommen in Teil I überhaupt nicht vor.

Ich vermute, daß sich das Verfahren auch bei Behandlung anderer Fragen, vor allem bei der Untersuchung der zweifellos sehr wichtigen Kalküle mit *überabzählbar vielen* Variablen oder Konstanten, als fruchtbar erweist. Gerade unsere Konstruktion — der Kalkül für die Folgenverknüpfung — läßt solche Verallgemeinerungen mit Leichtigkeit zu.

Teil I: Die PEANOsche Arithmetik

§ 1. Die engere und die erweiterte Theorie. Semantische Überlegungen

1. *Zeichenreihen* Z der engeren Theorie, nämlich der formalisierten elementaren PEANOschen Arithmetik, erhält man durch Verkettung je endlich vieler von den *Grundzeichen*

$$O,\ ',\ +,\ \cdot,\ (,\ ),\ =,\ \sim,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists,\ a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$$

(in bestimmter Reihenfolge, mit oder ohne Wiederholungen); auch die „leere Zeichenreihe“ ♀ lassen wir zu. *Arithmetische Terme* heißen dieElemente der kleinsten Menge von Zeichenreihen, die

O und die *Variablen* a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$,
mit einer Zeichenreihe T auch die Zeichenreihe T' und
mit T_1 und T_2 auch die Zeichenreihen $(T_1 + T_2)$ und $(T_1 \cdot T_2)$

enthält. Aus Termgleichungen, also Zeichenreihen $T_1 = T_2$, worin T_1 und T_2 Terme sind, werden in bekannter Weise die *arithmetischen Ausdrücke* „prädikatenlogisch zusammengesetzt“; dabei ist zu beachten, daß, falls H arithmetischer Ausdruck ist, $\forall a_i H$ bzw. $\exists a_i H$ genau dann ebenfalls arithmetischer Ausdruck wird, wenn a_i in H vollfrei vorkommt[1]). Um hervorzuheben, daß eine bestimmte Variable a_i vollfrei in dem Ausdruck H vorkommt, schreiben wir gelegentlich „$H(a_i)$“ statt „H“. Im Zusammenhang mit „$H(a_i)$“ verwenden wir auch die Bezeichnung „$H(T)$“ für diejenige Zeichenreihe, die aus $H(a_i)$ durch Einsetzung von T für a_i (an allen Stellen) entsteht. — Arithmetische Ausdrücke ohne freie Variablen heißen *arithmetische Aussagen*.

[1]) Das heißt: wenn es Zeichenreihen Z_1, Z_2 zwar mit $H = Z_1 a_i Z_2$, nicht aber mit $H = Z_1 \forall a_i Z_2$ oder $H = Z_1 \exists a_i Z_2$ gibt. — Erläuterung verwandter struktureller Redeweisen („kommt frei vor“, „kommt gebunden vor“, „Wirkungsbereich“ usw.) z. B. bei K. SCHRÖTER, Theorie des logischen Schließens I, diese Zeitschr. 1 (1955), S. 63.

Bei der wohlbekannten (Standard-)Interpretation der arithmetischen Ausdrücke geht man aus von *arithmetischen Belegungen* $\mathfrak{B}$ — das sind eindeutige Funktionen, die jedem der Zeichen a_i eine natürliche Zahl zuordnen. Für jeden arithmetischen Term T und jedes $\mathfrak{B}$ wird die natürliche Zahl $Wert\,(T, \mathfrak{B})$, das ist *der Wert von T bei der Belegung* $\mathfrak{B}$, definiert. Schließlich erklärt man für jeden arithmetischen Ausdruck H und jede arithmetische Belegung $\mathfrak{B}$ die Redeweise „$\mathfrak{B}$ *erfüllt (arithmetisch)* H“, abgekürzt: „$\mathfrak{B}\ Erf H$“; dabei wird $=$ „als Zeichen für Identität interpretiert“:

$$\mathfrak{B}\ Erf\ T_1 = T_2 \text{ genau dann, wenn } Wert(T_1, \mathfrak{B}) = Wert(T_2, \mathfrak{B}).$$

Falls $\mathfrak{B}\ Erf\, H$ bei jeder arithmetischen Belegung $\mathfrak{B}$, ist H *arithmetisch-allgemeingültig* (*ag* H). Arithmetisch-allgemeingültige *Aussagen* heißen (arithmetisch-)*wahr*. Offensichtlich ist eine Aussage schon dann wahr, wenn es eine erfüllende Belegung gibt.

2. Die erweiterte Theorie soll zusätzlich die Grundzeichen $\equiv$, $\subseteq$, A, P besitzen. Die *Term*definition wird ergänzt durch die Forderung, daß mit T_1 und T_2 auch $T_1 T_2$ ein Term sein soll. Als einfachste („*prädikative*“) *Ausdrücke* haben wir hier die Zeichenreihen

$$T_1 = T_2, \quad T_1 \equiv T_2, \quad T_1 \subseteq T_2, \quad A\,T_1, \quad T_1 P T_2$$

(in denen T_1 und T_2 Terme sind). Die Zusammensetzung beliebiger Ausdrücke aus prädikativen ist wieder die in elementaren Theorien übliche. Aussagen sind Ausdrücke ohne freie Variablen.

Wir verabreden einige Abkürzungen bei der Bezeichnung von Zeichenreihen. Die Zeichenreihen $O^{(n)}$ und $Z^n\,(n \geqq 0)$ sowie $\prod_{\nu=m}^{n} Z_\nu\ (n \geqq m-1)$ definieren wir induktiv:

$$O^{(0)} =_{\mathrm{Df}} O, \qquad Z^0 =_{\mathrm{Df}} \text{♀}, \qquad \prod_{\nu=m}^{m-1} Z_\nu =_{\mathrm{Df}} \text{♀},$$

$$O^{(n+1)} =_{\mathrm{Df}} O^{(n)\prime}, \qquad Z^{n+1} =_{\mathrm{Df}} Z^n Z, \qquad \prod_{\nu=m}^{n+1} Z_\nu =_{\mathrm{Df}} \Big(\prod_{\nu=m}^{n} Z_\nu\Big) Z_{n+1}.$$

Diese multiplikative Schreibweise wird dadurch nahegelegt, daß die Menge der Zeichenreihen (mit Verkettung als Verknüpfungsrelation bzw. -operation) eine freie Halbgruppe mit dem Einheitselement ♀ und unsern Grundzeichen als Erzeugenden bildet. — Bei Termen und Ausdrücken lassen wir, wenn Mißverständnisse ausgeschlossen sind, Außenklammern weg, und „$H_1 \wedge H_2 \wedge H_3 \rightarrow H_4 \vee H_5$“ beispielsweise steht für „$(((H_1 \wedge H_2) \wedge H_3) \rightarrow (H_4 \vee H_5))$“ — wie gebräuchlich. Auch „$\bigwedge_{\nu=n_1}^{n_2}$“ $(n_2 \geqq n_1 - 1)$ wird wie üblich verwendet: Genau genommen, wird z. B. für $n \geqq 1$ durch „$\bigwedge_{\nu=1}^{n} H_\nu$“ die Zeichenreihe $({}^{n-1} H_1 \prod_{\nu=2}^{n} (\wedge H_\nu))$ bezeichnet; für $n = 0$ ist $H \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n} H_\nu$ natürlich mit H identisch. Statt „$\sim T_1 = T_2$“ schreiben wir gelegentlich „$T_1 \neq T_2$“.

Die Elemente des *Individuenbereichs* J^*, den wir der Interpretation des erweiterten Kalküls zugrunde legen, werden (endliche oder transfinite, jedenfalls wohlgeordnete) *Folgen* $\mathfrak{X}$ von natürlichen Zahlen sein, und zwar Folgen $\{x_\beta\}_{0 \leqq \beta < \alpha}$ mit $1 \leqq x_\beta \leqq 13$; den Bereich der dabei zu verwendenden Ordnungszahlen α lassen wir zunächst offen. Vom Typus $\alpha = 0$ ist die „leere Folge" $\mathfrak{O}$; vom Typus (oder der „Länge") $\alpha = 1$ sind die 13 „Atome" $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{13}$, nämlich die eingliedrigen Folgen $\mathfrak{a}_\nu = [\nu]$ $(1 \leqq \nu \leqq 13)$. Als $\mathfrak{a}_\nu^i$ bezeichnen wir die Folge $\{\nu\}_{0 \leqq \beta < i}$. Durch *Verknüpfung* der Folgen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ (in dieser Reihenfolge!) entsteht die eindeutig bestimmte Folge $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$, das ist, falls etwa $\mathfrak{X}_1 = \{x_\beta\}_{0 \leqq \beta < \alpha_1}$ und $\mathfrak{X}_2 = \{y_\beta\}_{0 \leqq \beta < \alpha_2}$, die Folge $\{w_\beta\}_{0 \leqq \beta < \alpha_1 + \alpha_2}$ mit $w_\beta = x_\beta$ für $0 \leqq \beta < \alpha_1$ und $w_{\alpha_1 + \beta} = y_\beta$ für $0 \leqq \beta < \alpha_2$. Ohne Mühe bestätigt man die Assoziativität der Folgenverknüpfung. Auch die Verknüpfung abzählbar unendlich vieler endlicher Folgen (in gegebener Abzählung vom Typ ω) zu einer neuen ist anschaulich klar und leicht explizit definierbar. Ferner setzen wir fest:

$\mathfrak{X}_1$ ist ein Endstück von $\mathfrak{X}_2$ $=_{\mathrm{Df}}$ Es gibt eine Folge $\mathfrak{X}_3$ mit $\mathfrak{X}_3 \mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2$.

$\mathfrak{X}_1$ in $\mathfrak{X}_2$ $=_{\mathrm{Df}}$ Es gibt Folgen $\mathfrak{X}_3$, $\mathfrak{X}_4$ mit $\mathfrak{X}_3 \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_4 = \mathfrak{X}_2$.

$\mathfrak{X}_1$ ist Potenz von $\mathfrak{X}_2$ $=_{\mathrm{Df}}$ $\mathfrak{X}_2$ ist ein Atom, und es gibt eine natürliche Zahl i mit $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}_2^i$.

(Beispiel: $\mathfrak{O}$ ist Potenz von $\mathfrak{a}_2$.)

Wir definieren eine Funktion $\mathfrak{F}$, die jeder Zeichenreihe des engeren Kalküls, die $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ und $\exists$ nicht enthält, eindeutig eine endliche Folge (von natürlichen Zahlen zwischen 2 und 13) zuordnet: Es soll sein

$$\mathfrak{F}(\text{♀}) = \mathfrak{O}$$

$$\mathfrak{F}(a_i) = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{a}_3^i \mathfrak{a}_2 \quad (\text{Beispiel: } \mathfrak{F}(a_5) = [2, 3, 3, 3, 3, 3, 2])$$

$$\mathfrak{F}(O) = \mathfrak{a}_4$$

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{F}(') = \mathfrak{a}_5 & & \mathfrak{F}(=) & = \mathfrak{a}_{10} \\ \mathfrak{F}(+) = \mathfrak{a}_6 & & \mathfrak{F}(\sim) & = \mathfrak{a}_{11} \\ \mathfrak{F}(\cdot) = \mathfrak{a}_7 & & \mathfrak{F}(\rightarrow) & = \mathfrak{a}_{12} \\ \mathfrak{F}(() = \mathfrak{a}_8 & & \mathfrak{F}(\forall) & = \mathfrak{a}_{13} \\ \mathfrak{F}()) = \mathfrak{a}_9 & & \mathfrak{F}(Z_1 Z_2) & = \mathfrak{F}(Z_1)\,\mathfrak{F}(Z_2). \end{array}$$

Für alle *wahren* arithmetischen Aussagen H, die $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$ und $\exists$ nicht enthalten, bilden wir $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{F}(H)$. Diese $\aleph_0$ endlichen Folgen verknüpfen wir — in *irgendeiner* Abzählung vom Typ ω, mit oder ohne Wiederholungen — zur Folge $\mathfrak{X}^*$ (die die Länge ω hat). Als J^* wählen wir die kleinste Menge, die die 13 Atome und alle Endstücke von $\mathfrak{X}^*$ (also z. B. auch $\mathfrak{O}$) enthält und bzgl. Verknüpfung (je zweier Folgen) abgeschlossen ist.

J^* ist abzählbar und enthält nur Elemente $\{x_\beta\}_{0 \leqq \beta < \alpha}$ mit $\alpha < \omega^2$. Für $\mathfrak{X} = \{x_\beta\}_{0 \leqq \beta < \omega \cdot n + m}$ — jedes $\mathfrak{X} \in J^*$ läßt sich in dieser Form darstellen, wobei die natürlichen Zahlen m und n eindeutig bestimmt sind — setzen wir $\mathfrak{a}_5^m = |\mathfrak{X}|$; so wird etwa $|\mathfrak{O}| = \mathfrak{O}$, $|\mathfrak{X}^*| = \mathfrak{O}$, $|[7, 11, 11]| = [5, 5, 5]$, $|\mathfrak{a}_5^i| = \mathfrak{a}_5^i$. Demnach bedeutet „$|\mathfrak{X}_1| = |\mathfrak{X}_2|$", daß $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ „modulo ω gleich lang" sind.

Eine *Belegung* $\mathfrak{B}^*$ ist eine eindeutige Funktion, die jedem der Zeichen a_i ein Element von J^* zuordnet. Es soll gelten:

$Wert^*(O, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{O}$.
$Wert^*(a_i, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{B}^*(a_i)$.
Wenn $|Wert^*(T, \mathfrak{B}^*)| = \mathfrak{a}_5^m$, so $Wert^*(T', \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{a}_5^{m+1}$.
Wenn $|Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)| = \mathfrak{a}_5^{m_1}$ und $|Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)| = \mathfrak{a}_5^{m_2}$, so
$Wert^*((T_1 + T_2), \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{a}_5^{m_1+m_2}$ und $Wert^*((T_1 \cdot T_2), \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{a}_5^{m_1 \cdot m_2}$.
$Wert^*(T_1 T_2, \mathfrak{B}^*) = Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)\ Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)$.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 \equiv T_2$ genau dann, wenn $Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*) = Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)$.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 = T_2$ genau dann, wenn $|Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)| = |Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)|$ (— anders als im engeren Kalkül).
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 \subseteq T_2$ genau dann, wenn $Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)$ in $Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)$.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ AT$ genau dann, wenn $Wert^*(T, \mathfrak{B}^*)$ eines der 13 Atome ist.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 P T_2$ genau dann, wenn $Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)$ eine Potenz von $Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)$ ist.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^* \sim H$ genau dann, wenn nicht zutrifft: $\mathfrak{B}^*\ Erf^* H$.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*(H_1 \wedge H_2)$ genau dann, wenn $\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ H_1$ und $\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ H_2$.
Das Analoge für $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ \forall a_i\ H(a_i)$ genau dann, wenn für jede Belegung $\mathfrak{B}_1^*$ gilt:
Falls für $j \neq i$ stets $\mathfrak{B}_1^*(a_j) = \mathfrak{B}^*(a_j)$, dann $\mathfrak{B}_1^*\ Erf^*\ H(a_i)$.
$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ \exists a_i\ H(a_i)$ genau dann, wenn es eine Belegung $\mathfrak{B}_1^*$ gibt, für die gilt:
Für $j \neq i$ ist stets $\mathfrak{B}_1^*(a_j) = \mathfrak{B}^*(a_j)$, und $\mathfrak{B}_1^*\ Erf^*\ H(a_i)$.

Durch diese Forderungen — das klassische, TARSKIsche Interpretationsverfahren — ist für jede Belegung $\mathfrak{B}^*$, jeden Term T und jeden Ausdruck H sowohl der *Wert* von T bei der Belegung $\mathfrak{B}^*$ ($Wert^*(T, \mathfrak{B}^*)$, ein Element von J^*) als auch das *Erfülltsein* von H durch diese Belegung ($\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ H$) definiert. „ag^*H" („*H ist allgemeingültig*") bedeutet, daß $\mathfrak{B}^*\ Erf^* H$ bei jeder Belegung $\mathfrak{B}^*$. Allgemeingültige Aussagen heißen *wahr*.

3. Lemma 1. *Für arithmetische Ausdrücke H gilt:*
$ag^* H$ genau dann, wenn $ag\ H$.

Beweis. $\mathfrak{B}^*$ sei eine Belegung, $\mathfrak{B}$ eine arithmetische Belegung, und es sei

$$|\mathfrak{B}^*(a_j)| = \mathfrak{a}_5^{\mathfrak{B}(a_j)} \quad \text{für jedes } j. \tag{1}$$

Für arithmetische Terme T zeigt man, induktiv über die „Stufe" des Terms:

$$|Wert^*(T, \mathfrak{B}^*)| = \mathfrak{a}_5^{Wert(T, \mathfrak{B})}. \tag{2}$$

Für $T = O$ zunächst hat man $|\mathrm{Wert}^*(O, \mathfrak{B}^*)| = |\mathfrak{O}| = \mathfrak{L} = \mathfrak{a}_5^0 = \mathfrak{a}_5^{Wert(O, \mathfrak{B})}$ und für $T = a_j$ deckt sich (2) mit (1). Auf die Wiedergabe der sehr einfachen Induktionsschritte verzichten wir. — Induktiv über die Ausdrucksstufe zeigt man ür arithmetische Ausdrücke H:

$$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ H \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B}\ Erf\ H. \tag{3}$$

Für die prädikativen Ausdrücke ist das klar, denn gleichwertig sind folgende Feststellungen:

$$\mathfrak{B}^* \, Erf^* \, T_1 = T_2,$$
$$|\, Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)\,| = |\, Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*)\,|,$$
$$Wert(T_1, \mathfrak{B}) = Wert(T_2, \mathfrak{B}), \text{ wegen (2)},$$
$$\mathfrak{B} \, Erf \, T_1 = T_2.$$

Die Induktionsschritte für die aussagenlogischen Zusammensetzungen sind trivial. Wir wenden uns der Partikularisierung zu. (a) Wenn

$$\mathfrak{B}^* \, Erf^* \, \exists a_i H(a_i), \tag{4}$$

so gibt es ein $\mathfrak{B}_1^*$ derart, daß

$$\mathfrak{B}_1^* \, Erf^* \, H(a_i) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1^*(a_j) = \mathfrak{B}^*(a_j) \quad \text{für jedes } j \neq i. \tag{5}$$

Für die durch die Forderung

$$|\mathfrak{B}_1^*(a_j)| = \mathfrak{a}_5^{\mathfrak{B}_1(a_j)} \quad \text{für jedes } j \tag{6}$$

eindeutig bestimmte arithmetische Belegung $\mathfrak{B}_1$ gilt:

$$\mathfrak{B}_1 \, Erf \, H(a_i) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1(a_j) = \mathfrak{B}(a_j) \quad \text{mindestens für } j \neq i, \tag{7}$$

das erstere nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist bewiesen:

$$\mathfrak{B} \, Erf \, \exists a_i H(a_i). \tag{8}$$

(b) Setzt man (8) voraus, so gibt es ein $\mathfrak{B}_1$, auf das (7) zutrifft. Wählt man

$$\mathfrak{B}_1^*(a_j) = \mathfrak{B}^*(a_j) \quad \text{für} \quad j \neq i \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}_1^*(a_i) = \mathfrak{a}_5^{\mathfrak{B}_1(a_i)},$$

so gilt (6) für dieses $\mathfrak{B}_1^*$, also, in Anbetracht der Induktionsvoraussetzung, auch (5) und damit (4). — Der Induktionsschritt für die Generalisierung ergibt sich aus der Äquivalenz der folgenden Feststellungen:

$$ag^* \forall a_i H, \quad ag^* \sim \exists a_i \sim H, \quad ag \sim \exists a_i \sim H, \quad ag \forall a_i H.$$

Damit ist (3) bestätigt. Bisher waren $\mathfrak{B}^*$ und $\mathfrak{B}$ festgehalten.

Wir beweisen das Lemma zunächst für arithmetische *Aussagen* H. Für sie gilt:

$$\left.\begin{array}{l} ag^* H \text{ genau dann, wenn es ein } \mathfrak{B}^* \text{ gibt, so daß } \mathfrak{B}^* \, Erf^* H. \\ ag \; H \text{ genau dann, wenn es ein } \mathfrak{B} \text{ gibt, so daß } \mathfrak{B} \; Erf \; H. \end{array}\right\} \tag{9}$$

Offensichtlich existiert zu jedem $\mathfrak{B}^*$ ein $\mathfrak{B}$ gemäß (1). Und auch zu jedem $\mathfrak{B}$ gibt es ein $\mathfrak{B}^*$ gemäß (1) — am einfachsten wählt man $\mathfrak{B}^*(a_j) = \mathfrak{a}_5^{\mathfrak{B}(a_j)}$. Da (1) aber (3) impliziert, folgt aus (9) die Behauptung des Lemmas.

Einen *beliebigen* arithmetischen Ausdruck H schließt man durch Generalisierung der noch freien Variablen ab zu einer Aussage H_1 und erhält als äquivalent: $ag^* H$, $ag^* H_1$, $ag \, H_1$, $ag \, H$.

4. Wir wenden uns der Aufstellung des Axiomensystems ax^* zu. Arithmetisch-allgemeingültig und daher nach Lemma 1 allgemeingültig sind die „identitäts-

theoretischen Axiome"

$$a_0 = a_0 \tag{I1}$$

$$a_0 = a_1 \wedge a_0 = a_2 \rightarrow a_1 = a_2 \tag{I2}$$

$$a_0 = a_1 \rightarrow a_0' = a_1' \tag{I3}$$

$$a_0 = a_1 \wedge a_2 = a_3 \rightarrow a_0 + a_2 = a_1 + a_3 \tag{I4}$$

$$a_0 = a_1 \wedge a_2 = a_3 \rightarrow a_0 \cdot a_2 = a_1 \cdot a_3 \tag{I5}$$

des engeren Kalküls. Auch die Allgemeingültigkeit der folgenden zehn Ausdrücke ist evident:

$$a_0 \equiv a_0 \tag{A1}$$

$$a_1 O a_2 \subseteq a_3 \leftrightarrow a_1 a_2 \subseteq a_3 \tag{A2}$$

$$A a_0 \rightarrow \sim a_0 \subseteq O \tag{A3}$$

$$\sim a_0 \subseteq a_1 \rightarrow \sim a_2 a_0 \subseteq a_1 \wedge \sim a_0 a_2 \subseteq a_1 \tag{A4}$$

$$A a_0 \wedge \sim a_0 \subseteq a_1 \wedge \sim a_0 \subseteq a_2 \rightarrow \sim a_0 \subseteq a_1 a_2 \tag{A5}$$

$$A a_0 \wedge \sim a_0 \subseteq a_1 \wedge a_2 P a_1 \rightarrow \sim a_0 \subseteq a_2 \tag{A6}$$

$$\left.\begin{aligned} & A a_2 \wedge \sim a_3 \subseteq a_1 \wedge \sim a_3 \subseteq a_2 \wedge a_{31} P a_3 \wedge a_{32} P a_3 \wedge \sim a_{31} \subseteq O \wedge \sim a_{32} \subseteq O \\ & \qquad \wedge \sim a_2 a_{31} a_2 \subseteq a_0 a_2 \rightarrow \sim a_2 a_{31} a_2 \subseteq a_0 a_2 a_{31} a_{32} a_1 \end{aligned}\right\} \tag{A7}$$

$$\left.\begin{aligned} & A a_2 \wedge \sim a_3 \subseteq a_1 \wedge \sim a_3 \subseteq a_2 \wedge a_{31} P a_3 \wedge a_{32} P a_3 \wedge \sim a_{32} \subseteq O \\ & \qquad \wedge \sim a_2 a_{31} a_{32} a_2 \subseteq a_0 a_2 \rightarrow \sim a_2 a_{31} a_{32} a_2 \subseteq a_0 a_2 a_{31} a_1 \end{aligned}\right\} \tag{A8}$$

$$A a_0 \rightarrow O P a_0 \wedge a_0 P a_0 \tag{A9}$$

$$a_0 P a_1 \rightarrow a_0 a_1 P a_1. \tag{A10}$$

Zu jedem J^*-Element $\mathfrak{X}_2 = \{x_\beta\}_{0 \leqq \beta < \omega \cdot n + m}$ gibt es eine modulo ω gleich lange Folge $\mathfrak{X}_1$, die eine Potenz des vorgegebenen Atoms $\mathfrak{X}_0 (= \mathfrak{a}_j)$ ist: nämlich $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{a}_j^m$. Daher ist

$$A a_0 \rightarrow \exists a_1 (a_1 P a_0 \wedge a_1 = a_2) \tag{A11}$$

allgemeingültig. Ist $\mathfrak{B}^*(a_0)$ ein Atom und hat $\mathfrak{B}^*(a_1)$ etwa die Länge $\alpha = \omega \cdot n + m$, so erhält $Wert^*(a_1', \mathfrak{B}^*)$ — das ist $\mathfrak{a}_5^{m+1}$ — die Länge $m + 1$ und $Wert^*(a_1 a_0, \mathfrak{B}^*)$ die Länge $\omega \cdot n + m + 1$; man sieht: $\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ a_1' = a_1 a_0$. Somit ist auch

$$A a_0 \rightarrow a_1' = a_1 a_0 \tag{A12}$$

allgemeingültig. — Während alle diese Axiome Beziehungen zwischen irgendwelchen J^*-Elementen ausdrückten, gibt das jetzt aufzustellende Haupt-Axiom A 13 charakteristische Eigenschaften speziell von $\mathfrak{X}^*$ wieder.

Eine Belegung $\mathfrak{B}_0^*$ nennen wir eine *ausgezeichnete Belegung*, wenn

$$\mathfrak{B}_0^*(a_0) = \mathfrak{X}^* \text{ und } \mathfrak{B}_0^*(a_i) = \mathfrak{a}_i \text{ für } 1 \leqq i \leqq 13.$$

Jede ausgezeichnete Belegung erfüllt den Ausdruck

$$\bigwedge_{\nu=1}^{13} A a_\nu \wedge \bigwedge_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{13} \sim a_\mu \subseteq a_\nu. \tag{H_1^*}$$

Aus der Definition von $\mathfrak{X}^*$ geht hervor, daß für jede natürliche Zahl i die Folge $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{F}(O^{(i)} = O^{(i)}) \mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$ enthalten ist. Sind nun $\mathfrak{X}_{51}$ und $\mathfrak{X}_{52}$ modulo ω gleich lange

Potenzen von $\mathfrak{a}_5$, so sind sie identisch, und dann liegt $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_4\mathfrak{X}_{51}\mathfrak{a}_{10}\mathfrak{a}_4\mathfrak{X}_{52}\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$. Jedes $\mathfrak{B}_0^*$ erfüllt demnach den Ausdruck

$$a_{51}Pa_5 \wedge a_{52}Pa_5 \wedge a_{51} = a_{52} \rightarrow a_1a_4a_{51}a_{10}a_4a_{52}a_1 \subseteq a_0. \qquad (H_2^*)$$

Für $i \neq j$ ist die Aussage $O^{(i)} \neq O^{(j)}$ wahr; folglich kommt dann $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{F}\,(\sim O^{(i)} = O^{(j)})\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$ vor. Das heißt: Sind $\mathfrak{X}_{51}$ und $\mathfrak{X}_{52}$ verschiedene Potenzen von $\mathfrak{a}_5$, so liegt $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_4\mathfrak{X}_{51}\mathfrak{a}_{10}\mathfrak{a}_4\mathfrak{X}_{52}\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$. Demnach wird

$$a_{51}Pa_5 \wedge a_{52}Pa_5 \wedge a_{51} \neq a_{52} \rightarrow a_1a_{11}a_4a_{51}a_{10}a_4a_{52}a_1 \subseteq a_0 \qquad (H_3^*)$$

von jedem $\mathfrak{B}_0^*$ erfüllt — und, mit analoger Begründung, auch

$$a_{51}Pa_5 \wedge a_{52}Pa_5 \wedge a_{53}Pa_5 \wedge a_{51}+a_{52}=a_{53} \rightarrow a_1a_8a_4a_{51}a_6a_4a_{52}a_9a_{10}a_4a_{53}a_1 \subseteq a_0, \quad (H_4^*)$$

$$a_{51}Pa_5 \wedge a_{52}Pa_5 \wedge a_{53}Pa_5 \wedge a_{51}+a_{52} \neq a_{53} \rightarrow a_1a_{11}a_8a_4a_{51}a_6a_4a_{52}a_9a_{10}a_4a_{53}a_1 \subseteq a_0, \quad (H_5^*)$$

$$a_{51}Pa_5 \wedge a_{52}Pa_5 \wedge a_{53}Pa_5 \wedge a_{51}\cdot a_{52}=a_{53} \rightarrow a_1a_8a_4a_{51}a_7a_4a_{52}a_9a_{10}a_4a_{53}a_1 \subseteq a_0, \quad (H_6^*)$$

$$a_{51}Pa_5 \wedge a_{52}Pa_5 \wedge a_{53}Pa_5 \wedge a_{51}\cdot a_{52} \neq a_{53} \rightarrow a_1a_{11}a_8a_4a_{51}a_7a_4a_{52}a_9a_{10}a_4a_{53}a_1 \subseteq a_0. \quad (H_7^*)$$

Wenn $\mathfrak{a}_1\mathfrak{X}_{20}\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$ vorkommt, nicht aber $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}_{20}$, so gibt es eine wahre arithmetische Aussage H mit $\mathfrak{F}(H) = \mathfrak{X}_{20}$. Dann kommt auch $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{F}(\sim\sim H)\mathfrak{a}_1$, das ist $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{a}_{11}\mathfrak{X}_{20}\mathfrak{a}_1$, in $\mathfrak{X}^*$ vor. Der Ausdruck

$$\sim a_1 \subseteq a_{20} \wedge a_1a_{20}a_1 \subseteq a_0 \rightarrow a_1a_{11}a_{11}a_{20}a_1 \subseteq a_0 \qquad (H_8^*)$$

wird also von jedem $\mathfrak{B}_0^*$ erfüllt — und, mit analoger Begründung, auch

$$\begin{aligned}\sim a_1 \subseteq a_{21} \wedge \sim a_1 \subseteq a_{22} \wedge ((& a_1a_{21}a_1 \subseteq a_0 \wedge a_1a_{22}a_1 \subseteq a_0)\\ \vee\, & (a_1a_{11}a_{21}a_1 \subseteq a_0 \wedge a_1a_{22}a_1 \subseteq a_0)\\ \vee\, & (a_1a_{11}a_{21}a_1 \subseteq a_0 \wedge a_1a_{11}a_{22}a_1 \subseteq a_0))\\ & \rightarrow a_1a_8a_{21}a_{12}a_{22}a_9a_1 \subseteq a_0 \qquad (H_9^*)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\sim a_1 \subseteq a_{21} \wedge \sim a_1 \subseteq a_{22} \wedge a_1a_{21}a_1 \subseteq a_0 \wedge a_1a_{11}a_{22}a_1 \subseteq a_0\\ &\qquad \rightarrow a_1a_{11}a_8a_{21}a_{12}a_{22}a_9a_1 \subseteq a_0. \qquad (H_{10}^*)\end{aligned}$$

[Zu H_9^*: Sind die Aussagen H_1 und H_2 oder $\sim H_1$ und H_2 oder $\sim H_1$ und $\sim H_2$ wahr, so ist $(H_1 \rightarrow H_2)$ ebenfalls wahr. Zu H_{10}^*: Sind H_1 und $\sim H_2$ wahr, so ist $\sim(H_1 \rightarrow H_2)$ wahr. Man beachtet, daß $\mathfrak{B}_0^*(a_{12}) = \mathfrak{a}_{12} = \mathfrak{F}(\rightarrow)$ ist.]

Es sei $\mathfrak{X}_{31} = \mathfrak{a}_3^i$ und weder $\mathfrak{a}_1$ noch $\mathfrak{a}_2\mathfrak{X}_{31}\mathfrak{a}_2$ — das ist $\mathfrak{F}(a_i)$ — in $\mathfrak{X}_{20}, \mathfrak{X}_{21}, \mathfrak{X}_{22}, \mathfrak{X}_{23}$. Es möge ferner für jede natürliche Zahl j die Folge $\mathfrak{a}_1\mathfrak{X}_{20}\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5^j\mathfrak{X}_{21}\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5^j\mathfrak{X}_{22}\mathfrak{a}_4\mathfrak{a}_5^j\mathfrak{X}_{23}\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$ vorkommen. Dann wissen wir, daß es bei jedem j eine wahre Aussage H_j mit

$$\mathfrak{X}_{20}\,\mathfrak{F}(O^{(j)})\,\mathfrak{X}_{21}\,\mathfrak{F}(O^{(j)})\,\mathfrak{X}_{22}\,\mathfrak{F}(O^{(j)})\,\mathfrak{X}_{23} = \mathfrak{F}(H_j)$$

gibt, denn das trennende Atom $\mathfrak{a}_1$ tritt ja in dieser Folge nicht auf. Also existieren arithmetische Zeichenreihen Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, für die gilt:

$$\mathfrak{X}_{20} = \mathfrak{F}(Z_0), \quad \mathfrak{X}_{21} = \mathfrak{F}(Z_1), \quad \mathfrak{X}_{22} = \mathfrak{F}(Z_2), \quad \mathfrak{X}_{23} = \mathfrak{F}(Z_3);$$

$$H_j = Z_0O^{(j)}Z_1O^{(j)}Z_2O^{(j)}Z_3; \qquad a_i \text{ nicht in } Z_0, Z_1, Z_2, Z_3.$$

Weil alle H_j wahr sind, ist auch die Aussage $\forall a_i Z_0 a_i Z_1 a_i Z_2 a_i Z_3$ $(= H)$ wahr, folglich $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{F}(H) \mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$. Damit ist gezeigt, daß jede ausgezeichnete Belegung $\mathfrak{B}_0^*$ den Ausdruck

$$a_{31} P a_3 \wedge \bigwedge_{\nu=20}^{23} (\sim a_1 \subseteq a_\nu \wedge \sim a_2 a_{31} a_2 \subseteq a_\nu)$$
$$\wedge \forall a_{50} (a_{50} \, P a_5 \to a_1 a_{20} a_4 a_{50} a_{21} a_4 a_{50} a_{22} a_4 a_{50} a_{23} a_1 \subseteq a_0)$$
$$\to a_1 a_{13} a_2 a_{31} a_2 a_{20} a_2 a_{31} a_2 a_{21} a_2 a_{31} a_2 a_{22} a_2 a_{31} a_2 a_{23} a_1 \subseteq a_0 \qquad (H_{11}^*)$$

erfüllt — und ebenfalls den Ausdruck

$$a_{31} P a_3 \wedge \bigwedge_{\nu=20}^{23} (\sim a_1 \subseteq a_\nu \wedge \sim a_2 a_{31} a_2 \subseteq a_\nu)$$
$$\wedge \exists a_{50} (a_{50} P a_5 \wedge a_1 a_{11} a_{20} a_4 a_{50} a_{21} a_4 a_{50} a_{22} a_4 a_{50} a_{23} a_1 \subseteq a_0)$$
$$\to a_1 a_{11} a_{13} a_2 a_{31} a_2 a_{20} a_2 a_{31} a_2 a_{21} a_2 a_{31} a_2 a_{22} a_2 a_{31} a_2 a_{23} a_1 \subseteq a_0, \qquad (H_{12}^*)$$

wie man ganz entsprechend bestätigt. Schließlich überzeugen wir uns, daß jedes $\mathfrak{B}_0^*$ auch

$$a_{31} P a_3 \wedge a_{32} P a_3 \wedge a_{33} P a_3 \wedge a_{41} \equiv a_2 a_{31} a_2 \wedge a_{42} \equiv a_2 a_{32} a_2 \wedge a_{43} \equiv a_2 a_{33} a_2$$
$$\wedge \sim a_1 \subseteq a_{21} \wedge \sim a_1 \subseteq a_{22} \wedge \sim a_8 \subseteq a_{21} \wedge \sim a_{11} \subseteq a_{21}$$
$$\to \sim a_1 a_{11} a_{21} a_8 a_{13} a_{42} a_{13} a_{43} a_8^3 a_{13} a_{41} a_8 a_{42} a_{10} a_{41} a_{12} a_8 a_{42} a_{10} a_{41} a_{12} a_{22} a_9^2 a_{12} a_{11} a_{42} a_5 a_{10}$$
$$a_{43} a_9 a_{12} a_{43} a_{10} a_4 a_9 a_{12} a_{13} a_{41} a_8^2 a_{11} a_{41} a_{10} a_4 a_{12} a_{43} a_{10} a_{41} a_9 a_{12} a_{22} a_9^2 a_{12} a_{13} a_{41} a_8 a_{41} a_{10}$$
$$a_{41} a_{12} a_{22} a_9^2 a_1 \subseteq a_0 \qquad (H_{13}^*)$$

erfüllt. Möge $\mathfrak{B}_0^*$ die Prämissen dieses Ausdrucks erfüllen; für $\mathfrak{B}_0^*(a_\nu) = \mathfrak{X}_\nu$ ergibt sich dann:

$$\mathfrak{X}_{31} = \mathfrak{a}_3^i, \quad \mathfrak{X}_{32} = \mathfrak{a}_3^j, \quad \mathfrak{X}_{33} = \mathfrak{a}_3^k, \quad \mathfrak{X}_{41} = \mathfrak{F}(a_i), \quad \mathfrak{X}_{42} = \mathfrak{F}(a_j), \quad \mathfrak{X}_{43} = \mathfrak{F}(a_k);$$
$$\mathfrak{a}_1 \text{ kommt weder in } \mathfrak{X}_{21} \text{ noch in } \mathfrak{X}_{22} \text{ vor, } \mathfrak{a}_8 \text{ und } \mathfrak{a}_{11} \text{ nicht in } \mathfrak{X}_{21}.$$

Sei $\mathfrak{T}$ der Wert des langen Terms und etwa $\mathfrak{T} = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{T}_1 \mathfrak{a}_1$. Es steht fest, daß $\mathfrak{a}_1$ nicht in $\mathfrak{T}_1$ auftritt. Zu zeigen haben wir: $\mathfrak{T}$ *kommt nicht in* $\mathfrak{X}^*$ *vor.* Das ist klar, falls es keine arithmetische Aussage H mit $\mathfrak{F}(H) = \mathfrak{T}_1$ gibt. Wenn es jedoch eine gibt, genügt es, sie als *wahr* zu erweisen. Für $\mathfrak{X}_{21} = \mathfrak{F}(Z_1)$, $\mathfrak{X}_{22} = \mathfrak{F}(Z_2)$ erhält man

$$H = Z_1 (\forall a_j \forall a_k (((\forall a_i (a_j = a_i \to (a_j = a_i \to Z_2)) \to \sim a_j' = a_k) \to a_k = O)$$
$$\to \forall a_i ((\sim a_i = O \to a_k = a_i) \to Z_2)) \to \forall a_i (a_i = a_i \to Z_2))$$

mit dem Zusatz:

$$(\text{ und } \sim \text{ nicht in } Z_1,$$

dem man sofort entnimmt, daß auch $)$ in Z_1 fehlt. In H müssen, wie in jedem Ausdruck, die Grundzeichen (und) gleich oft vorkommen, und für Z_2 gilt daher (offensichtlich!) dasselbe. Aus der Struktur des Endes der Zeichenreihe H geht hervor, daß Z_2 *Ausdruck* ist. Wir setzen $Z_2 = H_0$ und $H = Z_1 H_1$; wie man an der Verteilung der Klammern sieht, ist dieses H_1 ein Ausdruck. Deshalb kann Z_1

nur aus vorgesetzten Negationen — diese waren aber ausgeschlossen — und Quantifikationen bestehen; weil jedoch $\mathfrak{F}(Z)$ für $Z = \exists$ nicht definiert war, ist $Z_1 H_1$ *eine Generalisierte* („closure“) von H_1, folglich nur noch zu zeigen, daß H_1, daß also

$$\forall a_j \forall a_k (((\forall a_i (a_j = a_i \to H_0) \wedge a_j' = a_k) \vee a_k = O) \\ \to \forall a_i ((a_i = O \vee a_k = a_i) \to H_0)) \to \forall a_i (a_i = a_i \to H_0)$$

arithmetisch-allgemeingültig ist. Und das ist der Fall, ob nun a_i in H_0 vollfrei vorkommt oder gar nicht. (Siehe auch § 2, Abschnitt 3.)

Zur Abkürzung setzen wir noch

$$\forall a_{20} \forall a_{21} \forall a_{22} \forall a_{23} \forall a_{31} \forall a_{32} \forall a_{33} \forall a_{41} \forall a_{42} \forall a_{43} \forall a_{51} \forall a_{52} \forall a_{53} \bigwedge_{\nu=1}^{13} H_\nu^* = H^*.$$

Die Aussage

$$\exists a_0 \exists a_1 \ldots \exists a_{12} \exists a_{13} H^* \tag{A13}$$

ist wahr. Das Axiomensystem ax^* soll aus den Ausdrücken I1 bis I5 und A1 bis A13 bestehen.

5. Wir vervollständigen die Aufstellung der beiden Theorien: Die *Ableitbarkeitseigenschaft* soll die in elementaren Theorien übliche sein. Die Menge der aus einer Menge M von Ausdrücken ableitbaren Ausdrücke ist die kleinste der Mengen N, die M umfassen, alle aussagenlogisch allgemeingültigen Ausdrücke (der betr. Theorie) enthalten und in bezug auf

Abtrennung,
Anwendung der vier Quantifizierungsregeln[1]),
Umbenennung gebundener Variabler und
Einsetzung von Termen in freie Variable[2])

abgeschlossen sind. Auf eine Präzisierung dieser wohlbekannten Schlußregeln dürfen wir hier verzichten, zumal bei den Ableitungen in § 2 deutlich zu sehen sein wird, unter welchen Bedingungen wir die Regeln anwenden.

Überlicherweise nimmt man (unendlich viele) „logische“ Axiome zu den „eigentlichen“ hinzu, nämlich etwa die 15 Schemata

$$H_1 \to (H_2 \to H_1),$$
$$(H_1 \to (H_1 \to H_2)) \to (H_1 \to H_2),$$
$$(H_1 \to H_2) \to ((H_2 \to H_3) \to (H_1 \to H_3)),$$
$$\ldots,$$

die den HILBERT-BERNAYSschen Axiomen für den Aussagenkalkül[3]) entsprechen. Wir können selbstverständlich diese Axiomenschemata auch den Schlußregeln zurechnen und haben

---

[1]) *Wenn* $H_1(a_i) \to H_2 \in N$, *so* $\forall a_i H_1(a_i) \to H_2 \in N$ (vordere Generalisierung) *und, falls* a_i *nicht frei in* H_2 *vorkommt, auch* $\exists a_i H_1(a_i) \to H_2 \in N$ (vordere Partikularisierung). Entsprechend die hintere Partikularisierung und Generalisierung.

[2]) Speziell: Umbenennung freier Variabler.

[3]) D. HILBERT und P. BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I, Berlin 1934, S. 66.

dann im erweiterten Kalkül 18 Axiome, 1 Schlußregel mit zwei Prämissen, 6 Schlußregeln mit einer Prämisse und 15 Schlußregeln mit null Prämissen.

Um kurz auszudrücken, daß der Ausdruck H *aus* ax^* *ableitbar* ist, schreiben wir „$\vdash H$". Ausdrücke H_1 und H_2 heißen *syntaktisch äquivalent*, falls $\vdash H_1 \leftrightarrow H_2$. Sie heißen *ableitbarkeitsgleich*, falls $\vdash H_1$ genau dann, wenn $\vdash H_2$. Ableitbarkeitsgleichheit folgt aus syntaktischer Äquivalenz.

Satz 1. *Für arithmetische Ausdrücke H gilt: Wenn* $\vdash H$, *so* agH.

Beweis. Wenn $\vdash H$, so ag^*H. Für $H \in ax^*$ haben wir das nachgeprüft, und bei Anwendung der Schlußregeln vererbt sich Allgemeingültigkeit. Wenn ag^*H, so agH — nach Lemma 1.

Damit beschließen wir vorläufig die semantischen Überlegungen; der nächste Paragraph enthält fast ausschließlich syntaktische.

§ 2. Ableitung der Induktionsaxiome aus ax^*

1. Wir wenden uns zunächst dem engeren Formalismus zu und beginnen mit einigen einfachen Ableitungen aus I1 bis I5.

Unter der Voraussetzung, daß in den arithmetischen Termen T_1, T_2, T_3 die Variablen a_i und a_j nicht vorkommen, erhält man mühelos:

$$\vdash T_1' = T_2 \leftrightarrow \forall a_i (a_i = T \rightarrow a_i' = T_2),$$

$$\vdash T_1 \dotplus T_2 = T_3 \leftrightarrow \forall a_i \forall a_j (a_i = T_1 \wedge a_j = T_2 \rightarrow a_i \dotplus a_j = T_3).$$

Zu jedem arithmetischen Ausdruck gibt es demzufolge einen syntaktisch äquivalenten, der nur aus Ausdrücken $a_i = O$, $a_i = a_j$, $a_i' = a_j$, $a_i + a_j = a_k$ und $a_i \cdot a_j = a_k$ — falls erforderlich: unter Ausschluß der Ausdrücke $a_i + a_i = a_i$ und $a_i \cdot a_i = a_i$ — prädikatenlogisch aufgebaut ist. (1)

$T^{a_i}//_{a_j}$ sei eine der Zeichenreihen, die aus T dadurch hervorgehen, daß a_i (an allen oder einigen Stellen oder auch überhaupt nicht) durch a_j ersetzt wird; entsprechend: $H^{a_i}//_{a_j}$. (Kommt a_i nicht in T vor, so ist natürlich $T^{a_i}//_{a_j} = T$.) Induktiv über die Term- bzw. Ausdrucksstufe beweist man das LEIBNIZsche Ersetzbarkeitstheorem für arithmetische Terme:

$$\vdash a_i = a_j \rightarrow T = T^{a_i}//_{a_j}$$

und für arithmetische Ausdrücke:

$$\vdash a_i = a_j \rightarrow (H \leftrightarrow H^{a_i}//_{a_j}); \tag{2}$$

dabei soll in H die Variable a_i vollfrei, a_j dagegen gar nicht vorkommen. Unter ebendiesen Voraussetzungen ergibt sich aus (2):

$$\vdash H \leftrightarrow \forall a_j (a_i = a_j \rightarrow H^{a_i}//_{a_j}), \tag{3a}$$

$$\vdash H \leftrightarrow \exists a_j (a_i = a_j \wedge H^{a_i}//_{a_j}). \tag{3b}$$

Die Indizes $i_1, \ldots, i_n$ seien alle verschieden, und jede der Variablen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ möge in H genau einmal (also sicherlich vollfrei) auftreten. Dann führt $(n-1)$-malige Anwendung von (3b) zu:

$$\vdash H(a_{i_1}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_1}) \leftrightarrow \exists a_{i_2} \ldots \exists a_{i_n} \Big(\bigwedge_{\nu=1}^{n-1} a_{i_\nu} = a_{i_{\nu+1}} \wedge a_{i_n} = a_{i_1} \wedge H(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n})\Big). \tag{4}$$

Sind die Indizes $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}$ alle verschieden und kommen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ je genau einmal in H vor, a_{i_0} und $a_{i_{n+1}}$ dagegen gar nicht, so erhält man auf ähnliche Weise:

$$\vdash H(a_{i_0}, a_{i_0}, \ldots, a_{i_0}) \longleftrightarrow \exists a_{i_1} \ldots \exists a_{i_{n+1}} \Big(\bigwedge_{\nu=0}^{n} a_{i_\nu} = a_{i_{\nu+1}} \wedge a_{i_{n+1}} = a_{i_{n+1}} \wedge H(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_n}) \Big). \quad (5)$$

Zu (4) bzw. (5) bemerken wir: Auf der rechten Seite kommt a_{i_1} genau dreimal bzw. a_{i_0} genau einmal vor; die „neuen" Variablen (die links fehlen) stehen in dem ( )-Ausdruck je genau dreimal; alle anderen Variablen kommen rechts gleich oft vor wie links.

Unter einem *reduzierten Ausdruck* verstehen wir einen Ausdruck H, auf den folgendes zutrifft:

(a) H ist nur aus prädikativen Ausdrücken

$$a_i = O,\; a_i = a_j,\; a_i' = a_j,\; (a_i + a_j) = a_k,\; (a_i \cdot a_j) = a_k \qquad (i, j, k \geqq 14)$$

ausschließlich der Ausdrücke $(a_i + a_i) = a_i$ und $(a_i \cdot a_i) = a_i$ prädikatenlogisch zusammengesetzt, und zwar nur mit Hilfe von $\sim$, $\rightarrow$, $\forall$, enthält also $\wedge$, $\vee$, $\longleftrightarrow$, $\exists$ nicht.

(b) Der Wirkungsbereich einer jeden quantifizierten Variablen enthält diese an genau drei Stellen.

Zu jedem arithmetischen Ausdruck gibt es einen ableitbarkeitsgleichen — und bis auf Variablenumbenennungen sogar syntaktisch äquivalenten — reduzierten Ausdruck, in dem jede freie Variable genau einmal vorkommt; (6)

wir konstruieren ihn aus dem vorgegebenen Ausdruck in sechs Schritten: Zusammengesetzte Terme werden gemäß (1) aufgelöst. Wiederholte Anwendung von (4) bewirkt, daß (b) gilt. Bei geeigneter Umbenennung gebundener Variabler werden alle freien Variablen vollfrei. Durch wiederholte Anwendung von (5) erreicht man, daß jede vollfreie Variable nur noch einmal vorkommt und weiterhin (b) gilt. In bekannter Weise werden $\wedge$, $\vee$, $\longleftrightarrow$ und $\exists$ eliminiert. Der so konstruierte Ausdruck ist mit dem vorgegebenen syntaktisch äquivalent. Zuletzt werden sämtliche Variablenindizes um 14 erhöht.

2. Parallel zu $\mathfrak{F}$ erklären wir eine Funktion Φ durch die Festsetzungen:

$\Phi(♀) = ♀$	
$\Phi(a_i) = a_2 a_3^i a_2$	(Beispiel: $\Phi(a_5) = a_2 a_3 a_3 a_3 a_3 a_3 a_2$)
$\Phi(O) = a_4$	
$\Phi(') = a_5$	$\Phi(=) = a_{10}$
$\Phi(+) = a_6$	$\Phi(\sim) = a_{11}$
$\Phi(\cdot) = a_7$	$\Phi(\rightarrow) = a_{12}$
$\Phi(() = a_8$	$\Phi(\forall) = a_{13}$
$\Phi()) = a_9$	$\Phi(Z_1 Z_2) = \Phi(Z_1)\, \Phi(Z_2)$.

Jeder Zeichenreihe des engeren Kalküls, die $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$ nicht enthält, war durch $\mathfrak{F}$ ein *Element von* J^* und ist jetzt durch Φ eine *Zeichenreihe* (nämlich $\female$ oder ein Term des erweiterten Kalküls) eindeutig zugeordnet.

Lemma 2.[1]) *Für jede reduzierte arithmetische Aussage* H *gilt*:

$$\vdash H^* \wedge H \to a_1\, \Phi(H)\, a_1 \subseteq a_0 .$$

Anmerkung. Man kann sogar

$$H^* \to (H \leftrightarrow a_1\, \Phi(H)\, a_1 \subseteq a_0)$$

ableiten, wenn man zu $\bigwedge_{\nu=1}^{13} H_\nu^*$ noch das besonders einfache, ebenfalls von jeder ausgezeichneten Belegung erfüllte[2]) Konjunktionsglied

$$a_1 a_{20} a_1 \subseteq a_0 \to \sim a_1 a_{11} a_{20} a_1 \subseteq a_0 \qquad (H_{14}^*)$$

hinzunimmt:

$$\vdash H^* \to (\sim a_1\, \Phi(\sim H)\, a_1 \subseteq a_0 \to \sim\sim H) \quad \text{(Kontraposition im Lemma)},$$
$$\vdash H^* \to (a_1\, \Phi(H)\, a_1 \subseteq a_0 \to \sim a_1\, \Phi(\sim H)\, a_1 \subseteq a_0) \quad (\text{weil } \vdash H^* \to H_{14}^*),$$
$$\vdash H^* \to (a_1\, \Phi(H)\, a_1 \subseteq a_0 \to H), \quad \text{q. e. d.}$$

Beweis zu Lemma 2. Wir zeigen allgemeiner:

Ist H *ein reduzierter Ausdruck und* $H = Z_0 \prod_{\nu=1}^{n} (a_{i_\nu} Z_\nu)$ $(n \geqq 0)$, *wobei* $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ *in keiner der Zeichenreihen* $Z_0, \ldots, Z_n$ *vorkommen, in* H *dagegen vollfrei, und* H *außer diesen* a_{i_ν} *keine freien Variablen enthält, so gilt*:

$$\vdash H^* \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n} a_{i_\nu} P a_5 \wedge H \to a_1\, \Phi(Z_0) \prod_{\nu=1}^{n} (a_4 a_{i_\nu}\, \Phi(Z_\nu))\, a_1 \subseteq a_0 . \qquad (7)$$

Es genügt, zu beweisen:

[a] *Wenn* H *prädikativer oder verneinter prädikativer Ausdruck ist, so* (7).
[b] *Wenn* (7) *für* $H = H_1$ *und für* $H = \sim H_1$, *so* (7) *für* $H = \sim H_1$ *und für* $H = \sim\sim H_1$.
[c] *Wenn* (7) *für* $H = H_1$, $H = \sim H_1$, $H = H_2$, $H = \sim H_2$, *so* (7) *für* $H = (H_1 \to H_2)$ *und für* $H = \sim(H_1 \to H_2)$.
[d] *Wenn* a_i *in* H_1 *vollfrei vorkommt — und zwar an genau drei Stellen — und* (7) *für* $H = H_1$ *und für* $H = \sim H_1$, *so* (7) *für* $H = \forall a_i\, H_1$ *und für* $H = \sim\forall a_i\, H_1$.

Zu [a]. $\vdash \bigwedge_{\nu=1}^{13} H_\nu^* \to H_2^*$,

nach 13-maliger vorderer Generalisierung:

$$\vdash H^* \to H_2^* ,$$

[1]) Dieses Lemma entspricht dem KLEENEschen Lemma 6 (a. a. O., S. 41).

[2]) Kommt $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{X}_{20} \mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{X}^*$ vor, so gibt es eine *wahre* Aussage H_0 derart, daß $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{X}_{20} \mathfrak{a}_1$ mit $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{F}(H_0) \mathfrak{a}_1$ beginnt. Sicherlich kommt dann $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{X}_{20} \mathfrak{a}_1$ nicht in $\mathfrak{X}^*$ vor, weil sonst auch $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_{11} \mathfrak{F}(H_0) \mathfrak{a}_1$, also $\mathfrak{a}_1 \mathfrak{F}(\sim H_0) \mathfrak{a}_1$, in $\mathfrak{X}^*$ läge, was wegen der Falschheit von $\sim H_0$ unmöglich ist.

nach Umbenennung von a_{51} in a_i und a_{52} in a_j an den Stellen, wo a_{51} bzw. a_{52} frei vorkommt, und nach einfacher aussagenlogischer Umformung:

$$\vdash H^* \wedge a_i Pa_5 \wedge a_j Pa_5 \wedge a_i = a_j \rightarrow a_1 a_4 a_i a_{10} a_4 a_j a_1 \subseteq a_0 \tag{8}$$

— das ist (7) für $H = a_i = a_j$. Indem man H_3^* statt H_2^* heranzieht, erhält man ebenso leicht:

$$\vdash H^* \wedge a_i Pa_5 \wedge a_j Pa_5 \wedge a_i \neq a_j \rightarrow a_1 a_{11} a_4 a_i a_{10} a_4 a_j a_1 \subseteq a_0 \tag{9}$$

— das ist (7) für $H = a_i \neq a_j$. Geht man entsprechend von H_4^* bzw. H_5^* bzw. H_6^* bzw. H_7^* aus, so ergibt sich (7) für $H = (a_i + a_j) = a_k$, $\sim(a_i + a_j) = a_k$, $(a_i \cdot a_j) = a_k$ und $\sim(a_i \cdot a_j) = a_k$. Weiter:

$$\vdash H^* \wedge a_i Pa_5 \wedge OPa_5 \wedge a_i = O \rightarrow a_1 a_4 a_i a_{10} a_4 O a_1 \subseteq a_0$$

((8) mit a_j/O),

$$\vdash a_1 a_4 a_i a_{10} a_4 O a_1 \subseteq a_0 \rightarrow a_1 a_4 a_i a_{10} a_4 a_1 \subseteq a_0$$

(aus A2),

$$\vdash H^* \rightarrow OPa_5$$

(aus A9, denn $\vdash H^* \rightarrow Aa_5$, weil $\vdash H^* \rightarrow H_1^*$), also

$$\vdash H^* \wedge a_i Pa_5 \wedge a_i = O \rightarrow a_1 a_4 a_i a_{10} a_4 a_1 \subseteq a_0$$

— das ist (7) für $H = a_i = O$. Jetzt setzen wir $a_1 a_4 a_i a_5 a_{10} a_4 a_j a_1 \subseteq a_0 = \chi$ und finden:

$$\vdash H^* \wedge a_i a_5 Pa_5 \wedge a_j Pa_5 \wedge a_i a_5 = a_j \rightarrow \chi$$

((8) mit $a_i/a_i a_5$),

$$\vdash a_i Pa_5 \rightarrow a_i a_5 Pa_5$$

(aus A10),

$$\vdash H^* \rightarrow a_i' = a_i a_5$$

(wegen A12 und H_1^*) und daher

$$\vdash H^* \rightarrow (a_i' = a_j \rightarrow a_i a_5 = a_j)$$

(aus I2), also

$$\vdash H^* \wedge a_i Pa_5 \wedge a_j Pa_5 \wedge a_i' = a_j \rightarrow \chi$$

— das ist (7) für $H = a_i' = a_j$. Für $H = a_i \neq O$ und für $H = a_i' \neq a_j$ zieht man (9) statt (8) heran.

Zu [b]. Wir setzen $\bigwedge_{\nu=1}^{n} a_{i_\nu} Pa_5 = K$ und $\Phi(Z_0) \prod_{\nu=1}^{n} (a_4 a_{i_\nu} \Phi(Z_\nu)) = \Gamma$. Jedes in Γ enthaltene Grundzeichen ist eine der Variablen $a_\nu (2 \leq \nu \leq 13)$ oder eine der Variablen a_{i_ν} $(1 \leq \nu \leq n)$. Nun gilt aber:

$$\vdash H_1^* \rightarrow \sim a_1 \subseteq a_\nu \qquad \text{für } 2 \leq \nu \leq 13;$$

$$\vdash Aa_1 \wedge \sim a_1 \subseteq a_5 \wedge a_{i_\nu} Pa_5 \rightarrow \sim a_1 \subseteq a_{i_\nu} \qquad \text{(wegen A6)},$$

demnach

$$\vdash H_1^* \wedge K \rightarrow \sim a_1 \subseteq a_{i_\nu} \qquad \text{für } 1 \leq \nu \leq n.$$

Wiederholte Anwendung von A 5 liefert:

$$\vdash H_1^* \wedge K \rightarrow \sim a_1 \subseteq \Gamma,$$

erst recht:

$$\vdash H^* \wedge K \rightarrow \sim a_1 \subseteq \Gamma. \tag{10}$$

Nach Voraussetzung gelte (7) für $H = H_1$:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge H_1 \rightarrow a_1 \Gamma a_1 \subseteq a_0. \tag{11}$$

Wir finden:

$$\begin{array}{llr} \vdash H^* & \rightarrow (\sim a_1 \subseteq \Gamma \wedge a_1\Gamma a_1 \subseteq a_0 \rightarrow a_1 a_{11} a_{11} \Gamma a_1 \subseteq a_0), & \text{denn } \vdash H^* \rightarrow H_8^*; \\ \vdash H^* \wedge K & \rightarrow \quad (a_1 \Gamma a_1 \subseteq a_0 \rightarrow a_1 a_{11} a_{11} \Gamma a_1 \subseteq a_0) & \text{wegen (10);} \\ \vdash H^* \wedge K \wedge \sim \sim H_1 \rightarrow & \quad a_1 a_{11} a_{11} \Gamma a_1 \subseteq a_0 & \text{wegen (11)} \end{array}$$

— und das ist (7) für $H = \sim\sim H_1$.

Zu [c]. Es seien H_1 und H_2 reduzierte Ausdrücke, $H_1 = X_0 \prod_{\nu=1}^{n} (a_{i_\nu} X_\nu)$, $H_2 = Y_0 \prod_{\mu=1}^{m} (a_{i_{n+\mu}} Y_\mu)$; die Variablen $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{n+m}}$ sollen nicht in $X_0, \ldots, X_n$, $Y_0, \ldots, Y_m$ vorkommen, in $(H_1 \rightarrow H_2)$ jedoch vollfrei und als einzige freie Variablen. Wir setzen

$$\begin{array}{ll} \bigwedge_{\nu=1}^{n} a_{i_\nu} P a_5 = K_1, & \Phi(X_0) \prod_{\nu=1}^{n} (a_4 a_{i_\nu} \Phi(X_\nu)) = \Gamma_1, \\ \bigwedge_{\nu=n+1}^{n+m} a_{i_\nu} P a_5 = K_2, & \Phi(Y_0) \prod_{\mu=1}^{m} (a_4 a_{i_{n+\mu}} \Phi(Y_\mu)) = \Gamma_2, \\ K_1 \wedge K_1 = K, & a_8 \Gamma_1 a_{12} \Gamma_2 a_9 = \Gamma. \end{array}$$

Die Voraussetzungen sind:

$$\left.\begin{array}{l} \vdash H^* \wedge K_1 \wedge \quad H_1 \rightarrow \quad a_1 \Gamma_1 a_1 \subseteq a_0, \\ \vdash H^* \wedge K_1 \wedge \sim H_1 \rightarrow a_1 a_{11} \Gamma_1 a_1 \subseteq a_0, \\ \vdash H^* \wedge K_2 \wedge \quad H_2 \rightarrow \quad a_1 \Gamma_2 a_1 \subseteq a_0, \\ \vdash H^* \wedge K_2 \wedge \sim H_2 \rightarrow a_1 a_{11} \Gamma_2 a_1 \subseteq a_0. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Wie (10) ergibt sich:

$$\vdash H^* \wedge K \rightarrow \sim a_1 \subseteq \Gamma_1 \wedge \sim a_1 \subseteq \Gamma_2. \tag{13}$$

Aussagenlogisch evident ist:

$$\begin{array}{ll} \vdash H^* \wedge K \wedge (H_1 \rightarrow H_2) \rightarrow & ((H^* \wedge K_1 \wedge \quad H_1) \wedge (H^* \wedge K_2 \wedge \quad H_2)) \\ & \vee ((H^* \wedge K_1 \wedge \sim H_1) \wedge (H^* \wedge K_2 \wedge \quad H_2)) \\ & \vee ((H^* \wedge K_1 \wedge \sim H_1) \wedge (H^* \wedge K_2 \wedge \sim H_2)), \end{array}$$

und (12) führt zu:

$$\left.\begin{array}{ll} \vdash H^* \wedge K \wedge (H_1 \rightarrow H_2) \rightarrow & (\quad a_1 \Gamma_1 a_1 \subseteq a_0 \wedge \quad a_1 \Gamma_2 a_1 \subseteq a_0) \\ & \vee (a_1 a_{11} \Gamma_1 a_1 \subseteq a_0 \wedge \quad a_1 \Gamma_2 a_1 \subseteq a_0) \\ & \vee (a_1 a_{11} \Gamma_1 a_1 \subseteq a_0 \wedge a_1 a_{11} \Gamma_2 a_1 \subseteq a_0). \end{array}\right\} \tag{14}$$

In H_9^* setzt man Γ_1 für a_{21} und Γ_2 für a_{22} ein:

$$\vdash H^* \to (\sim a_1 \subseteq \Gamma_1 \wedge \sim a_1 \subseteq \Gamma_2 \wedge \Delta \to a_1 \Gamma a_1 \subseteq a_0)\,, \tag{15}$$

wenn Δ die Conclusio aus (14) ist. Aus (15), (13) und (14) zusammen folgt:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge (H_1 \to H_2) \to a_1 \Gamma a_1 \subseteq a_0$$

— das ist (7) für $H = (H_1 \to H_2)$. Ähnlich wie H_9^* für dieses H zieht man H_{10}^* für $H = \sim(H_1 \to H_2)$ heran.

Zu [d]. In dem reduzierten Ausdruck H komme a_i vollfrei vor, und zwar an genau drei Stellen; es sei $H = Z_0 \prod_{\nu=1}^{n} (a_{i_\nu} Z_\nu)$ und $i_k = i_l = i_m = i$ (mit $1 \leqq k < l < m \leqq n$); die a_{i_ν} sollen in keinem Z_ν vorkommen und die einzigen freien Variablen in H sein. Aus den Bedingungen für reduzierte Ausdrücke geht hervor, daß

$$\textit{H weder mit einer Variablen beginnt noch auf eine Variable endet} \tag{16}$$

und daß

$$\textit{in H nirgends eine Variable unmittelbar auf eine Variable folgt;} \tag{17}$$

keine der Zeichenreihen Z_ν $(0 \leqq \nu \leqq n)$ ist demnach leer.

Käme nämlich in H etwa $a_j a_{j_1}$ vor, so enthielte H einen Teilausdruck $\forall a_j H_0$ derart, daß H_0 mit a_{j_1} beginnt; dann könnte H_0 nur eine der Formen $a_j = O$, $a_{j_1} = a_{j_2}$, $a_{j_1}' = a_{j_2}$ haben — aber diese H_0 enthalten gewiß nicht, wie verlangt, a_j dreimal. In den mit einer Variablen *beginnenden* reduzierten Ausdrücken kommt a_i nicht dreimal vor. Beim Nachweis, daß H auch nicht auf eine Variable *endet*, wird gebraucht, daß die beiden Zeichenreihen $(a_i \dotplus a_i) = a_i$ nicht in H vorkommen können.

Wir setzen

$$\bigwedge_{\nu=1}^{k-1} a_{i_\nu} P a_5 \wedge \bigwedge_{\nu=k+1}^{l-1} a_{i_\nu} P a_5 \wedge \bigwedge_{\nu=l+1}^{m-1} a_{i_\nu} P a_5 \wedge \bigwedge_{\nu=m+1}^{n} a_{i_\nu} P a_5 = K\,,$$

$$\Phi(Z_0) \prod_{\nu=1}^{k-1} (a_4 a_{i_\nu} \Phi(Z_\nu)) = \Gamma_0\,, \qquad \Phi(Z_k) \prod_{\nu=k+1}^{l-1} (a_4 a_{i_\nu} \Phi(Z_\nu)) = \Gamma_1\,,$$

$$\Phi(Z_l) \prod_{\nu=l+1}^{m-1} (a_4 a_{i_\nu} \Phi(Z_\nu)) = \Gamma_2\,, \qquad \Phi(Z_m) \prod_{\nu=m+1}^{n} (a_4 a_{i_\nu} \Phi(Z_\nu)) = \Gamma_3\,,$$

$$\Gamma_0 a_4 a_i \Gamma_1 a_4 a_i \Gamma_2 a_4 a_i \Gamma_3 = \Delta_1\,,$$

$$\Phi(\forall a_i) \Gamma_0 \Phi(a_i) \Gamma_1 \Phi(a_i) \Gamma_2 \Phi(a_i) \Gamma_3 = \Delta_2\,.$$

Die Voraussetzungen sind:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge a_i P a_5 \wedge \quad H \to \quad a_1 \Delta_1 a_1 \subseteq a_0\,, \tag{18a}$$

$$\vdash H^* \wedge K \wedge a_i P a_5 \wedge \sim H \to a_1 a_{11} \Delta_1 a_1 \subseteq a_0\,. \tag{18b}$$

Zu zeigen haben wir:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \quad \forall a_i H \to \quad a_1 \Delta_2 a_1 \subseteq a_0\,, \tag{19b}$$

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \sim \forall a_i H \to a_1 a_{11} \Delta_2 a_1 \subseteq a_0\,. \tag{19b}$$

Wegen (16) und (17) sind Γ_0, Γ_1, Γ_2, Γ_3 nicht leer, also wirklich *Terme*, die man in H_{11}^* bzw. H_{12}^* für a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23} einsetzen darf:

$$\vdash H^* \to (a_3^i P a_3 \wedge \bigwedge_{\lambda=0}^{3} (\sim a_1 \subseteq \Gamma_\lambda \wedge \sim \Phi(a_i) \subseteq \Gamma_\lambda) \wedge \forall a_i (a_i P a_5 \to a_1 \Delta_1 a_1 \subseteq a_0) \to a_1 \Delta_2 a_1 \subseteq a_0) \quad (20\,\mathrm{a})$$

und

$$\vdash H^* \to (a_3^i P a_3 \wedge \bigwedge_{\lambda=0}^{3} (\sim a_1 \subseteq \Gamma_\lambda \wedge \sim \Phi(a_i) \subseteq \Gamma_\lambda) \wedge \exists a_i (a_i P a_5 \wedge a_1 a_{11} \Delta_1 a_1 \subseteq a_0) \to a_1 a_{11} \Delta_2 a_1 \subseteq a_0)\,. \quad (20\,\mathrm{b})$$

Aus A9 und A10 erhält man: $\vdash H_1^* \to a_3 P a_3$, $\vdash a_3^j P a_3 \to a_3^{j+1} P a_3$ $(j \geqq 1)$, also:

$$\vdash H^* \to a_3^i P a_3\,. \quad (21)$$

Wie (10) ergibt sich:

$$\vdash H^* \wedge K \to \sim a_1 \subseteq \Gamma_\lambda \quad (\lambda = 0,\, 1,\, 2,\, 3). \quad (22)$$

Sei nun $\Gamma_\lambda = X_0 \prod_{\sigma=1}^{s} (a_2 a_3^{j_\sigma} a_2 X_\sigma)$ $(s \geqq 0,\ j_\sigma \geqq 14,\ j_\sigma \neq i)$, wobei a_3 in $X_0, \ldots, X_s$ nicht vorkommt. Sicherlich ist $X_0 \neq \text{♀}$: Wegen $\Gamma_\lambda \neq \text{♀}$ wäre sonst nämlich $s \geqq 1$, so daß ($\lambda = 0$:) H mit a_{j_1} begönne bzw. ($\lambda = 1, 2, 3$:) H die Zeichenreihe $a_i a_{j_1}$ enthielte — entgegen (16) bzw. (17). Übrigens sind auch alle anderen X_σ nicht leer. — Falls $s = 0$, ergibt sich wieder wie (10):

$$\vdash H^* \wedge K \to \sim a_3 \subseteq \Gamma_\lambda,$$

und daraufhin aus A4:

$$\vdash H^* \wedge K \to \sim \Phi(a_i) \subseteq \Gamma_\lambda\,. \quad (23)$$

Wir beweisen jetzt (23) für $s > 0$. Zur Abkürzung sei $X_0 \prod_{\sigma=1}^{t} (a_2 a_3^{j_\sigma} a_2 X_\sigma) = Y_t$ gesetzt $(0 \leqq t \leqq s)$; wir zeigen:

1. $\vdash H^* \wedge K \to \sim \Phi(a_i) \subseteq Y_0 a_2$.
   [Wie (10): $\vdash H^* \wedge K \to \sim a_3 \subseteq Y_0 a_2$; danach: A4.]

2. *Wenn* $\vdash H^* \wedge K \to \sim \Phi(a_i) \subseteq Y_{t-1} a_2$, *so* $\vdash H^* \wedge K \to \sim \Phi(a_i) \subseteq Y_t a_2$ $(0 < s < t)$.
   [Zunächst aus A3 und A4: $\vdash H^* \to \sim a_3^\varrho \subseteq O$ für $\varrho \geqq 1$. Danach,
   falls $j_t > i$: A7 mit $a_1/a_2 X_t a_2$, a_{31}/a_3^i, $a_{32}/a_3^{j_t - i}$, a_0/Y_{t-1}[1]);
   falls $j_t < i$: A8 mit $a_1/a_2 X_t a_2$, $a_{31}/a_3^{i-j_t}$, $a_{32}/a_3^{j_t}$, a_0/Y_{t-1}.]

3. *Wenn* $\vdash H^* \wedge K \to \sim \Phi(a_i) \subseteq Y_{s-1} a_2$, *so* $\vdash H^* \wedge K \to \sim \Phi(a_i) \subseteq Y_s$.
   [Falls $j_s > i$: A7 mit $a_1/a_2 X_s$, a_{31}/a_3^i, $a_{32}/a_3^{j_s - i}$, a_0/Y_{s-1};
   falls $j_s < i$: A8 mit $a_1/a_2 X_s$, $a_{31}/a_3^{i-j_s}$, $a_{32}/a_3^{j_s}$, a_0/Y_{s-1}.]

Damit ist (23) allgemein bestätigt. Mit Hilfe von (21), (22), (23) können wir (20a) und (20b) vereinfachen:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \forall a_i (a_i P a_5 \to a_1 \Delta_1 a_1 \subseteq a_0) \to a_1 \Delta_2 a_1 \subseteq a_0, \quad (24\,\mathrm{a})$$

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \exists a_i (a_i P a_5 \wedge a_1 a_{11} \Delta_1 a_1 \subseteq a_0) \to a_1 a_{11} \Delta_2 a_1 \subseteq a_0\,. \quad (24\,\mathrm{b})$$

---

[1]) Man beachte: Weil $X_0 \neq \text{♀}$, ist Y_{t-1} ebenfalls nicht leer, also tatsächlich ein Term.

Aus (18a) erhalten wir:

$$\vdash H \to (H^* \wedge K \wedge a_i P a_5 \to a_1 \Delta_1 a_1 \subseteq a_0);$$

nach vorderer Generalisierung, aussagenlogischer Umformung, hinterer Generalisierung:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \forall a_i H \to \forall a_i \,(a_i P a_5 \to a_1 \Delta_1 a_1 \subseteq a_0)$$

— und daraus mittels (24a) die Behauptung (19a).

Es sei $j \geqq 14$ und a_j irgendeine Variable, die nicht in H vorkommt.

$$\vdash a_j P a_5 \wedge a_i = a_j \wedge \sim H(a_i) \to a_j P a_5 \wedge \sim H(a_j);$$

nach hinterer Partikularisierung:

$$\vdash a_j P a_5 \wedge a_i = a_j \to (\sim H(a_i) \to \exists a_j \,(a_j P a_5 \wedge \sim H(a_j)));$$

nach vorderer Partikularisierung und Benutzung von All:

$$\vdash A a_5 \to (\sim H(a_i) \to \exists a_i \,(a_i P a_5 \wedge \sim H(a_i)));$$

hieraus (Prämissenvertauschung, vordere Partikularisierung, Prämissenvertauschung, $\vdash H^* \to A a_5$):

$$\vdash H^* \to (\exists a_i \sim H \to \exists a_i \,(a_i P a_5 \wedge \sim H)). \tag{25}$$

Aus (18b) erhalten wir:

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \exists a_i \,(a_i P a_5 \wedge \sim H) \to \exists a_i \,(a_i P a_5 \wedge a_1 a_{11} \Delta_1 a_1 \subseteq a_0),$$

denn in K kommt a_i gar nicht, in H^* nicht frei vor;

$$\vdash H^* \wedge K \wedge \exists a_i \sim H \qquad\qquad \to \exists a_i \,(a_i P a_5 \wedge a_1 a_{11} \Delta_1 a_1 \subseteq a_0)$$

wegen (25) — und hieraus mit Hilfe von (24b) die Behauptung (19b).

Damit ist Lemma 2 bewiesen.

3. Alle Induktionsaxiome (aus dem PEANOschen Axiomensystem) sind aus $\boldsymbol{ax^*}$ ableitbar — es gilt

Satz 2. $\vdash H(O) \wedge \forall a_i (H(a_i) \to H(a_i')) \to \forall a_i H(a_i)$,
wenn $H(a_i)$ ein arithmetischer Ausdruck ist.

Beweis. Den gemäß (6) gebildeten mit H syntaktisch äquivalenten Ausdruck nennen wir H_0. Es genügt, die Behauptung mit „H_0“ statt „H“ zu beweisen. Aus H_0 werde H_{00}, wenn man alle Variablenindizes um 14 erhöht; H_{00} ist der in (6) genannte mit H ableitbarkeitsgleiche reduzierte Ausdruck, der jede freie Variable nur an einer Stelle enthält. In H_{00} mögen a_j und a_k nicht vorkommen ($j > k \geqq 14$). Sind $a_{i+14}, a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ ($n \geqq 0$) die — voneinander verschiedenen — vollfreien Variablen in H_{00}, so ist die Zeichenreihe

$$\prod_{\nu=1}^{n} (\forall a_{i_\nu})(\forall a_j \forall a_k (((\forall a_{i+14}(a_j = a_{i+14} \to (a_j = a_{i+14} \to H_{00})) \to a_j' \neq a_k) \to a_k = O)$$
$$\to \forall a_{i+14}((a_{i+14} \neq O \to a_k = a_{i+14}) \to H_{00})) \to \forall a_{i+14}(a_{i+14} = a_{i+14} \to H_{00})),$$

die wir Γ_{00} nennen wollen, eine reduzierte Aussage. Lemma 2, kontraponiert, ergibt:

$$\vdash H^* \to (\sim a_1 \Phi(\sim \Gamma_{00}) a_1 \subseteq a_0 \to \Gamma_{00}). \tag{26}$$

Andererseits erhält man, indem man in der Conclusio von $H^* \to H^*_{13}$ die Substitutionen

$$a_{31}/a_3^{i+14}; \quad a_{32}/a_3^j; \quad a_{33}/a_3^k; \quad a_{41}/\Phi(a_{i+14}); \quad a_{42}/\Phi(a_j); \quad a_{43}/\Phi(a_k);$$

$$a_{21}/\prod_{\nu=1}^{n} \Phi(\forall a_{i_\nu}), \text{ falls } n \geqq 1; \quad a_{21}/O, \text{ falls } n=0; \quad a_{22}/\Phi(H_{00})$$

ausführt:

$$\vdash H^* \to \sim a_1 \Phi(\sim \Gamma_{00})\, a_1 \subseteq a_0 \tag{27}$$

— nachdem man A1 (sowie A2, falls $n = 0$) berücksichtigt und, wie im Beweis des Lemmas, die Ausdrücke

$$H^* \to a_3^\mu P a_3 \qquad (\mu = i + 14,\ j,\ k);$$

$$\left.\begin{array}{ll} H^* \to \sim a_\mu \subseteq \prod_{\nu=1}^{n} \Phi(\forall a_{i_\nu}), & \text{falls } n \geqq 1, \\ H^* \to \sim a_\mu \subseteq O, & \text{falls } n = 0; \end{array}\right\} (\mu = 1,\ 8,\ 11)$$

$$H^* \to \sim a_1 \subseteq \Phi(H_{00})$$

abgeleitet hat. Aus (26) und (27) folgt:

$$\vdash H^* \to \Gamma_{00}.$$

In H^* kommen vollfrei genau die Variablen $a_0, \ldots, a_{13}$ vor, die ja in Γ_{00} fehlen:

$$\vdash \prod_{\nu=0}^{13} (\exists a_\nu)\, H^* \to \Gamma_{00}.$$

A13 wird abgetrennt:

$$\vdash \Gamma_{00}.$$

Nun bleibt nur noch Γ_{00} ableitbarkeitsgleich umzuformen. Nach Streichung des Präfixes $\prod_{\nu=1}^{n} (\forall a_{i_\nu})$ und einfachen aussagenlogischen Umformungen entsteht

$$\forall b \forall c (((\forall a (b = a \to H_0(a)) \wedge b' = c) \vee c = O) \to \forall a (a = O \vee c = a \to H_0(a))) \to \forall a H_0(a),$$

wenn man die Variablenindizes alle um 14 erniedrigt und zur Abkürzung $a_i = a$, $a_{j-14} = b$, $a_{k-14} = c$ setzt. Auf Grund von (3a) ist die Prämisse dieser Implikation syntaktisch äquivalent mit

$$\forall b \forall c ((H_0(b) \wedge b' = c) \vee c = O \to H_0(O) \wedge H_0(c)),$$

$$\forall b \forall c\ (H_0(b) \wedge b' = c \to H_0(O) \wedge H_0(c)) \wedge \forall c (c = O \to H_0(O) \wedge H_0(c)),$$

$$\forall b (H_0(b) \to H_0(O) \wedge H_0(b')) \qquad \wedge H_0(O),$$

also mit

$$H_0(O) \wedge \forall a (H_0(a) \to H_0(a')),$$

was zu beweisen war.

Bei den obigen Ableitungen wurde von H_1^* nur die Teilkonjunktion

$$\bigwedge_{\substack{\nu=1,2,3,\\5,8,11}} A a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=2}^{13} \sim a_1 \subseteq a_\nu \wedge \sim a_3 \subseteq a_2 \wedge \bigwedge_{\nu=4}^{13} \sim a_3 \subseteq a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=2,3,13} \sim a_8 \subseteq a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=2,3,13} \sim a_{11} \subseteq a_\nu$$

benutzt. Erwähnt sei auch, daß wir bei den H_ν^* einen Ausdruck wie

$$\forall a_{14} (A a_{14} \to \bigvee_{\lambda=1}^{13} a_{14} \equiv a_\lambda)$$

entbehren konnten. — In den Axiomen und Ableitungen haben wir weder die Eigenschaft (von J^*-Elementen), $\mathfrak{F}$-Bild eines arithmetischen *Ausdrucks* zu sein, noch die *Substitutions*relation explizit auszudrücken brauchen — das erstere infolge der Induktionsbeweisanordnung bei Lemma 2, das letztere auf Grund der Umformung (6).

§ 3. Varianten des Resultats

1. Die Konstanten $\subseteq$, A und P sind explizit elementar durch $\equiv$ definierbar:

$$ag^*\, a_1 \subseteq a_2 \leftrightarrow \exists a_3 \exists a_4\, a_3 a_1 a_4 \equiv a_2 ,$$
$$ag^*\, A a_0 \leftrightarrow \forall a_1 (a_1 \subseteq a_0 \to (a_1 \equiv a_0 \leftrightarrow \sim a_1 a_1 \equiv a_1)) ,$$
$$ag^*\, a_1 P a_2 \leftrightarrow A a_2 \wedge \forall a_3 (A a_3 \wedge a_3 \subseteq a_1 \to a_3 \equiv a_2) .$$

Zu der dritten Äquivalenz ist zu bemerken: Wenn $\mathfrak{B}^*$ die rechte Seite erfüllt, ist $\mathfrak{B}^*(a_1)$ endlich, denn jedes J^*-Element von transfiniter Länge enthält ein echtes Endstück von $\mathfrak{X}^*$, also unendlich oft $\mathfrak{a}_1$ und unendlich viele Abschnitte $\mathfrak{F}(H)$ — also sicherlich verschiedene Atome.

Man kommt demnach im erweiterten Kalkül mit $\equiv$ als einzigem zusätzlichen Grundzeichen aus.

Wir können noch weiter gehen und auch O, $'$, $+$, $\cdot$ und $=$ durch $\equiv$ definieren. *Endlichkeit* einer Folge (und auch der *Rest* einer Folge modulo ω) ist nämlich durch Folgenverknüpfung leicht elementar beschreibbar[1]), und ebenfalls, daß zwei *endliche* Folgen *gleich lang* sind.[2]) Somit läßt sich elementar ausdrücken, wann zwei Folgen *modulo ω die gleiche Länge besitzen,* also das Grundzeichen $=$ eliminieren. Die von uns eingeführte *Addition* und *Multiplikation* innerhalb J^* kann man elementar definieren, wenn man es im Bereich der (immer *endlichen*) Potenzen des Atoms $\mathfrak{a}_5$ kann. Gerade das hat aber QUINE[3]) in „general syntax" getan, d. h. in der elementaren Theorie der Verkettung endlicher Folgen, zu deren Bildung mindestens zwei Elemente zur Verfügung stehen. — Mit $+$ und $\cdot$ sind dann auch O und $'$ eliminierbar.

Aus endlich vielen „reinen $\equiv$-Axiomen" und den fünf Ausdrücken, die die Konstanten O, $'$, $+$, $\cdot$ und $=$ explizit definieren, ist das volle PEANO*sche Axiomensystem ableitbar, doch keine falsche arithmetische Aussage.*

2. Jeden prädikativen Ausdruck $\prod_{\nu=1}^{n} a_{k_\nu} \equiv \prod_{\mu=1}^{m} a_{l_\mu}$ kann man durch Ausdrücke $a_i a_j \equiv a_k$ — oder statt ihrer: $Vk\, a_i a_j a_k$ — elementar umschreiben.[4]) So wird der Kalkül für die Folgenverknüpfung *termfrei*, und der Individuenbereich J^* braucht nicht mehr abgeschlossen bzgl. Folgenverknüpfung zu sein. *Wir kommen aus mit Folgen bis zum Typ ω einschließlich*; es genügt z. B., in J^* alle endlichen

---

[1]) Vgl. S. 287.

[2]) K. HÄRTIG, Explizite Definitionen einiger Eigenschaften von Zeichenreihen. Diese Zeitschr. 2 (1956), 177—203; § 5.

[3]) W. V. QUINE, Concatenation as a basis for arithmetic. J. Symb. Log. 11 (1946), 105—114.

[4]) Vgl. Teil II, § 3, Abschnitt 2.

Folgen und alle Endstücke von $\mathfrak{X}^*$ aufzunehmen. Die Interpretation des erweiterten Kalküls, auf der doch unser Beweis beruhte, vereinfacht sich also.

Es gibt einen elementaren Kalkül K *und in ihm Ausdrücke* H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 *sowie ein endliches Axiomensystem* ax^* *mit folgenden Eigenschaften:*

K *hat das Grundzeichen* Vk *als einzige außerlogische Konstante. Die Zeichenreihen* $Vk\,a_i a_j a_k$ *sind die einzigen prädikativen Ausdrücke.*

Aus ax^* *und den expliziten Definitionen*

$$a_0 = O \longleftrightarrow H_1,$$
$$a_1 = a_2 \longleftrightarrow H_2,$$
$$a_1' = a_2 \longleftrightarrow H_3,$$
$$a_1 + a_2 = a_3 \longleftrightarrow H_4,$$
$$a_1 \cdot a_2 = a_3 \longleftrightarrow H_5$$

ist — bei geeigneter Fassung der Termeinsetzungsregel — *das* PEANO*sche Axiomensystem ableitbar, jedoch kein* n i c h t *(arithmetisch-) allgemeingültiger arithmetischer Ausdruck.*

In diesem Sinne haben wir hier, um mit QUINE zu sprechen, „concatenation as a basis for arithmetic“.

Teil II: Der allgemeine Fall

§ 1. Die drei Kalküle. Semantische Überlegungen

1. Die *Zeichenreihen Z* des vorgegebenen e n g e r e n Kalküls K_1 werden gebildet durch Verkettung je endlich vieler von den *Grundzeichen*

$$c_1, \ldots, c_p \quad \text{(Individuenkonstanten; } p \geqq 0\text{)},$$
$$f_1, \ldots, f_q \quad \text{(Funktionenkonstanten; } q \geqq 0\text{)},$$
$$R_1, \ldots, R_r \quad \text{(Prädikatenkonstanten; } r \geqq 1\text{)},$$
$$a,\ |,\ \sim,\ \rightarrow,\ \forall,\ (,\ )$$

(in bestimmter Reihenfolge, mit oder ohne Wiederholungen), die wir auch gelegentlich in der obigen Anordnung als ζ_τ $(1 \leqq \tau \leqq t_1)$ bezeichnen werden $(t_1 = p + q + r + 7)$. Als (Individuen-)*Variablen* verwenden wir nicht zusätzliche Grundzeichen, sondern die speziellen Zeichenreihen[1] a_i:

$$a_1 =_{\mathrm{Df}} a\,|\,a, \qquad a_2 =_{\mathrm{Df}} a\,||\,a, \qquad a_3 =_{\mathrm{Df}} a\,|||\,a, \qquad \ldots$$

Jedem f_λ und jedem R_λ ist eine positive ganze Zahl m_λ bzw. n_λ, die *Leerstellenzahl* von f_λ bzw. R_λ, eindeutig zugeordnet. *Terme* (aus K_1) heißen die Elemente der kleinsten Menge von Zeichenreihen, die die Individuenkonstanten und -variablen enthält und mit Zeichenreihen $T_1, \ldots, T_{m_\lambda}$ jeweils auch die Zeichenreihe $f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} T_\mu$ enthält $(1 \leqq \lambda \leqq q)$.[2]

[1] QUINE: tallies, insulated by the atom a; MARKOV: $(a, |)$-звенья.

[2] Wir übernehmen aus Teil I die auf Seite 252 eingeführten Abkürzungen („Π“ usw.).

Prädikative Ausdrücke werden in K_1 die Zeichenreihen $R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} T_\nu$ $(1 \leqq \lambda \leqq r)$, bei denen $T_1, \ldots, T_{n_\lambda}$ Terme sind, und nur sie. *Ausdrücke* schlechthin (aus K_1) baut man mit Hilfe von $\sim, \rightarrow, \forall$, (,) aus prädikativen auf. *Aussagen* sind, wie immer, Ausdrücke ohne freie Variablen.

Eine Interpretation von K_1 sei vorgegeben. Ihr zugrunde liege ein (mindestens zwei Elemente enthaltender) Individuenbereich J. Gegeben sind

p ausgezeichnete Elemente von J: $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_p$;
q Funktionen: $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_q$
($\mathfrak{f}_\lambda$ ordnet jedem m_λ-Tupel von J-Elementen eindeutig ein J-Element zu);
r Attribute, d. h. Relationen oder Eigenschaften: $\mathfrak{R}_1, \ldots, \mathfrak{R}_r$
($\mathfrak{R}_\lambda$ ist eine Menge von n_λ-Tupeln von Elementen aus J).

Als *Belegungen* $\mathfrak{B}$ benutzen wir Folgen des Typus ω von Elementen aus J. Zu jedem Term T und jeder Belegung $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{x}_\nu\}_{0 \leqq \nu < \omega}$ wird ein J-Element *Wert* $(T, \mathfrak{B})$ dadurch eindeutig bestimmt, daß man fordert:

$$Wert\ (c_\lambda, \mathfrak{B}) = \mathfrak{c}_\lambda,$$
$$Wert\ (a_i, \mathfrak{B}) = \mathfrak{x}_i,$$
$$Wert\ (f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} T_\mu, \mathfrak{B}) = \mathfrak{f}_\lambda\ (Wert\ (T_1, \mathfrak{B}), \ldots, Wert\ (T_{m_\lambda}, \mathfrak{B})).$$

Bei der (ebenfalls induktiven) Definition, wann eine Belegung $\mathfrak{B}$ einen Ausdruck H *erfüllt* (abgekürzt: wann $\mathfrak{B}$ *Erf* H), kommt es auf die prädikativen Ausdrücke H an:

$$\mathfrak{B}\ Erf\ R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} T_\nu \text{ genau dann, wenn } [Wert(T_1, \mathfrak{B}), \ldots, Wert(T_{n_\lambda}, \mathfrak{B})] \in \mathfrak{R}_\lambda.$$

Der Ausdruck H ist *allgemeingültig* (*ag* H), wenn $\mathfrak{B}$ *Erf* H bei jeder Belegung $\mathfrak{B}$. Allgemeingültige Aussagen heißen *wahr.*

Nun eine GÖDEL-*Numerierung* der nicht-leeren Zeichenreihen aus K_1: Für $1 \leqq \tau \leqq t_1$ setzen wir
$$Gö(\zeta_\tau) = \tau$$
und
$$Gö(Z\zeta_\tau) = (t_1 + 1) \cdot Gö(Z) + \tau,$$
so daß beispielsweise $Gö(\zeta_7\zeta_1\zeta_4\zeta_4) = 7 \cdot (t_1+1)^3 + 1 \cdot (t_1+1)^2 + 4 \cdot (t_1+1) + 4$ wird.

Wir werden nebeneinander (und ohne großen Aufwand voneinander unabhängig) die beiden Fälle behandeln, daß in K_1 ein Axiomensystem *ax* (also eine nicht-leere allgemein-rekursive Menge *allgemeingültiger* Ausdrücke) oder aber — der KLEENEschen Voraussetzung entsprechend — eine rekursiv-aufzählbare Menge *ax* von *allgemeingültigen* Ausdrücken ausgezeichnet ist. In beiden Fällen nehmen wir der Einfachheit halber an, daß *ax* nur (wahre) Aus*sagen* enthalte. Im zweiten Falle setzen wir, weil es technisch eine kleine Vereinfachung erlauben wird, außerdem voraus, daß die Menge $Gö(ax)$ der Zahlen $Gö(H)$ mit $H \in ax$ der Wertevorrat einer auf *positives* Argument eingeschränkten allgemein-rekursiven Funktion ist; auch diese Forderung bedeutet keine Beschränkung der Allgemeinheit.

Die in Abschnitt 2. benutzte Definition allgemein-rekursiver Funktionen ist im wesentlichen eine der von KLEENE stammenden; wir lehnen uns an eine Darstellung von KALMÁR[1]) an, verwenden jedoch die Zeichenreihe ST statt T' [„S": successor], entsprechend S^nO statt $O^{(n)}$, weil wir so beim Termaufbau Klammern und Kommata, also zusätzliche Grundzeichen, vermeiden können.

2. Wir dürfen einen Kalkül K_2 — zur Berechnung der in die Definition von ax eingehenden rekursiven Funktion — als fest vorgegeben annehmen, für den gilt:

K_2 hat die (von allen den ζ_τ aus K_1 verschiedenen) *Grundzeichen*

$$O, v_1, \ldots, v_k, S, g, g_1, \ldots, g_l, =$$

$(k \geqq 1,\ l \geqq 0)$, die wir auch gelegentlich in dieser Anordnung als ζ_τ $(t_1 + 1 \leqq \tau \leqq t_1 + t_2)$ bezeichnen werden $(t_2 = k + l + 4)$. Jedem der „arithmetischen Funktoren" g_λ ist eine positive ganze Zahl γ_λ — seine *Leerstellenzahl* — eindeutig zugeordnet. *Terme* (aus K_2) sind die Elemente der kleinsten Menge von Zeichenreihen, die

$O, v_1, \ldots, v_k$ enthält,
stets mit T auch ST und gT enthält und
mit $T_1, \ldots, T_{\gamma_\lambda}$ jeweils auch $g_\lambda \prod_{\nu=1}^{\gamma_\lambda} T_\nu$ enthält $(1 \leqq \lambda \leqq l)$.

Ausdrücke in K_2 sind nur die *Termgleichungen*, d. h. die Zeichenreihen $T_1 = T_2$, sofern T_1 und T_2 Terme (aus K_2) sind. Das sogenannte *definierende Gleichungssystem* Σ ist eine endliche Menge von Termgleichungen, die etwa die Elemente

$$Gl_1, \ldots, Gl_s$$

hat. Die Menge der *aus Σ ableitbaren* Termgleichungen ist die kleinste Menge M von Zeichenreihen, auf die zutrifft:

(a) $\Sigma \subseteq M$.

(b) Wenn $Z_1 \in M$, so auch $Z_2 \in M$ — falls Z_2 dadurch aus Z_1 hervorgeht, daß man für das Grundzeichen $v_\varkappa$ in Z_1 überall O oder aber überall $Sv_\varkappa$ einsetzt.

(c) Wenn $Z_1 \in M$ und $T_1 = T_2 \in M$, so auch $Z_2 \in M$ — falls man Z_2 erhalten kann, wenn man in Z_1 nach Belieben (also nirgends oder an einigen Stellen oder so oft es möglich ist) T_1 durch T_2 ersetzt.

Statt (c) genügt offenbar:

(c′) Wenn $Z_1 T_1 Z_2 \in M$ und $T_1 = T_2 \in M$, so $Z_1 T_2 Z_2 \in M$.

Bei allgemein-rekursivem ax gilt schließlich:

$$\left.\begin{array}{l} \textit{Aus } \Sigma \textit{ ist } gS^nO = S^mO \\ \text{(a) } \textit{genau für } m = 0 \textit{ ableitbar, falls } n \in Gö(ax), \textit{ und} \\ \text{(b) } \textit{genau für } m = 1 \textit{ ableitbar, falls } n \notin Gö(ax). \end{array}\right\} \qquad (1)$$

[1]) L. KALMÁR, Ein direkter Beweis für die allgemein-rekursive Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems des Prädikatenkalküls der ersten Stufe mit Identität. Diese Zeitschr. 2 (1956), 1—14; Seite 2—5.

Statt dessen gilt bei rekursiv-aufzählbarem ax:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{(a)} & \textit{Zu jeder natürlichen Zahl } m \textit{ gibt es genau eine natürliche Zahl } n, \textit{ für die } gS^mO = S^nO \textit{ aus } \Sigma \textit{ ableitbar ist.}\\ \text{(b)} & \textit{Wenn } n \in Gö(ax), \textit{ so gibt es mindestens ein } m \geqq 1, \textit{ für das } gS^mO = S^nO \textit{ aus } \Sigma \textit{ ableitbar ist.}\\ \text{(c)} & \textit{Wenn } n \notin Gö(ax), \textit{ so gibt es kein } m \geqq 1, \textit{ für das } gS^mO = S^nO \textit{ aus } \Sigma \textit{ ableitbar ist.}\end{array}\right\} \quad (2)$$

Übrigens wird (2a) im folgenden nicht ausgenutzt.

3. Der erweiterte Kalkül K_3 soll die *Grundzeichen*

$$\left.\begin{array}{l} a_0,\, a^*,\, a^{**},\, b,\, b_1,\, \ldots,\, b_9,\\ \bar{c}_1,\, \ldots,\, \bar{c}_p,\, \bar{f}_1,\, \ldots,\, \bar{f}_q,\, \bar{R}_1,\, \ldots,\, \bar{R}_r,\\ \bar{O},\, \bar{v}_1,\, \ldots,\, \bar{v}_k,\, \bar{S},\, \bar{g},\, \bar{g}_1,\, \ldots,\, \bar{g}_l \end{array}\right\} \quad (3)$$

und

$$\equiv,\ \dot{=},\ \cong,\ \subseteq,\ A,\ N,\ P,\ B,\ Sub,\ D,\ G,\ \wedge,\ \vee,\ \longleftrightarrow,\ \exists$$

zusätzlich zu denen von K_1 besitzen. Als *Variablen* in K_3 verwenden wir außer den alten a_i die Grundzeichen (3). *Terme erster Art* seien die Terme aus K_1. Als *Terme zweiter Art* bezeichnen wir die nicht-leeren Zeichenreihen, die sich durch Verkettung je endlich vieler Terme erster Art bilden lassen. *Prädikative Ausdrücke* in K_3 sind erstens die prädikativen Ausdrücke aus K_1, zweitens die Zeichenreihen

$$T_1 \equiv T_2,\ T_1 \dot{=} T_2,\ T_1 \cong T_2,\ T_1 \subseteq T_2,\ AT_1,\ NT_1,\ T_1PT_2,\ BT_1,$$
$$T_1SubT_2SubT_3SubT_4,\ DT_1,\ T_1GT_2,$$

sofern T_1, T_2, T_3, T_4 Terme zweiter Art sind[1]). *Ausdrücke* (aus K_3) schlechthin erhält man durch prädikatenlogische Zusammensetzung.

Nun zur Interpretation des Kalküls K_3! In dem alten Individuenbereich J, der die Mächtigkeit $\mathfrak{m}\,(\geqq 2)$ habe, mögen (voneinander verschiedene) Elemente

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{b}_1,\, \ldots,\, \mathfrak{b}_9,\\ \bar{\mathfrak{c}}_1,\, \ldots,\, \bar{\mathfrak{c}}_p,\, \bar{\mathfrak{f}}_1,\, \ldots,\, \bar{\mathfrak{f}}_q,\, \bar{\mathfrak{R}}_1,\, \ldots,\, \bar{\mathfrak{R}}_r,\\ \bar{\mathfrak{O}},\, \bar{\mathfrak{v}}_1,\, \ldots,\, \bar{\mathfrak{v}}_k,\, \bar{\mathfrak{S}},\, \bar{\mathfrak{g}},\, \bar{\mathfrak{g}}_1,\, \ldots,\, \bar{\mathfrak{g}}_l \end{array}\right\} \quad (4)$$

nicht vorkommen. Wir nehmen sie zu J hinzu und erhalten J'. Ist α_0 die kleinste Ordnungszahl, deren Repräsentanten die Mächtigkeit $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$ besitzen, so soll der neue *Individuenbereich* J^* die Menge aller Folgen $\{\mathfrak{x}_\beta\}_{0 \leqq \beta < \alpha}$ mit $0 \leqq \alpha < \alpha_0$ und $\mathfrak{x}_\beta \in J'$ sein. Vom Typus $\alpha = 0$ ist die „leere Folge"; vom Typus (von der „Länge") $\alpha = 1$ sind die „Atome", d. h. die eingliedrigen Folgen $[\mathfrak{x}]$ mit $\mathfrak{x} \in J'$. Durch *Verknüpfung* der Folgen $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ (in dieser Reihenfolge!) entsteht die eindeutig bestimmte Folge $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$; auch die Verknüpfung unendlich vieler (in einer bestimmten Wohlordnung gegebener) Folgen ist anschaulich klar und leicht explizit definierbar. Wir setzen noch $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^1$ und $\mathfrak{X}^i\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^{i+1}$ $(\mathfrak{X} \in J^*,\ 1 \leqq i < \omega)$.

---

[1]) „$SubT_1T_2T_3T_4$" statt „$T_1SubT_2SubT_3SubT_4$" würde zu Komplikationen führen.

Jedem $\mathfrak{X}$ aus J^* ordnen wir eindeutig ein Element $\dot{\mathfrak{X}}$ aus J zu: Falls $\mathfrak{x}$ erstes Glied der Folge $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{x} \in J$ ist, sei $\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{x}$; für leeres $\mathfrak{X}$ dagegen und für alle $\mathfrak{X} \in J^*$, deren erstes Glied nicht zu J gehört, sei $\dot{\mathfrak{X}}$ ein und dasselbe (beliebige, aber bestimmte) Element $\mathfrak{c}$ aus J. Beispielsweise wird $\dot{\mathfrak{X}} = \mathfrak{c}_\lambda$ für $\mathfrak{X} = [\mathfrak{c}_\lambda]$.

Wir definieren eine Funktion $\mathfrak{F}$, die jeder nicht-leeren Zeichenreihe aus K_1 oder K_2 eindeutig eine (endliche) *Folge* aus J^* zuordnet, und parallel dazu eine Funktion Φ, die jeder nicht-leeren Zeichenreihe aus K_1 oder K_2 eindeutig eine *Zeichenreihe* (nämlich einen Term zweiter Art) zuordnet, indem wir fordern:

$$\begin{array}{rl}
\mathfrak{F}(a) = [\mathfrak{b}_2] & \Phi(a) = b_2 \\
\mathfrak{F}(|) = [\mathfrak{b}_3] & \Phi(|) = b_3 \\
\mathfrak{F}(\sim) = [\mathfrak{b}_4] & \Phi(\sim) = b_4 \\
\mathfrak{F}(\rightarrow) = [\mathfrak{b}_5] & \Phi(\rightarrow) = b_5 \\
\mathfrak{F}(\forall) = [\mathfrak{b}_6] & \Phi(\forall) = b_6 \\
\mathfrak{F}(() = [\mathfrak{b}_7] & \Phi(() = b_7 \\
\mathfrak{F}()) = [\mathfrak{b}_8] & \Phi()) = b_8 \\
\mathfrak{F}(=) = [\mathfrak{b}_9] & \Phi(=) = b_9 \\
\mathfrak{F}(c_1) = [\bar{\mathfrak{c}}_1], \ldots, \mathfrak{F}(c_p) = [\bar{\mathfrak{c}}_p] & \Phi(c_1) = \bar{c}_1, \ldots, \Phi(c_p) = \bar{c}_p \\
\mathfrak{F}(f_1) = [\bar{\mathfrak{f}}_1], \ldots, \mathfrak{F}(f_q) = [\bar{\mathfrak{f}}_q] & \Phi(f_1) = \bar{f}_1, \ldots, \Phi(f_q) = \bar{f}_q{}^{1)} \\
\mathfrak{F}(R_1) = [\bar{\mathfrak{R}}_1], \ldots, \mathfrak{F}(R_r) = [\bar{\mathfrak{R}}_r] & \Phi(R_1) = \bar{R}_1, \ldots, \Phi(R_r) = \bar{R}_r \\
\mathfrak{F}(O) = [\bar{\mathfrak{O}}] & \Phi(O) = \bar{O} \\
\mathfrak{F}(v_1) = [\bar{\mathfrak{v}}_1], \ldots, \mathfrak{F}(v_k) = [\bar{\mathfrak{v}}_k] & \Phi(v_1) = \bar{v}_1, \ldots, \Phi(v_k) = \bar{v}_k \\
\mathfrak{F}(S) = [\bar{\mathfrak{S}}], \mathfrak{F}(g) = [\bar{\mathfrak{g}}] & \Phi(S) = \bar{S}, \Phi(g) = \bar{g} \\
\mathfrak{F}(g_1) = [\bar{\mathfrak{g}}_1], \ldots, \mathfrak{F}(g_l) = [\bar{\mathfrak{g}}_l] & \Phi(g_1) = \bar{g}_1, \ldots, \Phi(g_l) = \bar{g}_l \\
\mathfrak{F}(Z_1 Z_2) = \mathfrak{F}(Z_1)\,\mathfrak{F}(Z_2) & \Phi(Z_1 Z_2) = \Phi(Z_1)\,\Phi(Z_2).
\end{array}$$

Eine *Belegung* $\mathfrak{B}^*$ ist eine eindeutige Funktion, die jeder Variablen ein Element von J^* zuordnet. Es soll gelten:

$$Wert^*(c_\lambda, \mathfrak{B}^*) = [\mathfrak{c}_\lambda] \quad (1 \leq \lambda \leq p).$$

$$Wert^*(T, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{B}^*(T), \text{ wenn } T \text{ eine Variable ist.}$$

Sind $T_1, \ldots, T_{m_\lambda}$ Terme erster Art und $Wert^*(T_\mu, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{T}_\mu$ für $1 \leqq \mu \leqq m_\lambda$, so ist

$$Wert^*\left(f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} T_\mu, \mathfrak{B}^*\right) = [\mathfrak{f}_\lambda(\dot{\mathfrak{T}}_1, \ldots, \dot{\mathfrak{T}}_{m_\lambda})] \quad (1 \leqq \lambda \leqq q).^{2)}$$

---

[1]) Man beachte: $\mathfrak{f}_1$ ist eine Funktion, f_1 eine Funktionskonstante, $\bar{\mathfrak{f}}_1$ ein Individuum und $\bar{f}_1$ eine Individuenvariable.

[2]) Im Grunde haben wir eine *Übertragung* der Funktionen $\mathfrak{f}_\lambda$ und der Relationen $\mathfrak{R}_\lambda$ *in* J^* *hinein* vor uns, bei der die *Homomorphie* der durch „·" angedeuteten Abbildung von J^* auf J nach Konstruktion gesichert ist.

Sind T_1 und T_2 Terme zweiter Art, so ist

$$Wert^*(T_1 T_2, \mathfrak{B}^*) = Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)\, Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*).$$

Durch diese Forderungen ist für jeden K_3-Term T und jede Belegung $\mathfrak{B}^*$ das J^*-Element $Wert^*(T, \mathfrak{B}^*)$ eindeutig festgelegt. — Ist auch jetzt $Wert^*(T_\nu, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{T}_\nu$, so soll weiter gelten:

$$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} T_\nu \text{ genau dann, wenn } [\dot{\mathfrak{T}}_1, \ldots, \dot{\mathfrak{T}}_{n_\lambda}] \in \mathfrak{R}_\lambda \quad (1 \leqq \lambda \leqq r) \tag{5}$$

— vorausgesetzt, daß die T_ν Terme erster Art sind.

Und für Terme zweiter Art:

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 \equiv T_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2$.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 \doteq T_2$ genau dann, wenn $\dot{\mathfrak{T}}_1 = \dot{\mathfrak{T}}_2$.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 \cong T_2$ genau dann, wenn es eine natürliche Zahl $i \geqq 1$ mit $\mathfrak{T}_2 = [\mathfrak{b}_3]^i$ gibt, die die Länge auch von $\mathfrak{T}_1$ ist, und $\mathfrak{T}_1$ nur aus J-Elementen besteht.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 \subseteq T_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}_1$ zusammenhängend in $\mathfrak{T}_2$ vorkommt.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ AT_1$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}_1$ ein „altes" Atom ist, d. h.: wenn es ein $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x} \in J$ und $\mathfrak{T}_1 = [\mathfrak{x}]$ gibt.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ NT_1$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}_1$ nicht leer ist und nur aus „neuen" Atomen besteht, nämlich nur Elemente (4) als Folgenglieder enthält.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 P T_2$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}_1$ eine „Potenz" von $\mathfrak{T}_2$ ist, d. h.: wenn $\mathfrak{T}_2$ Atom ist und ein i mit $1 \leqq i < \omega$ und $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{T}_2^i$ existiert.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ BT_1$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}_1$ eine (K_1-)Belegung, also eine Folge vom Typ ω mit Gliedern nur aus J ist.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 Sub T_2 Sub T_3 Sub T_4$ genau dann, wenn es in K_2 nicht-leere Zeichenreihen Z_1, Z_3, Z_4 sowie ein Grundzeichen Z_2 derart gibt, daß $\mathfrak{T}_\nu = \mathfrak{F}(Z_\nu)$ ist ($\nu = 1, 2, 3, 4$) und Z_4 durch Substitution von Z_3 für Z_2 aus Z_1 hervorgeht.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ DT_1$ genau dann, wenn es (in K_2) eine aus Σ ableitbare Termgleichung Gl mit $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{F}(Gl)$ gibt.

$\mathfrak{B}^*\ Erf^*\ T_1 G T_2$ genau dann, wenn es in K_1 eine (nicht-leere) Zeichenreihe Z gibt, für die $\mathfrak{T}_1 = \mathfrak{S}^{G\delta(Z)}$ und $\mathfrak{T}_2 = \mathfrak{F}(Z)$.

Durch diese Forderungen ist festgelegt, wann eine Belegung $\mathfrak{B}^*$ einen K_3-Ausdruck H *erfüllt* ($\mathfrak{B}^*\ Erf^* H$). „H ist *allgemeingültig* (in K_3)" („$ag^* H$") bedeutet, daß $\mathfrak{B}^*\ Erf^* H$ bei jedem $\mathfrak{B}^*$.

4. Lemma 1. *Für Ausdrücke H des engeren Kalküls gilt:*

$ag^* H$ genau dann, wenn $ag H$.

Der Beweis verläuft wie der entsprechende in Teil I. Gegeben sei eine beliebige Belegung $\mathfrak{B}^*$. Wir setzen $\mathfrak{B}^*(a_i) = \mathfrak{X}_i$ und $\dot{\mathfrak{X}}_i = \mathfrak{B}(a_i)$. Ist nun T ein Term aus K_1 und $Wert^*(T, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{T}$, so wird $Wert(T, \mathfrak{B}) = \dot{\mathfrak{T}}$: Das ist klar, wenn T eine Individuenkonstante oder -variable ist; ist aber $T = f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} T_\mu$ mit

$$Wert^*(T_\mu, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{T}_\mu \text{ und } Wert(T_\mu, \mathfrak{B}) = \dot{\mathfrak{T}}_\mu \text{ für } 1 \leqq \mu \leqq m_\lambda,$$

so wird $\mathfrak{T} = [\mathfrak{f}_\lambda(\dot{\mathfrak{T}}_1, \ldots, \dot{\mathfrak{T}}_{m_\lambda})]$, also $\dot{\mathfrak{T}} = \mathfrak{f}_\lambda(\dot{\mathfrak{T}}_1, \ldots, \dot{\mathfrak{T}}_{m_\lambda}) = \mathit{Wert}(T, \mathfrak{B})$, wie behauptet. — Daß

$$\mathfrak{B}^* \mathit{Erf}^* H \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{B}\,\mathit{Erf} H, \tag{6}$$

geht für prädikative Ausdrücke H unmittelbar aus (5) und dem soeben Gezeigten hervor. Die Induktionsschritte für die aussagenlogischen Zusammensetzungen sind trivial. Der Fall der Generalisierung läßt sich auf Partikularisierung zurückführen. Wenn

$$\mathfrak{B}^* \mathit{Erf}^* \exists a_i\, H(a_i), \tag{7}$$

so gibt es ein $\mathfrak{B}_1^*$ derart, daß

$$\mathfrak{B}_1^* \mathit{Erf}^* H(a_i) \text{ und } \mathfrak{B}_1^*(a_j) = \mathfrak{B}^*(a_j) \text{ für jedes } j \neq i. \tag{8}$$

Ist etwa $\mathfrak{B}_1^*(a_\nu) = \mathfrak{Y}_\nu$, so setzen wir $\dot{\mathfrak{Y}}_\nu = \mathfrak{B}_1(a_\nu)$; für dieses $\mathfrak{B}_1$ gilt dann:

$$\mathfrak{B}_1 \mathit{Erf} H(a_i) \text{ und } \mathfrak{B}_1(a_j) = \mathfrak{B}(a_j) \text{ mindestens für } j \neq i, \tag{9}$$

das erstere nach Induktionsvoraussetzung. Damit ist gezeigt:

$$\mathfrak{B}\,\mathit{Erf} \exists a_i\, H(a_i). \tag{10}$$

Aus (10) folgt aber auch (7): Wenn (10), so gibt es ein $\mathfrak{B}_1$, auf das (9) zutrifft. Wählt man $\mathfrak{B}_1^*(a_j) = \mathfrak{B}^*(a_j)$ für $j \neq i$ und $\mathfrak{B}_1^*(a_i) = [\mathfrak{B}_1(a_i)]$, dann gilt (8) nach Induktionsvoraussetzung, somit (7).

Die Behauptung des Lemmas ergibt sich aus (6), wenn man noch berücksichtigt, daß es auch zu jeder Belegung $\mathfrak{B}$ eine Belegung $\mathfrak{B}^*$ (mit $\mathfrak{B}^*(a_i) = \mathfrak{X}_i$) gibt, für die $\dot{\mathfrak{X}}_i = \mathfrak{B}(a_i)$ wird — am einfachsten nimmt man $\mathfrak{X}_i = [\mathfrak{B}(a_i)]$.

5. Die *Interpretation von* K_1 läßt sich in den speziellen Folgen $\mathfrak{X}^*$ und $\mathfrak{X}^{**}$ gewissermaßen zusammenfassen:

Zu jedem Term T aus K_1 und zu jeder Belegung $\mathfrak{B}$ bilden wir die Folge

$$[\mathit{Wert}(T, \mathfrak{B})]\,\mathfrak{F}(T)\,\mathfrak{B}.$$

Ihr erstes Glied ist ein J-Element, an das sich endlich viele Elemente aus $J' \setminus J$ als nächste Glieder anreihen; auf diese folgen dann ω Elemente von J. Die Menge aller solchen Folgen denken wir uns — mit oder ohne Wiederholungen — wohlgeordnet (etwa zum Typ α_0) und verknüpfen die Folgen in dieser Anordnung zu $\mathfrak{X}^*$ (das dann ebenfalls den Typ α_0 besitzt).

Zu jedem Ausdruck H aus K_1 und zu jeder *ihn erfüllenden* Belegung $\mathfrak{B}$ bilden wir die Folge

$$[\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{F}(H)\,\mathfrak{B}$$

(vom Typ ω). Die Menge aller solchen Folgen („zusammengehörigen Abschnitte von $\mathfrak{X}^{**}$“) wird wohlgeordnet (wieder zum Typ α_0), und die Folgen werden in dieser Anordnung zu $\mathfrak{X}^{**}$ verknüpft[1]).

---

[1]) Die Folgenglieder $\mathfrak{b}_1$ wurden zur Markierung des *Anfangs* eines jeden zusammengehörigen Abschnitts eingeschoben.

Eine Belegung $\mathfrak{B}_0^*$ nennen wir eine *ausgezeichnete Belegung*, wenn

$$\mathfrak{B}_0^*(a^*) = \mathfrak{X}^*, \qquad \mathfrak{B}_0^*(a^{**}) = \mathfrak{X}^{**}, \qquad \mathfrak{B}_0^*(b_1) = [\mathfrak{b}_1]$$

$$\text{und } \mathfrak{B}_0^*(\Phi(\zeta_\tau)) = \mathfrak{F}(\zeta_\tau) \text{ für } 1 \leqq \tau \leqq t_1 + t_2.$$

Für ausgezeichnete Belegungen $\mathfrak{B}_0^*$ ist also beispielsweise $\mathfrak{B}_0^*(b_7) = [\mathfrak{b}_7]$, $\mathfrak{B}_0^*(\overline{R}_1) = [\overline{\mathfrak{R}}_1]$, $\mathfrak{B}_0^*(\bar{g}) = [\bar{\mathfrak{g}}]$.

Jede ausgezeichnete Belegung erfüllt die nachstehenden Ausdrücke H_1^* bis H_{44}^*. Das geht unmittelbar aus deren Interpretation hervor. Die in eckigen Klammern vorausgeschickten Stichworte sollen die Übersicht erleichtern.

[$\equiv$ betreffend:]

$$a_1 \equiv a_1 \tag{H_1^*}$$

[$\doteq$ betreffend:]

$$a_1 \doteq a_1 \tag{H_2^*}$$

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{q} \left(\bigwedge_{\mu=1}^{m_\lambda} a_{2\mu-1} \doteq a_{2\mu} \rightarrow f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} a_{2\mu-1} \doteq f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} a_{2\mu} \right) \tag{H_3^*}$$

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{r} \left(\bigwedge_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu-1} \doteq a_{2\nu} \rightarrow \left(R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu-1} \leftrightarrow R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu}\right)\right) \tag{H_4^*}$$

$$\exists a_1 (A a_1 \wedge a_2 \doteq a_1) \tag{H_5^*}$$

[$\cong$ betreffend:]

$$A a_0 \rightarrow a_0 \cong b_3 \tag{H_6^*}$$

$$a_1 \cong a_2 \wedge A a_3 \rightarrow a_1 a_3 \cong a_2 b_3 \tag{H_7^*}$$

[$\subseteq$ betreffend:]

$$a_2 \subseteq a_1 a_2 a_3 \tag{H_8^*}$$

$$a_2 \subseteq \quad a_2 a_3 \tag{H_9^*}$$

$$a_1 \equiv b_2 \vee a_1 \equiv b_8 \vee \bigvee_{\lambda=1}^{p} a_1 \equiv \bar{c}_\lambda \rightarrow \sim b_6 a_2 \subseteq a_1 \tag{H_{10}^*}$$

$$\left(\bigvee_{\substack{\nu = 2,3,4,\\ 5,7,8}} a_1 \equiv b_\nu \vee \bigvee_{\lambda=1}^{p} a_1 \equiv \bar{c}_\lambda \vee \bigvee_{\lambda=1}^{q} a_1 \equiv \bar{f}_\lambda \vee \bigvee_{\lambda=1}^{r} a_1 \equiv \overline{R}_\lambda \right) \wedge \sim b_6 a_2 \subseteq a_3 \rightarrow \sim b_6 a_2 \subseteq a_1 a_3 \tag{H_{11}^*}$$

$$a_1 P b_3 \wedge a_2 P b_3 \wedge \sim \quad b_6 b_2 a_1 b_2 \subseteq a_3 \rightarrow \sim \quad b_6 b_2 a_1 b_2 \subseteq b_6 b_2 a_1 a_2 b_2 a_3 \tag{H_{12}^*}$$

$$a_1 P b_3 \wedge a_2 P b_3 \wedge \sim b_6 b_2 a_1 a_2 b_2 \subseteq a_3 \rightarrow \sim b_6 b_2 a_1 a_2 b_2 \subseteq \quad b_6 b_2 a_1 b_2 a_3 \tag{H_{13}^*}$$

[A betreffend:]

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{p} A\, c_\lambda \tag{H_{14}^*}$$

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{q} A f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} a_\mu \tag{H_{15}^*}$$

[N betreffend:]

$$\bigwedge_{\tau=1}^{t_1} N \Phi(\zeta_\tau) \tag{H_{16}^*}$$

$$N a_1 \wedge N a_2 \rightarrow N a_1 a_2 \tag{H_{17}^*}$$

[P betreffend:]

$$b_3 P b_3 \tag{H_{18}^*}$$

$$a_1 P b_3 \to a_1 b_3 P b_3 \tag{H_{19}^*}$$

$$\bar{S} P \bar{S} \tag{H_{20}^*}$$

$$a_1 P \bar{S} \to a_1 \bar{S} P \bar{S} \tag{H_{21}^*}$$

[B betreffend:]

$$\exists a_0 \exists a_1 (B a_0 a_1 \wedge A a_0) \tag{H_{22}^*}$$

$$B a_0 a_1 \to \exists a_2 \exists a_3 (B a_0 a_2 a_3 \wedge A a_2) \tag{H_{23}^*}$$

$$B a_0 a_1 a_3 \wedge A a_1 \wedge A a_2 \to B a_0 a_2 a_3 \tag{H_{24}^*}$$

[a^*, also $\mathfrak{X}^*$ betreffend:]

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{p} (Bb \to c_\lambda \bar{c}_\lambda b \subseteq a^*) \tag{H_{25}^*}$$

$$B a_0 a_1 a_2 \wedge A a_1 \wedge a_0 \cong a_3 \to a_1 b_2 a_3 b_2 a_0 a_1 a_2 \subseteq a^* \tag{H_{26}^*}$$

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{q} \Big(Bb \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{m_\lambda} (a_{2\mu-1} a_{2\mu} b \subseteq a^* \wedge A a_{2\mu-1} \wedge N a_{2\mu}) \to f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} a_{2\mu-1} \bar{f}_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} a_{2\mu} b \subseteq a^*\Big) \tag{H_{27}^*}$$

[a^{**}, also $\mathfrak{X}^{**}$ betreffend:]

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{r} \Big(Bb \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n_\lambda} (a_{2\nu-1} a_{2\nu} b \subseteq a^* \wedge A a_{2\nu-1} \wedge N a_{2\nu}) \wedge R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu-1} \to b_1 \bar{R}_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu} b \subseteq a^{**}\Big) \tag{H_{28}^*}$$

$$\bigwedge_{\lambda=1}^{r} \Big(Bb \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n_\lambda} (a_{2\nu-1} a_{2\nu} b \subseteq a^* \wedge A a_{2\nu-1} \wedge N a_{2\nu}) \wedge \sim R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu-1} \to b_1 b_4 \bar{R}_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} a_{2\nu} b \subseteq a^{**}\Big) \tag{H_{29}^*}$$
[1]

$$Bb \wedge b_1 a_1 b \subseteq a^{**} \wedge N a_1 \to b_1 b_4 b_4 a_1 b \subseteq a^{**} \tag{H_{30}^*}$$

$$Bb \wedge b_1 a_1 b \subseteq a^{**} \to \sim b_1 b_4 a_1 b \subseteq a^{**} \tag{H_{31}^*}$$

$$\left.\begin{aligned} Bb \wedge Na_1 \wedge Na_2 \wedge ((\ & b_1 a_1 b \subseteq a^{**} \wedge b_1 a_2 b \subseteq a^{**}) \\ \vee\ & (b_1 b_4 a_1 b \subseteq a^{**} \wedge b_1 a_2 b \subseteq a^{**}) \\ \vee\ & (b_1 b_4 a_1 b \subseteq a^{**} \wedge b_1 b_4 a_2 b \subset a^{**})) \to b_1 b_7 a_1 b_5 a_2 b_8 b \subseteq a^{**} \end{aligned}\right\} \tag{H_{32}^*}$$

$$Bb \wedge Na_1 \wedge Na_2 \wedge b_1 a_1 b \subseteq a^{**} \wedge b_1 b_4 a_2 b \,\bar{\subseteq}\, a^{**} \to b_1 b_4 b_7 a_1 b_5 a_2 b_8 b \subseteq a^{**} \tag{H_{33}^*}$$

$$\left.\begin{aligned} B a_0 a_1 a_2 \wedge A a_1 \wedge a_0 \cong a_3 \wedge N a_4 \wedge b_2 a_3 b_2 \subseteq a_4 \wedge \sim b_6 b_2 a_3 b_2 \subseteq a_4 \\ \wedge \forall a_5 (A a_5 \to b_1 a_4 a_0 a_5 a_2 \subseteq a^{**}) \to b_1 b_6 b_2 a_3 b_2 a_4 a_0 a_1 a_2 \subseteq a^{**} \end{aligned}\right\} \tag{H_{34}^*}$$

$$\left.\begin{aligned} B a_0 a_1 a_2 \wedge A a_1 \wedge a_0 \cong a_3 \wedge N a_4 \wedge b_2 a_3 b_2 \subseteq a_4 \wedge \sim b_6 b_2 a_3 b_2 \subseteq a_4 \\ \wedge \exists a_5 (A a_5 \wedge b_1 b_4 a_4 a_0 a_5 a_2 \subseteq a^{**}) \to b_1 b_4 b_6 b_2 a_3 b_2 a_4 a_0 a_1 a_2 \subseteq a^{**} \end{aligned}\right\} \tag{H_{35}^*}$$

---

[1] Man beachte: $b_4 = \Phi(\sim)$, bei H_{32}^* und H_{33}^*: $b_5 = \Phi(\to)$, bei H_{34}^* und H_{35}^*: $b_6 = \Phi(\forall)$.

[*Sub* betreffend:]

$$\left.\begin{aligned}\bigwedge_{\varkappa=1}^{k}\Big(\big(a_1 \equiv \bar{O} \vee \bigvee_{\lambda=1}^{\varkappa-1} a_1 \equiv \bar{v}_\lambda \vee \bigvee_{\lambda=\varkappa+1}^{k} a_1 \equiv \bar{v}_\lambda \vee a_1 \equiv \bar{S} \vee a_1 \equiv \bar{g} \vee \bigvee_{\lambda=1}^{l} a_1 \equiv \bar{g}_\lambda \vee a_1 \equiv b_9\big)\\ \wedge (a_2 \equiv \bar{O} \vee a_2 \equiv \bar{S}\bar{v}_\varkappa)\\ \rightarrow a_1\, Sub\,\bar{v}_\varkappa\, Sub\, a_2\, Sub\, a_1\\ \wedge\, \bar{v}_\varkappa\, Sub\,\bar{v}_\varkappa\, Sub\, a_2\, Sub\, a_2\\ \wedge\, (a_3\, Sub\,\bar{v}_\varkappa\, Sub\, a_2\, Sub\, a_4 \rightarrow a_3 a_1\, Sub\,\bar{v}_\varkappa\, Sub\, a_2\, Sub\, a_4 a_1\\ \wedge\, a_3\bar{v}_\varkappa\, Sub\,\bar{v}_\varkappa\, Sub\, a_2\, Sub\, a_4 a_2)\Big)\end{aligned}\right\}\quad (H_{36}^*)^{1)}$$

[*D* betreffend:]

$$\bigwedge_{\sigma=1}^{s} D\Phi(Gl_\sigma) \qquad (H_{37}^*)$$

$$\bigwedge_{\varkappa=1}^{k} (Da_1 \wedge (a_2 \equiv \bar{O} \vee a_2 \equiv \bar{S}\bar{v}_\varkappa) \wedge a_1\, Sub\,\bar{v}_\varkappa\, Sub\, a_2\, Sub\, a_3 \rightarrow Da_3) \qquad (H_{38}^*)$$

$$Da_1 a_2 a_4 \wedge Da_2 b_9 a_3 \rightarrow Da_1 a_3 a_4 \qquad (H_{39}^*)$$

$$Da_1 a_2 \quad \wedge Da_2 b_9 a_3 \rightarrow Da_1 a_3 \qquad (H_{40}^*)$$

$$Da_2 a_4 \wedge Da_2 b_9 a_3 \rightarrow \quad Da_3 a_4 \qquad (H_{41}^*)$$

[*G* betreffend:]

$$\bigwedge_{\tau=1}^{t_1} \bar{S}^\tau G\Phi(\zeta_\tau) \qquad (H_{42}^*)$$

$$\bigwedge_{\tau=1}^{t_1} (a_1 Ga_2 \rightarrow a_1^{t_1+1}\bar{S}^\tau Ga_2\Phi(\zeta_\tau)) \qquad (H_{43}^*)$$

[Den Zusammenhang zwischen D, G und a^{**} (also $\mathfrak{X}^{**}$) herstellend:]
Bei allgemein-rekursivem ax:

$$D\bar{g}a_2\bar{O}b_9\bar{O} \wedge a_2Ga_3 \wedge Bb \rightarrow b_1a_3b \subseteq a^{**}. \qquad (H_{44}^*)$$

Und statt dessen bei rekursiv-aufzählbarem ax:

$$D\bar{g}a_1\bar{O}b_9a_2\bar{O} \wedge a_1P\bar{S} \wedge a_2Ga_3 \wedge Bb \rightarrow b_1a_3b \subseteq a^{**}. \qquad (H_{44}^*)$$

Als einziges Beispiel wollen wir (für rekursiv-aufzählbares ax, also den zuletzt genannten Ausdruck H_{44}^*) ausführlich bestätigen, daß $\mathfrak{B}_0^*\ Erf^*\ H_{44}^*$, wenn $\mathfrak{B}_0^*$ eine ausgezeichnete Belegung ist. Wir setzen

$$Wert^*(a_\nu, \mathfrak{B}_0^*) = \mathfrak{X}_\nu, \qquad Wert^*(b, \mathfrak{B}_0^*) = \mathfrak{B}.$$

Unter den Voraussetzungen

$$\mathfrak{B}_0^*\ Erf^*\ D\bar{g}a_1\bar{O}b_9a_2\bar{O}\,, \qquad \text{(a)}$$

$$\mathfrak{B}_0^*\ Erf^*\ a_1P\bar{S}, \qquad \text{(b)}$$

$$\mathfrak{B}_0^*\ Erf^*\ a_2Ga_3, \qquad \text{(c)}$$

$$\mathfrak{B}_0^*\ Erf^*\ Bb \qquad \text{(d)}$$

ist zu zeigen:

$$\mathfrak{B}_0^*\ Erf^*\ b_1a_3b \subseteq a^{**}. \qquad \text{(e)}$$

---

1) Der erste zwischen Klammern notierte Teilausdruck ist mit $\bigvee_{\tau=t_1+1}^{t_1+\varkappa} a_1 \equiv \Phi(\zeta_\tau) \vee \bigvee_{\tau=t_1+\varkappa+2}^{t_1+t_2} a_1 \equiv \Phi(\zeta_\tau)$ identisch, denn $v_\varkappa = \zeta_{t_1+\varkappa+1}$. Analog kann man auch H_{11}^* darstellen.

Wegen (a) gibt es in K_2 eine aus Σ ableitbare Termgleichung Gl mit

$$[\bar{\mathfrak{g}}]\,\mathfrak{X}_1[\bar{\mathfrak{O}},\, \mathfrak{b}_9]\,\mathfrak{X}_2[\bar{\mathfrak{O}}] = \mathfrak{F}(Gl); \tag{f}$$

(b) gestattet den Ansatz

$$\mathfrak{X}_1 = [\bar{\mathfrak{S}}]^m \quad (m \geqq 1),$$

und wegen (c) gibt es in K_1 eine Zeichenreihe Z mit

$$\mathfrak{X}_2 = [\bar{\mathfrak{S}}]^{G\ddot{o}(Z)}, \quad \mathfrak{X}_3 = \mathfrak{F}(Z).$$

Aus (f) wird daher:

$$[\bar{\mathfrak{g}}]\,[\bar{\mathfrak{S}}]^m\,[\bar{\mathfrak{O}},\, \mathfrak{b}_9]\,[\bar{\mathfrak{S}}]^{G\ddot{o}(Z)}\,[\bar{\mathfrak{O}}] = \mathfrak{F}(g S^m O \equiv S^{G\ddot{o}(Z)} O) = \mathfrak{F}(Gl)$$

— folglich ist $gS^mO \equiv S^{G\ddot{o}(Z)}O$ aus Σ ableitbar, weil mit Gl identisch. Kontraposition von (2c) ergibt: $G\ddot{o}(Z) \in G\ddot{o}(ax)$. Also ist Z eine (*wahre*!) Aussage aus ax: ein Ausdruck, den jede Belegung erfüllt. Wegen (d) muß deshalb $[\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{X}_3\mathfrak{B}$ zusammenhängend in $\mathfrak{X}^{**}$ enthalten sein, (e) trifft zu.

Beim entsprechenden Nachweis für allgemein-rekursives ax wird (1b) kontraponiert verwendet.

Aus H_ι^* $(1 \leqq \iota \leqq 44)$ möge H_ι' hervorgehen, wenn man alle Variablen a_j und auch b, sofern sie vorkommen und noch frei sind, in irgendeiner bestimmten Reihenfolge generalisiert. Wir setzen $\bigwedge_{\iota=1}^{44} H_\iota' = H^*$.[1])

Es sei ax^* eine der Aussagen, die man aus H^* durch Partikularisierung sämtlicher $(p + q + r + k + l + 14 = t_1 + t_2 + 3)$ noch freien Variablen erhält. „$\vdash H$" soll bedeuten, daß H aus dem Axiom ax^* mit Hilfe der in elementaren Theorien gebräuchlichen 7 Schlußregeln (Abtrennung, Quantifizierung in Implikationen, Umbenennung gebundener Variabler, Termeinsetzung) und der üblichen 15 aussagenlogischen Schemata ableitbar ist.[2]) Nähere Ausführungen über diesen Ableitbarkeitsbegriff erübrigen sich wieder deshalb, weil in § 2 klar ersichtlich ist, mit welchen Hilfsmitteln wir ableiten.

Satz 1. *Für Ausdrücke H aus K_1 gilt: Wenn $\vdash H$, so agH.*

Beweis. Offensichtlich ist ax^* wahr (ag^*ax^*), denn es gibt ja ausgezeichnete Belegungen, und jede erfüllt H^*. Wenn daher $\vdash H$, so ag^*H, also nach Lemma 1 auch agH.

Anmerkung. Die Gegenrichtung von Lemma 1 wird nicht gebraucht.

§ 2. Ableitung von *ax* aus *ax**

1. Offenbar gilt: $\vdash H^* \to H_\iota^*$ $(1 \leqq \iota \leqq 44)$. Das ist die Grundlage für alle nachstehenden Ableitungen. T ist stets ein K_1-Term, H stets ein K_1-Ausdruck. Bezeichnungen wie „$T^{a_i}//_{a_j}$", „$H^{a}{}_{i}//^{a_j}$", „$H(a_i)$" haben die auf Seite 260 bzw. 251 erklärte Bedeutung.

Aus $H^* \to H_\iota^*$ $(\iota = 2, 3, 4)$ gewinnt man, induktiv über die Term- bzw. Ausdrucksstufe, ein LEIBNIZsches Ersetzbarkeitstheorem zunächst für Terme:

$$\vdash H^* \wedge a_i \doteq a_j \to T \doteq T^{a_i}//_{a_j},$$

[1]) Bei allgemein-rekursivem ax kann man die Konjunktionsglieder H_{20}' und H_{21}' weglassen.

[2]) Vgl. S. 259.

alsdann für Ausdrücke:

$$\vdash H^* \wedge a_i \doteq a_j \to (H \leftrightarrow H^{a_i}//_{a_j}); \tag{11}$$

dabei wird vorausgesetzt, daß a_i in H vollfrei, a_j dagegen gar nicht vorkommt. Sei jetzt j ein Index, der so groß ist, daß a_j weder in H^* noch in H auftritt. Aus (11) ergibt sich:

$$\vdash H^* \wedge Aa_j \wedge a_i \doteq a_j \wedge H(a_i) \to Aa_j \wedge H(a_j)$$

und weiter:

$$\vdash H^* \wedge \qquad Aa_j \wedge a_i \doteq a_j \ \wedge H(a_i) \to \exists a_i (Aa_i \wedge H(a_i)),$$

$$\vdash H^* \wedge \exists a_j (Aa_j \wedge a_i \doteq a_j) \wedge H(a_i) \to \exists a_i (Aa_i \wedge H(a_i)),$$

also im Hinblick auf H_5^*:

$$\vdash H^* \wedge \exists a_i H(a_i) \to \exists a_i (Aa_i \wedge H(a_i)). \tag{12}$$

Aus $H^* \to H_\iota^*$ ($\iota = 6, 7; 18, 19; 20, 21$) erhält man durch vollständige Induktion:

$$\left.\begin{aligned} &\vdash H^* \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{i-1} Aa_\nu \to \prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu \cong b_3^i, && (13)\\ &\vdash H^* \to b_3^i P b_3, && (14)\\ &\vdash H^* \to \bar{S}^i P \bar{S}. && (15)\end{aligned}\right\} \quad (i \geqq 1)$$

Bei allgemein-rekursivem ax bleibt (15) weg.

Wenn a_i in H vorkommt, so $\vdash H^* \to \Phi(a_i) \subseteq \Phi(H)$. (16)

Weil nämlich H als Ausdruck nicht mit a_i beginnen kann, bestehen nur die Möglichkeiten

$$H = Z_1 a_i Z_2 \quad (Z_1, Z_2 \text{ nicht leer}) \tag{a}$$

und

$$H = Z a_i \qquad (Z \text{ nicht leer}). \tag{b}$$

Im Fall (a) erhält man (16), indem man in der Conclusio von $H^* \to H_8^*$ die Termeinsetzungen $a_1/\Phi(Z_1)$, $a_2/\Phi(a_i)$, $a_3/\Phi(Z_2)$ vornimmt. Im Fall (b) zieht man H_9^* heran.

Wenn $\forall a_i$ nicht in H vorkommt ($i \geqq 1$), so $\vdash H^* \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(H)$. (17)

Sei ζ zunächst das letzte Grundzeichen von H. Sicherlich ist $\zeta = c_\lambda$ $(1 \leqq \lambda \leqq p)$ oder $\zeta = a$ oder $\zeta =)$, also $\Phi(\zeta)$ eins der Zeichen $\bar{c}_\lambda$ oder b_2 oder b_8. In H_{10}^* setzen wir $\Phi(\zeta)$ für a_1 sowie $\Phi(a_i)$ für a_2 ein und schließen von $H^* \to H_\iota$ ($\iota = 1, 10$) auf

$$H^* \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(\zeta). \tag{17a}$$

Sei jetzt ζZ ein Endstück von H, dabei $\zeta \neq \forall$ und Z nicht leer, und es sei $H^* \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(Z)$ schon abgeleitet. Wir ziehen H_{11}^* mit $a_1/\Phi(\zeta)$, $a_2/\Phi(a_i)$, $a_3/\Phi(Z)$ heran und erhalten

$$H^* \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(\zeta Z). \tag{17b}$$

Sei schließlich $\forall a_j Z$ ein Endstück von H, dabei $j \neq i$, und $H^* \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(Z)$ bereits abgeleitet. Für $j > i$ verwenden wir H_{12}^* mit a_1/b_3^i, a_2/b_3^{j-i}, $a_3/\Phi(Z)$:

$$b_3^i P b_3 \wedge b_3^{j-i} P b_3 \wedge \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(Z) \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(\forall a_j Z)$$

und gelangen von $H^* \to H_{12}^*$ mit Hilfe von (14) zu

$$H^* \to \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(\forall a_j Z). \tag{17c}$$

Für $1 \leqq j < i$ führt H_{13}^* mit a_1/b_3^j und a_2/b_3^{i-j} ebenfalls zu (17c). Damit ist (17) bewiesen.

Aus $H^* \to H_\iota^*$ ($\iota = 14, 15; 16, 17$) erhält man:

$$\vdash H^* \to AT, \textit{ falls } T \textit{ keine Variable ist;} \tag{18}$$

$$\vdash H^* \to N\Phi(T), \quad \vdash H^* \to N\Phi(H). \tag{19}$$

Als nächstes beweisen wir:

$$\vdash H^* \to \prod_{\nu=0}^{n+1} (\exists a_\nu) \, (B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu) \qquad (n \geqq 0). \tag{20}$$

Das ist für $n = 0$ im Hinblick auf H_{22}^* klar. Nun der Schluß von n auf $n + 1$:

$$\vdash H^* \to H_{23}^*; \text{ in der Conclusio } a_0/\prod_{\nu=0}^{n} a_\nu, \ a_1/a_{n+1}, \ a_2/a_{n+1}, \ a_3/a_{n+2}:$$

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu \to \exists a_{n+1} \exists a_{n+2} \, (B \prod_{\nu=0}^{n+2} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n+1} A a_\nu);$$

wegen der Induktionsvoraussetzung (20), nach $(n + 1)$-maliger hinterer und $(n + 2)$-maliger vorderer Partikularisierung:

$$\vdash H^* \to \prod_{\nu=0}^{n+2} (\exists a_\nu) \, (B \prod_{\nu=0}^{n+2} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n+1} A a_\nu), \quad \text{q. e. d.}$$

2. *Ist T ein Term aus K_1, so gilt für fast alle natürlichen Zahlen n:*

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu \to T\Phi(T) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^*. \tag{21}$$

Beweis. (a) Für $T = c_\lambda$ geht (21) sogar bei beliebigem n aus $H^* \to H_{25}^*$ hervor.

(b) Für $T = a_i$ nehmen wir $n \geqq i$ und benutzen H_{26}^* mit $a_0/\prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu$[1]), a_1/a_i, $a_2/\prod_{\nu=i+1}^{n+1} a_\nu$, a_3/b_3^i:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge A a_i \wedge \prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu \cong b_3^i \to a_i \Phi(a_i) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^*.$$

Hieraus erhält man (21) mit Hilfe von (13).

(c) Ist (21) bei jedem μ mit $1 \leqq \mu \leqq m_\lambda$ für $T = T_\mu$ bereits bewiesen, und zwar jeweils für fast alle n, so zieht man für $T = f_\lambda \prod_{\mu=1}^{m_\lambda} T_\mu$ den Ausdruck H_{27}^* mit $b/\prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu$, $a_{2\mu-1}/T_\mu$, $a_{2\mu}/\Phi(T_\mu)$ heran:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\mu=1}^{m_\lambda} (T_\mu \Phi(T_\mu) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^* \wedge A\, T_\mu \wedge N\Phi(T_\mu)) \to T\Phi(T) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^*.$$

[1]) Weil $i \geqq 1$, ist diese Zeichenreihe nicht leer, also wirklich ein Term.

Hieraus gewinnt man (21) — wiederum für fast alle n —, indem man (18) und (19) sowie die m_λ Induktionsvoraussetzungen ausnutzt.

Ist H ein Ausdruck aus K_1, so gilt für fast alle n:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu \wedge H \rightarrow b_1 \Phi(H) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^{**}. \tag{22}$$

Zum Beweis genügt die Bestätigung der nachstehenden Behauptungen [a], [b], [c], [d].

[a] *Ist H prädikativer oder verneinter prädikativer Ausdruck, so gilt (22) für fast alle n.*

Wir wählen ein beliebiges n, für das (21) mit $T = T_\nu$ bei jedem ν mit $1 \leqq \nu \leqq n_\lambda$ zutrifft, und ziehen H_{28}^* mit $b/\prod_{i=0}^{n+1} a_i$, $a_{2\nu-1}/T_\nu$, $a_{2\nu}/\Phi(T_\nu)$ heran:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{i=0}^{n+1} a_i \wedge \bigwedge_{\nu=1}^{n_\lambda} (T_\nu \Phi(T_\nu) \prod_{i=0}^{n+1} a_i \subseteq a^* \wedge A\, T_\nu \wedge N \Phi(T_\nu)) \wedge H \rightarrow b_1 \Phi(H) \prod_{i=0}^{n+1} a_i \subseteq a^{**}$$

für $H = R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} T_\nu$. Hieraus erhält man (22), indem man (18) und (19) sowie die n_λ Voraussetzungen (21) anwendet. — Für $H = \sim R_\lambda \prod_{\nu=1}^{n_\lambda} T_\nu$ benutzt man H_{29}^* statt H_{28}^*.

[b] *Wenn (22) für $H = H_1$ und für $H = \sim H_1$, so (22) für $H = \sim H_1$ und für $H = \sim\sim H_1$.*

[c] *Wenn — bei festem n — (22) für $H = H_1$, $H = \sim H_1$, $H = H_2$, $H = \sim H_2$, so (22) für $H = (H_1 \rightarrow H_2)$ und für $H = \sim(H_1 \rightarrow H_2)$.*

Man verwendet H_{30}^* bzw. H_{32}^* und H_{33}^* mit $a_i/\Phi(H_i)$.

[d] *Wenn (22) für $H = H_1(a_i)$ und für $H = \sim H_1(a_i)$, so (22) für $H = \forall a_i H(a_i)$ und für $H = \sim \forall a_i H_1(a_i)$.*

Wir wählen j $(> n+1)$ so groß, daß a_j weder in H^* noch in H_1 vorkommt, und setzen zur Abkürzung

$$\prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu = \Pi, \quad (\prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu) a_j \prod_{\nu=i+1}^{n+1} a_\nu = \Pi_j; \qquad \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu = \Lambda, \quad \bigwedge_{\nu=0}^{i-1} A a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=i+1}^{n} A a_\nu = \Lambda'.$$

[d_1] $\vdash H^* \rightarrow H_{24}^*$; in der Conclusio $a_0/\prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu$, a_1/a_i, a_2/a_j, $a_3/\prod_{\nu=i+1}^{n+1} a_\nu$:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge A a_i \wedge A a_j \rightarrow B \Pi_j. \tag{23}$$

Nach Voraussetzung:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \Lambda \wedge H_1 \rightarrow b_1 \Phi(H_1) \Pi \subseteq a^{**},$$

nach vorderer Generalisierung und Umbenennung der dann noch freien a_i in a_j:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi_j \wedge \Lambda' \wedge A a_j \wedge \forall a_i H_1 \rightarrow b_1 \Phi(H_1) \Pi_j \subseteq a^{**},$$

wegen (23):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \Lambda \wedge A a_j \wedge \forall a_i H_1 \rightarrow b_1 \Phi(H_1) \Pi_j \subseteq a^{**},$$

nach hinterer Generalisierung (a_j kommt ja bei (24) in der Prämisse nicht vor!):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge \forall a_i H_1 \to \forall a_j (Aa_j \to b_1 \Phi(H_1)\Pi_j \subseteq a^{**}). \qquad (24)$$

Andererseits: $\vdash H^* \to H^*_{34}$, also (a_1/a_i, a_5/a_j usw. in der Conclusio):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge Aa_i \wedge \prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu \cong b_3^i \wedge N\Phi(H_1) \wedge \Phi(a_i) \subseteq \Phi(H_1) \wedge \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(H_1)$$

$$\wedge \forall a_j (Aa_j \to b_1 \Phi(H_1)\Pi_j \subseteq a^{**}) \to b_1 \Phi(\forall a_i H_1)\Pi \subseteq a^{**};$$

auf Grund von (13), (19), (16), (17) und (24):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge \forall a_i H_1 \to b_1 \Phi(\forall a_i H_1)\Pi \subseteq a^{**}$$

— das ist (22) für $H = \forall a_i H_1$.

[d_2] Nach Voraussetzung:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge \sim H_1 \to b_1 \Phi(\sim H_1)\Pi \subseteq a^{**},$$

nach Umbenennung der freien a_i in a_j und hinterer Partikularisierung:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi_j \wedge \bigwedge' \wedge Aa_j \wedge \sim H_1(a_j) \to \exists a_j (Aa_j \wedge b_1 \Phi(\sim H_1)\Pi_j \subseteq a^{**}),$$

wegen (23):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge Aa_j \wedge \sim H_1(a_j) \to \exists a_j (Aa_j \wedge b_1 \Phi(\sim H_1)\Pi_j \subseteq a^{**}),$$

nach vorderer Partikularisierung (a_j kommt ja in $H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge$ nicht vor!) und anschließender Umbenennung der a_j in a_i:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge \exists a_i (Aa_i \wedge \sim H_1) \to \exists a_i (Aa_i \wedge b_1 \Phi(\sim H_1)\Pi \subseteq a^{**}),$$

wegen (12):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge \sim \forall a_i H_1 \qquad \to \exists a_i (Aa_i \wedge b_1 \Phi(\sim H_1)\Pi \subseteq a^{**}). \qquad (25)$$

Andererseits: $\vdash H^* \to H^*_{35}$, also (a_1/a_i, a_5/a_i usw. in der Conclusio):

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge Aa_i \wedge \prod_{\nu=0}^{i-1} a_\nu \cong b_3^i \wedge N\Phi(H_1) \wedge \Phi(a_i) \subseteq \Phi(H_1) \wedge \sim \Phi(\forall a_i) \subseteq \Phi(H_1)$$

$$\wedge \exists a_i (Aa_i \wedge b_1 \Phi(\sim H_1)\Pi \subseteq a^{**}) \to b_1 \Phi(\sim \forall a_i H_1)\Pi \subseteq a^{**};$$

nach Anwendung von (13), (19), (16), (17) und (25) ergibt sich (22) für $H = \sim \forall a_i H_1$.

Lemma 2. *Ist H ein Ausdruck aus K_1, so gilt für fast alle n auch*:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} Aa_\nu \wedge b_1 \Phi(H) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^{**} \to H, \qquad (26)$$

demnach sogar:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} Aa_\nu \to (H \leftrightarrow b_1 \Phi(H) \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \subseteq a^{**}).[1]$$

---

[1]) Vgl. S. C. KLEENE, a. a. O., S. 41, Lemma 6. Dem dort (S. 40) durch „(N)" bezeichneten Axiom entspricht ungefähr unser H^*_{44}.

Beweis. Wir wählen ein n, für das (22) zutrifft, und ziehen H_{31}^* mit $a_1/\Phi(H)$ heran:

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge b_1\Phi(H)\Pi \subseteq a^{**} \rightarrow \sim b_1\Phi(\sim H)\Pi \subseteq a^{**}.$$

Kontraposition in (22) —

$$\vdash H^* \wedge B\Pi \wedge \bigwedge \wedge \sim b_1\Phi(\sim H)\Pi \subseteq a^{**} \rightarrow \sim\sim H$$

— führt dann zu (26).

Anmerkung. Im folgenden verwenden wir (26), nicht aber (22).

Variante. In der Konjunktion H^* wird H'_{31} gestrichen. Die Conclusio von H_{44}^* (in beiden Formen!) wird zu $\sim b_1 b_4 a_3 b \subseteq a^{**}$ abgeändert. Die Conclusio in (29) wird durch $\sim b_1\,\Phi(\sim H)b \subseteq a^{**}$ ersetzt. Dann ist (26) entbehrlich: Satz 2 ergibt sich schon aus (22).

3. Wir wenden uns K_2 zu.

Wenn Z_1 eine (nicht-leere) Zeichenreihe aus K_2 ist und Z durch Einsetzung von O bzw. $Sv_\varkappa$ für $v_\varkappa$ aus Z_1 hervorgeht, so gilt:

$$\vdash H^* \rightarrow \Phi(Z_1)\,Sub\,\Phi(v_\varkappa)\,Sub\,\Phi(O)\,Sub\,\Phi(Z)$$

bzw.

$$\vdash H^* \rightarrow \Phi(Z_1)\,Sub\,\Phi(v_\varkappa)\,Sub\,\Phi(Sv_\varkappa)\,Sub\,\Phi(Z).$$

Das beweist man durch Schluß von Z_1 auf $Z_1\zeta_\tau$ $(t_1+1 \leqq \tau \leqq t_1+t_2)$, von $H^* \rightarrow H_{36}^*$ ausgehend. Unter Benutzung von H_{37}^* bis H_{41}^* zeigt man daraufhin ebenso leicht:

Wenn Gl eine aus Σ ableitbare Termgleichung ist, so

$$\vdash H^* \rightarrow D\,\Phi(Gl). \tag{27}$$

In H_{39}^* z. B. sind bei dem (c′) (Seite 272) entsprechenden Induktionsschritt die Substitutionen $a_1/\Phi(Z_1)$, $a_2/\Phi(T_1)$, $a_3/\Phi(T_2)$, $a_4/\Phi(Z_2)$ vorzunehmen — vorausgesetzt, daß Z_1 und Z_2 beide nicht leer sind. Bei leerem Z_1 bzw. Z_2 zieht man H_{41}^* bzw. H_{40}^* heran. (Wenn $Z_1T_1Z_2$ und $T_1 = T_2$ aus Σ ableitbar sind, kann nicht sowohl Z_1 als auch Z_2 leer sein.)

Für jede nicht-leere Zeichenreihe Z aus K_1 gilt:

$$\vdash H^* \rightarrow \bar{S}^{G\ddot{o}(Z)}\,G\,\Phi(Z). \tag{28}$$

Für $Z = \zeta_\tau$ $(1 \leqq \tau \leqq t_1)$ ergibt sich das aus $H^* \rightarrow H_{42}^*$, und aus $H^* \rightarrow H_{43}^*$ leitet man ab:

$$H^* \wedge \bar{S}^{G\ddot{o}(Z)}\,G\,\Phi(Z) \rightarrow \bar{S}^{(t_1+1)\cdot G\ddot{o}(Z)+\tau}\,G\,\Phi(Z)\,\Phi(\zeta_\tau)$$

— die Conclusio ist identisch mit $\bar{S}^{G\ddot{o}(Z\zeta_\tau)}G\,\Phi(Z\zeta_\tau)$, q. e. d.

Lemma 3. *Wenn $H \in ax$, so*

$$\vdash H^* \wedge Bb \rightarrow b_1\,\Phi(H)\,b \subseteq a^{**}. \tag{29}$$

Beweis für allgemein-rekursives ax. Wegen (1a) ist $gS^{G\ddot{o}(H)}O = O$ aus Σ ableitbar. Auf diese Termgleichung — wir nennen sie Gl — trifft also (27) zu. Wir benutzen H_{44}^* (in der ersten Form) mit $a_2/\bar{S}^{G\ddot{o}(H)}$, $a_3/\Phi(H)$ und erhalten:

$$\vdash H^* \wedge D\,\Phi(Gl) \wedge \bar{S}^{G\ddot{o}(H)}\,G\,\Phi(H) \wedge Bb \rightarrow b_1\,\Phi(H)\,b \subseteq a^{**}.$$

Das läßt sich mit Hilfe von (27) und (28) zu (29) vereinfachen.

Beweis für rekursiv-aufzählbares ax. Wegen (2b) gibt es ein $m \geqq 1$ derart, daß $gS^m O = S^{Gö(H)} O$ ($= Gl$) aus Σ ableitbar ist. Wir benutzen H^*_{44} (die zweite Form, mit $a_1/\bar{S}^m$ usw.) und erhalten:

$$\vdash H^* \wedge D\Phi(Gl) \wedge \bar{S}^m P \bar{S} \wedge \bar{S}^{Gö(H)} G \Phi(H) \wedge Bb \rightarrow b_1 \Phi(H) b \subseteq a^{**}.$$

Das können wir mit Hilfe von (27), (15) und (28) zu (29) vereinfachen.

Satz 2. *Wenn* $H \in ax$, so $\vdash H$.

Beweis. Wir wählen n so groß, daß (26) zutrifft, und ersetzen in (29) b durch $\prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu$. Aus (26) wird daraufhin:

$$\vdash H^* \wedge B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu \rightarrow H;$$

$$\vdash H^* \wedge \prod_{\nu=0}^{n+1} (\exists a_\nu) \, (B \prod_{\nu=0}^{n+1} a_\nu \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n} A a_\nu) \rightarrow H,$$

denn diese $(n+2)$-fache vordere Partikularisierung ist statthaft, weil in H^* nach Konstruktion kein a_ν mehr frei vorkommt, während H als Aussage überhaupt keine Variable frei enthält. So gilt schließlich:

$\vdash H^* \rightarrow H$ wegen (20),
$\vdash ax^* \rightarrow H$ durch $(p + q + r + k + l + 14)$-malige vordere Parti-
$\vdash H.$ [kularisierung,

Erst hier wird benutzt, daß $\vdash ax^*$; alles bisher Abgeleitete waren prädikatenlogische Identitäten.

§ 3. Elimination hinzugenommener Grundzeichen

1. Wir wollen den erweiterten Kalkül vereinfachen. Zunächst erweitern wir sogar noch K_3 durch Hinzunahme der Individuenvariablen c — natürlich auch in Termen und Ausdrücken — und der prädikativen Ausdrücke LT, $At\,T$ und ET (in denen T ein Term zweiter Art ist). Für $Wert^*(T, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{T}$ soll gelten:

$\mathfrak{B}^*$ *Erf** LT genau dann, wenn $\mathfrak{T}$ die leere Folge ist.
$\mathfrak{B}^*$ *Erf** $At\,T$ genau dann, wenn $\mathfrak{T}$ ein Atom (also eine Folge der Länge 1) ist.
$\mathfrak{B}^*$ *Erf** ET genau dann, wenn $\mathfrak{T}$ eine nicht-leere Folge endlicher Länge ist.

Jede *ausgezeichnete* Belegung $\mathfrak{B}^*_0$, für die überdies $\mathfrak{B}^*_0(c) = [\mathfrak{c}]$ ist[1]), erfüllt die Ausdrücke

$$La_1 \quad \leftrightarrow a_1 a_1 \equiv a_1,$$

$$a_1 \subseteq a_2 \quad \leftrightarrow \exists a_3 \exists a_4 a_3 a_1 a_4 \equiv a_2,$$

$$At\,a_1 \quad \leftrightarrow \forall a_2 (a_2 \subseteq a_1 \rightarrow (a_2 \equiv a_1 \leftrightarrow \sim La_2)),$$

$$Na_1 \quad \leftrightarrow \sim La_1 \wedge \forall a_2 (At\,a_2 \wedge a_2 \subseteq a_1 \rightarrow a_2 \equiv b_1 \vee \bigvee_{\tau=1}^{t_1+t_2} a_2 \equiv \Phi(\zeta_\tau)),$$

[1]) Das J-Element $\mathfrak{c}$ war auf Seite 274 (oben) bei der Definition von $\dot{\mathfrak{X}}$ eingeführt worden.

$$\begin{aligned}
Aa_1 \quad &\longleftrightarrow Ata_1 \wedge \sim Na_1,\\
a_1 \doteq a_2 &\longleftrightarrow \exists a_3 \exists a_4 \exists a_5 (Aa_3 \wedge a_1 \equiv a_3 a_4 \wedge a_2 \equiv a_3 a_5)\\
&\quad \vee (\sim \exists a_3 \exists a_4 (Aa_3 \wedge a_1 \equiv a_3 a_4) \wedge \exists a_5 a_2 \equiv c a_5)\\
&\quad \vee (\exists a_3 a_1 \equiv c a_3 \wedge \sim \exists a_4 \exists a_5 (Aa_4 \wedge a_2 \equiv a_4 a_5))\\
&\quad \vee \sim \exists a_3 \exists a_4 \exists a_5 \exists a_6 (Aa_3 \wedge a_1 \equiv a_3 a_4 \wedge Aa_5 \wedge a_2 \equiv a_5 a_6)
\end{aligned}$$

(— das geht direkt aus der Definition von $\mathfrak{X}$ hervor),

$$Ea_1 \longleftrightarrow \sim La_1 \wedge \forall a_2 (\sim La_2 \wedge a_2 \subseteq a_1 \rightarrow \exists a_3 \exists a_4 (Ata_4 \wedge a_2 \equiv a_3 a_4))$$

(— denn für die endlichen Folgen ist charakteristisch, daß jeder nicht-leere Abschnitt ein letztes Folgenglied besitzt),

$$a_1 P a_2 \longleftrightarrow Ea_1 \wedge \forall a_3 (Ata_3 \wedge a_3 \subseteq a_1 \rightarrow a_3 \equiv a_2)$$

und

$$\begin{aligned}
Ba_1 \longleftrightarrow \sim La_1 \wedge \sim \exists a_2 \exists a_3 (Ata_3 \wedge a_1 \equiv a_2 a_3)&\\
\wedge \forall a_2 \forall a_3 (\sim La_2 \wedge \sim La_3 \wedge a_1 \equiv a_2 a_3 \rightarrow Ea_2)&\\
\wedge \forall a_2 (Ata_2 \wedge a_2 \subseteq a_1 \rightarrow Aa_2)&
\end{aligned}$$

(— denn die Folgen vom Typ ω können charakterisiert werden als diejenigen nicht-leeren Folgen ohne letztes Glied, bei denen jedes echte Anfangsstück endliche Länge hat).

Es sei $Wert^*(a_\mu, \mathfrak{B}^*) = \mathfrak{X}_\mu$. Wenn $\mathfrak{B}^*\, Erf^* a_1 \cong a_2$, so gibt es eine natürliche Zahl i ($\geqq 1$) mit

$$\mathfrak{X}_1 = \{\mathfrak{x}_\nu\}_{0 \leqq \nu < i} (\mathfrak{x}_\nu \in J) \quad \text{und} \quad \mathfrak{X}_2 = [\mathfrak{b}_3]^i = \{\mathfrak{b}_3\}_{0 \leqq \nu < i}. \tag{30}$$

Wir setzen

$$\{\mathfrak{x}_\nu\}_{0 \leqq \nu < j} = \mathfrak{Y}_j \qquad \text{und} \qquad [\mathfrak{b}_3]^j = \mathfrak{Z}_j. \tag{31}$$

Auf die mit Hilfe der „*trennenden Folgenglieder*“ $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ (die ja sicherlich in den $\mathfrak{Y}_j$ und $\mathfrak{Z}_j$ nicht vorkommen) zusammengesetzte Folge

$$\mathfrak{X}_3 = [\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{Y}_1 [\mathfrak{b}_2]\,\mathfrak{Z}_1 [\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{Y}_2 [\mathfrak{b}_2]\,\mathfrak{Z}_2 [\mathfrak{b}_1] \cdots [\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{Y}_i [\mathfrak{b}_2]\,\mathfrak{Z}_i [\mathfrak{b}_1] \tag{32}$$

treffen offenbar folgende Feststellungen[1]) zu:

(a) $\mathfrak{X}_3$ ist endlich, aber nicht leer.
(b) $\mathfrak{X}_3$ beginnt mit $[\mathfrak{b}_1, \mathfrak{x}_0, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_1]$, wobei $\mathfrak{x}_0 \in J$.
(c) $\mathfrak{X}_3$ endet auf $[\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{X}_1 [\mathfrak{b}_2]\,\mathfrak{X}_2 [\mathfrak{b}_1]$.
(d) In dem Zwischenstück zwischen irgend zwei Folgengliedern $\mathfrak{b}_1$ bzw. irgend zwei Folgengliedern $\mathfrak{b}_2$ in $\mathfrak{X}_3$ kommt mindestens ein Folgenglied $\mathfrak{b}_2$ bzw. $\mathfrak{b}_1$ vor.
(e) Für jedes $\mathfrak{W}_4$, $\mathfrak{W}_5$, $\mathfrak{W}_6$, $\mathfrak{W}_7$: Ist $[\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{W}_4 [\mathfrak{b}_2]\,\mathfrak{W}_5 [\mathfrak{b}_1]\,\mathfrak{W}_6 [\mathfrak{b}_2]\,\mathfrak{W}_7 [\mathfrak{b}_1]$ ein Abschnitt von $\mathfrak{X}_3$ und sind die genannten $\mathfrak{W}_\nu$ frei von $\mathfrak{b}_1$ — also eo ipso auch von $\mathfrak{b}_2$ —, so gibt es erstens ein Atom $\mathfrak{A} = [\mathfrak{a}]$ mit $\mathfrak{a} \in J$ und $\mathfrak{W}_6 = \mathfrak{W}_4 \mathfrak{A}$, und zweitens ist $\mathfrak{W}_7 = \mathfrak{W}_5 [\mathfrak{b}_3]$.

Außerdem ist

(f) $\mathfrak{b}_1$ weder in $\mathfrak{X}_1$ noch in $\mathfrak{X}_2$ enthalten.

---

[1]) Vgl. K. HÄRTIG, a. a. O., insbes. S. 182 unten/183 oben. Siehe auch: W. V. QUINE, On derivability. J. Symb. Log. 2 (1937), 113—119.

Man überlegt sich leicht, daß aus den Forderungen (a) bis (f) auch umgekehrt eine Darstellung (32) mit den Nebenbedingungen (30) und (31) resultiert, so daß $\mathfrak{B}^* \, Erf^* a_1 \cong a_2$. Demnach erfüllt jede ausgezeichnete Belegung $\mathfrak{B}_0^*$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} a_1 \cong a_2 \leftrightarrow \sim b_1 \subseteq a_1 \wedge \sim b_1 \subseteq a_2 \wedge \exists a_3 (Ea_3 \\ & \wedge \exists a_4 \exists a_5 (Aa_4 \wedge a_3 \equiv b_1 a_4 b_2 b_3 b_1 a_5) \wedge \exists a_6 a_3 \equiv a_6 b_1 a_1 b_2 a_2 b_1 \\ & \wedge \forall a_4 ((b_1 a_4 b_1 \subseteq a_3 \rightarrow b_2 \subseteq a_4) \wedge (b_2 a_4 b_2 \subseteq a_3 \rightarrow b_1 \subseteq a_4)) \\ & \wedge \forall a_4 \forall a_5 \forall a_6 \forall a_7 (b_1 a_4 b_2 a_5 b_1 a_6 b_2 a_7 b_1 \subseteq a_3 \wedge \bigwedge_{\nu=4}^{7} \sim b_1 \subseteq a_\nu \\ & \qquad \rightarrow \exists a_8 (Aa_8 \wedge a_6 \equiv a_4 a_8) \wedge a_7 \equiv a_5 b_3)). \end{aligned}$$

Ganz analog bestätigt man, daß jede ausgezeichnete Belegung auch die folgenden drei Ausdrücke erfüllt:

$$\begin{aligned} & a_1 \, Sub \, a_2 \, Sub \, a_3 \, Sub \, a_4 \leftrightarrow \\ & \sim La_1 \wedge \sim b_1 \subseteq a_1 \wedge \bigvee_{\tau = t_1+1}^{t_1+t_2} a_2 \equiv \Phi(\zeta_\tau) \wedge Na_3 \wedge \sim b_1 \subseteq a_3 \wedge \bigwedge_{\tau=1}^{t_1} \sim \Phi(\zeta_\tau) \subseteq a_3 \wedge \sim b_1 \subseteq a_4 \\ & \quad \wedge \exists a_5 (Ea_5 \wedge \exists a_6 a_5 \equiv b_1 b_2 a_1 b_1 a_6 \wedge \exists a_6 a_5 \equiv a_6 b_1 a_4 b_2 b_1 \\ & \qquad \wedge \forall a_6 ((b_1 a_6 b_1 \subseteq a_5 \rightarrow b_2 \subseteq a_6) \wedge (b_2 a_6 b_2 \subseteq a_5 \rightarrow b_1 \subseteq a_6)) \\ & \qquad \wedge \forall a_6 \forall a_7 \forall a_8 \forall a_9 (b_1 a_6 b_2 a_7 b_1 a_8 b_2 a_9 b_1 \subseteq a_5 \wedge \bigwedge_{\nu=6}^{9} \sim b_1 \subseteq a_\nu \\ & \qquad\qquad \rightarrow (a_8 \equiv a_6 a_3 \wedge a_7 \equiv a_2 a_9) \\ & \qquad \vee \exists a_{10} (\bigvee_{\tau=t_1+1}^{t_1+t_2} a_{10} \equiv \Phi(\zeta_\tau) \wedge \sim a_{10} \equiv a_2 \wedge a_8 \equiv a_6 a_{10} \wedge a_7 \equiv a_{10} a_9))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Da_1 \leftrightarrow \sim b_1 \subseteq a_1 \wedge \exists a_2 (b_1 a_1 b_1 \subseteq a_2 \wedge \forall a_3 \forall a_4 \forall a_5 (a_2 \equiv a_3 b_1 a_4 b_1 a_5 \wedge \sim b_1 \subseteq a_4 \\ & \quad \rightarrow \bigvee_{\sigma=1}^{s} a_4 \equiv \Phi(Gl_\sigma) \vee \exists a_6 (b_1 a_6 b_1 \subseteq a_3 b_1 \wedge \bigvee_{\varkappa=1}^{k} (a_6 \, Sub \, \bar{v}_\varkappa \, Sub \, \bar{O} \, Sub \, a_4 \\ & \qquad \vee a_6 \, Sub \, \bar{v}_\varkappa \, Sub \, \bar{S} \bar{v}_\varkappa \, Sub \, a_4)) \\ & \quad \vee \exists a_6 \exists a_7 \exists a_8 \exists a_9 (a_4 \equiv a_6 a_7 a_8 \wedge \sim b_1 \subseteq a_9 \wedge b_1 a_6 a_9 a_8 b_1 \subseteq a_3 b_1 \wedge b_1 a_9 b_9 a_7 b_1 \subseteq a_3 b_1))) \end{aligned}$$

(— in diesem Falle kommen wir mit dem einen „trennenden Folgenglied" $\mathfrak{b}_1$ aus),

$$\begin{aligned} & a_1 G a_2 \leftrightarrow \sim b_1 \subseteq a_1 \wedge \sim b_1 \subseteq a_2 \wedge \exists a_3 (Ea_3 \\ & \quad \wedge \exists a_4 \bigvee_{\tau=1}^{t_1} a_3 \equiv b_1 \bar{S}^\tau b_9 \Phi(\zeta_\tau) b_1 a_4 \wedge \exists a_4 a_3 \equiv a_4 b_1 a_1 b_9 a_2 b_1 \\ & \quad \wedge \forall a_4 ((b_1 a_4 b_1 \subseteq a_3 \rightarrow b_9 \subseteq a_4) \wedge (b_9 a_4 b_9 \subseteq a_3 \rightarrow b_1 \subseteq a_4)) \\ & \quad \wedge \forall a_4 \forall a_5 \forall a_6 \forall a_7 (b_1 a_4 b_9 a_5 b_1 a_6 b_9 a_7 b_1 \subseteq a_3 \wedge \bigwedge_{\nu=4}^{7} \sim b_1 \subseteq a_\nu \\ & \qquad \rightarrow \bigvee_{\tau=1}^{t_1} (a_6 \equiv a_4^{t_1+1} \bar{S}^\tau \wedge a_7 \equiv a_5 \Phi(\zeta_\tau)))) \end{aligned}$$

(— hier haben wir die Elemente $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_9$ als „trennende Folgenglieder" verwendet).

Durch Elimination der Grundzeichen $\subsetneq$, N, A, $\dot{-}$, P, B, $\cong$, *Sub*, D und G gemäß den oben zusammengestellten (*semantischen*) Äquivalenzen können wir ax^* etwa in ax_0^* überführen, *wobei auch* $\exists c\, ax_0^*$ *wahr ist*. Aus dieser Aussage möge ax_4^* und aus H möge $\widehat{H}$ hervorgehen, wenn man simultan die hinzugenommenen Variablen (3) zuzüglich c durch $a_1, \ldots, a_{t_1+t_2+6}$ und jede Variable a_i $(i \geqq 1)$ durch $a_{t_1+t_2+6+i}$ ersetzt. Auch ax_4^* ist wahr. Für $H \in ax$ läßt sich unsere Ableitung von H aus ax^* mühelos in eine Ableitung von $\widehat{H}$ aus ax_4^* umwandeln; aber $\widehat{H}$ und H sind trivialerweise ableitbarkeitsgleich. Da man selbstverständlich zum Schluß noch die logischen Zeichen $\wedge$, $\vee$, $\leftrightarrow$, $\exists$ entweder in K_1 hinzunehmen oder aber in dem neuen Kalkül eliminieren kann, haben wir also *einen elementaren Kalkül* K_4 *und in ihm eine Aussage* ax_4^*, *die mit dem vorgegebenen Kalkül* K_1 *wie folgt zusammenhängen:*

K_4 besitzt zusätzlich zu den Grundzeichen von K_1 nur die eine Konstante $\equiv$.

Terme in K_4 sind — wie die Terme zweiter Art in K_3 — *diejenigen nicht-leeren Zeichenreihen, die man durch Verkettung je endlich vieler K_1-Terme erhält.*

Prädikative Ausdrücke in K_4 sind neben den aus K_1 übernommenen noch die Zeichenreihen $T_1 \equiv T_2$, sofern T_1 und T_2 Terme sind.

Jeder (innerhalb K_4) aus ax_4^* ableitbare K_1-Ausdruck ist in K_1 allgemeingültig.

Aus ax_4^* ist ax (innerhalb K_4) ableitbar.

Es liegt nahe, für ax_4^* an Stelle der umgeformten alten H_ι^* (vor allem bei $1 \leqq \iota \leqq 24$) Ausdrücke zu suchen, die dasselbe leisten, aber *von vornherein* auf $\equiv$ zugeschnitten sind. Tatsächlich könnte man so ax_4^* erheblich verkürzen — nur einige wenige Eigenschaften der Folgenverknüpfung wären zu formalisieren. Dafür müßte man aber eine ganze Reihe zusätzlicher *Ableitungen* in Kauf nehmen.

2. Sind $T_0, \ldots, T_{n-1}, T_{n+1}, \ldots, T_{n+m}$ $(n \geqq 1,\ m \geqq 1)$ Terme aus K_1 und $j_0, j_1, \ldots, j_{n+m+1}$ so große Indizes, daß die Variablen a_{j_ν} $(0 \leqq \nu \leqq n+m+1)$ nicht in den genannten Termen vorkommen, dann wird der Ausdruck

$$\left.\begin{aligned}&\prod_{\nu=0}^{n-1} T_\nu \equiv \prod_{\nu=n+1}^{n+m} T_\nu \leftrightarrow \prod_{\nu=0}^{n+m+1} (\exists a_{j_\nu})\,(Vka_{j_0}a_{j_0}a_{j_0} \wedge \bigwedge_{\nu=0}^{n-1} Vka_{j_\nu}T_\nu a_{j_{\nu+1}}\\ &\qquad \wedge Vka_{j_{n+1}}a_{j_{n+1}}a_{j_{n+1}} \wedge \bigwedge_{\nu=n+1}^{n+m} Vka_{j_\nu}T_\nu a_{j_{\nu+1}} \wedge Vka_{j_0}a_{j_n}a_{j_{n+m+1}})\end{aligned}\right\} \quad (33)^{1)}$$

allgemeingültig, wenn man in die *Erf**-Definition aufnimmt:

$\mathfrak{B}^*$ *Erf** $VkT_1T_2T_3$ genau dann, wenn

$$Wert^*(T_1, \mathfrak{B}^*)\, Wert^*(T_2, \mathfrak{B}^*) = Wert^*(T_3, \mathfrak{B}^*).$$

Allgemeingültig sind auch die Ausdrücke

$$\exists a_3\, Vka_1a_2a_3, \qquad \text{(A 1)}$$

$$Vka_1a_2a_3 \wedge Vka_1a_2a_4 \wedge Vka_5a_4a_6 \rightarrow Vka_5a_3a_6 \qquad \text{(A 2)}$$

und

$$Vka_1a_2a_4 \wedge Vka_2a_3a_5 \rightarrow (Vka_1a_5a_6 \leftrightarrow Vka_4a_3a_6)\,; \qquad \text{(A 3)}$$

A3 bringt ein assoziatives Gesetz zum Ausdruck.

[1]) Diese etwas umständliche Form ist für den nachher zu führenden Beweis zweckmäßig.

Wir gehen jetzt von K_4 zu dem noch einfacheren Kalkül K_5 über, der statt $\equiv$ das zusätzliche Grundzeichen Vk besitzt; zu den prädikativen Ausdrücken aus K_1 kommen in K_5 nur noch die Ausdrücke $VkT_1T_2T_3$, in denen die T_ν — *wie von jetzt ab immer* — Terme aus K_1 (also im Falle $p = q = 0$ stets Individuenvariablen) sind.

Aus einem K_4-Ausdruck H geht *eine Reduzierte von H* dadurch hervor, daß jeder prädikative Teilausdruck, der die Gestalt der linken Seite von (33) hat, durch die entsprechende rechte Seite von (33) ersetzt wird, wobei die jeweiligen $j_0, j_1, \ldots$ so groß gewählt sind, daß die Variablen $a_{j_0}, a_{j_1}, \ldots$ in dem Gesamtausdruck H nicht vorkommen. Eine bestimmte Reduzierte von ax_4^* nennen wir ax_5^*. Durch „$\vdash$" deuten wir im folgenden die Ableitbarkeit (innerhalb K_5) aus dem Axiomensystem

$$\{ax_5^*,\ \mathrm{A}1,\ \mathrm{A}2,\ \mathrm{A}3\} \tag{34}$$

an. Wir werden zeigen:

Ist H in K_4 *aus* ax_4^* *ableitbar und RdH eine Reduzierte von H, so* $\vdash RdH$. (35)

Für $H \in ax$ besagt (35): $\vdash H$, denn H ist als K_1-Ausdruck Reduzierte von sich selbst.

Für den Beweis von (35) ist ausschlaggebend, daß sich die Schlußregeln von K_4 und die von K_5 nur in der *Termeinsetzungsregel* unterscheiden. In K_4 sind nämlich Termeinsetzungen

$$a_i/\prod_{\nu=1}^{n} T_\nu \qquad \text{mit } n \geqq 1 \tag{36}$$

statthaft[1]), während in K_5 — wegen der eingeschränkten Termbestimmungen — davon nur der Fall $n = 1$ erlaubt bleibt. Nun läßt sich aber jede Termeinsetzung (36) in endlich viele Termeinsetzungen der Formen $a_i/a_{i_1}a_{i_2}$ (mit $i_1 \neq i \neq i_2$) und a_i/T_ν (einschließlich Variablenumbenennung) auflösen. Daher reduziert sich die Behauptung (35) auf diese:

Geht der K_4*-Ausdruck H, der* a_i *vollfrei, aber weder* a_{i_1} *noch* a_{i_2} *enthält, durch die Substitution* $a_i/a_{i_1}a_{i_2}$ *in den* K_4*-Ausdruck* $\widehat{H}$ *über und ist* $Rd\widehat{H}$ *eine Reduzierte von* $\widehat{H}$*, dann gilt:*

$$\textit{Wenn } \vdash RdH, \textit{ so } \vdash Rd\widehat{H}. \tag{37}$$

Jeder a_i enthaltende prädikative Teilausdruck von RdH hat die Gestalt $Vka_{j_1}a_ia_{j_2}$ (wobei die drei Indizes verschieden sind). Steht nämlich ein prädikativer K_1-Ausdruck (der mit einem R_λ beginnt) in RdH, so auch in H selbst — folglich kann in ihm a_i nicht vorkommen, weil sonst $\widehat{H}$ kein Ausdruck wäre. Und Teilausdrücke $Vka_{j_1}T_\nu a_{j_2}$, bei denen T_ν zwar a_i enthält, aber nicht mit a_i identisch ist (also mit einem f_λ beginnt), können in RdH nicht auftreten, weil T_ν auch in H selbst stünde und $\widehat{H}$ wieder kein Ausdruck wäre.

Wir setzen $Vka_{i_1}a_{i_2}a_i = H_0$. Ist Γ ein beliebiger Teilausdruck von RdH, so möge Γ' dadurch aus Γ hervorgehen, daß jeder die Variable a_i enthaltende prädikative Teilausdruck Γ_1 von Γ durch $\exists a_i(H_0 \wedge \Gamma_1)$ ersetzt wird. Wir beweisen:

$$\vdash H_0 \to (\Gamma \leftrightarrow \Gamma'). \tag{38}$$

[1]) — natürlich nur unter gewissen (auf der Hand liegenden) Voraussetzungen über die auftretenden Variablen.

Aus A2 erhalten wir:

$$\vdash Vka_{i_1}a_{i_2}a_i \wedge Vka_{i_1}a_{i_2}a_j \wedge Vka_{j_1}a_ja_{j_2} \to Vka_{j_1}a_ia_{j_2},$$

also, nach vorderer Partikularisierung und Umbenennung der gebundenen a_j in a_i, für $\Gamma = Vka_{j_1}a_ia_{j_2}$:

$$\vdash H_0 \wedge \exists a_i (H_0 \wedge \Gamma) \to \Gamma;$$

weil aber auch

$$\vdash H_0 \wedge \Gamma \to \exists a_i (H_0 \wedge \Gamma),$$

ist (38) für prädikatives Γ gesichert — denn für a_i nicht enthaltendes prädikatives Γ ist die Behauptung trivial. Durch Induktion bestätigt man (38) leicht auch für zusammengesetztes Γ.

Wir behaupten weiter:

$$\vdash (RdH)' \leftrightarrow Rd\widehat{H}. \tag{39}$$

Offenbar genügt es, (39) für $H = \prod_{\nu=0}^{n-1} T_\nu \equiv \prod_{\nu=n+1}^{n+m} T_\nu$ $(n \geqq 1, m \geqq 1)$ zu beweisen und dabei die j_ν in RdH so zu wählen, daß sie auch von i_1 und i_2 verschieden sind; mindestens einer der $n + m$ Terme T_ν soll a_i enthalten, also gleich a_i sein. Es sei N die Menge der ν mit $T_\nu = a_i$. Wir setzen $\bigwedge_{\nu \in N} Vk\,a_{j_\nu}a_ia_{j_{\nu+1}} = \Delta_1$ und fassen die anderen Konjunktionsglieder aus RdH konjunktiv zu Δ zusammen. Das Präfix des Ausdrucks RdH, also der rechten Seite von (33), nennen wir Ψ. Bis auf einfachste aussagen- und prädikatenlogische Umformungen stimmt dann

$(RdH)'$ mit $\Psi(\Delta \wedge \exists a_i (H_0 \wedge \Delta_1))$

und

$Rd\widehat{H}$ mit $\Psi(\Delta \wedge \prod_{\nu \in N}(\exists a_{k_\nu}) \bigwedge_{\nu \in N}(Vka_{j_\nu}a_{i_1}a_{k_\nu} \wedge Vka_{k_\nu}a_{i_2}a_{j_{\nu+1}}))$

überein, wenn die Indizes $k_\nu (\nu \in N)$ alle verschieden und größer als jeder andere in $Rd\widehat{H}$ auftretende Index sind. Setzen wir noch $\bigwedge_{\nu \in N} (Vka_{j_\nu}a_{i_1}a_{k_\nu} \wedge Vka_{k_\nu}a_{i_2}a_{j_{\nu+1}}) = \Delta_2$, so genügt zum Beweis von (39), daß wir zeigen:

$$\vdash \exists a_i (H_0 \wedge \Delta_1) \leftrightarrow \prod_{\nu \in N} (\exists a_{k_\nu}) \Delta_2. \tag{40}$$

Aus A3 (mit a_1/a_{j_ν}, a_2/a_{i_1}, a_3/a_{i_2}, a_4/a_{k_ν}, a_5/a_i, $a_6/a_{j_{\nu+1}}$) ergibt sich rein aussagenlogisch einerseits:

$$\vdash \bigwedge_{\nu \in N} Vka_{j_\nu}a_{i_1}a_{k_\nu} \wedge H_0 \wedge \Delta_1 \to \Delta_2, \tag{41a}$$

andererseits:

$$\vdash H_0 \wedge \Delta_2 \to H_0 \wedge \Delta_1. \tag{41b}$$

Wir beachten, daß die a_{k_ν} weder in Δ_1 noch in H_0 vorkommen, a_i dagegen nicht in Δ_2. In (41a) partikularisieren wir die a_{k_ν} erst hinten, dann vorn, außerdem vorn a_i:

$$\vdash \bigwedge_{\nu \in N} \exists a_{k_\nu} Vka_{j_\nu}a_{i_1}a_{k_\nu} \wedge \exists a_i (H_0 \wedge \Delta_1) \to \prod_{\nu \in N} (\exists a_{k_\nu}) \Delta_2;$$

auf Grund von A1 entsteht hieraus (40) mit „$\to$" statt „$\leftrightarrow$". In (41b) partikularisieren wir a_i erst hinten, dann vorn, außerdem vorn die a_{k_ν}; nach Abtrennung von $\exists a_i H_0$ (vermöge A 1) haben wir auch die andere Richtung von (40) gewonnen.

Mit Hilfe von (38) und (39) können wir nunmehr (37) — und damit (35) — beweisen. Wenn $\vdash RdH$, so wegen (38) auch $\vdash H_0 \rightarrow (RdH)'$; die Conclusio enthält a_i nicht mehr frei, so daß wir a_i in der Prämisse partikularisieren und danach wieder $\exists a_i H_0$ abtrennen können. Aus (39) ergibt sich dann die Behauptung.

Wir fassen zusammen:

Der elementare Kalkül K_5 *hat zusätzlich zu den Grundzeichen von* K_1 *nur die eine (Prädikaten-)Konstante* Vk.

K_5 *besitzt dieselben Terme wie* K_1.

Prädikative Ausdrücke in K_5 *sind neben den aus* K_1 *übernommenen nur die Zeichenreihen* $Vk\, T_1 T_2 T_3$, *sofern die* T_ν *Terme sind.*

Jeder (innerhalb K_5*) aus dem angegebenen endlichen Axiomensystem* (34) *ableitbare* K_1*-Ausdruck ist in* K_1 *allgemeingültig.*

Aus dem Axiomensystem (34) *ist ax (innerhalb* K_5*) ableitbar.*

(Eingegangen am 5. März 1958)