teorema
Vol. XLI/3, 2022, pp. 00-00
ISNN 0210-1602
[BIBLID 0210-1602 (2022) 41:3; pp. 00-00

Lógica cuántica, Nmatrices y adecuación, I

Juan Pablo Jorge y Federico Holik

ABSTRACT
In this paper we discuss the notions of adequacy and truth functionality in quantum logic from the point of view of a non-deterministic semantics. We give a characterization of the degree of non-functionality which is compatible with the propositional structure of quantum theory, providing a proof of the impossibility of assigning a functional semantics to the lattice of quantum propositions. An advantage of our proof is that it is independent of the number of truth values involved, generalizing previous works. As a consequence, there cannot exist an isomorphism between the lattice of quantum projections and a Boolean algebra of n elements. We also show the failure of the adequacy of every Nmatrix that is a model of the non-distributive lattice of quantum propositions.

KEYWORDS: *Nmatrices, Kochen-Specker Theorem, Quantum Logic, Suitable, Quantum States*.

RESUMEN
En este trabajo discutimos las nociones de adecuación y veritativo-funcionalidad en la lógica cuántica, desde el punto de vista de una semántica no determinista. Damos una caracterización del grado de no-funcionalidad compatible con la estructura proposicional de la teoría cuántica, presentando una prueba de la imposibilidad de asignar una semántica funcional al retículo de proposiciones cuánticas. Un punto ventajoso de nuestra prueba es que se independiza de la cantidad de valores de verdad involucrados, generalizando trabajos previos. Como consecuencia de esto, no puede existir un homomorfismo entre el retículo de proyectores cuánticos y un álgebra de Boole de *n* elementos. Probamos también que falla la adecuación de cualquier Nmatriz que sirva como modelo para el retículo no distributivo de proposiciones cuánticas.

PALABRAS CLAVE: *teorema de Kochen-Specker; Nmatrices; adecuación; estados cuánticos*.

I. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de la teoría cuántica ha dado lugar a formidables avances, tanto científicos como tecnológicos. Al mismo tiempo, ha despertado interrogantes acerca de su interpretación, que se han convertido en tópicos fundamentales de la filosofía de la física. Entre ellos, se encuentra la cuestión acerca de la lógica subyacente al formalismo cuántico. En el celebrado trabajo de Birkhoff y von Neumann [Birkhoff and von Neumann (1936)], se señaló por primera vez que la estructura de las proposiciones empíricas que puedan hacerse acerca de un sistema cuántico no se corresponde con aquellas asociadas a los sistemas clásicos, las cuales se pueden identificar con la lógica clásica a través de las álgebras de Boole. Birkhoff y von Neumann mostraron que las proposiciones empíricas asociadas a sistemas cuánticos están naturalmente vinculadas a la estructura de subespacios lineales de un espacio lineal adecuadamente elegido, los cuales forman un álgebra que no es distributiva, y que, por lo tanto, no es de Boole. Esta estructura algebraica se conoce como *retículo ortomodular* y fue llamada *lógica cuántica* por sus creadores. En este trabajo nos referiremos a las estructuras lógicas y algebraicas asociadas al formalismo cuántico como *estructuras cuánticas*. También nos referiremos al retículo ortomodular de proyectores como proposiciones cuánticas.

Desde el trabajo seminal de Birkhoff y von Neumann [Birkhoff and von Neumann (1936)], se descubrieron otras estructuras cuánticas. Entre ellas, podemos mencionar a las álgebras de efectos y a los posets ortomodulares. El descubrimiento de las distintas estructuras cuánticas dio lugar a posiciones filosóficas diversas. Entre ellas, es importante mencionar a H. Putnam [Putnam (1968)], quien llegó a afirmar que la mecánica cuántica planteaba la necesidad de abandonar la lógica clásica. Independientemente de las conclusiones filosóficas más generales que puedan extraerse, se puede afirmar que las estructuras lógicas que subyacen al formalismo cuántico son del mayor interés para la filosofía de la física, dado que su estudio ha dado lugar a resultados claves para la interpretación de la teoría. Entre estos resultados, podemos mencionar al teorema de Kochen-Specker, vinculado a la noción de contextualidad.

En la caracterización de las estructuras cuánticas, es fundamental especificar el rol (o los posibles roles) que juegan los estados cuánticos en relación con las valuaciones vinculadas al retículo de proposiciones. En un trabajo reciente [Jorge and Holik (2020], se presentó una caracterización de los estados cuánticos como valuaciones sobre el retículo de proposiciones cuánticas en el marco de una semántica no determinista. Desde el punto de vista de este enfoque, los estados cuánticos presuponen valuaciones al intervalo [0,1] y quedan definidos a partir de matrices no deterministas. Esto permite dar una interpretación novedosa de la estructura algebraica asociada a las proposiciones cuánticas. El lector no familiarizado con las semánticas no deterministas puede concebirlas de forma intuitiva como tablas de verdad que no necesariamente obedecen al principio de composicionalidad de la verdad. Para una introducción completa y accesible al tema, referimos a [Avron and Zamansky (2005)]. En aras de la completitud, incluiremos un breve repaso de dicho formalismo en este trabajo.

Teniendo en cuenta que los estados cuánticos encuentran una representación en términos de valuaciones de una semántica no determinista [Jorge and Holik (2020)], la cual es explícitamente no funcional, es lícito preguntar: ¿cuál es el menor grado de no-funcionalidad compatible con la estructura proposicional de la teoría cuántica? Con el fin de responder esta pregunta, en este trabajo presentamos una prueba de la imposibilidad de asignar una semántica funcional al retículo de proposiciones cuánticas. La misma se independiza de la cantidad de valores de verdad involucrados y, de alguna manera, puede ser considerada una generalización de la prueba presentada en la referencia [Malament (2000)]. Esto prueba que, sin importar la cantidad de valores de verdad, bajo unos pocos supuestos, no puede existir un homomorfismo entre el retículo de proyectores cuánticos y un álgebra de Boole de n elementos. Además, se prueba que también falla la adecuación (en el sentido de Avron) [Avron and Zamansky (2005)] de cualquier Nmatriz que pretenda ser un buen modelo para el retículo no distributivo de proposiciones cuánticas. Esto es, no sólo es necesario abandonar la veritativo-funcionalidad, sino que, si se desea incorporar una semántica no determinista de Nmatrices, la misma no podrá validar simultáneamente adecuación de la disyunción y conjunción. A la luz de estos resultados, se obtiene una caracterización novedosa de las proposiciones cuánticas (y de los estados cuánticos como valuaciones), la cual permite comprender con mayor detalle en qué sentido la lógica cuántica difiere de la clásica, desde la perspectiva del marco formal que ofrecen las semánticas no deterministas.

El trabajo está organizado de la siguiente forma. En la sección II, repasamos brevemente el formalismo de semánticas no deterministas, los teoremas de Gleason y Kochen-Specker, así como otras nociones básicas de lógica cuántica necesarias para el resto del trabajo. Luego, en la sección III, mostramos cómo describir a los estados cuánticos en términos de valuaciones definidas por Nmatrices. En la sección IV analizamos la veritativo-funcionalidad y la adecuación en el marco del retículo de proposiciones cuánticas. Se generaliza una prueba presentada por Malament en [Malament (2000)] acerca de la falla de funcionalidad de la verdad de los conectivos lógicos cuánticos. La prueba que presentamos aquí pone el foco en el papel que tiene la adecuación de una Nmatriz en lo que respecta a proporcionar una semántica para el retículo cuántico, independientemente de la cantidad de valores de verdad. Mostramos que la veritativo-funcionalidad, junto con una relación de consecuencia lógica que preserve valores designados, así como algunas relaciones entre proposiciones que deben satisfacerse en la mecánica cuántica, implica adecuación de la semántica en el sentido de Avron (independientemente de la cantidad de valores de verdad). En la sección V se muestra que si la semántica cumple adecuación (aun siendo no determinista), entonces se valida distributividad. Como esto es no es compatible con la estructura algebraica de las proposiciones cuánticas, con el fin de que se cumpla la relación de consecuencia lógica del sistema de Nmatrices, es necesario que no se cumpla adecuación de alguno de los conjuntos $\tilde{\wedge}$, $\tilde{\vee}$. Por lo tanto, obtendríamos un resultado más fuerte: el sólo hecho de perder veritativo-funcionalidad no es suficiente para que una semántica sea un buen modelo de la cuántica. La semántica debe ser no adecuada. Esto está en concordancia con las Nmatrices propuestas en [Jorge and Holik (2020)] para el caso cuántico. La sección VI tiene como objetivo mostrar un ejemplo que deja en evidencia la importancia que tiene la adecuación a la hora de cumplir distributividad del retículo. En la sección VII discutimos la noción de consecuencia lógica a la luz de los resultados de las secciones previas. En la sección VIII enfocamos el problema de la adecuación. Finalmente, en las secciones IX y X analizamos alcance y pretensión de nuestro formalismo y resumimos los principales resultados presentados en este trabajo.

II. CONCEPTOS Y RESULTADOS PRELIMINARES

En esta sección se presentan los fundamentos teóricos sobre Nmatrices, teorema de Gleason y teorema de Kochen-Specker (KS) necesarios para la comprensión del resto del trabajo. Comenzaremos con una breve presentación de los conceptos básicos de las semánticas no deterministas, para después repasar los teoremas de Gleason y Kochen-Specker.

II.1 **Semánticas no deterministas**

Las matrices multivaluadas no deterministas (Nmatrices) son un campo fructífero de investigación en rápida expansión. Fueron introducidas en [Avron and Konikowska (2004), Avron and Lev (2005), Avron and Zamansky (2005)] (ver también [Batens (1999), Crawford and Etherington (1998)]). Desde entonces, se han desarrollado rápidamente como una teoría lógica fundamental, y han encontrado numerosas aplicaciones que van desde la teoría de autómatas, hasta la mecánica cuántica, pasando por varias áreas de la lógica, tales como las lógicas modales. Como ejemplos de desarrollos recientes ver [Coniglio, Fariñas del Cerro and Peron (2020); Pawlowski and La Rosa (2022)] y [Grätz (2021), Marcelino et al. (2022)]. En [Grätz (2021)] se estudian Nmatrices con valuaciones parciales de nivel y se da un algoritmo de implementación, mientras que en [Marcelino et al., (2022)] se estudian Nmatrices parciales (PNmatrices), centrándose en sus aspectos computacionales. La novedad de las Nmatrices consiste en que este formalismo extiende la semántica algebraica multivaluada habitual de los sistemas lógicos al importar la idea de cálculos no deterministas, permitiendo que el valor de verdad de una fórmula se elija de forma no determinista a partir de un conjunto dado de opciones. Las Nmatrices han demostrado ser una herramienta poderosa, cuyo uso conserva todas las ventajas de las matrices ordinarias multivaluadas, al mismo tiempo que es aplicable a una gama mucho más amplia de lógicas [Avron and Zamansky (2005)]. De hecho, hay muchas lógicas no clásicas (proposicionales) que, si bien no tienen matrices características finitas de múltiples valores, admiten Nmatrices finitas y, por lo tanto, son decidibles.

II.1.1. **Matrices deterministas**

En esta sección seguiremos el enfoque presentado [Avron and Zamansky (2005)]. En lo que sigue, L es un lenguaje proposicional y Frm_L denota al conjunto de fórmulas bien formadas del lenguaje. Las metavariables $\phi, \psi, ...$, recorren L-fórmulas, mientras que $\Gamma, \Delta, ...$, se utilizarán para conjuntos de L-fórmulas. El método general estándar para definir la lógica proposicional se basa en el uso de matrices deterministas (posiblemente de muchos valores):

Definición 2.1. Una matriz para L es una tupla

$$P = \langle V; D; O \rangle$$

donde

- V es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- D (valores designados) es un subconjunto propio no vacío de V.
- Para cada conectivo n-ario $\diamond$ de L, O incluye una función de interpretación $\tilde{\diamond}: V^n \longrightarrow V$

Una valuación parcial en P es una función v, que va a V desde un subconjunto $W \subseteq Frm_L$ cerrado bajo subfórmulas, tal que, para cada conectivo n-ario $\diamond$ de L y para toda $\psi_1, \dots, \psi_n \in W$, se cumple lo siguiente:

$$v\big(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)\big) = \widetilde{\diamond}\big(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n)\big) \tag{1}$$

Proposición 2.1. (Analiticidad). Toda valuación parcial de una matriz P para L, definida sobre un conjunto de L-fórmulas cerrado bajo subfórmulas, puede ser extendida a una valuación total en P.

Debido a esta propiedad, cualquier matriz finita P será decidible.

II.1.2**. Matrices no deterministas (Nmatrices)**

Ahora pasamos al caso no determinista. La principal diferencia es que, en oposición a las matrices deterministas, las no deterministas, dados sus valores de verdad de entrada, asignan un conjunto de valores posibles (en lugar de uno solo valor).

Definición 2.2. Una matriz no determinista (Nmatriz) para L es una tupla $M = \langle V; D; O\rangle$, donde

- V es un conjunto no vacío de valores de verdad.
- $D \in \mathcal{P}(V)$ (valores designados) es un subconjunto propio no vacío de V.
- Para cada conectivo n-ario $\diamond$ de L, O incluye la correspondiente función de interpretación
$$\widetilde{\diamond}: V^n \longrightarrow \mathcal{P}(V)\backslash\{\emptyset\}$$

Definición 2.3.

1. Una valuación parcial dinámica en M es una función v sobre un conjunto cerrado bajo subfórmulas $W \subseteq Frm_L$ a V, tal que, para cada conectivo *n*-ario $\diamond$ de L y para toda $\psi_1, \dots, \psi_n \in W$, se cumple lo siguiente:
$$v\big(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)\big) \in \widetilde{\diamond}\big(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n)\big)$$
Una valuación parcial en M es llamada valuación (total) si su dominio es Frm_L.
2. Una valuación (parcial) estática en M es una valuación (parcial) dinámica que satisface además el siguiente principio de composicionalidad (o funcionalidad) (definido en algún $W \subseteq Frm_L$): para cada conectivo n-ario $\diamond$ de L y para cada $\psi_1, \dots, \psi_n, \phi_1, \dots, \phi_n \in W$, si $v(\psi_i) = v(\phi_i)$ $(i = 1, \dots, n)$, entonces
$$v(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)) = v(\diamond(\phi_1, \dots, \phi_n))$$

Es importante señalar que las matrices clásicas (deterministas) corresponden al caso en que cada $\widetilde{\diamond}: V^n \to \mathcal{P}(V)$ es una función que toma valores de *singletons* (singulete). En este caso no hay diferencia entre valuaciones estáticas y dinámicas, tenemos determinismo (funcional).

Para comprender la diferencia entre matrices ordinarias y Nmatrices, recordamos que, en el caso determinista, el valor de verdad asignado por una valuación v a una fórmula compleja se define de la siguiente manera: $v(\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)) = \tilde{\diamond}(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n))$. El valor de verdad asignado a $\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)$ está unívocamente determinado por los valores de verdad de sus subfórmulas: $v(\psi_1)$, ..., $v(\psi_n)$. Sin embargo, este no es el caso de las Nmatrices: en general, los valores de verdad de ψ_1, ..., ψ_n no determinan unívocamente el valor asignado a $\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)$, ya que diferentes valuaciones que tengan los mismos valores de verdad para ψ_1, ..., ψ_n pueden asignar diferentes elementos del conjunto de interpretación $\tilde{\diamond}(v(\psi_1), \dots, v(\psi_n))$ a $\diamond(\psi_1, \dots, \psi_n)$. Por lo tanto, las semánticas no deterministas de Nmatrices no cumplen veritativo-funcionalidad, en oposición a las semánticas matriciales. En la tabla (1), se muestran algunas diferencias entre las matrices y las Nmatrices.

Tabla 1: Matrices deterministas vs Nmatrices

	Matrices deterministas	**Nmatrices**
Conjunto de valores de verdad	V	V
Conjunto de valores designados	$D \subset V$	$D \subset V$
Conectivos $\diamond$	$\tilde{\diamond}: V^n \to V$	$\tilde{\diamond}: V^n \to \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$
Valuaciones	No dinámicas	Posiblemente dinámicas / no estáticas.
Veritativo funcional	Sí	No necesariamente

Ahora, revisaremos las definiciones estándar de consecuencia lógica [Avron and Zamansky (2005)].

Definición 2.4.

1. Una valuación (parcial) v en M satisface una fórmula ψ ($v \vDash \psi$) si ($v(\psi)$ está definido y) $v(\psi) \in D$. Decimos que es un modelo de Γ ($v \vDash \Gamma$) si satisface cada fórmula de Γ.
2. Decimos que ψ es dinámicamente (estáticamente) válida en M, en símbolos $\vDash_M^d \psi$ ($\vDash_M^s \psi$), si $v \vDash \psi$ para cada valuación dinámica (estática) v en M.

3. La relación de consecuencia dinámica (estática) inducida por M es definida de la siguiente manera: $\Gamma \vdash_M^d \Delta$ ($\Gamma \vdash_M^s \Delta$) si cada modelo dinámico (estático) v en M de Γ satisface algún $\psi \in \Delta$.

Obviamente, la relación de consecuencia estática incluye a la dinámica, es decir, $\vdash_M^d \subseteq \vdash_M^s$. Además, para las matrices ordinarias, tenemos que $\vdash_M^d = \vdash_M^s$.

Proposición 2.2. Sea M una Nmatriz de dos valores que tiene al menos una operación no determinista. Entonces no hay una familia finita de matrices ordinarias finitas F, tales que $\vdash_M^d \psi$ sii $\vdash_F \psi$.

Proposición 2.3. Para cada Nmatriz M (finita), hay una familia (finita) de matrices ordinarias F, tales que $\vdash_M^s = \vdash_F$.

Así, sólo el poder expresivo de la semántica dinámica basado en Nmatrices es más fuerte que el de matrices ordinarias. El siguiente teorema, tomado de [Avron and Lev (2005)], es una generalización de la proposición 2.1 para el caso de las Nmatrices:

Proposición 2.4. (Analiticidad) Sea $M = \langle V; D; O \rangle$ una Nmatriz para L, y sea v' una valuación parcial en M. Entonces v' puede extenderse a una valuación (total) en M.

Definición 2.5. Sea $M = \langle V; D; O \rangle$ una Nmatriz para un lenguaje que incluya el fragmento positivo de la lógica clásica (LK^+). Decimos que M es *adecuada*[1] para este lenguaje si se cumplen las siguientes condiciones:

1. $\tilde{\wedge}$:

   Si $a \in D$ y $b \in D$, entonces $a \tilde{\wedge} b \subseteq D$

   Si $a \notin D$, entonces $a \tilde{\wedge} b \subseteq V \setminus D$

   Si $b \in D$, entonces $a \tilde{\wedge} b \subseteq V \setminus D$

2. $\tilde{\vee}$:

   Si $a \in D$, entonces $a \tilde{\vee} b \subseteq D$

   Si $b \in D$, entonces $a \tilde{\vee} b \subseteq D$

   Si $a \notin D$ y $b \notin D$, entonces $a \tilde{\vee} b \subseteq V \setminus D$

3. $\tilde{\supset}$:

   Si $a \notin D$, entonces $a \tilde{\supset} b \subseteq D$

   Si $b \in D$, entonces $a \tilde{\supset} b \subseteq D$

   Si $a \in D$ y $b \notin D$, entonces $a \tilde{\supset} b \subseteq V \setminus D$

Observación: Esta propiedad será ampliamente utilizada a lo largo de nuestro artículo. En ocasiones, predicaremos la adecuación de los conjuntos de interpretación de los conectivos para denotar que se cumple la correspondiente propiedad para ese conectivo (en vez de predicarlo de la Nmatriz completa).

II.2. **Teoremas de Gleason y Kochen-Specker**

En 1957 Andrew Gleason demostró un teorema [Gleason (1957)] cuyas consecuencias fueron relevantes tanto para la caracterización de los estados cuánticos como para la interpretación de la teoría. El objetivo de Gleason era encontrar una base axiomática simplificada para la Mecánica Cuántica mostrando que las probabilidades de obtener distintos resultados al medir un observable físico siempre se pueden calcular a partir de la matriz densidad $\hat{\rho}$. En el trabajo de Gleason no había ninguna referencia directa al problema de las variables ocultas [Cabello (2001)], pero su trabajo también fue relevante para su estudio.

El teorema de Kochen-Specker (KS) –también conocido como teorema de Bell-Kochen-Specker (BKS)– está vinculado a la imposibilidad de un tipo o familia de Teorías de Variables Ocultas (VO) en MC. Juega un rol central en el estudio de la teoría cuántica, y tiene repercusiones en sus distintas interpretaciones. Este teorema será relevante cuando discutamos la funcionalidad de la verdad en el contexto cuántico.

II.2.1**. Teorema de Gleason**

Teorema 2.1. *Gleason*. Para espacios de Hilbert separables $\mathcal{H}$ (reales o complejos) de dimensión mayor o igual que tres, todas las medidas de probabilidad μ sobre el conjunto de los proyectores $\mathbb{P}(\mathcal{H})$, es decir, todas las aplicaciones de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ en el intervalo $[0,1]$, que verifican $\mu(\hat{0}) = 0$, $\mu(\hat{\mathbb{I}}) = 1$, y que para toda familia numerable $\{\hat{P}_i\}$ de proyectores ortogonales de a pares $\mu(\sum_i \hat{P}_i) = \sum_i \mu(\hat{P}_i)$, son de la forma

$$\mu(\hat{P}_i) = Tr(\hat{\rho}\hat{P}_i),$$

donde $\hat{\rho}$ es un operador densidad.

Este teorema permite caracterizar a los estados cuánticos como medidas de probabilidad sobre un álgebra no Booleana. Es decir, un estado cuántico puede ser considerado una función μ con las siguientes características:

$$\mu: \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow [0,1] \qquad (2)$$

tal que:

1. $\mu(\widehat{\mathbf{0}}) = 0$.
2. Para cualquier familia numerable de proyectores ortogonales de a pares $\{\hat{P}_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, se cumple $\mu(\bigvee_j \hat{P}_j) = \sum_j \mu(\hat{P}_j)$.

El teorema de Gleason, nos dice entonces que si $dim(\mathcal{H}) \geq 3$, el conjunto $\mathcal{C}(\mathcal{L}(\mathcal{H}))$ de todas las medidas de la forma (2), se puede poner en correspondencia biunívoca con el conjunto $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ de todos los operadores positivos, hermíticos y de traza uno que actúan en $\mathcal{H}$. Dado un proyector ortogonal $\hat{P}$ (que representa una proposición experimental), tenemos entonces que para cada $\rho \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ y su medida de probabilidad asociada μ_ρ, la conexión viene dada por la regla de Born:

$$\mu_\rho(\hat{P}) = tr(\rho\hat{P}) \tag{3}$$

Es importante comparar a las ecuaciones (2), con aquellas que definen a los estados de una teoría de probabilidades clásica. Dado un conjunto Ω, consideremos una σ-álgebra $\Sigma \subseteq P(\Omega)$ de subconjuntos. Luego, una *medida de probabilidad Kolmogoroviana* será una función:

$$\mu: \Sigma \longrightarrow [0,1] \tag{4}$$

que cumple que:

1. $\mu(\emptyset) = 0$,
2. para cualquier familia numerable de conjuntos disjuntos de a pares $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\mu(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$.

Las ecuaciones (4) son conocidas como los axiomas de Kolmogorov [Kolmogorov (1933)]. La diferencia principal entre las probabilidades cuánticas y las clásicas es que, a pesar de la similitud de forma entre las ecuaciones 2 y 4, la σ-álgebra Σ que aparece en (4) es distributiva (ver sección siguiente), mientras que $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ no lo es. Este es el motivo por el cual las probabilidades cuánticas son llamadas medidas de probabilidad no-Kolmogorovianas (o no Booleanas).

Los retículos $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ de subespacios cerrados (o, equivalentemente, de proyectores ortogonales) de un espacio de Hilbert separable son casos particulares de una estructura más general, a saber, la de los *retículos ortomodulares* [Kalmbach (1990)]. Un retículo $\mathcal{L}$ se dice *ortomodular* (o *débilmente modular*), si es ortocomplementado y, siempre que $x \leq y$, entonces $y = x \vee (y \wedge x^\perp)$. En el capítulo siguiente volveremos a este concepto. Todo esto permite considerar a los estados de un sistema físico dado como medidas sobre un retículo ortomodular completo $\mathcal{L}$ de la siguiente forma:

$$\mu: \mathcal{L} \longrightarrow [0,1] \tag{5}$$

que cumple:

1. $\mu(\mathbf{0}) = 0$
2. para cualquier familia numerable de elementos ortogonales de a pares $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, se tiene que $\mu(\bigvee_i a_i) = \sum_i \mu(a_i)$.

Cuando $\mathcal{L}$ es Booleano, obtenemos un modelo de probabilidad clásico. El retículo cuántico $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ es también un caso particular de una vasta familia de modelos alternativos de sistemas físicos. Las ecuaciones (5) permiten concebir la noción de *modelos de probabilidad generalizados*.

Como consecuencia de la ley ortomodular, se sigue que para todo $p, q \in \mathcal{L}$ cualquier estado μ, tenemos:

$$\begin{array}{c} p \wedge q \leq p \Rightarrow \mu(p \wedge q) \leq \mu(p) \\ p \leq p \vee q \Rightarrow \mu(p) \leq \mu(p \vee q) \end{array} \tag{6}$$

Estas desigualdades serán útiles para construir las Nmatrices asociadas a sistemas cuánticos.

II.2.2. El teorema de Kochen-Specker y la falla de la funcionalidad de la verdad en la Mecánica cuántica

El teorema de Kochen-Specker es una de las piedras angulares de los fundamentos de la mecánica cuántica [Kochen and Specker (1975)]. Kochen y Specker estudiaron la posibilidad de dar una descripción de la mecánica de cuántica en términos de variables ocultas, tomando como modelo la relación entre la mecánica estadística y la termodinámica clásicas. Pero resulta que esta teoría de variables ocultas no puede existir (al menos bajo ciertos supuestos generales), y esto es equivalente a la siguiente afirmación: no existe una función $v: \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0,1\}$, con la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$ para toda familia ortogonal $\{\hat{P}_i\}$ de elementos unidimensionales de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ que cumpla $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$.

En función de los intereses de esta sección y utilizando la actual terminología podríamos reescribir la definición de función clásica de verdad:

Definición 2.6. Una función $v: \mathbb{P}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0,1\}$ con la propiedad de que $\sum_i v(\hat{P}_i) = 1$ para toda familia ortogonal $\{\hat{P}_i\}$ de elementos unidimensionales de $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ que satifaga $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$, esto es, que descompongan la identidad, es llamada función de verdad clásica o función veritativo-funcional clásica.

Nos centramos ahora en entender cómo la noción de funcionalidad de la verdad (veritativo-funcionalidad), puede estudiarse en el formalismo cuántico. Identificaremos el lenguaje cuántico con la estructura reticular $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \langle \mathbb{P}(\mathcal{H}), \vee, \wedge, \neg, \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$. Es claro que podemos formar, recursivamente, nuevas proposiciones a partir de cualquier conjunto dado de proposiciones de la manera habitual (es decir, considerar todas las expresiones finitas posibles, tales como $(P \vee Q) \wedge R, (\neg P \wedge Q)$, y así sucesivamente). Si queremos recrear la noción de valuación clásica en la teoría cuántica, debería existir una función $v\colon \mathcal{L}(\mathcal{H}) \longrightarrow \{0,1\}$, que le asigne valores de verdad a todas las proposiciones elementales posibles. De esta manera, todas las propiedades del sistema cuántico deberían ser verdaderas o falsas, y no debería haber otra posibilidad. Pero desde el punto de vista físico, es necesario imponer otras condiciones. Un requisito elemental para cualquier valuación, debería ser que si una proposición $\hat{P}$ es verdadera ($v(\hat{P}) = 1$), entonces cualquier otra proposición $\hat{Q}$ que satisfaga que $\hat{Q} \leq \hat{P}^{\perp}$ sea necesariamente falsa ($v(\hat{Q}) = 0$). Esto se deriva directamente de la definición de estado cuántico: si $\hat{P}$ es verdadero, su probabilidad de ocurrencia es igual a uno, y la probabilidad de ocurrencia de cualquier propiedad ortogonal será automáticamente cero. Pero si no imponemos otras restricciones, se puede tener la valuación $v(\hat{P}) = 0$ para todo $\hat{P}$, lo que no tiene sentido, ya que implicaría que todos los resultados tendrán probabilidad cero de ocurrencia en cualquier experimento. ¿Qué restricciones debemos imponer? Necesitamos definir un conjunto de condiciones para descartar las valuaciones no físicas, valuaciones que no tengan sentido desde el punto de vista de la física cuántica. Si además queremos que se cumpla la funcionalidad de la verdad, nuestras valuaciones clásicas deberían ser un homomorfismo entre $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y el álgebra booleana de dos valores $\mathbf{B_2} = \{0,1\}$. Entonces, para cada $\hat{P}$ y para cada familia $\{\hat{P}_i\}_{i=1}^{n}$, en analogía con el principio de funcionalidad de verdad dado, deberíamos tener:

$$v(\vee_i \hat{P}_i) = \tilde{\vee}_i\, v(\hat{P}_i) \tag{7}$$
$$v(\wedge_i \hat{P}_i) = \tilde{\wedge}_i\, v(\hat{P}_i) \tag{8}$$
$$v(\neg \hat{P}) = \tilde{\neg} v(\hat{P}) = 1 - v(\hat{P}) \tag{9}$$

Llamaremos valuaciones admisibles clásicas (y lo denotamos por VAC) al conjunto de funciones bivaluadas que satisfagan las ecuaciones 7, 8 y 9. Tenga en cuenta que, si se supone que el conjunto de valuaciones admisibles es VAC, la funcionalidad de verdad se satisface automáticamente.

Pero la última condición, en particular, implica que para un conjunto ortonormal y completo de proyectores $\{\hat{P}_i\}$ ($\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}, \hat{P}_i\hat{P}_j = \mathbf{0}$ y $dim(\hat{P}_i) = 1$), si $v(\hat{P}_{i_0}) = 1$ para algún i_0, entonces $v(\hat{P}_j) = 0$, para todo $j \neq i_0$ (esto se sigue del hecho que $j \neq i_0, \hat{P}_j \leq \mathbf{1} - \hat{P}_{i_0}$). Por otro lado, dado que $\sum_i \hat{P}_i = \mathbf{1}$, debemos tener si $v(\hat{P}_{i_0}) = 1$ para algún i_0 (esto se sigue de $v(\mathbf{1}) = 1$ y la ecuación (7)). De esta forma, cualquier valuación clásica, debe satisfacer la condición 2.6. Esto representa una propiedad física muy razonable. Implica que, si se realiza un experimento en el sistema (recuerde que cualquier conjunto de proyectores unidimensionales ortonormales y completos definen un experimento), obtenemos que, a uno, y sólo a un operador de proyección, se le asigna el valor 1, mientras que a todos los demás proyectores, que representan otros resultados (definen eventos excluyentes), se les asigna el valor 0. Obsérvese que ésta es la condición de KS. Es importante señalar que, un experimento en el que todas las proposiciones tienen asignado el valor falso, o un experimento en el que se le asigna el valor verdadero a más de una alternativa exclusiva, carecen de sentido. En el último caso, obtendríamos que dos alternativas mutuamente excluyentes ocurrirían con total certeza. En el primero, llegaríamos a una situación en la que todos los resultados de un experimento son falsos. Desde la perspectiva de una ontología clásica, estas alternativas deben descartarse. Hemos visto anteriormente que cualquier valuación admisible en VAC debería satisfacer la definición 2.6. Pero la existencia de tales funciones está *estrictamente prohibida por el teorema de KS*. Se deduce que las funciones de dos valores que satisfacen tanto los requisitos físicamente razonables como la funcionalidad de verdad no pueden existir en el dominio cuántico. Se sigue que la definición canónica de la funcionalidad clásica de la verdad no es válida en el dominio cuántico. Esto será naturalmente cierto para modelos probabilísticos arbitrarios, siempre que sus estructuras proposicionales satisfagan el teorema de KS (y esto es cierto para una gran familia de modelos [Döring (2005), Smith (2004), Svozil and Tkadlec (1996)]). La discusión anterior está relacionada con un hecho bien conocido: se pueden definir valuaciones *clásicas* locales para subálgebras booleanas máximas de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, pero el teorema de Kochen-Specker prohíbe la existencia de una global (para una discusión más profunda en el tema, recomendamos [Domenech and Freytes (2005), Domenech et al., (2008), Isham and Butterfield (1998)]).

II.3. **Lenguajes semi-interpretados**

Sea X un conjunto no vacío y $\mathfrak{F}$ una colección de conectivos. Y sea $\mathcal{L}_{\mathfrak{F}}$ el lenguaje proposicional asociado (siguiendo las reglas sintácticas usuales). Para definir valuaciones en conexión con las proposiciones asociadas a sistemas cuánticos, seguimos un abordaje similar al presentado en [Freytes *et alii* (2013)].

Una valuación probabilística va a ser un par $\langle \mathcal{L}_{\mathcal{F}}, \vDash \rangle$ en el cual las variables proposicionales se interpretan como proposiciones asociadas a un sistema cuántico, representado por un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ (para sistemas de qubits, tenemos que $\mathcal{H} = \otimes^n \mathbb{C}^2$), y los conectivos se interpretan como los conectivos canónicos del retículo de proyectores.

Dado un conectivo $f \in \mathfrak{F}$, sea C_f su conectivo asociado (por ejemplo, '$\wedge$' tiene asociada la intersección de subespacios; '$\vee$' tiene asociada la suma directa; '$\neg$' tiene asociado el complemento ortogonal).

Una semi-interpretación e es una función $e\colon \mathcal{L}_{\mathfrak{F}} \longrightarrow \mathcal{L}$ tal que, para todo conectivo $f \in \mathfrak{F}$ de aridad k:

$$e(f(x_1, \dots, x_k)) = C_f(e(x_1), \dots, e(x_k))$$

Esto es, e cumple con la ecuación 1 de la definición 2.1. Matemáticamente, decimos que e es un *homomorfismo*. En términos concretos, tenemos que [Friedman and Glymour (1972)]:

- $e(1) = \mathbf{1}$
- $e(0) = \mathbf{0}$
- $e(\neg P) = (e(P))^{\perp}$
- $e(P \wedge Q) = e(P) \cap e(Q)$
- $e(P \vee Q) = e(P) \oplus e(Q)$

Cualquier estado cuántico (representado matemáticamente por una matriz densidad ρ), permite entonces definir una noción de valuación de acuerdo con siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_{\mathfrak{F}} \arrow[r, "v"] \arrow[d, "e"'] & {[0,1]} \\
\mathcal{L} \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

donde p es la probabilidad que viene naturalmente dada por la regla de Born. Es decir, dado un estado ρ, a cada proposición P le asignamos un valor de verdad que viene dado por $p(e(P)) = tr(\rho e(P))$. Nótese que, por el teorema de Gleason (o por el de Kochen-Specker), para cualquier estado cuántico, siempre van a existir proposiciones cuyos valores de verdad no sean ni 0 ni 1. Si el estado es puro, todos los subespacios que contengan al vector asociado van a tener valor de verdad 1, mientras los que estén contenidos en su subespacio ortogonal van a tener valor de verdad 0 (todos los estados puros son equivalentes a este respecto). Para estados mezcla, puede pasar que ninguna proposición sea verdadera (ni falsa). Tal es el caso del estado maximalmente mixto, representado por la matriz $\rho_0 = \frac{1}{N}\mathbf{I}$.

En lo que sigue, nos centraremos en asignaciones generales al $[0,1]$ (que no necesariamente estén originadas en estados cuánticos). Luego, construiremos un conjunto de tablas de verdad las cuales definen valuaciones que coinciden con aquellas que se originan en estados cuánticos.

III. Construcción de una Nmatriz para el formalismo cuántico

En esta sección construiremos una posible Nmatriz para el formalismo cuántico. Usaremos el retículo de proposiciones cuánticas $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ y las restricciones físicas impuestas por las propiedades de los estados cuánticos. Mostraremos que las restricciones que nuestra Nmatriz impone sobre las valuaciones son exactamente las mismas que el teorema de Gleason impone sobre las medidas de probabilidad. Con esto quedará en evidencia que las valuaciones definidas por nuestra Nmatriz son exactamente los estados cuánticos.

Las construcciones que presentamos a continuación, junto con algunas de sus consecuencias, se pueden encontrar con mayor detalle en [Jorge and Holik (2020]). Sean $V = [0,1]$ y $D = \{1\}$. Una proposición será verdadera si y sólo si su valuación le otorga el valor 1, y será falsa para cualquier otro valor (esto está conectado a la noción de verdad en la lógica cuántica estándar; ver [Piron (1976)]). Para construir las matrices, tenemos en cuenta que para cada estado μ, cuando $\hat{P} \perp \hat{Q}$, tenemos $\mu(\hat{P} \vee \hat{Q}) = \mu(\hat{P}) + \mu(\hat{Q})$. Comencemos estudiando el conjunto de interpretación para la disyunción $\tilde{\vee}: V \times V \longrightarrow \mathcal{P}(V)\backslash\{\emptyset\}$.

En el resto de esta sección prescindiremos del acento circunflejo (^) sobre los proyectores. Esto no generará confusión, ya que las valuaciones están definidas solamente sobre el lenguaje de tales operadores y los estaremos considerando como representantes de las proposiciones lógicas del sistema. Usando las ecuaciones (6), es fácil ver que:

$$max(\mu(P), \mu(Q)) \leq \mu(P \vee Q) \leq 1$$

En función de las valuaciones (denotadas por v), esto puede escribirse como

$$max(v(P), v(Q)) \leq v(P \vee Q) \leq 1$$

De esta manera, el candidato natural para la tabla de verdad no determinista de la disyunción viene dado por:

	P	Q	$\tilde{\vee}$
si $P \perp Q$	a	b	$\{a+b\}$
si $P \not\perp Q$	a	b	$[max(a+b), 1]$

(10)

Hagamos ahora lo mismo con la conjunción $\widehat{\wedge}: V \times V \to P(V) \backslash \{\emptyset\}$. Utilizando nuevamente 6, se sigue que

$$\mu(P \wedge Q) \leq min\big(\mu(P), \mu(Q)\big)$$

Así, si la valuación $v(\cdots)$ asigna $v(P) = a$ y $v(Q) = b$ $(a, b \in V)$, proponemos la siguiente matriz no determinista:

	P	Q	$\widetilde{\wedge}$
si $P \perp Q$	a	b	$\{0\}$
si $P \not\perp Q$	a	b	$[0, min(a+b)]$

(11)

Para la negación $\tilde{\neg}: V \longrightarrow \mathcal{P}(V) \setminus \{\emptyset\}$, el candidato más natural compatible con las propiedades de los estados cuánticos viene dado por:

$$\tilde{\neg}_{(a)} = \{1 - a\}.$$

Entonces, proponemos:

P	$\tilde{\neg}$
a	$\{1 - a\}$

(12)

Esta es una negación determinista, en el sentido de que su conjunto de interpretación es un conjunto con un sólo elemento (un singulete), lo cual la hace equivalente a una función de a. En [Jorge and Holik (2020)], pueden verse otras posibilidades para la negación.

Las tres tablas anteriores imponen las restricciones para todas las posibles valuaciones: toda valuación definida tiene que cumplir las tres tablas a la vez. Una mirada más detenida nos revela que *para modelos de dimensión finita*, estas tablas, contienen las mismas condiciones del teorema de *Gleason*. Así, las únicas valuaciones posibles compatibles con las tablas anteriores son exactamente las que representan estados cuánticos (es decir, definidas por matrices de densidad). Para ver por qué esto es así, notemos primero que, por construcción, todo estado cuántico cumple con las tablas definidas arriba. Por otro lado, supongamos que una valuación *v* cumple con las tres tablas. Si $P \perp Q$, entonces, usando la Tabla (10), obtenemos $v(P \vee Q) = v(P) + v(Q)$. Esta es la primera condición de la definición de estados como medida (para modelos de dimensión finita). Por otro lado, si tomamos dos proyectores ortogonales P, Q, tenemos que $P \wedge Q = \mathbf{0}$. Usando la Tabla (11), obtenemos que $v(\mathbf{0}) = v(P \wedge Q) = 0$. Por lo tanto, escribiendo el $\mathbf{0}$ como conjunción de dos proyectores ortogonales, probamos que una valuación dada v asigna el valor $\mathbf{0}$ al proyector nulo. Y dado que toda valuación es una función, no puede asignar ningún otro valor. Por último, usando la tabla (12), obtenemos que $v(\mathbf{1}) = v(\neg\mathbf{0}) = 1 - v(\mathbf{0}) = 1 - 0 = 1$. De esta forma, obtenemos que nuestra valuación v cumple con todas las condiciones de la definición de estado como medida. Por el teorema de Gleason, se sigue que existe una matriz densidad $\hat{\rho}_v$ tal que $v(P) = tr(\hat{\rho}P)$, para todo proyector P. Esto completa la prueba de que los estados cuánticos son las únicas valuaciones que cumplen con las Tablas (10), (11) y (12). De esta forma, obtenemos una caracterización alternativa del *conjunto de estados cuánticos en términos de las valuaciones de una semántica no determinista.*

IV. VERITATIVO FUNCIONALIDAD Y ADECUACIÓN

La veritativo-funcionalidad puede ser definida también para los conectivos de un lenguaje. Puede probarse que, bajo condiciones muy generales, pedir funcionalidad de las valuaciones (como la que presentamos en 2.6) es equivalente a pedir veritativo funcionalidad de los conectivos. En toda la sección, supondremos que el conjunto de valores de verdad es V, sin importar su cardinalidad, que D representa el conjunto de valores designados y que todos los conjuntos cumplen la axiomática de ZF. En futuros trabajos estudiaremos la dependencia de las Nmatrices, así como su relación de consecuencia lógica, con la teoría de conjuntos elegida para fundamentarlas.

Sea T el conjunto de funciones (valuaciones) $t: Sent(L) \longrightarrow V$ [véase Malament (2000)].

Definición 4.1. Decimos que T respeta la veritativo-funcionalidad de la negación si, para todo $t, t' \in T$ y cualesquiera $\phi, \phi' \in Sent(L)$,

$$t(\phi) = t'(\phi') \Rightarrow t(\neg\phi) = t'(\neg\phi').$$

Queremos probar que cumplir con la funcionalidad de la verdad para la negación, sumado al hecho de que sabemos que ciertas proposiciones se derivan de otras, implica que la negación de una proposición que toma un valor designado será no designada. La sola condición de funcionalidad veritativa de la negación, todavía no implica eso, dado que una valuación que otorgue el mismo valor a todas las proposiciones cumpliría con lo anterior (como también las valuaciones que a toda fórmula asignen valores distintos). De dicha condición solamente se desprende que $t(\phi)$ y $t'(\phi')$ deben pertenecer al mismo conjunto, sea este D o $V \setminus D$, y lo mismo vale para las respectivas negaciones. Esto aún no garantiza que tanto el valor de verdad de ϕ como de su negación no sean el mismo. Para que esto pase, debemos recurrir a la definición de consecuencia lógica como conservando valores designados y a consecuencias válidas que queremos que se preserven en nuestro sistema:

$$\phi \nvDash \neg\phi \quad \text{o} \quad \neg\phi \nvDash \phi. \tag{13}$$

En lo que sigue, mostramos que nuestro sistema debe validar alguna de las relaciones de la Ecuación 13. Si nuestra proposición llegara a ser la representada por el proyector nulo, es decir, el que proyecta sobre el espacio de Hilbert vacío, entonces se validaría sólo la segunda de las relaciones mencionadas arriba. Si el proyector no es el nulo, entonces, ambas relaciones se cumplen. Para ver las condiciones que hacen que las valuaciones sean admisibles físicamente y, por lo tanto, restringir el conjunto de todas las valuaciones posibles en nuestros razonamientos ver [Friedman and Glymour (1972), Hellman (1980), Jorge and Holik (2020)]. En todos estos casos, estamos ahorrando el subíndice LC de la relación de consecuencia lógica, ya que solamente trabajaremos con esta relación cuántica (dada por la Nmatriz cuántica cuyas valuaciones son los estados). De lo anterior se derivan las siguientes conclusiones. De la primera sentencia se desprende que (para cada ϕ no trivial) debe existir una valuación (o mapa) t, tal que $t(\phi) \in D$ y $t(\neg\varphi) \notin D$. De la segunda, se sigue que también debe existir otra valuación t', tal que $t'(\neg\phi) \in D$ y $t'(\phi) \notin D$. Esto está de acuerdo con la interpretación de valuaciones como estados cuánticos mostrada en la sección anterior; si ϕ es una proposición representada por un proyector del retículo cuántico (distinto del mínimo y del máximo), entonces debe existir un estado cuántico que asigne probabilidad 1 a esta proposición y, por lo tanto, asigne 0 a su negación (estamos tomando el caso en el cual $D = \{1\}$).

Si existe t, tal que $t(\phi) \in D$ y $t(\neg\varphi) \notin D$, entonces aplicando veritativo funcionalidad de la negación y fijando una de las valuaciones de la definición 4.1 como la t mostrada:

$$\forall t' \in T, \forall \phi, \phi' \in Sent(L)(t'(\phi') = t'(\phi) \in D \Longrightarrow t'(\neg\phi') = t'(\neg\phi) \notin D).$$

Procediendo de forma análoga (fijando t): Si existe t', tal que $t'(\neg\phi) \in D$ y $t'(\phi) \notin D$: Por la veritativo funcionalidad de la negación (y tomando que $\neg(\neg p) = p$) se tiene que

$$\forall t \in T, \forall \phi, \phi' \in Sent(L)(t(\neg\phi) = t'(\neg\phi') \in D \Longrightarrow t(\phi) = t'(\phi') \notin D)$$

De lo cual puede deducirse que

$$\forall \mathrm{t} \in T, \forall \phi \in Sent(L)(t(\phi) \in D \Longrightarrow t(\neg\phi) \notin D)$$

y que

$$\forall \mathrm{t} \in T, \forall \phi \in Sent(L)(t(\neg\phi) \in D \Longrightarrow t(\phi) \notin D)$$

¿Qué es lo que pasa con la negación cuántica? En la próxima sección, probaremos que si las Nmatrices (en realidad los conjuntos de interpretación $\widetilde{\vee}$, $\widetilde{\wedge}$) son adecuadas (suitable) [Avron (2007)], entonces no se cumplen las proposiciones deseadas para la cuántica.

Ahora continuaremos por la conjunción y obtendremos la adecuación para tal conectivo bajo el supuesto de funcionalidad de la verdad y algunas implicaciones que impondremos. Usando la veritativo funcionalidad de la conjunción definida como [Malament (2000)].

Definición 4.2. Decimos que T respeta la veritativo-funcionalidad de la conjunción si

$$\forall t, t' \in T \quad \forall \phi, \phi', \psi, \psi' \in Sent(L) \quad (t(\phi) = t'(\phi') \text{ y } t(\psi) = t'(\psi')$$
$$\Longrightarrow t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi'))$$

Utilizando implicaciones lógicas como, por ejemplo, $\phi \vDash \phi \wedge \phi$ (idempotencia de la conjunción), $\phi \wedge \psi \vDash \phi$, $\phi \wedge \psi \vDash \psi$, válidas en la cuántica, Malament deduce [Malament (2000)]:

$$\forall t \in T\ \forall \phi, \psi \in Sent(L)\ (t(\phi) = \mathbb{T} \text{ y } t(\psi) = \mathbb{T} \Longrightarrow t(\phi \wedge \psi) = \mathbb{T}).$$

Donde $\mathbb{T}$ denota el valor verdadero (o designado) de la semántica de dos valores utilizada en su trabajo. En nuestro caso, siguiendo los mismos razonamientos, llegaremos, en particular, a que $\forall t \in T$ y $\forall \phi, \psi$

$$t(\phi) \in D \text{ y } t(\psi) \in D \Longrightarrow t(\phi \wedge \psi) \in D.$$

Esta es una de las condiciones de adecuación para la conjunción presentadas en la definición 2.5. Por supuesto, lo mismo sería aplicable a la disyunción. Veamos esto con más detalle.

Puede llegar a ser de interés tener en cuenta las siguientes implicaciones, que son válidas (entre otras) en la mecánica cuántica. La mismas pueden ayudar a la hora de decidir si una valuación es admisible o no.

1. $A_1 \vDash A_1 \wedge A_1$
2. $A_1 \wedge A_2 \vDash A_2$
3. $A_2 \wedge A_1 \vDash A_2$
4. $A_2 \wedge A_2 \vDash A_2$

Por veritativo funcionalidad de la conjunción:

$$\forall t, t' \in T \quad \forall \phi, \phi', \psi, \psi' \in Sent(L) \quad (t(\phi) = t'(\phi') \text{ y } t(\psi) = t'(\psi') \Longrightarrow t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi'))$$

Tenemos cuatro casos para analizar:

1. $t(\phi) = t'(\phi') \in D$ y $t(\psi) = t'(\psi') \in D$
2. $t(\phi) = t'(\phi') \in D$ y $t(\psi) = t'(\psi') \notin D$
3. $t(\phi) = t'(\phi') \notin D$ y $t(\psi) = t'(\psi') \in D$
4. $t(\phi) = t'(\phi') \notin D$ y $t(\psi) = t'(\psi') \notin D$

Estrictamente hablando (por simetría), hace falta sólo analizar 3 casos, que son los que se relacionan con la definición 2.5 de adecuación de este conectivo.

<u>Caso 1</u>

Por veritativo funcionalidad de la conjunción, tenemos que $t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi')$. Podrían acá darse dos alternativas; que el valor que toman ambas conjunciones sea un valor designado o que no lo sea. Suponemos que estas alternativas cubren todo el abanico y que debe darse necesariamente alguna, es decir, nuestras valuaciones son cerradas bajo subfórmulas. Analicemos el caso donde ambas valuaciones toman un valor no designado, es decir, $t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi') \notin D$. Tomando el caso particular $t = t', \psi = \psi', \phi = \phi'$ en la definición 4.2 de funcionalidad del conectivo, tendríamos que

$$\phi, \psi \nvDash \phi \wedge \psi.$$

Si queremos que lo anterior no sea el caso, los valores que las valuaciones atribuyen a las disyunciones deben pertenecer al conjunto de valores designados (descartamos el resto de las valuaciones). Con lo cual para el caso 1 nos queda que

$$\forall t, t' \in T\ \forall \phi, \phi', \psi, \psi' \in Sent(L)\ (t(\phi) = t'(\phi') \in D \text{ y } t(\psi) = t'(\psi') \in D$$
$$\Longrightarrow t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi') \in D).$$

Lo que está de acuerdo con la adecuación del conjunto de interpretación del conectivo para este caso.

<u>Caso 2</u>

Igual que antes $t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi')$, estos valores podrían ser designados o no. Supongamos que se da el caso de que estos valores pertenecen al conjunto de valores designados, *D*. Particularizando para $t = t'$, $\psi = \psi'$, $\phi = \phi'$ se tendría que

$$\phi \wedge \psi \nvDash \psi.$$

Si queremos que nuestro razonamiento sea compatible con $\phi \wedge \psi \vDash \psi$, entonces no puede ser el caso de que las valuaciones den un valor designado a estas proposiciones. Por lo tanto, tenemos que las valuaciones deben asignar valores no designados de forma consistente con la definición de adecuación del conjunto de interpretación de la conjunción para este caso.

<u>Caso 3</u>

Este caso es simétrico al caso 2.

<u>Caso 4</u>

Tenemos que $t(\phi) = t'(\phi') = t(\psi) = t'(\psi') \notin D$ y $t(\phi \wedge \psi) = t'(\phi' \wedge \psi')$. Razonando de la misma manera; si suponemos que las valuaciones asignan valor designado a las conjunciones, entonces

$$\phi \wedge \psi \nvDash \psi.$$

Esto es, si queremos que tal inferencia sea válida, las valuaciones deben asignar un valor no designado. Por lo tanto, se cumpliría la condición de adecuación en este último caso.

Hemos probado que no pueden mantenerse simultáneamente ciertas inferencias, válidas en la mecánica cuántica, junto con una relación de consecuencia lógica que preserve valores designados, más la veritativo funcionalidad de la conjunción sin que se cumplan las condiciones para que tal conectivo tenga un conjunto de interpretación adecuado. Dicho de otra manera, la veritativo funcionalidad de la conjunción, sumada a una relación de consecuencia lógica que preserve valores designados, más ciertas inferencias que deben validarse en la cuántica implican la adecuación del conjunto de interpretación del conectivo involucrado. Debe notarse que los razonamientos utilizados no dependen de la cantidad de valores de verdad que tenga el conjunto V, ni de la cardinalidad de D. El caso particular donde sólo se tienen dos valores de verdad y uno solo designado es el que se trata en [Malament (2000)].

Ahora, haremos un razonamiento análogo para la disyunción:

Definición 4.3. Decimos que T respeta la veritativo-funcionalidad de la disyunción si

$$\forall t, t' \in T \quad \forall \phi, \phi', \psi, \psi' \in Sent(L) \quad (t(\phi) = t'(\phi') \text{ y } t(\psi) = t'(\psi') \Rightarrow t(\phi \vee \psi) = t'(\phi' \vee \psi'))$$

Analizaremos la disyunción utilizando los mismos 4 casos planteados para la conjunción.

<u>Caso 1</u>

En este caso, $t(\phi \vee \psi) = t'(\phi' \vee \psi')$ puede tomar un valor designado o no. Si el valor fuese no designado, tomando $t = t'$, $\phi = \phi'$, y $\psi = \psi'$, se tendría que

$$\phi \nvDash \phi \vee \psi; \psi \nvDash \phi \vee \psi.$$

Un resultado no deseado. Por lo tanto, en este primer caso, ambas disyunciones deben tomar un valor designado. Cumpliéndose que

$$\forall t, t' \in T\, \forall \phi, \phi', \psi, \psi' \in Sent(L)\, (t(\phi) = t'(\phi') \in D \text{ y } t(\psi) = t'(\psi') \in D \Rightarrow t(\phi \vee \psi) = t'(\phi' \vee \psi') \in D).$$

Para los casos 2 y 3, suponiendo que la disyunción pueda tomar un valor no designado, también se viola alguna de las dos inferencias presentadas en el caso 1. Por lo que la disyunción debe ser designada para los casos en los cuales alguno de los disyuntos toma un valor designado.

<u>Caso 4</u>

En este caso, ambas subfórmulas de la disyunción toman valores no designados. Si llegara a darse el caso que

$$t(\phi \vee \psi) = t'(\phi' \vee \psi') \in D,$$

entonces no se validaría la siguiente consecuencia lógica:

$$\phi \vee \phi \vDash \phi$$

para el caso especial donde $t = t', \phi = \phi' = \psi = \psi'$. Por lo tanto, las valuaciones deben otorgar un valor no designado a las disyunciones cumpliendo, de esta manera, la condición de adecuación de la disyunción.

De lo discutido hasta aquí, se sigue que la veritativo funcionalidad de los conectivos, sumada a una relación de consecuencia lógica que conserve valores designados, junto con algunas implicaciones lógicas que debemos respetar para estos conectivos, nos da como resultado la adecuación semántica de los conectivos $\vee$ y $\wedge$. Es importante remarcar que se podrían tener conjuntos de interpretación adecuados para los conectivos sin necesidad de validar la veritativo funcionalidad de los mismos. En la prueba que sigue, utilizaremos la adecuación de los conjuntos de interpretación de la conjunción y disyunción para llegar a una contradicción. Esto tendrá como resultado descartar las semánticas adecuadas, no sólo funcionales, como candidatas para el retículo cuántico. Antes de comenzar con nuestra próxima tarea, mencionamos que una posibilidad podría ser cambiar la relación de consecuencia lógica, es decir, definir una relación de consecuencia que no quede caracterizada sólo por preservar valores designados [Ripley (2013)]. Tales opciones son ampliamente estudiadas y utilizadas en lógica, y se relacionan con el problema de decidir si una lógica queda determinada sólo por su conjunto de inferencias válidas, o si, por el contrario, es necesario tener en cuenta también las metainferencias involucradas [recomendamos consultar la referencia Pailos (2019)].

Facultad de Filosofía y Letras
Universidad de Buenos Aires
Universidad Austral, Pilar (1629)
Argentina
E-mail: jorgejpablo@gmail.com

Instituto de Física La Plata
La Plata (1900)
Buenos Aires CABA (1406),
Argentina
E-mail: olentiev2@gmail.com

NOTAS

[1] Traducimos *suitable* por "adecuada"

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVRON, A. (2007), 'Non-Deterministic Semantics for Families of Paraconsistent Logics'; *School of Computer Science*, *Tel-Aviv University*.

AVRON, A. y KONIKOWSKA, B. (2004), 'Proof Systems for Logics Based on Non-Deterministic Multiple-Valued Structures'; *Prace Instytutu Podstaw Informatyki Polskiej Akademii Nauk*, p.p. 1–26.

AVRON, A. y LEV, I. (2005), 'Canonical Propositional Gentzen-Type Systems; *Proceedings of the 1st International Joint Conference on Automated Reasoning*, 13, pp. 365–387.

AVRON, A. y ZAMANSKY, A. (2005), 'Non-Deterministic Semantics for Logical Systems'; *Handbook of Philosophical Logic*, 16, pp. 227–304.

BARROS, DE., J. P. JORGE, J. A. y HOLIK, F. (2020), 'On the Assumptions Underlying Ks-Likecontradiction'; ¿??? referencia

BATENS, D. (1999), 'Inconsistency-Adaptive Logics'; *Logic at Work, Essays Dedicated to the Memory of Helena Rasiowa*, p.p. 445–472.

BIRKHOFF, G. y VON NEUMANN, J. (1936), 'The Logic of Quantum Mechanics'; *Annals of Mathematics*, 37(4), pp. 823–843.

CABELLO, A. (2001), *Pruebas algebraicas de imposibilidad de variables ocultas en mecánica cuántica*; *Tesis Doctoral; Universidad Complutense de Madrid*.

CONIGLIO, M. E. FARIÑAS DEL CERRO, L. y PERON, N. M. (2020), 'Modal Logic with Non-Deterministic Semantics: Part I — Propositional Case'; *Logic Journal of the IGPL*, 28(3), pp. 281–315.

CRAWFORD, J. M. y ETHERINGTON, V. W. (1998), 'A Non-Deterministic Semantics for Tractable Inference'; [lugar donde está el artículo?] MIT press, Cambridge, pp. 286–291.

DOMENECH, G. y FREYTES, H. (2005), 'Contextual Logic for Quantum Systems'; *Journal of Mathematical Physics*, 46(9), pp. 30– 35.

DOMENECH, G., FREYTES, H. Y DE RONDE, C. (2008), 'Topological Study of Contextuality and Modality in Quantum Mechanics'; *International Journal of Theoretical Physics*, 47, pp. 168–174.

DÖRING, A. (2005), 'Koche-SpeckerTtheorem for Von Neumann Algebras; *International Journal of Theoretical Physics*, 44(2).

FRIEDMAN, M. y GLYMOUR, C. (1972), 'If Quanta Had Logic'; *Journal of Philosophical Logic*, 1, pp. 16–28.

GENTZEN, G. (1964), 'Investigations into Logical Deduction'; *American Philosophical Quarterly*, 1(4), pp. 288–306.

GLEASON, A. J. (1957), 'Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space'; *Journal of Math. Mech.* 6, pp. 885–893.

GRÄTZ, L. (2021), 'Truth Tables for Modal Logics t and s4 by Using Three-Valued Non-Deterministic Level Semantics'; *Journal of Logic and Computation*, 32(1), pp. 129–157.

H. FREYTES, A. LEDDA, G. S. y GIUNTINI, R. (2013), *Probabilistic Logics in Quantum Computation*, volume 4. Springer, Dordrecht.

HELLMAN, G. (1980), 'Quantum Logic and Meaning'; *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, (2), pp. 493–511.

ISHAM, C. J. y BUTTERFIELD, J. (1998), 'Topos Perspective on the Kochen-Specker Theorem: I. Quantum States as Generalized Valuations'; *International Journal of Theoretical Physics*, 37(11), pp.

JORGE, J. P. y HOLIK, F. (2020), 'Non-Deterministic Semantics for Quantum States'; *Entropy*, 22(2), pp.

KALMBACH, G. (1990), 'On Orthomodular Lattices', [título libro??]pp. 85–87; Birkhäuser Boston, Boston, MA.

KOCHEN, S. y SPECKER, E. P. (1975), 'The Problem of Hidden Variables in Quantum Mechanics'; [título libro??] pp. 293–328. Springer Netherlands, Dordrecht.

KOLMOGOROV, A. N. (1933), *Foundations of Probability Theory*; Julius Springer: Berlin, Germany.

MALAMENT, D. B. (2000), *Notes on Quantum Logic; Version 1.0.*; Department of Logic and Philosophy of Science University of California, Irvine.

MARCELINO, S., CALEIRO, C. y FILIPE, P. (2022), 'Computational Properties of Partial Non-Deterministic Matrices and Their Logics'; in *Logical Foundations of Computer Science: International Symposium, LFCS 2022, Deerfield Beach, FL, USA, January 10–13, 2022, Proceedings*, pp. 180–197, Berlin, Heidelberg. Springer-Verlag.

PAILOS, F. M. (2019), 'A Family of Metainferential Logics'; *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 29(1), pp. 97–120.

PAWLOWSKI, P. y LA ROSA, E. (2022), 'Modular Non-Deterministic Semantics for T, Tb, S4, S5 and More'; *Journal of Logic and Computation*, 32(1), pp. 158–171.

PIRON, C. (1976), *Foundations of Quantum Physics (Frontiers in Physics)*; W. A. Benjamin, Inc.

PUTNAM, H. (1968), 'Is Logic Empirical?'; Humanities Press, N. Y. and D. Reidel Publ. Co., Dordrecht-Holland.

RIPLEY, D. (2013), 'Paradoxes and Failures of Cut'; *Australasian Journal of Philosophy*, 91(1), pp. 139–164.

SMITH, D. (2004), 'Orthomodular Bell-Kochen-Specker Theorem'; *International Journal of Theoretical Physics*, 43(10), pp.

SVOZIL, K. y TKADLEC, J. (1996), 'Greechie Diagrams, Nonexistence of Measures in Quantum Logics, and Kochen–Specker-Type Constructions'; *Journal of Mathematical Physics*, 37(11), pp. 5380–5401.