HILBERT İZLENCESİNİN İZİNDE ADCILIK ADINA YENİ BULGULAR

1. *Hilbert'in kanıtlama kuramının anlamı*

David Hilbert, 1922 tarihli “Matematiğin yeni temelleri” başlıklı yazısında, matematiğin temellerine ilişkin bazı soruları yanıtlamak için izlenecek yeni bir yol önerisinde bulunmuştur. İzlenecek bu yol günümüzde “Hilbert izlencesi” olarak bilinmektedir. Hilbert izlencesinin merkeze aldığı konu matematiksel kuramların tutarlılığıdır. Hilbert’e göre matematiğin vazgeçilmezi olan yalınç aritmetik gibi kuramların ilksavlarının tutarlılığı matematiksel ve mantıksal yöntemler aracılığıyla kanıtlanmalıdır. Hilbert’in, 1922’de önerdiği izlenceye göre kanıtlanabileceğini düşündüğü tutarlılığa bugün kanıt kuramsal tutarlılık denmektedir. Böyle denilmesinin nedeni Hilbert’in kendi önerdiği izlenceye verdiği addır; yani “kanıtlama kuramı”dır.

Hilbert’in kanıtlama kuramının amacı öncelikle matematiksel kanıtlamaların kendilerini matematiksel bir araştırmanın konusu yapmaktır. Bu nedenle de üst kuramsal bir yaklaşımdır. Peki, ama matematiksel kanıtlamaları matematiğin konusu yapmak ne demektir? Böylesi bir yaklaşım ne işe yarar? Hilbert’in amacı matematiksel kuramların kanıt kuramsal tutarlılıklarını kanıtlamaktır. Hilbert amacını kanıtlar kuramı aracılığıyla kabaca şu yolla gerçekleştirmeye çalışmıştır: Eğer bir kuramdaki bütün kanıtlamaların yapısına ilişkin matematiksel yorumlar yapılabilecek biçimsel bir dizge oluşturulursa, bu sayede kuramın içindeki hiçbir kanıtlamanın çelişkili bir sonuçla sonlanmadığı da gösterilebilir. Yani özetle, Hilbert’in matematiksel kanıtlamaları matematiğin konusu yapması, onların yapısı hakkında birşey söyleyebilmeye ve hatta belki de hiçbirinin çelişkili bir sonuç vermediğini göstermeye yarayacaktır. Böylelikle bir anlamda birinci soruya, yani Hilbert izlencesinin ne demek olduğuna da tam bir yanıt verilmiş olunacaktır.

Matematiksel kanıtlamaların yapısına ilişkin gözlem yapabilmek için onların tümünü biçimselleştiren bir dizge kurmak gerekir. Bu bakımdan da Hilbert’in, matematikteki kanıtlamaları matematiğin araştırma konusu yapması, kanıtlamaların ait oldukları kuramların baştan aşağıya biçimselleştirilmesi anlamına gelir. İşte Hilbert'in 1922 tarihli yazısında önerdiği izlencenin en önemli iddialarından biri sözü geçen biçimselleştirmenin yapılabileceğidir.

Aritmetik için düşünecek olursak, kuramın tümü biçimsel mantık yardımıyla biçimsel bir dizgeye dönüştürülebilir. Bu dizge sayesinde aritmetiğin tutarlılığı kanıtlanabilir; Hilbert'in iddiası budur. Bu iddianın matematikte biçimselleştirmeyi amaçlayan kısmından dolayı Hilbert'in matematik felsefesi biçimselcilik olarak anılır.

Hilbert'in kanıtlama kuramının biçimsel dizgesi içinde yeri olan başlıca iki tip tamdeyim vardır. Birinci tip tamdeyimler sonlu önermelerin içeriklerine karşılık gelen tamdeyimlerdir. Örneğin $1 + 1 = 1 + 1$ gibi, ya da $1 + 1 \neq 1$ gibi aritmetiksel eşitlikler ve eşitsizlikler; Hilbert bunlara gerçek öğeler der. İkinci tip tamdeyimler, kendi başlarına bir anlamları olmayan $i = \sqrt{-1}$ gibi tamdeyimlerdir. Hilbert bunlara ülküsel öğeler der.

Matematikte ülküsel öğeler eldeki dizgede kanıtlanamayan bazı doğrulukları tanımlarken kullanılır. Bu kullanım yardımıyla eldeki dizgeyi genişletirler. Genişletilmiş dizgede yeni kanıtsavları kanıtlamak için kullanılırlar. Bu tür kullanıma benzer olarak ülküsel öğeler Hilbert'in kanıtlama kuramında da gerçek öğelerden oluşan matematiksel yapıları uygun bir biçimde genişletmek amacıyla kullanılırlar. Bu genişleme sayesinde ülküsel öğeler matematiğin temellerine ilişkin soruları yanıtlamayı kolaylaştırmaya yönelik ortaya atılmışlardır. Tabi bu yapılırken ülküsel öğelerin gerçek öğelerden oluşan yapılara eklenmesi, bu yapıların biçimselleştirilmiş hallerinde tutarsızlığa yol açmamalıdır. Yani tutarlı olan dize ülküsel öğeler eklendikten sonra da tutarlı kalmalıdır. Söz konusu tutarlılığı sağlamanın yolu da hem gerçek öğelerden oluşan başlangıç dizgesinin, hem de ülküsel öğelerle genişletilmiş yeni dizgenin üst kuramsal anlamda çelişki türetilmez bir biçimde belirlenmesidir.

Ülküsel öğelerin kullanımındaki ana düşünce biçimsel yapıları birbirleriyle karşılaştırmaktır.

Sözü geçen karşılaştırmalar bir doğrulamı veya doğrulamlar toplamını çalışırken doğrulamlar arası biçimdeşlikler bakımından karşılaştırmalar yapmayı kolaylaştırır. Biçimdeşlik bakımından karşılaştırmaların yararı, verili bir dizgede kanıtlanamayan bazı tamdeyimlerin ülküsel öğeler işleme katıldıktan sonra kanıtlanması sırasında ortaya çıkmaktadır. Verili dizgede ülküsel öğeler kullanılarak yapılan bir genişletme, verili dizgenin yapısıyla genişletilmiş dizgenin biçimsel yapıları arasında yapılan bir karşılaştırmadır. Bu tür karşılaştırmalardan, doğrulamların genişletilmiş yapılarının genişletilmemiş yapılarına ilişkin ne söylediği öğrenilir.

Hilbert'in "Sonsuz Üzerine" başlıklı yazısında verdiği örnek ülküsel öğelerin yaygın olarak bilinen bir kullanımıdır. Bilindiği üzere izdüşümsel geometride ilksavların belirlediği doğrulamların her birine doğrulamlardaki noktalara sonsuzca uzakta olarak tanımlanan yeni geometrik nesneler (noktalar) eklenebilir. Bu yolla genişletilmiş bir doğrulamda herhangi iki doğrunun bir noktada kesiştiği gösterilebilir. Aritmetik için de benzer örnekler verilebilir. Hilbert'in verdiği örnek şudur:

Tıpkı geometride olduğu gibi; birbirine paralel olan sonsuz tane doğrunun bir ülküsel nokta tanımlaması gibi, yüksek aritmetikteki bazı sistemlerde sonsuz tane sayı bir sayı ülküsü oluşturacak biçimde bir araya getirilebilir.[1]

Buradaki amaç genişletilmiş doğrulamların özelliklerinin baştaki dizgenin ilksavlarının belirlediği doğrulamlar hakkında ne söylediğinin ortaya konulmasıdır. Bu amaca ulaşmak için, ülküsel ve gerçek öğeler arasındaki ayrıma ona dışsal bir haklı neden göstermeye çalışmadan yaklaşılmalıdır. Ayrıma onun matematiksel kullanımı için dışsal olan bir eleştirinin anlamı da matematiksel olarak boştur:

Ülküsel öğeler terminolojisinin haklı nedeni yalnızca yola çıktığımız sistemin bakış açısından verilebilir.[2]

Bunun nedeni Hilbert'in üst kuramsal yaklaşımının, yani kanıtlama kuramının arkasında yatan görüşün

1 Hilbert 1926, s. 373.
2 Hallett 1995, s. 149. (Hilbert'in 1919 derslerinden alıntı)

doğrulam kuramsal bir bakış açısından yola çıkmasıdır.

İlksavlı dizgeler matematiksel ve bilimsel kuramlarımız üzerinde kuş bakışı bir görüşe ulaşmayı sağlarlar. Bu görüş ilksavların belirlediği doğrulamlar veya biçimsel yapılara ilişkin, onlardan yola çıkarak kanıtlanmak istenen tüm kanıtsavlara mantık kuralları aracılığıyla nasıl ulaşabileceğini gösterir. Sözü geçen gösterim veya kuş bakışı görüş Hilbert'in terimleriyle dile getirilirse "bir bilgi-bağıntı önalanından bir kavramlar çerçevesine doğru izerge" olarak ele alınır.

Bu tür bir izerge ile araştırma somut gerçeklikten tamamıyla ayrılmış olur. Kuram artık gerçek nesnelerle veya bilgimizin sezgisel içeriğiyle ilgilenmez. [Gerçek dünyada] doğruluğundan veya yanlışlığından söz edemeyeceğimiz arı bir düşünce yapılandırılmasıdır artık.[3]

Ne var ki, doğal olarak somut gerçeklikten tam bir ayrılış kuramın gerçeklikle tüm bağları kopardığı anlamına gelmez. Kuramın eninde sonunda gerçeklik hakkında bilinenlere ilişkin bir anlamı vardır. Bu anlamda, Hilbert'in de deyimiyle, kuram "gerçek ilişkilerin olanaklı bir biçimini verir."[4] O halde, sözü geçen türden bir alanda tanımlanan doğruluklar doğrulamda doğruluklardır. İlksavlı yöntemin amacı da bu doğrulukları ilksavlardan kanıtsavlara yapılan mantıksal çıkarımlar aracılığıyla bulmaktır.

Bu anlamda gerçek fiziksel olguların bir ülküselleştirilmesi olarak ele alınan fiziksel dizgeler de örnek olarak incelenir. Hilbert'in deyişiyle:

[Fizikte] sıklıkla gerçek olgusal durumları bir kez daha türetmeyen kuramlarla çalışırız. Yalnız bu olgusal durumları onların basitleştirilmiş ülküselleştirmeleriyle gösteririz.[5]

Sözü geçen ülküselleştirmeler ilksavlı sistemlerin doğrulamlarıdır. İlksavlardan çıkarsanan kanıtsavların üzerinde çalışmaksa bu doğrulamların yapısını çalışmaktır:

Fizikçinin istediği, tekil bazı önermelerin doğa yasalarından veya varsayımlardan yalnızca mantıksal çıkarımlarla türetilmesidir. Bu yüzden sözü geçen türetme arı bir tamdeyimler oyunuyla ve dışsal

3 Hallett 1994, s. 168. (Hilbert'in 1921-22 derslerinden alıntı)
4 ibid.
5 Hilbert 1928, s. 475.

incelemeler eklemeden gerçekleşir. Fiziksel yasaların yalnızca bazı birleşimleri ve sonuçları deney ile denetlenebilir—tıpkı benim kanıtlama kuramımda yalnızca gerçek önermelerin doğrudan bir doğrulamayı olanaklı kılması gibi.[6]

Bu alıntıdan açıkça görülüyor ki Hilbert'in fizik kuramları ile kanıtlama kuramı arasında kurduğu benzerlik "arı tamdeyimler oyunu" dediği uygulamayı doğrulam kuramsal bir düşünme biçimine dayandırmaktadır. Bu düşünme biçimi yalnızca eldeki ilksavlı çerçevenin mantıksal biçimlenişiyle ilgilidir. Herhangi bir dışsal dayanağa yönletimde bulunmaya gerek yoktur. Bu da gösteriyor ki Hilbert'in yöntemiyle yapılan bir ilksavlılaştırmada yalnızca mekanik bir biçimde kanıtsav kanıtlamalarının olduğunu düşünmek yanıltıcı olacaktır. Doğal olarak bu gözlemler Hilbert yöntemiyle ilksavlılaştırmanın bilgi kuramsal bir işlevi olduğu anlamına gelmez. Bilgi kuramsal sorular, özellikle de yeni doğruluklara ulaşma amacıyla sorulan bilgi kuramsal sorular, ilksavlı dizgelerin içsel işleyiş biçiminden ayrı tutulmalıdır. Benzer olarak ilksavlı sistemler ile gerçeklik arasındaki bağlantının doğasını açıklamaya yönelik bilgi kuramsal yaklaşımlar da Hilbert'in kuramlar üstü yaklaşımından ayrı tutulmalıdır. Hilbert'in 1922-23 derslerinde değindiği anlamda düşünülürse, matematiğin ilksavlı dizgeler aracılığıyla sağlanan temelleri ilksavlı çerçevenin düşünce nesneleriyle gerçek dünyanın gerçek nesneleri arasındaki ayrımın vurgusudur.[7]

Bunlara ek olarak Hilbert'in ilksavlı yöntem aracılığıyla yeni doğruluklar bulmayı amaçlamadığı da 1902 ve 1903 derslerinden görülebilir:

Matematiksel bir doğruluğun (ya da bir kanıtsavın) ilksavlara dayanan araştırılmasından bu doğrulukla ilişkili yeni ve daha genel kanıtsavlara ulaşmaya çalışan bir araştırmayı anlamıyorum. Sadece eldeki kanıtsavların bilinen doğruluklar sistemi içinde nasıl bir yeri olduğunu anlıyorum. Bu yolla o doğruluğun temellerini veren gerek ve yeter koşulların neler olduğunu da açık bir biçimde dile getirebiliriz.[8]

6 ibid.
7 Bkz. Hallett 1994.
8 Bkz. Peckhaus 2003.

Tam bu noktada felsefeciler Hilbert'in sözünü ettiği yeter ve gerek koşulların bilgi kuramsal temellerini araştırmaya yönelmek isteyebilirler. Yalnız şunu hatırlamak gerekir: Hilbert'in matematiğin temelleriyle ilgili soruları arındırmak için kurtulmak istediği yaklaşımlar bu tarz bilgi kuramsal yaklaşımlardır. Hilbert açık bir biçimde amacının ilksavlı yöntem aracılığıyla yeni doğrulara ulaşmak olmadığını söylemektedir.

2. *Epistemolojik sorular ve onların yanıtları*

Herşeye rağmen, Hilbert'in kuramlar üstü yaklaşımının geniş bir açıdan kuşbakışı bir görüş sayesinde matematiksel doğruluklar üzerindeki çalışmalara yol gösteren haritalar hazırlamasının bir bilgi kuramsal yaklaşıma denk düştüğü söylenebilir. Bu yüzden Hilbert'in yaklaşımının hiçbir anlamda bilgi kuramsal olmadığını iddia etmek de abesle iştigal olacaktır. Yalnız üst matematiksel araştırmanın içine bu bilgi kuramsal anlam etki etmemektedir.

Kısmen 1920'li yıllarda Brouwer'in sezgici matematik felsefesine karşı takınmak zorunda olduğu tavır nedeniyle, Hilbert'in üstkuramsal yaklaşımının bilgi kuramsal bir çerçevede ilerlediği düşünülür. Brouwer'in matematik felsefesinin temel kabulleri bilgi kuramsaldır. Brouwer'e göre matematiğin vazgeçilmez bilgisel öndayanakları vardır.[9] Matematik ona göre insan zihninin en temel edimlerinden türemiş bir çalışma alanıdır. Brouwer'e göre, matematiksel doğrulukların, birbiri ardı sıra tekrarlanmış zihinsel edimler aracılığıyla türeyişi başlangıç bilgisinden yeni bilgiye doğru olan bir türeyiştir. Bu anlamda sezgici görüşe göre matematiksel doğrulukların gerçek temeli zihnin tekrarlı edimlerinin etkinleşmesinin kaynağı olan başlangıcında aranmalıdır. O halde, Brouwer'e göre matematiğin temeli zihnin matematiksel bilgiye yönelen ilk edimidir. 1948 tarihli bir yazısında Brouwer şöyle demektedir:

9 Bkz. Hintikka 2001.

Bilincin kendisinin en derin konağında yavaşça salındığı görülür. İstençsizce, durağanlıkla duyum arasında gidip gelerek...[10]

Brouwer'in yaratıcı özne diye adlandırdığı (geleneksel bilgi kuramındaki anlamıyla) bilen özne, bu sözü geçen istençsiz durumdan zamanın bir devinimi sayesinde ayrılır. Ayrıldığı durumdan geçmiş ve şimdiki anların bir birleşimine geçer ve iki-lik diye adlandırılan başat sezgiyi oluşturur.[11] Bu başat sezginin tekrarlanmasıyla yaratıcı özne Brouwer'in deyimiyle matematiksel dizileri, daha da genel anlamıyla nedensel dizileri oluşturur.

Brouwer'in araştırdığı ve sözü geçen türden olan bir edimsellik, yaygın anlamıyla anılan bir matematikle bağdaşmaz. Bu bağdaşmazlık kısmen doğrudur, kısmen de yanlıştır. Doğrudur; çünkü gerçekten de Brouwer geleneksel matematiğe karşı çıkar. Onu sezgici temellere dayanan bir matematikle değiştirmek için yaşamı boyunca çalışmıştır. Diğer yandan Brouwer'in yaklaşımının matematikle bağdaşmadığı düşüncesi yanlış ve yanıltıcıdır. Kullandığı felsefi dil açısından Brouwer'in görüşleri felsefecilere doyurucu gelmese de Brouwer'in felsefe dilinin bir de arı matematiksel karşılığı olan uygulamaları vardır. Sözü geçen uygulamalar 1930'lardan sonra K. Gödel, A. Church, A. Turing gibi mantıkçıların tekrarlı işlevler kuramı için yaptığı katkılarla büyük ölçüde örtüşür.

Genellikle, Hilbert'in kullandığı terminoloji Brouwer'in bilgi kuramsal öngörülerinin tersi olan öngörülerin doğruluğunu üstleniyormuş gibi düşünülür. Hilbert'in matematik felsefesi üzerine birçok çalışma matematiğin temellerine ilişkin soruları sanki bu sorular bilgi kuramsal bir çerçevede ele alınmalıymış gibi inceler.[12] Oysa ilksavlı yöntemin gereği olarak Hilbert'in üst kuramsal yaklaşımı matematiğe dışardan bir temel arayışını ona matematiksel bir temel arayışından ayırır. Bu ayrım sayesinde de bilgi kuramsal hiçbir dayanak üstlenmemek, Hilbert'in temel amacıdır. Bu amaç bir ölçüde Hilbert'in doğrulam kuramsal yaklaşımının bir parçasıdır. Hilbert'e göre doğrulam kuramsal

10 Brouwer 1948, s. 1235.
11 van Dalen 2000, s. 120.
12 Bkz. Kitcher 1976, Detlefsen 1986, Parsons 1998.

temeller bilgi kuramsal bir temele göre daha öncelikli bir yer tutar. Bu aynı zamanda şu demektir: Hilbert'in kuramlar üstü yaklaşımı kanıtlamaların biçimsel yapısıyla ilgilendiği kadar kanıtsavların doğruluğunu sağlayan koşullarla, yani doğrulamların yapılarıyla da ilgilenir. Hatta kanıtlamaların çalışma konusu ve kuram nesnesi olarak ele alındığı üst matematikte, Hilbert gerçek ve ülküsel tamdeyimerin hangi doğrulamları belirlediği ve hangilerini dışladığı sorusunu sorar. İşte bu anlamda, kanıtlama kuramı doğrulam kuramsal bir yaklaşımın parçası olarak görülmelidir.

Hilbert'in üst matematiğinin bilgi kuramsal öncülleri olan bir matematik felsefesi gibi yorumlanmasının yanıltıcı olduğu nokta "sonlunun sezgisi ne tür bir sezgidir?" sorusuna Hilbert'in görüşlerinden yola çıkarak bir yanıt arayışına girişilmesidir. Sözü geçen sezgiye gereğinden fazla bir anlam yüklenmektedir. Sözü geçen soru sorulması gereken bir soru olsa bile üzerine bilgi kuramsal bir anlam yüklenmeden sorulmalıdır. Ne de olsa Hilbert izlencesini anlaşılması için yeni bir bilgi vermeyecektir. Bunun nedenine şöyle yaklaşılabilir: Hilbert *a priori* sezgiyi "sonlu düşünce kipinin kapsamı" olarak ele alır.[13] Bu şu demektir: *A priori* sezgi sonlu nesneler ile düşünmenin sezgisidir. Ancak bunun böyle olduğunu dile getirmek ne *a priori* sezgiyi ne de sonlu nesnelerle düşünmeyi daha iyi anlamamıza yarar. O zaman, sorulması gereken sorular şunlardır: Hilbert neden böyle söylemiştir? *A priori* sezgiyi mi açıklamak istemiştir; yoksa sonlu nesnelerle düşünmeyi mi? Eğer bir açıklama vermek istediyse bu, bilgi kuramsal açıdan bilgi veren bir açıklama gibi neden gözükmemektedir? Hilbert ne bir açıklama ne de bilgi kuramsal bir açıklama vermek istemiştir. Kabaca anlamıyla sonlu nesneler ile düşünmek somut ve elle tutulur bir içeriğe yönelir. Hilbert bu yönelimin biçimselleştirilmiş bir dilde nesnelere a, b, c... gibi adlar verilerek çalışşılabileceğini vurgulamıştır. Tabii bu tür bir çalışmanın sonsal sınırları nerededir sorusu, zaten Hilbert'in yaklaşımının yanıtlamayı amaçladığı en önemli sorulardan biridir. Bu sorunun üst matematiksel olmayan bir yoldan yanıtlanmaya çalışılması bir *petitio principii*, yani asıl sorunun erken sorulması olacaktır. O halde, sınırlar sorusunun yanıtı

13 Bkz. Hilbert 1931.

matematiği kısıtlayıcı bir bilgi kuramsal matematik felsefesinin öncülü olmamalıdır.

1931 tarihli bir yazısında Hilbert şöyle der:

Öyle önermeler vardır ki *apriori* oldukları düşünülür; ama sonlu düşünce kipinin kapsamında erişilmezdirler. Örneğin, üçüncü halin olanaksızlığı ilkesi ve genel olarak sonlu ötesi önermeler böyledir.[14]

Burada da Hilbert'in verdiği örnekler bilgi kuramsal bir açıklamanın parçası olamaz. Çünkü Hilbert'in söylemeye çalıştığı yalnızca üçüncü halin olanaksızlığı ve genel olarak sonlu ötesi önermelerin anlamının kendisinin kurduğu üst matematiksel yaklaşım açısından sorunsallı uygulamalar türettiğidir; yoksa bu sorunsallığın dayanağı olan bazı bilgi kuramsal temellerin varlığı değildir. Basit bir dille söylemek gerekirse, gözden kaçırılmaması gereken nokta mantık ilkelerinin üst matematiksel açıdan sorunlu uygulamalarıyla karşılaşıldığında bunlara matematiğin temellerini bulmayı amaçlayan araştırmalarda başvurulmaması gerektiğidir. Bu gerekliliğin dile getirilmesi aracılığıyla da dolaylı olarak *a priori* sezgi gibi bir bilgi kuramsal dayanağın körü körüne kabul edilmemesi gerektiği görülür. Kanıtlama kuramı ve üst matematik sayesinde yeri geldikçe sorunlu bazı mantık uygulamaları biçimsel bir yolla ortaya çıkartılabilir.

Hilbert matematik felsefesini bilgi kuramsal ve varlık bilgisel öndayanaklardan arındırmak istiyordu. Bu isteğin keskin bir dille söze dökümü 1917 yılında verdiği, matematiğin ilkeleri başlıklı derslerinde bulunabilir. 1917 derslerinde Hilbert, iksavlı yaklaşım sayesinde felsefi soruların üstesinden gelmeyi değil ama onları araştırmalarından "kesip atmayı" başaracaklarını söylemiştir.[15] O halde, sonlu nesnelerin sezgisiyle ilgili bir sorunun, içinde geçen terimlerin üst matematiksel anlamlarının biçimsel araçlarla ortaya çıkarılması yoluyla yanıtlanabilmesi gerekir. Özetle, sözü geçen türden sorular üst mantık ve üst matematik sorularıdır; bilgi kuramı sorusu değildir. Bunun böyle olması da Hilbert'in

14 Hilbert 1931, s. 1150.
15 Sieg 1999, s. 11.

1905'ten başlayarak önerdiği biçimiyle mantıksal ve matematiksel yöntemlerin eş güdümlü araştırılması gerekliliği ile uyum içindedir. En önemlisi, Hilbert'in sonluculuk diye adlandırılan görüşü de üst mantıksal bir araştırma konusu olarak ele alınmalıdır. Hilbert'in arayışı yalınç bir mantık ve yalınç bir biçimsel dil arayışıdır.

Hilbert ilksavlılaştırılmış matematiğin konusu olan kuramlar için doğrulamlar belirlenmesiyle ve kanıtlamaların biçimsel yapısının incelenmesiyle ilgileniyordu. Biçimsel yapıların bilişsel içeriğine ilişkin sorular kesinlikle bu ilgiden ayrıştırılması gereken bir konudur. Yalnız bu konuyla ilgili hiçbir felsefe sorusu yoktur anlamına gelmez. Doğrulamların varlığıyla ilgili sorular doğal olarak görmezlikten gelinemez. Bu arada, Hilbert'in sözü geçen felsefe sorularını ciddiye almadığı veya onları ihmal ettiği sonucu da çıkmaz. Değinilen noktalardan çıkan bir sonuç Hilbert'in kanıtlama kuramında ve doğrulam kuramsal yaklaşımında bilgi kuramsal soruların öneminin ikincil sırada olduğudur. Brouwer'den farklı olarak, bilgi kuramsal soruların yanıtlanması Hilbert'in üst matematiksel amaçları arasında yer almaz.

Hilbert'in kendi yaklaşımını bilgi kuramsal ve varlık bilimsel öndayanaklar kabul eden başka görüşlerden nasıl ayırdığını görmek için onun 1928 tarihli yazısına bakılmalıdır:

...Son çıktının şu olacağını belirtmek isterim: matematik öndayanaksız bir bilimdir. Onu temellendirmek için ne Kronecker gibi Tanrı'ya, ne Poincaré gibi anlağımızın matematiksel tümevarım ilkesiyle uyumlu özel yetileri hakkında olan bir varsayıma, ne Brouwer'in başat sezgisine, ne de son olarak Russell ve Whitehead'in yaptığı gibi sonsuzluk ilksavı, indirgenebilirlik ilksavı veya eksiksizlik ilksavına—ki bunların hepsi gerçek ve içerikli varsayımlardır, bir tutarlılık kanıtlamasında yer almamalılar—ihtiyacımız vardır.[16]

Bu alıntıda, matematiğin hiçbir öndayanağa ihtiyacı olmadığının dile getirilmesinin yanısıra dikkati çeken bir dizi eleştiri oku da vardır. Bunlardan Kronecker'e yöneltilen ilk eleştiri Kronecker'in ünlü sözlerine bir göndermedir: "Tam sayıları Tanrı yarattı. Gerisini insan yarattı." Hilbert'e göre eğer sayı

16 Hilbert 1928, s. 479.

kuramı için bir tutarlılık kanıtlaması verilebilirse matematiğin temelleri için Kronecker'in Tanrı'sına ihtiyaç kalmayacaktır. İkinci olarak, matematiksel tümevarımla ilişkilendirilen bir sezgiye ihtiyaç olmadığı iddiası ve Poincaré eleştirisi vardır. Hilbert'in eleştirisine göre matematiksel tümevarım daha önce üst matematiksel bir biçimde ele alınması gerektiği vurgulanan sonlu sezgi aracılığıyla Poincaré'nin soktuğu biçimden (yani *a priori* sezgiden) farklı bir mantıksal biçime sokulabilir demektir. Yani Hilbert, matematiksel tümevarım konusunu *a priori* bir sezgi aracılığıyla açıklamakla yetinen Poincaré'nin yanılgıya düştüğünü düşünmektedir. Keza durum Brouwer'in başat sezgisinde de aynıdır. Son olarak da Russell ve Whitehead'in mantıkçılık diye bilinen yaklaşımlarında yararlandıkları içerikli varsayımları eleştirmektedir Hilbert. Hilbert'in genel eleştirisi bu içerikli varsayımlardan birincisine değinilerek anlaşılabilir. Russell ve Whitehead kendilerinden önce Frege'nin başlattığı mantıkçılık programında, aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini göstermeye çalışmışlardır. Bu indirgemede onlar da ilksavlı bir yöntem izlemişlerdir. Ancak onlar ilksavlarının listesini oluştururken, Frege'nin sisteminde ortaya çıkan bazı zorlukları gidermek için sonsuz tane nesnenin (sayının) varolduğunu söyleyen sonsuzluk ilksavını kullanmışlardır. Hilbert'in de dile getirdiği gibi bu gerçek anlamda içeriksel bir varsayımdır. O halde, Hilbert'in yaklaşımı tüm bu sorulardan kurtularak matematiğin temellerinin sağlama alınabileceğini savlamaktadır. Hilbert savını kanıtlamak için kullandığı üst matematikte (yani matematik kuramlarının tutarlılıklarının kanıtlanmasında) herhangi bir bilgi kuramsal üstlenimden uzak duracaktır.

3. *Aritmetiğin tutarlılığının kanıtlanabilirliği*

1905 tarihli bir yazısında, Hilbert sayı kuramı için bir ilksavlı sistem önerip, bu sistemin tutarlılığının nasıl gösterileceği konusundaki görüşlerini özetlemiştir. Bu özet 1900 yılında Paris'te yapılan Matematikçiler Kongresi'nde sunmuş olduğu ikinci sorusuna bir yanıt arayışı için ilk sistemli çözüm yolu olması bakımından önemlidir. Hilbert'in oluşturduğu beş ilksavda belirlenen doğrulamaların nesnelerinin ve bu nesneler arasındaki ilişkilerin somut düzeyde olmasına dikkat edilmiştir. Burada somut olduğu söylenen nesneler ve ilişkiler 1920'li yıllarda hararetlenen "sonlu sezgi" tartışmalarının da bir başlangıcıdır.

Hilbert somut düzeyde incelediği doğrulamların nesneleri için "düşünce nesneleri" tamlamasını kullanmış ve 1905 tarihli yazısında aşağıdaki beş ilksavı önermiştir:

- $x = x$
- $x = y \;\&\; A(x) \;|\, A(y)$
- $f(ux) = u(f'x)$
- $f(ux) = f(uy) \;|\, ux = uy$
- $f(ux) \neq u1$

Bu ilksavlardan yapılacak çıkarımların biçimsel yapısı doğal tümdengelim yöntemlerinde olduğu gibi $A_1 \;\&\; A_2 ... \& A_n \;|\, B_1$ v B_2... v B_n'dir. Bu yapılarda Hilbert tikel nicelemeyi $A(x^{(v)})$, tümel nicelemeyi de $A(x^{(\&)})$ biçiminde göstermiştir. Hilbert'in kullandığı dil ile ilksavlarda verilmek istenen anlam şöyledir: Birinci ilksavın anlamı cok açıktır; bir nesne kendisiyle aynıdır. İkinci ilksav birbirine özdeş iki nesne hakkında aynı yüklemin kullanabilineceği, aynı yüklem kullanılarak çıkarım yapılabileceğimizi gösterir. Üçüncü ilksavın anlamı ux biçiminde gösterilen her öğenin belirtik bir nesne f(ux) tarafından izlendiğini ve bu nesnenin u ile gösterilen kümenin bir öğesine özdeş olduğu dile getirilir. Söz konusu öğe de u(f'x) ile gösterilir. Dördüncü ilksav, eğer aynı öğe iki başka öğeyi izliyorsa bu iki öğenin aynı öğe olduğunu söyler. Son olarak, besinci ilksav da u'nun öğesi olup da u1 tarafından izlenen hiçbir öğe olmadığını söyler.

Hilbert'in bu ilksavları vermekle göstermeye çalıştığı, beşinci ilksavla çelişkili olan $f(x^{(v)}) = u1$ tamdeyiminin ilk dört ilksavdan çıkarsanamayacağının kanıtlanabileceğidir. Bunun için Hilbert bağdaşık eşitlikler dediği $\alpha = \alpha$ biçimindeki eşit tamdeyimleri tanımlar. Bu yolla ilk dört ilksavdan çıkarsanabilecek her tamdeyimin bağdaşık olması gerektiğine dikkat çeker. Bu gözlem temelinde verilen ilksavlardan çelişkili tamdeyimler (yani bağdaşık olmayan tamdeyimler) çıkarsanamayacağının kısa bir temellendirmesini yapar. Bir anlamda, Hilbert'in iddia ettiği genel sonuç ilksavlardan yola çıkarak yapılacak mantıksal çıkarımlar için ilksavlı sistemin belirlediği doğrulamlara karşı örnek oluşturacak bir tamdeyimin türetilemeyeceğidir.

Hilbert'in, istediği sonucun sayılar kuramının tüm nesneleri ve ilişkileri için genel bir tutarlılık kanıtlamasını gösterebilmesi için matematiksel tümevarım ilkesine gereksinimi vardır. Yalnız matematiksel tümevarım ilkesi bilinen anlamda aritmetik (örneğin Peano aritmetiği) ilksavlarından biridir. Peki ama bu nasıl iştir? Eğer ilksasvlardan biri olması bekleniyorsa neden Hilbert'in verdiği ilksavlar listesinde yoktur matematiksel tümevarım ilkesi? Eğer ilksavlardan biri olarak düşünülecekse bu istenilen tutarlılık kanıtlamasının döngüsel bir usavurmaya dönüşmesine neden olmaz mı? Poincaré, Hilbert'in temellendirmesini 1906'da işte tam bu sorulara yanıt aranması beklenen bir bakış açısından eleştirmiştir. Hilbert'in kanıtlamasında, Poincaré'ye göre döngüsellik tehlikesi vardır:

> Tartışılan konu tekrarlı uslamlamadır [yani matematiksel tümevarım] ve bu, sistemin ilksavlarının tutarsız olmadığını bilmekle ilgilidir.
> ...
> Bir kanıtlama gerektiği aşikardır.
> Olanaklı tek kanıtlama tekrarlı uslamlamayla kanıtlamadır.
> Bu ise ancak tekrarlı uslamlamayı bir tanım olarak değil, bireşimsel [synthetic] bir yargı olarak ele alırsak kabul edilebilir olur.[17]

Burada Poincaré'nin, Hilbert'in uslamlamasının matematiksel tümevarım ilkesini bireşimsel bir yargı olarak ele aldığını kabul ettiği de görülür:

> ...Hilbert'in uslamlaması yalnızca matematiksel tümevarımı varsaymakla kalmıyor, aynı zamanda bu ilkenin bize bir tanım olarak verilmediğini ve bireşimsel *a priori* bir yargı olarak verildiğini de varsayıyor.[18]

17 Poincaré 1906, ss. 1058-1059.
18 İbid. s. 1059.

Hilbert'in bilgi kuramsal soruları matematiğin temelleriyle ilgili sorulardan ayırmayı amaçladığına değinilmişti. Poincaré'nin eleştirisi ise Hilbert'in uslamlamasında bilgi kuramsal açıdan bir döngüsellik olduğu uyarısını yapmaktadır. Daha önce sözü edilen bilgi kuramı ile matematiğin temelleri arasındaki ayrım öncelikli olarak 1920'li yıllarda Hilbert'in kurduğu üst matematiksel yaklaşıma ilişkindir. Poincaré'nin eleştirisiyse 1906 yılı tarihlidir. Tarihsel olarak Hilbert'in Poincaré'ye verdiği yanıta bakılacak olursa Hilbert 1917'ye kadar bu konuyu neredeyse hiç açmamıştır. 1920'lere gelindiğinde ise Hilbert'in verdiği yanıt yukarıda değinilen bilgi kuramı ile üst matematik arasındaki ayrımı destekler niteliktedir. Hilbert'in kendi görüşüne göre, 1905'teki akıl yürütmesinde bir döngüsellik varmış gibi gözükmesinin nedeni o zamanlar henüz geliştirilmemiş olan, ancak sonradan yapılandırılan mantıksal ve üst matematiksel dillerde tamamlanmaya çalışılan eksiklerde aranmalıdır. Hilbert'in 1928'de yaptığı bir yoruma göre Poincaré'nin iddiasının hatası Hilbert'in görüşünü "teknik olarak yetersiz olduğu erken bir döneminde" eleştirmiş olmasıdır. Hilbert'e göre Poincaré'nin hatası iki farklı tümevarım arasında ayrım yapmamasıdır:

Poincaré aritmetik ilksavları için bir tutarlılık kanıtlamasının olanağını reddetmiştir. Matematiksel tümevarım ilkesinin tutarlılığının yine bu ilkenin kendisine basvurmadan kanıtlanamayacağını düşünmüştür. Ama benim kanıtlama kuramımın gösterdiği biçimiyle iki farklı yöntem tekrarlı bir uygulamayla işin içine girmektedir... bir yandan tamsayıların figürler aracılığıyla sezgisel bir biçimde yapılandırılması... yani *içerikli* tümevarım ve diğer yandan asıl biçimsel tümevarım, ki bu da tümevarım ilksavı temelindedir ve asıl onun sayesindedir ki matematiksel bir değişken bir biçimsel sistem içindeki rolünü oynamaya başlayabilir.[19]

Bu noktada hala Poincaré'nin matematiksel tümevarım ilkesinin bireşimsel bir yargı olup olmadığına ilişkin görüşü detaylandırılmış bir felsefi tartışmanın konusu yapılabilir. Ancak, Poincaré'nin eleştirisinin bilgi kuramsal öndayanaklar üzerine kurulmuş olması, bu tartışmayı Hilbert'in üst kuramsal yaklaşımı açısından devam ettirmenin bir anlamı olmadığını gösteriyor.

Hilbert'in bakış açısından bakıldığında, Poincaré'nin eleştirisinde yer verdiğine benzer bir sezgi

19 ibid. ss. 472-473.

kavramına matematiğin temellerinde başvurulmaması gerektiği söylenebilir. Matematiğin temelleri mantıksal yöntemleri geliştirerek matematiksel veya üst matematiksel diller aracılığıyla soruşturulabilir. Bunun anlamı, içeriği olan varsayımlara ve ilksavlara (daha önce değinilen Russell ve Whitehead'in sonsuzluk ilksavı gibi) matematiğin temellerinde başvurulmaması gerektiğidir. Eninde sonunda üst mantıksal açıdan sorunlu içeriği olan kavramların yol açtığı sorulara yine bu sorunlu içeriklere başvurularak yanıt aranacaksa, hiç aranmasın daha iyidir. Özetlenmeye çalışıldığı üzere, Hilbert'in üst matematiksel yaklaşımı mantığa dayalı bir ilksavlı dizgenin tikel ve tümel nicelemeyi sorunlu bir biçime sokan içerikli varsayımlardan yola çıkmadan da belirlenebileceğini göstermek için ortaya atılmıştır.

4. *Niceleyicilerin anlamı üzerine bazı araştırmaların bulguları*

Son yılların mantık çalışmalarının kayda değer bir kısmı oyun-kuramsal bir yaklaşım çerçevesinde bir araya toplanabilir. Söz konusu oyun-kuramsallık matematiksel oyun kuramının bulunduğu yıllardan bu yana mantık ve olasılık kuramıyla ilişkilendirilerek ele alınmıştır. Konunun bugün vardığı noktada, bireylerin bilgileri arasındaki etkileşim kavramı ön plana çıkmış, tıpkı bir bilinmeyenli veya birden çok bilinmeyenli denklemlerde olduğu gibi, bir bilenli veya birden çok bilenli oyunların bilgisel doğası araştırılmaya başlanmıştır.

Oyun-kuramsal mantık olgularının ortaya çıktığı en temel alan birinci ve ikinci basamak mantık dillerinin anlam bilgisidir. Tikel ve tümel nicelemelerin birinci basamak değişkenler, örneğin, bireyler üzerine uygulandığı mantık dillerine birinci basamak nicelemeli diller denir. İkinci ve daha yüksek basamak değişkenlere, örneğin, kavramlara ve ilişkilere uygulanan nicelemeli dillere ise ikinci basamak nicelemeli diller denir. Bu deyiş, yüksek basamak nicelemenin, betimleyici ve bilgisel gücü bakımından ikinci basamağa hali hazıda indirgenebilir olmasıdan kaynaklanmaktadır.[20]

20 Bkz. Hintikka 1955.

Birinci basamak niceleme, yüksek basamak nicelemeden sistematik olarak Hilbert ve Ackermann tarafıdan 1928'de ayrılmıştır. Amaç, ilksavlı sistemlerde, üzerinde çalışılmak istenilen bilgi içeriğini adcı bir biçimde dile getirmektir. Kavramsal gerçekçiliği dışlayan adcı bir yaklaşımın ancak birinci basamak değişkenler, yani bireyler üzerine niceleme yapılan birinci basamak diller aracılığıyla olanaklı olduğu genel kabul görmektedir.

Birinci basamak mantığın uygulamalarında verili bireylerden oluşan bir tanım kümesi kabul edilir. Bu tanım kümesinde belli sayıda özellik ve ilişki tanımlanır; birli ve çoklu yüklemlerle dile getirilir. Merkezdeki konu varlıksal ve evrensel niceleyicilerdir. Bunlara sırasıyla tikel ve tümel niceleyiciler denir. Örneğin, “En az bir x vardır”, “Her x” gibi niceleyicilerle birlikte geçen x gibi bir değişken yönletilen bireyi imler. Eklemler de değilleme eklemi “değildir”, tikel evetleme eklemi “veya”, tümel evetleme eklemi “ve” ve koşullu önerme eklemi “ise” gibi sözcüklerin sembolik karşılıklarıdır. Bu araçlar kullanılarak atomsal önermeler tanımlanır. Karmaşık önermeler niceleyicilerin ve eklemlerin birarada, birbiri ardısıra yuvalandırılarak oluşturulur. Çoğunlukla özdeşlik sabiti de işin içine katılır. Tüm değişkenlerin niceleyicilere bağlı olduğu tamdeyimlere tümce denir. Bunlar tanım kümesindeki bireyler hakkında dile getirilen önermeleri sembolik dile çevirmeye yarar. Bireyler üzerine uslamlamanın hangi mantık siteminde ele alınması gerektiğine ilişkin sorunun yanıtı olarak adcı ilkelerle uyumlu olan bir dil olduğu için birinci basamak mantık dilinin ilksavlı yöntem için en uygun mantık sistemi olduğu düşünülmüştür. Aynı şey Hilbert izlencesinde kullanılacak mantık dili için de geçerlidir.

Ancak son yıllarda bulgulanan bazı sonuçlar şunu göstermişir: Hilbert ve Ackermann'ın yaptığı ayrım, adcı bir yaklaşımı kavramsal gerçekçi bir yaklaşımdan yetkince ayımak için uygun değildir. (Bkz. Väänänen 2001) Söz konusu yetersizliğin temel nedeni, Hilbert ve Ackermann'ın Frege ve Russell tarzında nicelemeden yola çıkıp, birbiri ardısıra yuvalanmış niceleyicilerin herbirinin bilgisel anlamda önceki niceleyicilere bağımlı olduğunu varsaymalarıyla açıklanabilir. Bu kısaca şu demektir:

N_1x_1, N_2x_2, ..., N_nx_n $A[x_1, x_2, ..., x_n]$ gibi bir tümcede, sonra geçen N_ix_i niceleyicilerin önce geçen niceleyicilerden bilgisel olarak bağımsız olduğu durumlar daha en baştan birinci basamak dillerde ifade edilemez olarak belirlenmişir. Oysa bu belirleme zorunlu bir doğruluğa karşılık gelmemektedir. Pekala yalnızca bireyler üzerine niceleme yapılan dillerde de tümcelerin sonra geçen niceleyicileri önce geçen niceleyicilerinden bilgisel anlamda bağımsız olabilir. Bu gerçek, örneğin iki oyuncunun birbirlerinden bağımsız seçimler yapabildiği ortak uslamlamalarda bulgulanabilir.

Doğal olarak birbirinden bağımsız seçimler, ortak uslamlamalarda üçüncü halin olanaksılığı ilkesine aykırı durumlar yaratır. Doğuluğuna veya yanlışlığına karar verilemeyen durumlar bu yolla birinci basamak nicelemenin kapsam alanına alınmış olur. O halde, Hilbert ve Ackermann'ın yaptığı birinci ve yüksek basamaklar ayrımı birinci basamağın bu yeni kapsam alanı bağamında yeniden ele alınmalıdır. Nitekim, alınmıştır da. Henkin'in çatallı niceleme dili ve Hintikka ve Sandu'nun bağımsız niceleyicilere de yer veren bağımsızlık-dostu dilleri betimleyici ve tümdengelimsel kapsamları bakımıdan ikinci basamak mantığın Sigma 1-1 parçasına denktir. Hintikka'nın oyun-kuramsal yaklaşımıyla görülmüşür ki Sigma 1-1, üçüncü halin olanaksılığından vazgeçilmiş bir bağımsız nicelemeli dil yardımıyla bağımsız niceleyicilere de yer veren birinci basamağa indirgenebilmektedir.[21] Söz konusu sonuç adcı bir yaklaşımı destekler niteliktedir. Hilbert ve Ackerman'ın ayrımına göre birinci basamakta betimlenemezken ikinci basamakta betimlenebilen kimi matematiksel kavramlar Hintikka'nın yaklaşımında birinci basamakta betimlenebilmektedir.[22]

Sözü geçen bağımsız nicelemeli dillerde nicelemeli bir T tümcesinin doğal doğruluk koşulu birbiriyle bağımlılık ve bağımsızlık ilişkileri içinde olan tanık bireyleri, değişkenlerin değerleri olarak türeten işlevlerin varlığıdır. Bu işlevlere Skolem işlevleri denir. Örneğin, "Her x için bir y vardır, bu x ve y A ilişkisindedir" dediğimizde, doğruluk koşulu her x'in, f(x) ile A ilişkisinde olduğunu garanti

21 Bkz. Väänänen 2001.

22 Bkz. Hintikka 1996.

altına alan bir f işlevinin varlığıdır. Genellersek, bir T tümcesi ancak ve ancak T için Skolem işlevlerinden oluşan bir tek-biçim buluş yolu varsa doğrudur. Söz konusu buluş yolu oyun-kuramsal anlambiliminde kazanma yolu (stratejisi) anlamına gelir. Hintikka 1990'ların başlarında bağımsız niceleyicilere yer veren birinci basamak mantık dilinde ana düşüncesi Skolem işlevlerinin tümcelerin doğruluk koşullarını belirlemesine dayanan oyun-kuramsal bir birinci basamak doğruluk tanımının verilebileceği sonucuna ulaşmıştır. Bu anlamda Tarski'nin 1935 ve Wittgenstein'ın 1921 kısıtlayıcı doğruluk kuramları oyun-kuramsal anlambilim ve bağımlı ve bağımsız nicelemeli mantık dilleri aracılığıyla aşılmıştır.

Durum itibarıyla bireyler üzerine nicelemenin kapsamı bağımısız niceleyiciler aracılığıyla genişetilmişir. Söz konusu genişleme adcılığı yeni baştan ele almak için yeterli bulgulara yol açmıştır. Yeni bulguların en başında birinci basamak diller için birinci basamak bir doğruluk tanımının yapılabilmesi gelir. Hilbert ve Ackermann'dan bu yana, birinci ve yüksek basamak diller ayrımına göre, birinci basamak diller için bir doğruluk tanımının ancak ve ancak bir üst basamak dilde yapılabileceği ve ardışık olarak, doğruluğun üst basamaklara doğru yükselen bir tanım hiyerarşisine tabi olduğu düşünülmüşür. Tarski'nin 1935 olanaksızlık kanıtsavı bunu söylemektedir. Ancak yukarıda değinilen yeni ayrıma göre genişetilmiş birinci basamak diller için, yine bu dillerde bir doğuluk tanımı vermek olanaklıdır.[23] İstenilen doğruluk tanımının verilebilir olması ilksavlılaştırılmış sistemler için bazı üst-kuramsal sonuçları beraberinde getirir. Örneğin, bağımsız niceleyicilerle genişetilmiş birinci basamak bir sayılar kuramının tutarlılığı, aynı kuram içinde kanıtlanabilmelidir. Bu, Gödel'in 1931'de kanıtladığı eksiklilik sonuçlarına rağmen Hilbert'in ikinci probleminin çözülebileceğini gösterir. Daha geniş anlamda da Hilbert izlencesi olarak anılan araştırmanın, Gödel'in bulduğu sonuçlarla tutarsız olmadığının, çökmediğinin ve günümüzde de sürdürülebilir olduğunun kanıtıdır.

Eldeki sonuçlara göre adcılık, bağımsız niceleyicilere yer veren genişetilmiş anlamıyla, başta

23 Bkz. Sandu 1998.

mantık ve matematik felsefesi için, ikinci olarak da felsefenin ve bilimlerin temelleri için yeni bir izlence belirlemeye adaydır. Yeni izlencede yer alan konuları bilimsel bir bakışla incelemenin yolunun, ilksavlı sistemlerde mantığın ve bilgisel içeriğin biraradalığının, adcı öndayanakların belirlediği sınırlar dahilinde, hangi felsefe sorularına yanıt bulmamıza yardımcı olduğunun bulgulanmasıdan geçtiği söylenebilir. Böylelikle, Hilbert izlencesinin izinde adcılık adına yeni bulgulara dayanan bir yaklaşımla mantıkçı olguculuk görüşünün yakın bir gelecekte tekrar canlanabileceği ve bilimlerin birliğinin yeni baştan temellendirilebileceği söylenebilir.[24]

KAYNAKÇA

Brouwer, L. E. J. (1948). "Consciousness, philosophy and mathematics", Paul Benacerraf and Hilary Putnam, editörler, *Philosophy of Mathematics*, Cambridge University Press, ikinci basım, s. 90-96.Carnap, R. 1928. *Logical Structure of the World*, University of California Press.

Detlefsen, M. (1986). *Hilbert's Program*, *An Essay on Mathematical Instrumentalism*, Dordrecht: Reidel.

Gödel, K. (1931) "On formally undecidable propositions of *Principia Mathematica* and other related systems", Jean van Heijenoort, editör, *From Frege to Gödel*, Harvard University Press, 1967.

Hallett, M. (1994). "Hilbert's axiomatic method and the laws of thought", A. George, editör, 1994, *Mathematics and Mind*, Proceedings of the Conference on Mathematics and Mind at Amherst College, Massachusetts in April 1991, New York, Oxford University Press, s. 158-200.

Hallett, M. (1995). "Hilbert and Logic", M. Marion and R. S. Cohen, editörler, *Quebec Studies in the Philosophy of Science I*, Kluwer Academic Publlishers, s. 135-187.

Henkin, L. (1961) "Some remarks on the infinitely long formulas", P. Lorentzen, editör, *Infinitistic Methods*, Pergamon Press, ss. 167-183.

24 Rahman ve Symons 2009.

Hilbert, D. (1905) "On the foundations of logic and arithmetic", Jean von Heijenoort, editör, *From Frege to Gödel*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967, s. 129-138.

Hilbert, D. (1918). "Axiomatic thought", W. B. Ewald, editör, *From Kant to Hilbert* (cilt. 2), Oxford: Oxford University Press, 1996, ss. 1105-1115.

Hilbert, D. (1922). “The new grounding of mathematics, first report”, W. E. Ewald, editör, *From Kant to Hilbert* (cilt 2), Oxford: Oxford University Press, 1996, ss. 1115-1134.

Hilbert, D. (1928). "The foundations of mathematics", Jean van Heijenoort, editör, *From Frege to Gödel*, Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967, ss. 464-479.

Hilbert, D. (1931). "The grounding of elementary number theory", W. B. Ewald, editör, *From Kant to Hilbert* (cilt 2), Oxford: Oxford University Press, 1996, ss. 1148- 1157.

Hilbert, D. ve W. Ackermann, 1928, *Principles of Mathematical Logic*, Chelsea Publishing.

Hintikka, Jaakko, 1955, "Reductions in the theory of types", *Acta Philosophica Fennica*, Cilt 1, pp. 57-115.

Hintikka, Jaakko, 1996, *The Principles of Mathematics Revisited*, Cambridge University Press.

Hintikka, J. (2001), “Intuitionistic logic as epistemic logic”, *Synthese*, sayı. 127, ss. 7-19.

Kitcher, P. (1976). "Hilbert's epistemology", *Philosophy of Science*, sayı 43, ss. 99-115.

Kreisel, G. (1976). “What have we learned from Hilbert’s second problem”, Felix E. Brouder, editör, *Mathematical Developments Arising from Hilbert’s Problems* (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, sayı. 28, Bölüm I), American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, ss. 93-131.

Parsons, C.(1998) "Finitism and intuitive knowledge", M. Schirn, editör, *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Oxford University Press, 1998, s. 249-270.

Peckhaus, V. (2003). “The pragmatism of Hilbert’s programme“, *Synthese*, sayı 137, s. 141-146.

Poincaré, H. (1906) "Mathematics and logic", W. B. Ewald, editor, *From Kant to Hilbert* (cilt 2), Oxford: Oxford

University Press, s. 1021-1069 .

Rahman, S. ve J. Symons (2009) *Logic, Epistemology and the Unity of Science*, Springer.

Sandu, Gabriel, (1998) "IF-Logic and truth definition", *Journal of Philosophical Logic*, Cilt. 27 (2), s. 143-164.

Sieg, W. (1999) “Hilbert programs 1917-1922”, *Bulletin of Symbolic Logic*, sayı 5, s. 1-44.

Tait, W. (1981) "Finitism", *Journal of Philosophy*, sayı. 78, s. 524-546.

Tarski, A. (1956) *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, Clarendon Press.

Väänänen, J. (2001) "Second-order logic and foundations of mathematics", *Bulletin of Symbolic Logic*, Cilt 7, s. 504-520.

van Dalen, D. (2000) “Development of Brouwer’s intuitionism”, V. F. Hendricks et al., editörler, *Proof Theory*, Dordrecht: Reidel, s. 117-152.

Zach, R. (2001) *Hilbert's Finitism*, Doktora Tezi, University of California, Berkeley.