MANTIĞIN ZAMAN TÜNELİ

Besim KARAKADILAR

Ondokuzuncu yüzyılın sonu matematiğin temelleriyle ilgili önemli açılımlara sahne olmuştur.[1] Matematiğin yalnızca sayıların ve uzayın araştırması olmadığı, soyut cebirsel ve geometrik yapıların (farklı uzayların) özelliklerinin de çalışıldığı kavramsal bir işleyişi olduğu netleşmiştir. Basit bir dille söylemek gerekirse, matematik artık soyutun da soyutu olmuştur. Matematikteki yeni düzey soyutlaşma kümeler, bakışımlar, geometriler gibi konuların dizgesel olarak çalışılmasıyla başlamıştır. Bundan matematiğin temellerine ilişkin tartışmalar alevlenmiş ve matematik ateşi gitgide etrafını daha çok aydınlatabilen boyutlara ulaşmıştır. Birleşim, kesişim, tümleyen ilişkilerinin çalışıldığı Boole cebirleriyle, tümel ve tikel niceleyiciler olarak adlandırılan mantık sabitlerinin anlamına dayanan mantık dillerinin ortaya çıkışı matematik ateşinin büyüdüğü ondokuzuncu yüzyılın sonuna denk düşer. Boole cebirinin ve mantıksal niceleyicilerin anlamları, birbirlerine benzer işleyişlerle aşağıdaki temel tanımlayıcı denklikler temelinde araştırılmaya başlanmıştır:

$$(A \cup B)' \equiv A' \cap B'$$
$$(A \cap B)' \equiv A' \cup B'$$
$$\sim(\forall x)\, A[x] \equiv (\exists x)\ \sim A[x]$$
$$\sim(\exists x)\, A[x] \equiv (\forall x)\ \sim A[x]$$

Sırasıyla, A ile B’nin birleşiminin tümleyeninin A’nın tümleyeniyle B’nin tümleyeninin kesişimine denk olması; A ile B’nin kesişiminin tümleyeninin A’nın tümleyeniyle B’nin tümleyeninin birleşimine denk olması; A[x]’in her x için doğru olmamasıyla en az bir x için A[x] olmadığının denk olması; hiçbir x için A[x] olmamasıyla her x için A[x]’in değilinin doğru olmasının denk olması özelliklerinden yola çıkarak, cebirsel olarak karmaşıklaşan biçimsel yapıların araştırması dönemin mantığının konusu olmuştur. Matematiksel mantık denilen alan da bu gelişmeden sonra doğmuştur.

Yirminci yüzyılla beraber matematiğin temellerine ilişkin soruların matematiksel mantık aracılığıyla çalışılabileceği görülmüş, Boole cebiriyle elektrik ve telefon devrelerinin doğrulamlanabileceği ve bu yolla bilginin bir yerden başka bir yere taşınabileceği kanıtlanmıştır.[2] Peki ama, matematiğin temelleri matematiksel mantık aracılığıyla ne ölçüde araştırılabilir? Elektrik ve telefon devreleri ne ölçüde Boole cebirleriyle doğrulamlandırılabilir? Bu soruların bilimsel önemi kadar sosyal ve insani boyutları da vardır. Yirminci yüzyılda elektrik, telefon devreleri ve matematiğin de rol aldığı iki büyük dünya savaşına girmekten geri kalmayan insanlığın, mantığın katkılarıyla yaşanan bilgi ve teknoloji çağında, nasıl bir zaman tünelinden geçeceği küresel sorunlara nasıl çözümler bulunacağına bağlıdır. Yirminci yüzyılın başında Russell and Whitehead’in Principia Mathematica adlı iki ciltlik dev yapıtı matematiksel mantığın yeni bir bilim olarak nelere kadir olduğunu tanıtarak, konuyu bilimsel çevrelerde dikkat çekecek bir biçimde öne çıkartmıştır. Sözü geçen öne çıkmayı dil ve dünya arasındaki ilişkilerin çalışması olarak nitelenebilecek anlambilime ilişkin soruların incelenmesi izlemiştir. Matematiksel mantığın dil felsefesine ve anlambilime uygulanmasıyla ilgili soruların dizgesel bir biçimde incelenmesi Wittgenstein’ın 1921 yılında basılan Tractatus Logico-Philosophicus adlı kitabıyla hız kazanmıştır. Mantıkçı olguculuk diye bilinen akımın üyeleri Wittgenstein’ın buluşlarının doğa bilimlerinin ve sosyal bilimlerin temelleriyle ilgili genel sonuçlarını çalışmışlardır. Temel noktaların aydınlanması amacıyla taslak bir betim Wittgenstein’ın buluşlarının

---

1 Söz konusu açılımlara ilişkin kapsamlı bir tarihsel inceleme için bkz. Gratt an-Guiness 2000.
2 Bkz. Gleick 2011.

çatısını nasıl kurduğunu özetleyecektir. Söz konusu buluşlara göre, dünya olguların toplamıdır. Olgu da bir durumun varlığıdır. Düşünce olgunun mantıksal bir resmidir. Aynı zamanda anlamı olan bir önermedir. Önermeler yalın önermelerin doğruluk işlevleridir. Önermelerin mantıksal biçimi de yalın önermelere birbiri ardı sıra uygulanan işlemlerle belirlenir. 1920'lerin sonuna doğru matematiksel mantığın temel soruları iyice netleşmiştir. 1928 tarihinde basılan Kuramsal Mantığın İlkeleri'nde Hilbert ve Ackermann yalnızca birinci basamak değişkenler (yani bireyler) üzerine niceleme yapılan birinci basamak nicelemeli mantık dilini, özellikler ve ilişkiler gibi yüksek basamak değişkenlere de niceleme yapılan ikinci ve daha yüksek basamak dillerden ayırmıştır. Aynı kitapta eksiksizlik kavramı için doğruluk ile kanıtlama arasındaki mantıksal ilişkiyi dizgeli bir biçimde çalışılabilir hale getiren tanımlar verilmiştir. Mantıksal doğrulukların karar verilebilirliğiyle ilgili kavramsallaştırmalar tartışılmıştır. Hilbert ile Ackermann'ın kitabı Hilbert'in matematiğin ve fiziğin ilksavlı temelleriyle ilgili genel izlencesinin bir parçası olarak basılmıştır. Hilbert'in izlencesi bilimsel kuramların ilksavlı dizgeler olarak çalışılması yoluyla tutarlılıklarının kanıtlanmasını amaçlar. Fiziğin ve matematiğin temellerine ilişkin sorulara da yanıt arayışı olması bakımından mantıkçı olguculuğun izlencesiyle ortaklıklar barındırır. Hem Hilbert'le hem de mantıkçı olgucularla yakın felsefe çevrelerinde bulunmuş olan Gödel, 1930 yılında Hilbert ve Ackermann'ın tanımladığı eksiksizlik özelliğinin birinci basamak mantık dilinde sağlandığını kanıtlamıştır. 1931'de de aynı özelliğin yüksek basamak dillerde (yani aritmetiği kodlayabilen dillerde) sağlanmadığını göstermiştir.[3] Gödel'in buluşları s ırasıyla eksiksizlik ve eksiklilik kanıtsavları olarak bilinmektedir ve gerek kanıtlama kuramı için gerekse doğrulamlar kuramı ve tekrarlı işlevler kuramı için yeni ufuklar açmıştır. Gödel'in izinden giden Church birinci basamak doğruluğun tekrarlı işlevler aracılığıyla karar verilemez özelliğini taşıdığını kanıtlamıştır. Ardından Tarski, biçimsel dillerde doğruluğun nasıl tanımlanabileceğini araştırmış ve birinci basamak nicelemeli dillerde söz konusu tanımın eldeki eksiksiz birinci basamak sisteme dayanan dillerde verilemeyeceğini göstermiştir. Church ve Tarski'nin buluşlarının Gödel'inkilere eklenmesiyle tekrarlı işlevlerin doğruluk, kanıtlama, karar verme ve hesaplama gibi kavramların dizgeli biçimde araştırılmasıyla ilgili önemi gitgide artmıştır. Tekrarlı işlevler bir işlevin değişken değerini başka değişkenlerin aynı işlev için alacağı değerler üzerinden tanımlamaya ve bulmaya yararlar. Örneğin Wittgenstein'ın karmaşık önermeleri yalın önermelerden türetmesi tekrarlı işlevler aracılığıyla tasarlanmıştır. Keza Tarski de Gödel de dil dizgelerini tekrarlı işlevlerden yararlanarak kurmuşlardır. Bir halı dokuma tezgahında dokunan halının birbiri ardı sıra ve iç içe yuvalanmış işlemlerin uygulanması aracılığıyla ortaya çıkması gibi biçimsel diller de büyük ölçüde yalın parçaların tekrarlı işlevler aracılığıyla anlamlı bütünlere dönüştürülmesiyle ortaya çıkmıştır. Otomasyondan bilgisayarlara ve elektronik devrelere tekrarlı işlevler ve biçimsel diller sanayi toplumunun biçimlenişinde adeta büyülü bir rol oynamıştır. Hesaplama kavramı da tekrarlı işlevlerle tanımlanmıştır. Bu tanımlama Church-Turing tezi olarak bilinir. Church-Turing tezinin dehlizlerinden geçen bir dizi tarihsel olay hesap yapan ve bilgi işleyen makinalar tasarımının kuramsal temellerini oluşturmuştur. Turing tekrarlı işlevlerle çalışan donanımların genel biçimini dizgeleştirmiştir. Ardından otomatlar kuramı gelişmiş ve bilgisayarlar üretilmiştir. Hikayenin geriye kalanı da bilindiği üzere insanlığı çok hızlı bir biçimde günümüz teknolojilerine ulaştırmıştır. Ulaşılan teknolojik gelişmeler tekrarlı işlevler kuramına dayandığı bütün noktalarda bilgisel bir varsayım barındırır. O da tekralı işlevlerle çalışan makinaların yaptıkları son işlemin ne zaman gerçekleşeceğinin biliniyor olduğunun varsayılmasıdır. Konunun uygulamaya yönelik önemi büyüktür; çünkü aynı varsayım her türlü iş planlamasında yerini korumaktadır. Söz konusu varsayım hesaplama kavramının anlamı konusunda belirleyici rol oynadığı ölçüde bilgisel ve oyun-kuramsal mantıkların gelişmesine de önayak olmuştur.[4] Kazanma (aynı

3 Bkz. Nagel, E. & J. Newman, 2008.
4 Oyun kuramsal mantı k çalışmalarıyla ilgili bilgi için bkz. Majer, O. et al., 2009.

zamanda kaybetme) yollarının ve izlemlerinin matematiksel bir araştırması olan oyun kuramı von Neumann ile Morgenstern tarafından Oyun Kuramı ve İktisadi Davranış başlıklı kitapta çalışılmıştır. Wittgenstein'ın kural izlemeyle ilgili soruşturmaları da kısmen yirminci yüzyılın ikinci yarısına doğru büyük ölçüde oyunlar ve davranışlar üzerinde yoğunlaşmaya başlayan matematiksel bakış açısı üzerinedir. Karar vermeler kazanmaya yönelik düşünmenin bel kemiğidir. Kazanmaya yönelik düşünmedeyse bilinen ve bilinmeyen zaman ölçüleri devrededir. İkisi iki farklı hesaplama kavramı demektir. Birincide son işlemin zamanı bilinir olarak kabul edilir. İkincisinde bilinmez olarak kabul edilir. Bu anlamda karar vermelerdeki zaman ölçüsünün bazı geribildirim ölçütleri belirlediği söylenebilir. Bilinen ve bilinmeyen ölçülerle belirlenen geri bildirim ölçütleri birbirinden farklıdır. Çünkü verili bir işin bitirilme zamanı iş gücünün zamansal sınırlamalardan bağımsızlığı ölçüsünde değişkenlik gösterir. Bir iş planında baz alınan zaman ölçüsü aynı anda başlanabilecek kaç farklı iş olduğu sorusuna bağımlıdır. Ancak o işlerden herhangi birinin ne kadar süreceği sorusuna yanıt vermek yapılan tüm mekanik hesaplardan bağımsız olabilir. Yani, bir işin ne kadar sürede bitirileceğini bazen biliriz, bazen de bilmeyiz. Kısacası, bilinmeyen bir zaman ölçüsüne göre yapılan işle bilinen bir zaman ölçüsüne göre yapılan iş birbirinden farklıdır. Konunun bilgisel boyutları, söz konusu farkı derinlemesine anlamak için tartışmaya açılmalıdır. Eski bir Afrika atasözü vardır. Hızlı gideceksen tek başına, ama uzağa gideceksen başkalarıyla beraber git der. Bu sözü anlamak için Einstein olmaya gerek yoktur. Ama Aristoteles'in bir sorusu vardır ki, o soruyu yanıtlamak için belki de Einstein olmak gerekir; nasıl olur da uzunluğunu bilmediğimiz yol bize daha uzun gözükür? Mantıkçılarla el ele girdiğimiz zaman tünelinde bakalım yolumuz daha ne kadar uzayacak?

Özet

Mantığın Zaman Tüneli

Mantık tarihi ondokuzuncu yüzyılın ikinci yarısından bu yana matematiğin temelleriyle ilgili soruların yanıtlanmasına sahne olmuştur. Bugün tarihsel gelişiminin bir sonucu olarak mantık bilgisayar kullanımı aracılığıyla yaşam ile etkileşmektedir. Bu yazıda söz konusu etkileşimin geleceğine ilişkin bilgisel ufukların geçmişte hangi soruları yanıtlamak amacıyla belirlendiği çok kısaca özetlenmektedir.

Anahtar kelimeler: Mantık, matematik, bilgisayar, yaşam

Abstract

The Time Tunnel of Logic

History of logic has been a stage for giving answers to questions concerning the foundations of mathematics since the second half of the nineteenth century. As a result of its historical development, today, logic is interacting with life by way of computer use. In this paper, it is surveyed very shortly, how epistemic horizons concerning the future of the interaction in question were determined in the past.

Key words: Logic, mathematics, computer, life

KAYNAKÇA

Gleick, J. 2011, *The Information: A History, a Theory*, a Flood, Pantheon Books.
Grattan-Guinness, I. 2000, *The Search for Mathematical Roots 1870-1940*, Princeton University Press.
Majer, O. et al., 2009, *Games: Unifying Logic, language and Philosophy*, Springer.
Nagel, E. & J. Newman, 2008, *Gödel Kanıtlaması*, Boğaziçi Üniversitesi Yayınevi.
Turing, A. 1950, "Computing machinery and intelligence", Mind, cilt 59, ss. 433-460.
Von Neumann, J. & O. Morgenstern, 1944, *Theory of Games and Economic Behavior*, Sixtieth-Anniversary Edition, Princeton University Press.
Whitehead, Alfred, N., and Bertrand Russell, 1910-13, *Principia Mathematica* (2 cilt), Cambridge University Press.
Wittgenstein, L. 1921, *Tractatus Logico-Philosophicus*, Yapı ve Kredi Yayınları.
Wittgenstein, Ludwig, 1953, *Philosophical Investigations*, Blackwell.