ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATISCHE LOGIK UND GRUNDLAGEN DER MATHEMATIK

Herausgegeben von

GÜNTER ASSER und KARL SCHRÖTER

(Berlin)

BAND 3, HEFT 2

1957

DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN

BERLIN

INHALT

Seite

Zeitschr. f. math. Logik und Grundlagen d. Math.
Bd. 3, S. 151—156 (1957)

EIN SPEZIALFALL DER SUBSTITUTION ALS GRUNDBEZIEHUNG DER ELEMENTAREN SEMIOTIK

Von KLAUS HÄRTIG in Berlin

Wir untersuchen Zeichenreihen[1]), zu deren Bezeichnung wir die Variablen „X", „Y", „Z", ..., „Z_1", „Z_2", ..., „a", „b", ... verwenden. Für die leere Zeichenreihe haben wir das Zeichen „⚲".

Um auszudrücken, daß

durch Verkettung von X mit Y die Zeichenreihe Z entsteht,

schreiben wir

$$Vk\, XYZ$$

und bezeichnen, wie es üblich ist, mit

$$XY$$

dasjenige Z, für welches $Vk\, XYZ$. Statt

Setzt man in Z_1 für Z_0 überall Z_{00} ein, so entsteht Z_2

schreiben wir

$$Sub\; Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$$

und bezeichnen, falls $Z_0 \neq \text{⚲}$, mit

$$Z_1{}^{Z_0}/_{Z_{00}}$$

die dann eindeutig bestimmte Zeichenreihe Z_2, für die $Sub\; Z_1 Z_0 Z_{00} Z_2$; nie gilt $Sub\; Z_1 \text{⚲} Z_{00} Z_2$. Wir erinnern daran, daß das Substituieren definitionsgemäß von links nach rechts fortschreitet, so daß etwa, wenn a und b verschiedene Atome sind, $(aaa)^{aa}/_b = ba$ und nicht etwa $= ab$ wird.

Streichung einer Zeichenreihe Z_0 an allen Stellen von Z_1 — z. B. bei Wortproblemen auftretend — ist ein Spezialfall der Substitution. Zur Abkürzung werde festgesetzt:

$$Str\; Z_1 Z_0 Z_2 =_{\mathrm{Df}} Sub\; Z_1 Z_0 \text{⚲} Z_2$$

und, für $Z_0 \neq \text{⚲}$:

$$Z_1[Z_0] =_{\mathrm{Df}} Z_1{}^{Z_0}/_{\text{⚲}}.$$

Auf Grund unserer Verabredung über das Substituieren wird beispielsweise, wenn X nicht in Y vorkommt, zwar stets $(XY)[X] = Y$, jedoch nicht immer $(YX)[X] = Y$, wie der Fall $Y = ab$, $X = aba$ (a Atom, b Atom, $a \neq b$) lehrt. Nie gilt $Str\; Z_1 \text{⚲} Z_2$. Wenn $Str\; Z_1 Z_2 \text{⚲}$, nennen wir Z_1 ein *Vielfaches* der (nicht-leeren) Zeichenreihe Z_2.

[1]) Genau genommen: Zeichen(reihen)*gestalten*.

11*

Durch die (vierstellige) Relation *Sub* läßt sich *Vk* ziemlich leicht elementar explizit definieren[1]): Es gibt einen aus Ausdrücken „$Sub\, Z_i Z_j Z_k Z_l$" durch aussagenlogische Verknüpfungen und Quantifizierung von Zeichenreihenvariablen aufgebauten Ausdruck $\mathfrak{H}$ derart, daß der Ausdruck

$$Vk\, Z_1 Z_2 Z_3 \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{H}$$

allgemeingültig ist — und zwar in *jeder* freien Halbgruppe von Zeichenreihen, ohne Voraussetzungen über die Mächtigkeit der Basis (d. h. die Anzahl der Atomzeichen). In der vorliegenden Note wird gezeigt, daß *Vk* und *Sub* durch *Str* elementar explizit definierbar sind.

Zur Vorbereitung betrachten wir den Fall, daß die freie Halbgruppe *genau ein Atom* besitzt, also der Halbgruppe der natürlichen Zahlen isomorph ist; im Bereich der natürlichen Zahlen entspricht

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3$$

der Verkettungsrelation,

$$\alpha_1 + (\alpha_{00} - \alpha_0) \cdot \left[\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right] = \alpha_2 \quad (\alpha_0 \neq 0) \qquad (*)$$

der Substitutionsrelation und

$$\alpha_2 \text{ ist Rest von } \alpha_1 \text{ bei Division durch } \alpha_0 \quad (\alpha_0 \neq 0) \qquad (**)$$

der Streichungsrelation. Bekanntlich[2]) lassen sich Addition und Multiplikation — und damit auch (*) — sogar schon durch

$$\alpha_1 \equiv 1 \bmod \alpha_0,$$

erst recht also durch (**) elementar explizit definieren.

Zur Vorbereitung bemerken wir ferner, daß man, falls die freie Halbgruppe *mindestens zwei Atome* besitzt, *Sub* durch *Vk* elementar ausdrücken kann,[3]) so daß nur noch *Vk* durch *Str* zu definieren bleibt.

Wir nehmen an, daß wir nicht die triviale (nur aus $\natural$ bestehende) Zeichenreihen-Halbgruppe vor uns haben und daß *X und Y beide nicht leer und auch nicht Vielfache eines und desselben Atoms* sind. Dann, werden wir benutzen, *gibt es voneinander verschiedene Atome a und b derart, daß weder* $Str\, Xa\natural$ *noch* $Str\, Yb\natural$. In der Tat: Ist X Vielfaches eines Atoms b, so gilt nach Voraussetzung nicht $Str\, Yb\natural$; folglich

[1]) K. HÄRTIG, Explizite Definitionen einiger Eigenschaften von Zeichenreihen. Diese Zeitschr. 2 (1956), 177—203; § 3.

[2]) J. R. MYHILL, A reduction in the number of primitive ideas of arithmetic. J. Symb. Log. 15 (1950), 130.

[3]) W. V. QUINE, Definition of substitution. Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936), 561—569 (für unsern Zweck zu modifizieren, weil QUINE ohne $\natural$ arbeitet). — K. HÄRTIG, a. a. O., S. 184.

gibt es in Y ein von b verschiedenes Atom a; für solch ein a gilt wegen $Str\ Xb\overset{\circ}{\mid}$ und $X \neq \overset{\circ}{\mid}$ nicht $Str\ Xa\overset{\circ}{\mid}$. Analog schließt man in dem Fall, daß Y Vielfaches eines Atoms a ist. Falls weder X noch Y Vielfaches eines Atoms ist, leisten beliebige verschiedene Atome a, b das Verlangte.

Die Hilfssätze und ihr Korollar beweisen wir unter folgenden Voraussetzungen:

$$a\ \textit{Atom},\ b\ \textit{Atom},\ a \neq b,\ A_2 = aa,\ B_2 = bb,\ B_3 = bbb,\ B_4 = bbbb;$$

$$\textit{nicht Str } Xa\overset{\circ}{\mid},\ \textit{nicht Str } Yb\overset{\circ}{\mid}; \tag{1}$$

$$\textit{Str } Aa\overset{\circ}{\mid},\ A\ \textit{weder in } X \textit{ noch in } Y,\ A^2 = AA; \tag{2}$$

$$\textit{Str } B_0b\overset{\circ}{\mid},\ B_0\ \textit{weder in } X \textit{ noch in } Y,\ B = B_0B_0,\ B^2 = BB. \tag{3}$$

Hierin können die beiden Bedingungen (1) äquivalent durch diese ersetzt werden:

$$X\ \textit{nicht in } A,\ Y\ \textit{nicht in } B.$$

Hilfssatz 1. $((AXABYB)[A])[B] = XY$.

Beweis. Für $W = AXABYB$ und $\overline{W} = XBYB$ zeigen wir:

$$W[A] = \overline{W},\quad \overline{W}[B] = XY.$$

Da wegen (2) und (3) jedes zusammenhängende Vorkommen von A in W ganz in dem Anfangsstück AXA liegen muß, wird $W[A] = (AXA)[A]BYB$. Wegen (1) dürfen wir $X = A'X_1A''$ annehmen, wobei A' und A'' Vielfache von a sind, während X_1 weder mit a beginnt noch auf a endet noch leer ist. Jedes zusammenhängende Vorkommen von A in AXA muß entweder ganz in dem Anfang AA' oder ganz in dem Endstück $A''A$ liegen, weil ja erstes und letztes Atom des Mittelstücks X_1 von a verschieden sind und A im Innern von X_1 wegen (2) nicht vorkommt. Beachtet man noch, daß wegen (2)

$$A \text{ nicht in } A',\quad A \text{ nicht in } A'',$$

daß also

$$A' \text{ echt in } A,\quad A'' \text{ echt in } A,$$

so erhält man

$$W[A] = (AA')[A]X_1(A''A)[A]BYB = A'X_1(AA'')[A]BYB = A'X_1A''BYB = \overline{W}.$$

Jetzt führen wir als B', B'', B''' solche Vielfache von b ein, daß $X = X_2B'$ und $Y = B''Y_2B'''$ gilt, X_2 nicht auf b endet und Y_2 weder mit b beginnt noch auf b endet. Unter Benutzung von (3) erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{W}[B] = (X_2B'BB''Y_2B'''B)[B] &= X_2(BB'B'')[B]Y_2(BB''')[B]\\ &= X_2(B'B'')[B]Y_2B'''[B].\end{aligned}$$

Wegen (3) kommt B_0 nicht in B', B'', B''' vor; jede dieser drei ist also echt in B_0 enthalten, demnach auch $B'B''$ echt in B und B''' echt in B:

$$\overline{W}[B] = X_2B'B''Y_2B''' = XY.$$

Hilfssatz 2. *$W = AXABYB$ genau dann, wenn*

$$W[AXA] = BYB \text{ und } W[BYB] = AXA \text{ und } BA \text{ nicht in } W. \quad (4)$$

Beweis, daß $W = AXABYB$ aus (4) folgt:

Wir setzen $AXA = U$ und $BYB = V$. In W kommt U vor, weil man sonst aus *Str* WUV auf $V = W$ und dann aus *Str* WVU auf $U =$ ⚲ schließen könnte. Entsprechend zeigt sich: V in W. Ein beliebiges Vorkommen von U in W und ein beliebiges Vorkommen von V in W liegen offensichtlich ganz getrennt. Wir markieren das *erste* Auftreten von U und von V in W:

$$W = R_1 U R_2 V R_3 \quad \text{(a)}$$

(U kommt in $R_1 U$ *nur* als Endstück vor, desgleichen V in $R_1 U R_2 V$)

oder

$$W = R_1 V R_2 U R_3 \quad \text{(b)}$$

(V kommt in $R_1 V$ *nur* als Endstück vor, desgleichen U in $R_1 V R_2 U$).

Im Fall (a) wird $U = W[V] = R_1 U R_2 R_3[V]$ und $V = W[U] = R_1 R_2[U] V R_3[U]$, also $R_1 = R_2 = R_3[V] = R_3[U] =$ ⚲; als Vielfaches sowohl von U als auch von V muß R_3 ebenfalls leer sein; so führt (a) zu $W = UV$. Aus (b) folgt entsprechend $W = VU$. Diese zweite Möglichkeit — $W = BYBAXA$ — scheidet aus, weil BA nicht in W vorkommen sollte.

Hilfssatz 3a. *$U = AXA$ genau dann, wenn*

$$\textit{Str } UAX \text{ und } \textit{Str } UXA^2 \text{ und } A^2 \text{ nicht in } U. \quad (5)$$

Beweis, daß $U = AXA$ aus (5) folgt:

Käme X nicht in U vor, so führte (5) über $U = A^2$ zu $X =$ ⚲ — aber X sollte kein Vielfaches von a sein (1). Wir wählen irgendwelche R_1, R_2 mit $U = R_1 X R_2$ und greifen auf die Zerlegung $X = A' X_1 A''$ aus dem Beweis zu Hilfssatz 1 zurück. Unter Benutzung von (5) erhält man

$$A' X_1 A'' = U[A] = (R_1 A')[A] X_1 (A'' R_2)[A],$$

und weil A' und A'' Vielfache von a sind, X_1 aber nicht, folgt hieraus $(R_1 A')[A] = A'$ und $(A'' R_2)[A] = A''$. Demnach sind R_1 und R_2 Vielfache von A; wegen $U = R_1 X R_2$ und (5) kommen für beide nur die Werte ⚲ und A in Frage. Wäre $R_1 =$ ⚲ oder $R_2 =$ ⚲, so erhielte man A oder sogar ⚲ als $U[X]$ — entgegen (5). Damit ist $U = AXA$ bewiesen.

Hilfssatz 3b. *$V = BYB$ genau dann, wenn*

$$\textit{Str } VBY \text{ und } \textit{Str } VYB^2 \text{ und } B^2 \text{ nicht in } V.$$

Hilfssatz 4. *$C = BA$ genau dann, wenn*

$$\textit{Str } CAB \text{ und } \textit{Str } CBA \text{ und } ab \text{ nicht in } C.$$

Hilfssatz 5. *$D = ab$ genau dann, wenn es Zeichenreihen E, F, G gibt, für die gilt:*

$$\left.\begin{array}{ll} Str\ EaB_4,\ Str\ EbA_2,\ B_3 \textit{ nicht in } E, & \text{(a)} \\ Str\ EFF, & \text{(b)} \\ Str\ EB_2G,\ Str\ GD\overset{\circ}{|},\ Str\ Dab. & \text{(c)} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Beweis. Wenn $D = ab$, so wird (6) wahr für

$$E = bbabab,\ F = bab,\ G = abab. \tag{7}$$

Zur Umkehrung: Wir leiten erst (7), dann $D = ab$ aus (6) ab. Aus (a) geht hervor, daß E eine der sechs Zeichenreihen

abbabb
bababb
babbab
bbaabb
bbabab
bbabba

ist. Wegen (b) kommt a in F genau einmal, folglich b genau zweimal vor. Streichung von *abb* bzw. *bba* liefert in keinem der sechs Fälle wieder *abb* bzw. *bba*; dagegen erhält man *bab* durch Streichung von *bab* aus E genau im Falle $E = bbabab$. Wegen (c) ist $G = abab$ und zunächst entweder $D = ab$ oder $D = abab$; die zweite Möglichkeit wird durch die Forderung *Str Dab* ausgeschlossen.

Korollar. *$Z = XY$ genau dann, wenn es Zeichenreihen $W, \overline{W}, U, V, C, D, E, F, G$ derart gibt, daß*

$$\begin{array}{lll} Str\ WA\overline{W}, & Str\ \overline{W}BZ, & \\ Str\ WUV, & Str\ WVU, & C \textit{ nicht in } W, \\ Str\ UAX, & Str\ UXA^2, & A^2 \textit{ nicht in } U, \\ Str\ VBY, & Str\ VYB^2, & B^2 \textit{ nicht in } V, \\ Str\ CAB, & Str\ CBA, & D \textit{ nicht in } C, \\ Str\ EaB_4, & Str\ EbA_2, & B_3 \textit{ nicht in } E, \\ Str\ EFF, & Str\ EB_2G, & Str\ GD\overset{\circ}{|},\ Str\ Dab. \end{array}$$

Wir verwenden, daß

$$Z_1 \textit{ nicht in } Z_2 \textit{ genau dann, wenn } Str\ Z_2Z_1Z_2,$$

und nehmen jetzt den Fall hinzu, daß X oder Y leer ist oder X und Y Vielfache eines und desselben Atoms sind.

Satz. *Vk XYZ genau dann, wenn*

$$X = ♀ \text{ und } Z = Y$$

oder

$$Y = ♀ \text{ und } Z = X$$

oder Zeichenreihen $a, A_2, A, A^2, b, B_2, B_3, B_4, B_0, B, B^2, C, D, E, F, G, U, V, W, \overline{W}$ *existieren, für die gilt:*

$$\left\{\begin{array}{l}
a \text{ Atom und } Str\ Xa♀ \text{ und } Str\ Ya♀ \\
\text{und} \left\{\begin{array}{l}
\cdot \quad Str\ ZXY \text{ und } Str\ ZUZ \text{ und } Vk\ XXU \text{ und } Str\ YZY \\
\text{oder } Str\ ZYX \text{ und } Str\ ZVZ \text{ und } Vk\ YYV \text{ und } Str\ XZX \\
\text{oder } Vk\ XXZ \text{ und } Vk\ YYZ
\end{array}\right.
\end{array}\right.$$

oder

$$\left\{\begin{array}{l}
a \text{ Atom und } b \text{ Atom und } Str\ aba \\
\text{und } Vk\ aaA_2 \text{ und } Vk\ bbB_2 \text{ und } Vk\ B_2B_2B_4 \text{ und } Str\ B_4B_3b \\
\text{und } Str\ Aa♀ \text{ und } Str\ XAX \text{ und } Str\ YAY \text{ und } Str\ AXA \\
\text{und } Str\ B_0b♀ \text{ und } Str\ XB_0X \text{ und } Str\ YB_0Y \text{ und } Str\ BYB \\
\text{und } Vk\ AAA^2 \text{ und } Vk\ B_0B_0B \text{ und } Vk\ BBB^2 \\
\text{und } Str\ WA\overline{W} \text{ und } Str\ \overline{W}BZ \\
\text{und } Str\ WUV \text{ und } Str\ WVU \text{ und } Str\ WCW \\
\text{und } Str\ UAX \text{ und } Str\ UXA^2 \text{ und } Str\ UA^2U \\
\text{und } Str\ VBY \text{ und } Str\ VYB^2 \text{ und } Str\ VB^2V \\
\text{und } Str\ CAB \text{ und } Str\ CBA \text{ und } Str\ CDC \\
\text{und } Str\ EaB_4 \text{ und } Str\ EbA_2 \text{ und } Str\ EB_3E \\
\text{und } Str\ EFF \text{ und } Str\ EB_2G \text{ und } Str\ GD♀ \text{ und } Str\ Dab.
\end{array}\right.$$

Die Redewendungen der Formen „*x Atom*" und „*Vk PPQ*" kann man etwa mit Hilfe folgender Äquivalenzen eliminieren:

x ist Atom genau dann, wenn
Str xx♀ und für jedes Z: Wenn Str ZZ♀ und Str ZxZ, so Str xZx.

Vk PPQ mit $P \neq ♀$ *genau dann, wenn*
Str QP♀ und für jedes Z: Wenn Str ZP♀ und Str ZQZ und Str ZZ♀, so Str PZ♀.

Der Satz gilt in *jeder* Zeichenreihen-Halbgruppe.

(Eingegangen am 13. März 1957)