Étude constructive de problèmes de topologie pour les réels irrationnels

Version finale. Avril 98

Mohamed Khalouani
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia,
Université de Marrakech, MAROC,
et
Equipe de Mathématiques,
UFR des Sciences et Techniques,
Université de Franche-Comté

Salah Labhalla
Département de Mathématiques, Faculté des Sciences Semlalia,
Université de Marrakech, MAROC
email : fssm.math@cybernet.net.ma

Henri Lombardi
Equipe de Mathématiques, CNRS UMR 6623,
UFR des Sciences et Techniques,
Université de Franche-Comté,
25030 BESANCON cedex, FRANCE,
email : lombardi@math.univ-fcomte.fr

Résumé

Nous étudions d'une manière constructive quelques problèmes de topologie liés à l'ensemble **Irr** des réels irrationnels. L'approche constructive nécessite une notion forte d'un nombre irrationnel ; constructivement, un nombre réel est irrationnel s'il est clairement distinct de tout nombre rationnel.

Nous montrons que l'ensemble **Irr** est en bijection avec l'ensemble **Dfc** des développements en fraction continue (dfc) infinis. Nous définissons deux extensions de **Irr**, l'une appelée $\mathbf{Dfc}_1$ est l'ensemble des dfc de rationnels et d'irrationnels en gardant pour chaque rationnel un seul dfc, l'autre appelée $\mathbf{Dfc}_2$ est l'ensemble des dfc de rationnels et d'irrationnels en gardant pour chaque rationnel ses deux dfc.

Nous introduisons six distances naturelles sur **Irr** que nous notons $\mathrm{d_{fc0}}$, $\mathrm{d_{fc1}}$, $\mathrm{d_{fc2}}$, d, $\mathrm{d_{mir}}$ et $\mathrm{d_{cut}}$. Nous montrons que seules les quatre distances $\mathrm{d_{fc0}}, \mathrm{d_{fc1}}, \mathrm{d}$ et $\mathrm{d_{mir}}$ parmi les six font de **Irr** un espace métrique complet. Ces dernières y définissent la même topologie au sens constructif.

Nous étudions ensuite l'ensemble $\mathbf{Dfc}_1$ en montrant notamment que les irrationnels y forment une partie fermée. En outre, constructivement, $\mathbf{Dfc}_1$ n'est pas égal à la réunion de **Q** et **Irr** et il ne peut pas être mis en bijection avec **R**. Enfin, nous faisons une étude particulière du complété $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ de **Dfc** pour les deux distances métriquement équivalentes $\mathrm{d_{fc2}}$ et $\mathrm{d_{cut}}$. Classiquement $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ est égal à $\mathbf{Dfc}_2$, mais ce n'est plus le cas d'un point de vue constructif.

Mots clés : analyse constructive, nombres réels irrationnels, fractions continues, espaces métriques complets, équivalence métrique, homéomorphisme, principes d'omniscience.

Classification math : 03F60, 11A55.

Abstract

We study in a constructive manner some problems of topology related to the set **Irr** of irrational reals. The constructive approach requires a strong notion of an irrational number ; constructively, a real number is irrational if it is clearly different from any rational number.

We show that the set **Irr** is one-to-one with the set **Dfc** of infinite developments in continued fraction (dfc). We define two extensions of **Irr**, one, called $\mathbf{Dfc}_1$, is the set of dfc of rationals and irrationals preserving for each rational one dfc, the other, called $\mathbf{Dfc}_2$, is the set of dfc of rationals and irrationals preserving for each rational its two dfc.

We introduce six natural distances over **Irr** wich we denote by $\mathrm{d_{fc0}}$, $\mathrm{d_{fc1}}$, $\mathrm{d_{fc2}}$, d, $\mathrm{d_{mir}}$ and $\mathrm{d_{cut}}$. We show that only the four distances $\mathrm{d_{fc0}}, \mathrm{d_{fc1}}, \mathrm{d}$ and $\mathrm{d_{mir}}$ among the six make **Irr** a complete metric space. The last distances define in **Irr** the same topology in a constructive sens.

We study further the set $\mathbf{Dfc}_1$ in which, we show that the irrationals constitue a closed subset. Finally, we make a particular study of the completion $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ of **Dfc** for the two equivalent metrics $\mathrm{d_{fc2}}$ and $\mathrm{d_{cut}}$.

Key words : constructive analysis, irrational real numbers, continued fractions, complete metric spaces, metric equivalence, homeomorphism, omniscience principles.

Introduction

Dans son livre fondateur *Foundations of Constructive Analysis* ([2]), paru en 1967, Erret Bishop montrait dans la pratique que les résultats de base de l'analyse classique pouvaient être rendus algorithmiques, chose réservée jusqu'au là aux seules structures énumérées de l'algèbre. L'interprétation suggérée par Bishop, alternative à l'interprétation dominante des mathématiques, n'est pas entièrement nouvelle ; plusieurs idées qu'il a introduites sont dues à L.E.J. Brouwer dans la première partie de ce siècle. Cependant, ces idées n'ont jamais été présentées d'une façon qui convainquait le milieu mathématique : leur exposé divergeait trop des mathématiques usuelles et impliquait que celles-ci étaient construites sur des fondements très peu solides, ou carrément faux.

Bishop a montré qu'on peut adopter un point de vue complètement constructif et faire de la mathématique comme elle est toujours comprise. Il l'a fait en donnant au formalisme mathématique standard une signification constructive chaque fois que c'était possible, et en développant un large domaine des mathématiques usuelles d'une manière constructive.

Principes d'omniscience

La différence essentielle entre les mathématiques constructives et les mathématiques "classiques" est illustrée par la considération d'un type simple de proposition concernant l'existence dans un contexte infini. Soit $a = (a_n)$ une suite binaire (une *suite binaire* est une construction qui pour chaque entier positif calcule un élément de $\{0, 1\}$) et considérons les propositions suivantes :

$$\begin{array}{ccc} P(a) & : & a_n = 1 \text{ pour un certain } n, \\ \neg P(a) & : & a_n = 0 \text{ pour tout } n, \\ P(a) \vee \neg P(a) & : & P(a) \text{ ou } \neg P(a), \\ \forall a \;\; (P(a) \vee \neg P(a)) & : & \text{pour toute suite binaire } a,\; P(a) \text{ ou } \neg P(a). \end{array}$$

Une preuve constructive de $P(a) \vee \neg P(a)$ doit fournir un algorithme qui, ou bien montre que $a_n = 0$ pour tout n, ou bien calcule un entier positif n tel que $a_n = 1$. Prenons comme exemple d'une suite binaire la suite définie par :

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{si pour tout } m, 2 \leq m \leq n, \text{ on a } \; 2m = p + q \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une preuve constructive de $P(a) \vee \neg P(a)$ si elle existait donnerait une méthode pour décider si la conjecture de Goldbach, $\neg P(a)$ est vraie ou fausse en fournissant une construction qui, ou bien établit la conjecture, ou bien produit un contre-exemple explicite. Mais tant que la conjecture n'est pas résolue, une telle preuve n'existe pas. On dit que a est un *contre-exemple Brouwerien* à la proposition $\forall a \;\; (P(a) \vee \neg P(a))$. Plus généralement, un contre-exemple Brouwerien d'une proposition A est une preuve que A implique un principe qui n'est pas accepté en mathématiques constructives. Le plus important de ces principes est celui introduit par Brouwer que nous présentons sous l'appelation qui lui a été donnée par Bishop, *the limited principle of omniscience* (**LPO**) qu'on peut traduire en français par *Petit Principe d'Omniscience* :

"Si (a_n) est une suite binaire, alors soit il existe n tel que $a_n = 1$, soit $a_n = 0$ pour tout n".

Le principe du tiers exclu certifie que $P \vee \neg P$ est vraie pour toute proposition P. C'est un principe d'omniscience absolu qui implique **LPO**.

Le principe **LPO** possède de très nombreuses formes équivalentes parmi lesquelles on peut citer les suivantes (cf. [14]) :

- Pour tout réel x, $(x \neq 0 \vee x = 0)$
- Pour tout réel x, $(x > 0 \vee x = 0 \vee x < 0)$
- Toute suite d'entiers naturels est ou bien bornée, ou bien non bornée
- Toute suite d'entiers naturels bornée possède une sous-suite constante
- Toute suite croissante dans $\mathbf{N}$ converge dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$
- Toute suite dans $\mathbf{N}$ possède une sous-suite convergente dans $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$
- Toute suite bornée de nombres réels possède une sous-suite convergente
- Toute suite monotone bornée de nombres réels converge.

Dans cet article, nous donnons d'autres formes équivalentes de **LPO** dans les théorèmes 5.5 et 6.10.

Un deuxième principe d'omniscience, désigné par **LLPO**, qu'on peut traduire en français par *Mini Principe d'Omniscience* est l'affirmation :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (x \leq 0 \vee x \geq 0)$$

Affirmer **LLPO** revient à dire que, dans toute suite d'entiers naturels, dans le cas où un certain terme serait nul, ou bien le premier indice pour lequel cela se produit sera pair ou bien il sera impair.

Un troisième principe d'omniscience, noté **MP**, est le Principe de Markov :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad (\neg x = 0 \Rightarrow x \neq 0)$$

Affirmer **MP** revient à dire que, pour toute suite d'entiers naturels, s'il est absurde que tout terme soit nul, alors il existe un terme non nul. Le Principe de Markov a un statut particulier. Tous les systèmes formels constructifs connus ont une règle de déduction valide qui correspond au principe de Markov (cf [1]) : cela tient au fait que constructivement, on ne sait pas réduire à l'absurde l'hypothèse que tout terme de la suite est nul autrement qu'en exhibant un terme non nul.

Espaces métriques et continuité en analyse constructive

Nous supposons que le lecteur ou la lectrice a une certaine familiarité avec l'ouvrage *Constructive Analysis* ([3]) de E. Bishop et D. Bridges. Nous recommandons aussi la lecture de *Varieties of Constructive Mathematics* ([5]) écrit par D. Bridges et F. Richman.

Plusieurs résultats classiques concernant les espaces métriques ne fonctionnent plus constructivement. Par exemple, en mathématiques classiques le complémentaire d'un fermé F dans un espace métrique (X, ρ) est ouvert, par contre en mathématiques constructives on ne sait définir un tel ouvert, le *complément métrique* de F, que lorsque la distance $\rho(x, F)$ entre x et F existe pour tout x dans X. Un ensemble vérifiant une telle condition est dit *situé*. En outre le complément métrique d'un fermé situé ne s'identifie pas en général à son complément "ensembliste" défini de manière purement négative.

La continuité uniforme de fonctions entre espaces métriques est un concept puissant et joue un rôle important en analyse constructive. La continuité simple, par contre, ne l'est pas.

La continuité est un concept qui a été bien maîtrisé constructivement dans le cas des espaces localement compacts. Dans le cas général, D. Bridges a défini une *fonction continue entre espaces métriques* comme une fonction uniformément continue près de toute image compacte (cf [4]).

Ce concept a encore été relativement peu exploré, et ceci a fourni une motivation à notre travail. L'espace des irrationnels est en effet un espace non localement compact (pour les métriques qui se présentent naturellement) et c'était donc un cadre pour analyser en pratique ce que donne la définition de D. Bridges.

Dans le même ordre d'idée il faut citer les travaux de M. Beeson concernant la calculabilité (au sens des mathématiques classiques et de la récursivité) dans les espaces métriques (cf. [1]).

Les nombres irrationnels

Nous faisons dans cet article une étude constructive détaillée de certaines métriques naturelles sur l'ensemble des réels irrationnels. Un nombre réel x est irrationnel au sens constructif lorsque $\mid x-q \mid > 0$ pour tout nombre rationnel q. Cela implique qu'on ait une mesure d'irrationalité explicite pour x. Dans [13], Mark Mandelkern a fait une étude constructive de l'ensemble **Irr** des irrationnels muni de la distance

$$\mathrm{d}_2(x,y) = \mid x-y \mid + \sum_{k=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^k}, \left|\frac{1}{\mid x-q_k \mid} - \frac{1}{\mid y-q_k \mid}\right|\right)$$

avec $\mathbf{Q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Il a montré que l'espace $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_2)$ est complet. Il a également caractérisé et construit les sous-ensembles compacts et localement compacts de $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_2)$. Il les a comparés aux parties compactes et localement compactes de $\mathbf{R}$ pour la distance usuelle $\mathrm{d}_1(x,y) = \mid x-y \mid$, lorsque ce sont des parties de **Irr**.

Le travail que nous présentons dans cet article est une étude plus détaillée des métriques naturelles sur l'ensemble **Irr**, notamment de celles qui sont liées aux développements en fraction continue. Cette étude est développée dans le style constructif de Bishop.

La première section rappelle quelques résultats concernant les espaces métriques.

Dans la section 2 nous montrons que l'ensemble **Irr** est en bijection avec l'ensemble des développements en fraction continue infinis noté **Dfc**. Nous définissons deux extensions de l'ensemble **Dfc**. L'une, notée $\mathbf{Dfc}_1$, est l'ensemble des dfc de nombres réels, rationnels ou irrationnels, en gardant pour chaque rationnel son dfc le plus court. L'autre, notée $\mathbf{Dfc}_2$, est l'ensemble des dfc de nombres réels, rationnels ou irrationnels, en gardant pour chaque rationnel ses deux dfc pair et impair. Ces deux espaces sont liés de manière subtile à la définition des réels par les coupures selon Dedekind. Une interprétation possible des coupures de Dedekind est de dire qu'une coupure est une fonction croissante $\mathbf{Q} \to \{-1, 0, 1\}$ qui passe de -1 à $+1$ en prenant au plus une fois la valeur 0. Selon cette interprétation le $\mathbf{R}$ de Dedekind s'identifie à $\mathbf{Dfc}_1$. Cependant cette identification ne fonctionne pas constructivement si $\mathbf{R}$ est pris au sens usuel (à la Cauchy). Cela tient au fait que la topologie naturelle de $\mathbf{Dfc}_1$ n'est pas la même que celle de $\mathbf{R}$. En outre, si on munit l'ensemble des coupures d'une métrique naturelle en tant que sous espace de $\{-1, 0, 1\}^{\mathbf{Q}}$ on voit que classiquement le complété de cet espace métrique s'identifie à $\mathbf{Dfc}_2 \cup \mathbf{Q}$ (chaque rationnel apparaît 3 fois, une fois en tant que tel, une fois comme limite de suites croissantes d'irrationnels, une fois comme limite de suites décroissantes d'irrationnels). Elucider constructivement ces subtilités topologiques a été aussi une motivation importante de notre travail.

Nous introduisons dans la section 3 six distances sur **Irr** en prenant pour tous
$x = [x_0; x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ et $y = [y_0; y_1, \ldots, y_n, \ldots]$:

$$\begin{array}{rl}
\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x,y) = & |x_0 - y_0| + \dfrac{1}{2^\ell} \text{ si } x_1 = y_1, \cdots, x_\ell = y_\ell, \text{ et } x_{\ell+1} \neq y_{\ell+1} \\
& |x_0 - y_0| \text{ si } x - x_0 = y - y_0 \\
\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x,y) = & |x_0 - y_0| + \dfrac{1}{2^s} \text{ si } x_1 = y_1, \cdots, x_\ell = y_\ell, x_{\ell+1} \neq y_{\ell+1} \text{ et } s = \displaystyle\sum_{k=1}^{\ell} \lg(x_k) \\
& |x_0 - y_0| \text{ si } x - x_0 = y - y_0 \\
\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}(x,y) = & |x_0 - y_0| + \dfrac{1}{2^{s'}} \text{ si } s' = s + \min(\lg(x_{\ell+1}), \lg(y_{\ell+1})) \\
& |x_0 - y_0| \text{ si } x - x_0 = y - y_0 \\
\mathrm{d}(x,y) = & |\, x - y \,| + \displaystyle\sum_{\substack{(p,q)=1 \\ q>0}} \min\left(\frac{1}{4^{|p|+q}}, \left| \frac{1}{|\, x - \frac{p}{q} \,|} - \frac{1}{|\, y - \frac{p}{q} \,|} \right| \right) \\
\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}(x,y) = & \max\left(|\, x - y \,|, \displaystyle\sup_{\substack{(p,q)=1 \\ q>0}} \min\left(\frac{1}{q}, \left| \frac{1}{|\, x - \frac{p}{q} \,|} - \frac{1}{|\, y - \frac{p}{q} \,|} \right| \right) \right) \\
\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(x,y) = & \dfrac{1}{q} \text{ si } q \text{ est le plus petit dénominateur d'un rationnel intercalé entre } x \text{ et } y.
\end{array}$$

Nous établissons dans la section 3 quelques résultats élémentaires tels le fait que les deux distances d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ (resp. $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$) sont métriquement équivalentes sur **Irr**.

Le fait que $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ ne sont pas constructivement topologiquement équivalentes sur **Irr** est presque contraire à l'intuition immédiate que l'on peut avoir des irrationnels. Ce fait est éclairé par les relations de $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ avec les distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$. Il est également en rapport avec des résultats de calculabilité et de complexité concernant les ensembles $\mathbf{R}_{\mathrm{cut}}$ et $\mathbf{R}_{\mathrm{mir}}$ (étroitement liés à $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$) définis et étudiés dans l'article [10]. Dans [10] il est établi que, bien qu'on puisse passer de $\mathbf{R}_{\mathrm{cut}}$ à $\mathbf{R}_{\mathrm{mir}}$ par une fonctionnelle récursive, on peut trouver dans $\mathbf{R}_{\mathrm{cut}}$ des points de faible complexité ayant une complexité arbitrairement grande dans $\mathbf{R}_{\mathrm{mir}}$. L'explication topologique de ce fait est que l'application identité de $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{cut}})$ vers $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{mir}})$ n'est pas “convenable” du point de vue constructif, même si classiquement il s'agit d'un homéomorphisme.

Dans la section 4 nous montrons que les distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ rendent complet l'ensemble **Irr**, ce qui n'est pas le cas des deux distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$. Nous donnons une caractérisation des compacts de **Irr** pour ces quatre distances. L'étude des compacts est une étape indispensable dans la comparaison des distances. Nous montrons que les quatre distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}, \mathrm{d}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ définissent la même topologie. Un principe informel de mathématiques constructives est le suivant : un ensemble “bien défini” est en général muni d'une métrique naturelle qui en fait un espace complet, et la topologie qui en résulte est “unique” (par exemple la topologie discrète n'existe pas constructivement sur **R**). Ce principe informel se trouve ici bien vérifié avec l'ensemble **Irr** puisque les différentes distances naturelles qu'on peut définir constructivement sur cet ensemble et qui en font un espace complet lui confèrent bien la même topologie.

Dans la section 5 nous établissons que $\mathbf{Dfc}_1$ est complet pour les deux distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, que l'ensemble **Irr** est une partie fermée dans $\mathbf{Dfc}_1$ et que **Q** est une partie dense dans $\mathbf{Dfc}_1$ dont tous les éléments sont isolés. Nous montrons que constructivement $\mathbf{Dfc}_1$ n'est pas la réunion de **Q** et **Irr** et qu'il ne peut pas être mis en bijection avec **R** (ceci confirme le principe informel précédent).

Dans la section 6 nous établissons que le séparé-complété $\widetilde{\mathbf{Dfc}}$ de **Irr**, pour les deux distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$, coïncide avec le séparé-complété $\widetilde{\mathbf{Dfc}_2}$ de $\mathbf{Dfc}_2$. Nous caractérisons les suites convergentes de $\widetilde{\mathbf{Dfc}_2}$ et nous donnons quelques propriétés intéressantes de cet espace. Classiquement l'espace $\mathbf{Dfc}_2$ est complet, mais ce n'est pas le cas constructivement.

Nous terminons en remarquant que l'étude que nous faisons dans cet article débouche naturellement sur une étude de complexité. Les espaces métriques définis constructivement se prètent en effet naturellement à une étude dans le cadre de la complexité algorithmique (cf. [9], [12]). La comparaison entre une telle étude avec les espaces **Irr**, $\mathbf{Dfc}_1$, $\mathbf{Dfc}_2$ et l'étude plus directe qui avait été donnée dans [10] concernant les questions de complexité pour les nombres irrationnels nous semble devoir être instructive et nous préparons actuellement un article sur ce sujet ([8]).

1 Quelques rappels d'analyse constructive

Nous rappelons dans cette section certains points un peu délicats d'analyse constructive.

Dans un espace métrique, le complémentaire d'un ouvert est un fermé, mais le complémentaire d'un fermé *n*'est *pas*[1] toujours un ouvert. Cet obstacle est surmonté en analyse constructive par l'introduction des notions très utiles d'ensemble situé (located set) et de complément métrique.

Définition 1.1 Un sous-ensemble non vide A d'un espace métrique X est *situé* dans X si la distance

$$\rho(x, A) = \inf\{\rho(x, y) : y \in A\}$$

de x à A existe pour chaque x dans X.

Le *complément métrique*, noté $X - A$ (ou simplement $-A$), d'un sous-ensemble situé A d'un espace métrique X est l'ensemble ouvert

$$X - A = \{x \in X : \rho(x, A) > 0\}.$$

Il existe des sous-ensembles non vides de $\mathbf{R}$ qui *ne* sont *pas* situés[2]. Si A est situé dans un espace métrique X, alors la clôture $\overline{A}$ de A dans X est située, et $\rho(x, \overline{A}) = \rho(x, A)$ pour chaque x dans X. De plus pour chaque x dans X et chaque $\varepsilon > 0$, $\rho(x, A) > 0$ ou bien $\rho(x, A) < \varepsilon$; ainsi, lorsque A est situé, $A \cup -A$ est dense dans X[3].

La proposition subtile ci-après correspond au lemme 3.8 dans [3].

Proposition 1.2 *Soit K un sous-ensemble complet situé d'un espace métrique (X, ρ), et y un élément de X. Alors il existe $a \in K$ tel que : $\rho(y, a) > 0 \Leftrightarrow \rho(y, K) > 0$.*

Preuve. Il faut seulement montrer $\rho(y, a) > 0 \Rightarrow \rho(y, K) > 0$.
Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\rho(y, K) > 1/2^{n+1}$ ou $\rho(y, K) < 1/2^n$ (test numéro n).
On peut donc construire une suite (z_n) dans K de la manière suivante :

— z_1 est choisi arbitrairement, puis, récursivement, en utilisant à l'étape n le test numéro n :

— si $\rho(y, K) > 1/2^{n+1}$ on pose $z_n := z_{n-1}$

— si $\rho(y, K) < 1/2^n$ on trouve z_n vérifiant $\rho(y, z_n) < 1/2^n$.

Si le test numéro m donne $\rho(y, K) > 1/2^{m+1}$ la suite stationne à partir de z_m. On en déduit que dans tous les cas $\rho(z_n, z_{n+k}) < 2 \inf(\rho(y, z_n), 1/2^n)$ (faire une preuve par récurrence sur k). Donc la suite (z_n) est de Cauchy. Elle converge vers un élément a de K. On a alors par passage à la limite dans l'inégalité ci-dessus $\rho(z_n, a) \leq 2\rho(y, z_n)$ et par suite $\rho(y, a) \leq 3\rho(y, z_n)$. Supposons maintenant $\rho(y, K) < 1/2^{n+1}$, alors le test numéro n conduit à $\rho(y, z_n) < 1/2^n$ et donc $\rho(y, a) < 3/2^n$. Par contrappositon $\rho(y, a) \geq 3/2^n \Rightarrow \rho(y, K) \geq 1/2^{n+1}$. ∎

[1] Lorsqu'on met la négation en italique, cela signifie que l'affirmation est impossible à prouver constructivement. Par exemple parce qu'elle implique un principe d'omniscience. Dire que le complémentaire de l'ensemble $\{0\}$ dans $\mathbf{R}$ est ouvert équivaut à affirmer **MP**.

[2] Par exemple, considérons une suite (x_n) dans $\mathbf{R}$ croissante majorée et qui *n*'est *pas* de Cauchy, alors l'ensemble A de ses valeurs *n*'est *pas* situé.

[3] En mathématiques classiques, toute partie non vide A de X est située, et $\overline{A} \cup -A = X$. Le théorème constructif : si A est situé alors $X = \overline{A \cup -A}$ a donc un contenu algorithmique précis qui échappe en partie aux mathématiques classiques.

En analyse constructive un espace métrique compact est un espace précompact (totally bounded) et complet. Puisqu'il y a des ensembles $\{a,b\} \subset \mathbf{R}$ qui *ne* sont *pas* fermés[4], il est impossible de montrer constructivement que l'image d'un compact par une application uniformément continue est un compact. La difficulté est en partie (en partie seulement) contournée par la définition et la proposition qui suivent.

Définition 1.3 Soit f une application d'un espace métrique (X,ρ) vers un espace métrique (X',ρ'). On dit que f est *injective* si $f(x) \neq f(y)$ lorsque $x,y \in X$ et $x \neq y$. On dit que f est *hyperinjective* si pour tous compacts K,L de X avec $\rho(K,L) > 0$, il existe $r > 0$ tel que $\rho'(f(x),f(y)) \geq r$ pour tout $x \in K$ et tout $y \in L$.

Proposition 1.4 *Soit f une application continue hyperinjective d'un espace compact (X,ρ) vers un espace métrique (X',ρ'). Alors $f(X)$ est compact et l'application inverse $g\ : f(X) \to X$ est uniformément continue hyperinjective sur $f(X)$.*

Les espaces métriques séparables complets, appelés aussi *espaces polonais*, sont des objets fondamentaux en analyse constructive comme en analyse classique.

Soit N un ensemble dénombrable et $((X_n,\rho_n))_{n\in N}$ une famille dénombrable d'espaces métriques[5] non vides. Soient $u = (u_n)_{n\in N}$ et $v = (v_n)_{n\in N}$ deux familles de réels > 0 indexées par l'ensemble dénombrable N telles que $\sum u_n v_n$ soit une série convergente.
On définit alors sur l'espace produit $X = \prod_{n\in N} X_n$ une distance $\rho_{u,v}$ par :

$$\rho_{u,v}(x,y) = \sum_{n\in N} u_n \min(v_n, \rho_n(x_n,y_n))$$

pour tous $x = (x_n)_{n\in N}$ et $y = (y_n)_{n\in N}$ dans X.

Soient maintenant $u' = (u'_n)_{n\in N}$ et $v' = (v'_n)_{n\in N}$ deux familles de réels > 0 indexées par l'ensemble dénombrable N telles que $(u'_n v'_n)$ converge vers 0. On a alors sur l'ensemble produit X une autre distance $\rho'_{u',v'}$ donnée par :

$$\rho'_{u',v'}(x,y) = \sup_{n\in N}(u'_n \min(v'_n, \rho_n(x_n,y_n)))$$

(notez que la borne supérieure d'une suite convergente existe constructivement.)

Nous avons alors le lemme ci-après.

Lemme 1.5 *Les deux distances $\rho_{u,v}$ et $\rho'_{u',v'}$ définies ci-dessus sont métriquement équivalentes sur X.*

Preuve. Voir [7]. ∎

Remarque 1.6 Il découle du lemme 1.5 que lorsqu'on remplace (u,v) par un autre couple (u_0,v_0) vérifiant les mêmes conditions, les deux distances correspondantes $\rho_{u,v}$ et ρ_{u_0,v_0} sont métriquement équivalentes. Même constatation concernant $\rho'_{u',v'}$.

On utilise souvent $\rho_{u,v}$ avec v constante égale à 1. On notera alors ρ_u la distance correspondante. De même, on notera $\rho'_{u'}$ la distance $\rho'_{u',v'}$ avec $v' = 1$.

[4] On montre facilement que $\inf(a,b)$ est dans l'adhérence de $\{a,b\}$. Donc si $\{a,b\}$ est fermé, on a $a \leq b \vee b \leq a$. Ainsi, dire que $\{a,b\}$ est fermé pour tous a,b implique **LLPO**.

[5] Ceci doit être compris au sens constructif, i.e., la distance $\rho_n(x,y)$ est explicite en tant que fonction de n et de $x,y \in X_n$.

Théorème 1.7 *Soient $X = \prod X_n$ muni de la distance $\rho_{u,v}$ et $a = (a_n)$ un élément de X.*

1) Une suite $(x^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ dans X converge si, et seulement si, pour tout $n \in N$, la suite $(x_n^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ converge dans X_n vers une limite y_n, la limite de la suite $(x^{(m)})$ dans X est alors $(y_n)_{n\in N}$.

2) Si la famille est une famille d'espaces complets, la distance $\rho_{u,v}$ donne à X une structure d'espace métrique complet. Si la famille est une famille d'espaces séparables, le produit est également un espace séparable. Si la famille est une famille d'espaces précompacts (resp. compacts), le produit est également un espace précompact (resp. compact).

Preuve. Voir [7]. ∎

Soient (X, ρ) un espace métrique complet et U le complément métrique d'un sous-ensemble fermé situé F de X. Alors U est complet pour la distance d_U définie par :

$$\mathrm{d}_U(x, y) = \rho(x, y) + \left| \frac{1}{\rho(x, F)} - \frac{1}{\rho(y, F)} \right|.$$

En général, si $f : X \to \mathbf{R}$ est une fonction uniformément continue sur X, alors l'ouvert $U_f = \{x \in X; f(x) \neq 0\}$ est un espace métrique complet pour la distance d_f définie par :

$$\mathrm{d}_f(x, y) = \rho(x, y) + \left| \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(y)} \right|.$$

Si (X, ρ) un espace polonais, il en est de même pour U_f.

Théorème 1.8 (Suites convergentes et compacts dans U_f) *Avec les notations ci-dessus :*

1) Une suite (x_n) dans U_f est convergente vers $x \in U_f$ pour d_f si, et seulement si, elle est convergente vers x pour ρ dans X

2) Un sous-ensemble K de U_f est compact dans (U_f, d_f) si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées[6] :

a) K est compact dans X

b) $\exists r > 0\ \forall x \in K\ |f(x)| \geq r$

Preuve. Voir [7]. ∎

Soit (U_n) une famille d'ouverts de (X, ρ) indexée par un ensemble dénombrable N telle que, pour tout $n \in N$, U_n est le complément métrique d'un fermé situé F_n[7]. Soit aussi $u = \sum u_n$ une série convergente à termes positifs.

L'espace $\prod_{n\in N} U_n$ est alors métrisé par la distance :

$$\rho_u(x, y) = \sum_{n\in N} u_n \min(1, \rho_n(x_n, y_n))$$

pour tous $x = (x_n)_{n\in N}$ et $y = (y_n)_{n\in N}$ éléments de $\prod_{n\in N} U_n$
avec

$$\rho_n(x_n, y_n) = \rho(x_n, y_n) + \left| \frac{1}{\rho(x_n, F_n)} - \frac{1}{\rho(y_n, F_n)} \right|$$

La distance ρ_u définit sur $\prod_{n\in N} U_n$ une structure d'espace métrique complet.

Soit $g : U = \bigcap_{n\in N} U_n \to \prod_{n\in N} U_n$ l'application diagonale définie par : $g(x) = (x, x, \ldots)$.

L'image de U par g est une partie fermée dans $\prod_{n\in N} U_n$ et U est donc un espace complet pour la métrique correspondante.

[6] En général, la condition b) ne peut pas être déduite constructivement de la condition a).

[7] Ceci doit être compris au sens constructif, i.e., la distance $\rho(x, F_n)$ de x à F_n est une fonction $g(x, n)$ explicite de x et de n. En outre, il doit s'agir de la fonction distance à F_n au sens constructif : on doit avoir la preuve que $g(x, n) \leq \rho(x, y)$ pour tout $y \in F_n$, et, pour tous $x \in X$, $n \in N$, $m \in \mathbf{N}$, on doit pouvoir donner $y \in F_n$ vérifiant $\rho(x, y) < g(x, n) + 1/2^m$.

Sur l'ouvert U la distance obtenue est métriquement équivalente aux deux distances suivantes :

$$\mathrm{d}_u(x,y) = \rho(x,y) + \sum_{n\in N} u_n \min\left(1, \left|\frac{1}{\rho(x,F_n)} - \frac{1}{\rho(y,F_n)}\right|\right)$$

ou encore, avec $v = (v_n)$ une suite de réels positifs tendant vers 0 :

$$\delta_v(x,y) = \rho(x,y) + \sup_{n\in N} \min\left(v_n, \left|\frac{1}{\rho(x,F_n)} - \frac{1}{\rho(y,F_n)}\right|\right)$$

Remarque 1.9 Il semble qu'il y ait des cas où, par contre, cet espace U *ne* soit *pas* un espace séparable bien que X le soit, comme pour $U = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} U_n$ avec $U_n =]0, 1/(1+u_n)[$ où (u_n) est une suite croissante à valeurs dans $\{0,1\}$.

Théorème 1.10 (Suites convergentes et compacts de $U = \bigcap_{n\in N} U_n$)
Soit (X,ρ) un espace métrique complet et $U = \bigcap_{n\in N} U_n$ l'intersection dénombrable de compléments métriques de fermés situés F_n. Soit ρ_u une distance naturelle sur U (telle que celles définies ci -dessus).

1) Soit $(x_m)_{m\in\mathbf{N}}$ une suite dans U et soit $z \in U$, alors la suite (x_m) ρ_u–converge vers z dans U si et seulement si elle ρ–converge vers z dans X.

2) Un sous-ensemble K de U est compact pour ρ_u si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
a) K est compact pour ρ dans X,
b) Il existe une suite ε_n de réels telle que pour tout $n \in N$ $\rho(K,F_n) \geq \varepsilon_n > 0$.

Preuve. Voir [7]. ∎

Dans le cas où les F_n sont réduits à des points, le théorème précédent peut être sensiblement amélioré.

Théorème 1.11 *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème 1.10 et avec $F_n = \{y_n\}$, un sous-ensemble K de U est compact pour ρ_u si et seulement si il est compact pour ρ dans X.*

Preuve. Nous devons montrer que la condition b) du théorème 1.10 (2) est automatiquement vérifiée pour un ρ–compact $K \subset U$. Soit $n \in \mathbf{N}$, nous voulons montrer que $\rho(y_n, K) > 0$. En appliquant la proposition 1.2 nous construisons un a_n dans K tel que $\rho(y_n, a_n) > 0$ implique $\rho(y_n, K) > 0$. Or puisque $a_n \in K$, par définition de l'inclusion $K \subset \mathbf{R} - \{y_n\}$ on a justement $\rho(y_n, a_n) > 0$. ∎

Remarques 1.12

1) En pratique, pour un ρ–compact K de X il semble improbable qu'on puisse certifier que K est contenu dans U (et donc ρ_u–compact) autrement qu'en réalisant de manière explicite la condition b) du théorème 1.10 (2). Cela limite la protée réelle du théorème 1.11.

2) Le théorème 1.11 est établi par Mandelkern (th. 3.5 dans [13]) dans le cas de l'espace $U = \mathbf{Irr}$ des réels irrationnels muni d'une métrique naturelle du style ρ_u. Il démontre également (th. 4.3) la caractérisation suivante pour un compact K : d'une part K est fermé et situé pour la distance de $\mathbf{Irr}$, d'autre part K est borné et $\mathbf{Q} \subset (\mathbf{R} - K)$ pour la distance de $\mathbf{R}$. Nous ne savons pas si cette cactérisation fonctionne pour n'importe quelle distance "naturelle" telle que nous les avons définies. Par ailleurs, on peut remarquer que la condition $\mathbf{Q} \subset (\mathbf{R} - K)$ n'est autre que la condition b) du théorème 1.10 (2).

Les définitions et résultats qui suivent proviennent de [4].

Un sous-ensemble A d'un espace métrique E est dit *image compacte* (dans E) s'il existe une application uniformément continue λ d'un espace compact X dans E avec $\lambda(X) = A$.

Définition 1.13 Une application $f : (E, \mathrm{d}) \to (E', \mathrm{d}')$ est dite *continue* si elle est uniformément continue près de toute image compacte A dans E, c.-à-d.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall x \in A \ \ \forall y \in E \quad \big(\mathrm{d}(x,y) \leq \delta \implies \mathrm{d}'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon\big)\,.$$

Remarque 1.14 Si l'espace E est complet, la définition ci-dessus équivaut à la continuité uniforme près de tout compact. Classiquement, une application entre espaces métriques est continue au sens de la définition de D. Bridges si et seulement si elle est ponctuellement continue (i.e., continue en tout point), si et seulement si elle est séquentiellement continue (i.e., elle transforme toute suite convergente en une suite convergente). Constructivement, on ne sait pas prouver ces équivalences. Néanmoins, constructivement, la continuité séquentielle suffit pour prouver que l'image réciproque d'un fermé est un fermé, et la continuité ponctuelle suffit pour démontrer que l'image réciproque d'un ouvert est un ouvert.

Proposition 1.15 *La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.*

Soient E et E' deux espaces métriques et $f : E \to E'$ une application continue avec $f(E) = E'$. Si l'inverse f^{-1} est définie et continue, on dit que f est un *homéomorphisme* de E dans E' et que E est *homéomorphe* à E'.

Proposition 1.16 *Soient (X, ρ) et (X', ρ') deux espaces métriques et f un homéomorphisme de X vers X'. Alors f est hyperinjective.*

Proposition 1.17

a) Deux espaces équivalents sont homéomorphes.

b) L'image d'un compact par un homéomorphisme est un compact.

Définition 1.18 Deux distances sur un même ensemble X sont dites *topologiquement équivalentes* si l'identité est continue dans les deux sens. Deux espaces homéomorphes sont aussi dits *topologiquement équivalents.*

2 Nombres irrationnels et fractions continues

Nous rappelons quelques résultats classiques concernant les nombres irrationnels et les développements en fraction continue, en indiquant brièvement les preuves constructives.

Un nombre irrationnel est défini constructivement comme un nombre réel x qui est clairement distinct de tout nombre rationnel. Autrement dit, x est connu comme nombre réel mais en plus, pour tout rationnel p/q on peut explicter un entier m tel que $|x - p/q| > 1/2^m$.

Développements en fraction continue finie d'un nombre rationnel

Soit a_0 un entier et $(a_1, \ldots, a_n)$ une suite finie d'entiers strictement positifs. Nous notons par $[a_0; a_1, \ldots, a_n]$ la fraction continue finie :

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}$$

Chaque nombre rationnel r a une unique représentation en fraction continue finie

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n] \ \text{ avec } \ a_n > 1 \ \text{ si } \ n \geq 1.$$

Par ailleurs $[a_0; a_1, \ldots, a_n] = [a_0; a_1, \ldots, a_n - 1, 1]$ (avec $n \geq 0$). On en déduit que tout rationnel r a une unique représentation en fraction continue finie avec n impair et une unique représentation en fraction continue finie avec n pair.

Développement en fraction continue infinie d'un nombre irrationnel
Considérons maintenant une suite infinie d'entiers $a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$a_0 \in \mathbf{Z}, \qquad \forall n \geq 1 \ \ a_n > 0$$

Nous notons par p_n/q_n le crochet $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ qui s'appelle le n-ème convergent de a, nous avons alors :

$$\begin{array}{ll} \forall n \geq 2 & p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}, \quad q_n \geq 2^{(n-1)/2}, \\ \forall n \geq 0 & p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^n. \end{array}$$

Donc, pour tout $n \geq 0$

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} \right| = \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq 1/2^{n-1}$$

et la suite p_n/q_n converge vers un réel x, que nous noterons $j_{\text{fc}}(a)$.

Pour tout $k \geq 0$, la suite finie définie par

$$\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, x, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

est strictement monotone, croissante si k est pair et décroissante si k est impair.
Plus généralement, nous avons le résultat suivant : pour tout $k \geq 0$, la suite finie définie par

$$\frac{p_k}{q_k}, \frac{p_k + p_{k+1}}{q_k + q_{k+1}}, \dots, \frac{p_k + a_{k+2} p_{k+1}}{q_k + a_{k+2} q_{k+1}} = \frac{p_{k+2}}{q_{k+2}}, x, \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$$

est strictement monotone, croissante si k est pair et décroissante si k est impair.
Dans la suite nous désignons par $\dfrac{p_{k,i}}{q_{k,i}}$ la fraction $\dfrac{p_{k-1} + i p_k}{q_{k-1} + i q_k}$ $(0 \leq i \leq a_{k+1})$. Une telle fraction est appelée un *convergent intermédiaire* de x.

Nous avons maintenant le résultat immédiat suivant.

Lemme 2.1 *Pour tout $n \geq 1$ on a :*

$$\frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

En particulier,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right|.$$

On en déduit la propriété de *meilleure approximation rationnelle* vérifiée par p_n/q_n par rapport à x.

Lemme 2.2 *Pour tout entier $n \geq 1$ et tout rationnel a/b tel que $0 < b \leq q_n$ et $a/b \neq p_n/q_n$ on a :*

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| > \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|.$$

Preuve. Supposons pour fixer les idées que n est impair. On a donc :

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < x < \frac{p_n}{q_n}.$$

Si $\quad a/b \notin \left[\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n} \right]$ alors, d'après le lemme 2.1, $\left| x - \dfrac{a}{b} \right| > \left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right|$.
Si $\quad a/b \in \left[\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}, \dfrac{p_n}{q_n} \right[$ alors $\quad \dfrac{1}{b q_{n-1}} \leq \left| \dfrac{a}{b} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \left| \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| = \dfrac{1}{q_n q_{n-1}}$.
C'est à dire $b > q_n$. Ce qui contredit l'hypothèse $b \leq q_n$. ∎

De là découle que x est irrationnel. Nous allons voir qu'on obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des nombres irrationnels et l'ensemble des "développements en fraction continue infinis".
Introduisons tout d'abord les notations suivantes.

Notations 2.3

- Nous notons **Irr** l'ensemble des réels irrationnels et $j_1 : \mathbf{Irr} \to \mathbf{R}$ l'injection canonique.
- Nous notons $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ l'ensemble des suites infinies d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$a_0 \in \mathbf{Z}, \qquad \forall n \geq 1 \quad a_n \geq 0$$

  Nous notons $j_{\mathrm{cont}} : \mathbf{R}_{\mathrm{cont}} \to \mathbf{R}$ l'application canonique définie comme suit : soit $a = (a_n) \in \mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ et $m > 0$, $\varphi_m(a)$ désigne a_0 si $a_1 = 0$, $[a_0; \ldots, a_m] = p_m/q_m$ si $a_1 > 0, \ldots, a_m > 0$, et $[a_0; \ldots, a_k] = p_k/q_k$ si $a_1 > 0, \ldots, a_k > 0$, $a_{k+1} = 0$ avec $0 < k < m$; enfin $j_{\mathrm{cont}}(a)$ est la limite de $\varphi_m(a)$ lorsque m tend vers l'infini (cette limite existe d'après les considérations précédentes).
- Nous notons **Dfc** l'ensemble des développements en fraction continue infinis, c.-à-d. les suites infinies d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$a_0 \in \mathbf{Z}, \qquad \forall n \geq 1 \quad a_n > 0$$

  Notez que j_{fc} est la restriction de j_{cont} à **Dfc**.
- Nous notons $\mathbf{Dfc}_1$ la partie de $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ définie par l'équivalence suivante

$$a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Dfc}_1 \iff \begin{cases} \forall n > 0 \quad (\ a_n = 0 \ \Rightarrow\ a_{n+1} = 0\ ) & \text{et} \\ \forall n > 0 \quad (\ a_n = 1 \ \Rightarrow\ a_{n+1} \neq 0\ ) \end{cases}$$

  Nous notons $j_{\mathrm{fc}1}$ la restriction de j_{cont} à $\mathbf{Dfc}_1$.
- Nous notons $\mathbf{Dfc}_2$ la partie de $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ définie par l'équivalence suivante

$$a = (a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Dfc}_2 \iff \forall n > 0 \quad (\ a_n = 0 \ \Rightarrow\ a_{n+1} = 0\ )$$

  Nous notons $j_{\mathrm{fc}2}$ la restriction de j_{cont} à $\mathbf{Dfc}_2$.

Dans la suite nous utilisons l'abréviation "dfc" pour "développement en fraction continue".

Remarque 2.4 L'ensemble $\mathbf{Dfc}_1$ peut être compris comme l'ensemble des "dfc de nombres réels, rationnels ou irrationnels", à condition de garder pour chaque rationnel un seul dfc (on a choisi le plus court). Notez que constructivement, un nombre réel n'est pas "ou bien rationnel ou bien irrationnel". Notez aussi que $\mathbf{Dfc}_1$ n'est pas non plus, constructivement, exactement la réunion disjointe de **Dfc** et de **Q**, puisqu'on peut constater qu'un élément de $\mathbf{Dfc}_1$ représente un rationnel, mais on ne peut pas constater qu'il représente un irrationnel. Ainsi, dans $\mathbf{Dfc}_1$, les rationnels et les irrationnels sont mélangés jusqu'à un certain point, mais dans une moindre mesure que dans **R** (voir théorème 5.5 et proposition 5.6 pour plus de précisions).
De même, l'ensemble $\mathbf{Dfc}_2$ peut être compris comme l'ensemble des "dfc de nombres réels, rationnels ou irrationnels", à condition de garder pour chaque rationnel ses deux dfc.

On a vu que j_{fc} définit une application de **Dfc** vers **Irr**, on a alors la proposition suivante.

Proposition 2.5 *En tant qu'application de* **Dfc** *vers* **Irr**, j_{fc} *est une bijection.*

Preuve. Nous allons construire la bijection réciproque de j_{fc}.
Soit x un irrationnel. Il est connu en tant que réel et par sa mesure d'irrationalité, c.-à-d. il existe deux fonctions $\Phi : \mathbf{N} \to \mathbf{Q}$ et $\nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ telles que

$$\begin{cases} \forall n & |\ x - \Phi(n)\ | \leq 2^{-n} \\ \forall p, q & \left| x - \dfrac{p}{q} \right| > \dfrac{1}{\nu(q)} \end{cases}$$

On peut supposer la fonction ν croissante[8].
Posons $K(0) = 1, K(n+1) = \nu(K(n))$, et $\omega(n) = K(n)(K(n) + K(n+1))$.

[8] Il suffit de remplaçer la fonction ν par la fonction ν_1 définie par : $\nu_1(n) := \sup\{\nu(p); 0 \leq p \leq n\}$.

En raisonnant par récurrence sur n, nous démontrons à l'aide du lemme 2.1 que pour tout entier $n \in \mathbf{N}$ $q_n \leq K(n)$, et

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{1}{\omega(n)} \geq \mid x - \Phi(\omega(n)) \mid .$$

Par suite $\Phi(\omega(n))$ doit être compris entre p_n/q_n et p_{n+1}/q_{n+1}, ce qui prouve que x et $\Phi(\omega(n))$ ont les mêmes quotients partiels jusqu'à n.
On pose $a_0 = \mathrm{Ent}(\Phi(\omega(0)))$.
Supposons avoir défini $a_0, a_1, \ldots, a_n$. On considère la fonction homographique :

$$L_n(z) := [a_0; a_1, \ldots, a_n, z] = \frac{p_n z + p_{n-1}}{q_n z + q_{n-1}}.$$

z est irrationnel si et seulement si $L_n(z)$ est irrationnel. On appelle H_n la bijection réciproque de L_n.

$$H_n(y) = -\frac{q_{n-1}y - p_{n-1}}{q_n y - p_n}$$

z est irrationnel si et seulement si $H_n(z)$ est irrationnel. On pose alors $a_{n+1} := \mathrm{Ent}(H_n(\Phi(\omega(n))))$. x et $\Phi(\omega(n))$ ont les mêmes quotients partiels jusqu'à n. Nous venons de définir une application ψ de **Irr** vers **Dfc**. Il nous reste à prouver que c'est la bijection réciproque de j_{fc}.
Montrons que $\psi(j_{\mathrm{fc}}(a)) = a$ pour tout $a \in \mathbf{Dfc}$.
Soit $a = (a_n) \in \mathbf{Dfc}$. Par définition $j_{\mathrm{fc}}(a) = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$ avec $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$.
Or, $\Phi(\omega(n))$ et p_n/q_n ont les mêmes quotients partiels jusqu'à n, d'où

$$\psi(j_{\mathrm{fc}}(a)) = (\mathrm{Ent}(\Phi(\omega(0))); \mathrm{Ent}(H_0(\Phi(\omega(0)))), \ldots, \mathrm{Ent}(H_n(\Phi(\omega(n)))), \ldots)$$

$$= (a_0; a_1, \ldots, a_{n+1}, \ldots) = a.$$

Inversement, montrons que pour tout $x \in \mathbf{Irr}$ $\quad j_{\mathrm{fc}}(\psi(x)) = x$.
Soit $x \in \mathbf{Irr}$. Puisque x et $\Phi(\omega(n))$ ont les mêmes quotients partiels jusqu'à n, on a :

$$\mathrm{Ent}(x) = \mathrm{Ent}(\Phi(\omega(0))), \ldots, \mathrm{Ent} H_n(x) = \mathrm{Ent}(H_n(\Phi(\omega(n)))).$$

Par suite,

$$j_{\mathrm{fc}}(\psi(x)) = \lim_{n\to\infty} [\mathrm{Ent}(\Phi(\omega(0))); \ldots, \mathrm{Ent}(H_n(\Phi(\omega(n))))]$$
$$= \lim_{n\to\infty} [\mathrm{Ent}(x); \ldots, \mathrm{Ent} H_n(x)] = x.$$

∎

Désormais, lorsque cela ne crée pas de confusion, nous identifierons les éléments de **Irr** et de **Dfc** (ce qui identifie $j_{\mathrm{fc}} : \mathbf{Dfc} \to \mathbf{R}$ et $j_1 : \mathbf{Irr} \to \mathbf{R}$).

Si $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ et $p_n/q_n = [a_0; a_1, \ldots, a_n]$, l'entier a_n s'appelle le n*-ème quotient partiel* et la fraction p_n/q_n le n*-ème convergent* du nombre irrationnel x. Ces définitions s'étendent aux nombres rationnels dont le dfc admet au moins $n+1$ termes.
Si y est compris entre $(p_n + p_{n-1})/(q_n + q_{n-1})$ et p_n/q_n alors x et y ont le même dfc jusqu'à l'ordre n, et donc les mêmes convergents jusqu'à p_n/q_n.
Nous notons parfois le n-ème convergent p_n/q_n de x par $\widetilde{x}_n = p_n^x/q_n^x$.

3 Six distances naturelles sur l'ensemble des irrationnels, premières remarques

Dans [13] Mark Mandelkern a étudié l'ensemble **Irr** muni des deux distances d_1 et d_2 définies, pour tous $x, y \in \mathbf{Irr}$, par :
— $\mathrm{d}_1(x, y) = \mid x - y \mid$

— $\mathrm{d}_2(x,y) = |\ x-y\ | + \sum_{k=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{2^k}, \left|\frac{1}{|\ x-q_k\ |} - \frac{1}{|\ y-q_k\ |}\right|\right)$ avec $\mathbf{Q} = \{q_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Mandelkern a montré que ces deux distances ne sont pas métriquement équivalentes sur l'espace **Irr** et que ce dernier muni de la distance d_2 est complet. Il a également caractérisé et construit les sous-ensembles compacts et localement compacts de **Irr** pour ces deux distances.

La distance d_2 est métriquement équivalente aux distances naturelles sur **Irr** en tant qu'intersection dénombrable d'ouverts $\mathbf{R} - \{q_k\}$. Dans cette section, nous allons définir sur **Irr** six distances noteés $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$, d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$. La distance d est métriquement équivalente à la distance d_2 ci-dessus. Nous donnerons tout de suite quelques résultats élémentaires et significatifs, notamment :

— d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ sont métriquement équivalentes sur **Irr**

— $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ est complet pour $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}$ (ces deux distances s'étendent naturellement à $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$)

— **Dfc** et $\mathbf{Dfc}_1$ sont fermés dans $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ pour $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}$ (donc ce sont des espaces métriques complets pour ces distances).

— $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ sont métriquement équivalentes sur **Irr**.

Pour $x \in \mathbf{Z}$, $\lg(x)$ désigne la longueur de l'écriture en binaire de $|\ x\ |$.

Définition 3.1 Soient $x = [x_0; x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ et $y = [y_0; y_1, \ldots, y_n, \ldots]$ deux éléments de l'ensemble $\mathbf{Irr} \simeq \mathbf{Dfc}$, nous définissons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}(x,y) = {} & |x_0 - y_0| + \frac{1}{2^\ell} \text{ si } x_1 = y_1, \cdots, x_\ell = y_\ell, \text{ et } x_{\ell+1} \neq y_{\ell+1} \\
& |x_0 - y_0| \text{ si } x - x_0 = y - y_0 \\
\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}(x,y) = {} & |x_0 - y_0| + \frac{1}{2^s} \text{ si } x_1 = y_1, \cdots, x_\ell = y_\ell, x_{\ell+1} \neq y_{\ell+1} \text{ et } s = \sum_{k=1}^{\ell} \lg(x_k) \\
& |x_0 - y_0| \text{ si } x - x_0 = y - y_0 \\
\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(x,y) = {} & |x_0 - y_0| + \frac{1}{2^{s'}} \text{ si } s' = s + \min(\lg(x_{\ell+1}), \lg(y_{\ell+1})) \\
& |x_0 - y_0| \text{ si } x - x_0 = y - y_0 \\
\mathrm{d}(x,y) = {} & |\ x-y\ | + \sum_{\substack{(p,q)=1 \\ q>0}} \min\left(\frac{1}{4^{|p|+q}}, \left|\frac{1}{|\ x - \frac{p}{q}\ |} - \frac{1}{|\ y - \frac{p}{q}\ |}\right|\right) \\
\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}(x,y) = {} & \max\left(|\ x-y\ |, \sup_{\substack{(p,q)=1 \\ q>0}} \min\left(\frac{1}{q}, \left|\frac{1}{|\ x - \frac{p}{q}\ |} - \frac{1}{|\ y - \frac{p}{q}\ |}\right|\right)\right) \\
\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(x,y) = {} & \frac{1}{q} \text{ si } q \text{ est le plus petit dénominateur d'un rationnel intercalé entre } x \text{ et } y
\end{aligned}$$

Remarques 3.2

1) La définition de $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}$ n'est pas constructive au sens strict, mais elle peut être rendue constructive de la manière suivante. Tout d'abord, on définit pour $n \geq 1$ l'entier $\ell_n(x,y)$ par les conditions suivantes :

— $0 \leq \ell_n(x,y) \leq n$

— pour $0 < i \leq \ell_n(x,y)$, on a $x_i = y_i$

— si $\ell_n(x,y) < n$, alors $x_{1+\ell_n(x,y)} \neq y_{1+\ell_n(x,y)}$.

Ensuite, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}(x,y) := |x_0 - y_0| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\ell_n(x,y)}}$.

2) Des remarques analogues s'appliquent pour les définitions de $\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$. On notera en particulier que $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(x,y)$ est bien défini constructivement en tant que nombre réel, mais pas en tant que nombre rationnel.

3) On vérifie sans difficulté que chacune des fonctions définies en 3.1 est une distance sur **Irr**.

4) Dans la définition de $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$, si $x_1 \neq y_1$ on a $\mathrm{d}_{\mathrm{fc0}}(x,y) = \mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}(x,y) = |x_0 - y_0| + 1$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(x,y) = |x_0 - y_0| + \frac{1}{2^{s'}}$ avec $s' = \min(\lg(x_1), \lg(y_1))$. Cette différence de comportement illustre sur un cas simple le divorce définitf entre $\mathrm{d}_{\mathrm{fc1}}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$.

4) Les définitions de $\mathrm{d_{fc0}}$, $\mathrm{d_{fc1}}$ s'étendent de manière naturelle à $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ et $\mathbf{Dfc}_1$.
5) La définition de $\mathrm{d_{fc2}}$ s'étend de la manière naturelle suivante à $\mathbf{Dfc}_2$: pour des éléments de $\mathbf{Dfc}_2$ on applique la définition en convenant que $\lg(x_{\ell+1}) = \infty$ si $x_{\ell+1} = 0$. (Pour plus de précisions voir section 6).

Nous établissons maintenant un certain nombre de résultats élémentaires.

Proposition 3.3 *Les deux distances* d *et* $\mathrm{d_{mir}}$ *sont métriquement équivalentes sur* $\mathbf{Irr}$.

Ce sont en effet deux distances naturelles sur $\mathbf{Irr}$, c.-à-d. qui correspondent à la définition de $\mathbf{Irr}$ comme intersection dénombrable des ouverts $\mathbf{R} - \{r\}$ (où r parcourt $\mathbf{Q}$).

Remarque 3.4 La distance $\mathrm{d_{mir}}$ n'est pas exactement une distance naturelle du type $\rho'_{1,v'}$ (cf. section 1 page 7) sur $\mathbf{Irr}$ en tant qu'intersection dénombrable d'ouverts. Le problème est que $1/q$ ne tend pas vers 0 lorsque $n = (p, q)$ "tend vers l'infini". Cependant, on peut la considérer comme telle car pour chaque $q > 0$ le nombre de couples (p, q) intervenant réellement dans le sup dans la définition de $\mathrm{d_{mir}}$ est fini.

Nous commençons par un lemme qui permet de bien appréhender la signification des distances $\mathrm{d_{fc1}}$ et $\mathrm{d_{fc2}}$.

Lemme 3.5
a) Soit $p_\ell/q_\ell = [x_0; x_1, \ldots, x_\ell]$ *avec* $x_0 \in \mathbf{Z}$ *et* $x_1, \ldots, x_\ell$ *entiers* > 0, *et* $s = \lg(x_1) + \cdots + \lg(x_\ell)$. *Alors* $q_\ell \leq 2^s \leq (2q_\ell)^2$.
b) Soient x *et* y *deux éléments distincts de* $\mathbf{Irr}$ *avec* $\mathrm{Ent}(x) = \mathrm{Ent}(y)$. *Soit* ℓ *le premier indice* i *tel que les dfc de* x *et de* y *sont distincts au rang* $i + 1$, *et* q_ℓ *le dénominateur du* ℓ*-ème convergent commun de* x *et de* y.
Alors
$$\frac{1}{(2q_\ell)^2} \leq \mathrm{d_{fc1}}(x, y) \leq \frac{1}{q_\ell}.$$
c) De même si on note $q_{\ell+1}$ *le plus petit des deux dénominateurs* $q^x_{\ell+1}$ *et* $q^y_{\ell+1}$ *des* $\ell+1$*-èmes convergents de* x *et* y, *on a :*
$$\frac{1}{(2q_{\ell+1})^2} \leq \mathrm{d_{fc2}}(x, y) \leq \frac{1}{q_{\ell+1}}.$$

Preuve. Les affirmations b) et c) disent la même chose que a). Nous montrons a).
D'une part, nous avons
$$q_\ell = x_\ell q_{\ell-1} + q_{\ell-2} \leq (1 + x_\ell) q_{\ell-1} \leq \prod_{i=1}^{\ell} (1 + x_i).$$
Or, $1 + a \leq 2^{\lg(a)}$, d'où $q_\ell \leq 2^{\sum_{i=1}^{\ell} \lg(x_i)}$.
D'autre part, si ℓ est pair, nous avons
$$q_\ell = x_\ell q_{\ell-1} + q_{\ell-2} \geq (1 + x_\ell x_{\ell-1}) q_{\ell-2} \geq \prod_{i=1}^{\ell/2} (1 + x_{2i} x_{2i-1}) = 2^s.$$
Or, $1 + ab \geq 2^{1/2(\lg(a)+\lg(b))}$ pour tous entiers positifs a et b,
d'où $q_\ell \geq 2^{s/2}$. Par suite $q_\ell^2 \geq 2^s$.
Si ℓ est impair, c.-à-d. $\ell = 2k + 1$, nous avons
$$q_\ell \geq \prod_{i=1}^{k} (1 + x_{2i+1} x_{2i}) \cdot x_1 \geq 2^{\frac{1}{2} \sum_{i=2}^{\ell} \lg(x_i)} \cdot x_1.$$
Or, $x_1 \geq 2^{\frac{1}{2}\lg(x_1) - 1}$, d'où $q_\ell \geq 2^{s/2-1}$.
Par suite $(2q_\ell)^2 \geq 2^s$. ∎

On en déduit :

Proposition 3.6 *Les deux distances* $\mathrm{d_{fc2}}$ *et* $\mathrm{d_{cut}}$ *sont métriquement équivalentes sur* $\mathbf{Irr}$.

Preuve. Supposons par exemple que $q^x_\ell = q^y_\ell = q_\ell$, $q^x_{\ell-1} = q^y_{\ell-1} = q_{\ell-1}$, $q^x_{\ell+1} < q^y_{\ell+1}$. On a : $q^x_{\ell+1} = x_{\ell+1}q_\ell + q_{\ell-1}$ et $q^y_{\ell+1} = y_{\ell+1}q_\ell + q_{\ell-1}$ avec $x_{\ell+1} < y_{\ell+1}$.
Alors le rationnel $((1 + x_{\ell+1})p_\ell + p_{\ell-1}) \,/\, ((1 + x_{\ell+1})q_\ell + q_{\ell-1})$ est situé entre x et y. Et tout rationnel intercalé entre x et y aura son $(\ell + 1)$-ème convergent de la forme
$(ap_\ell + p_{\ell-1})/(aq_\ell + q_{\ell-1})$ avec $x_{\ell+1} \le a \le y_{\ell+1}$. Le résultat est donc clair. ∎

Proposition 3.7 *L'application* $j_1\ :\mathbf{Irr} \to \mathbf{R}$ *qui représente l'inclusion de* $\mathbf{Irr}$ *dans* $\mathbf{R}$ *est uniformément continue pour* $\mathrm{d_{fc0}}$, $\mathrm{d_{fc1}}$, $\mathrm{d_{fc2}}$, d, $\mathrm{d_{mir}}$ *et* $\mathrm{d_{cut}}$ *au départ et* $|\ |$ *à l'arrivée.*

Preuve. Pour les distances d et $\mathrm{d_{mir}}$ le résultat est immédiat.
Pour les autres distances, vue la proposition 3.6, et vu que $\mathrm{d_{fc2}} \le \mathrm{d_{fc1}} \le \mathrm{d_{fc0}}$, il suffit de montrer le résultat pour $\mathrm{d_{cut}}$.
Supposons $\mathrm{d_{cut}}(x, y) = \dfrac{1}{q}$, alors les rationnels de la forme $k/(q - 1)$ sont à l'extérieur de l'intervalle d'extrémités x et y. Par suite, $|\ x - y\ | \le \dfrac{1}{q-1}$. ∎

Remarque 3.8 Dans la proposition précédente, si on remplace la distance $\mathrm{d_{mir}}$ par la distance $\mathrm{d'_{mir}}$ définie par $\mathrm{d'_{mir}}(x, y) = \sup\limits_{\substack{(p,q)=1\\ q>0}} \min\left(\dfrac{1}{q}, \left|\dfrac{1}{|\ x - \frac{p}{q}\ |} - \dfrac{1}{|\ y - \frac{p}{q}\ |}\right|\right)$ l'application j_1 reste uniformément continue. Par contre, pour la distance d' définie par
$\mathrm{d}'(x, y) = \sum\limits_{\substack{(p,q)=1\\ q>0}} \min\left(\dfrac{1}{4^{|p|+q}}, \left|\dfrac{1}{|\ x - \frac{p}{q}\ |} - \dfrac{1}{|\ y - \frac{p}{q}\ |}\right|\right)$ l'application j_1 n'est pas uniformément continue car la suite $u_n = n + a$ (où a est un irrationnel) est une suite d'–Cauchy dans $\mathbf{Irr}$ mais n'est pas une suite $|\ |$–convergente dans $\mathbf{R}$.

Lemme 3.9 *L'espace métrique* $\mathbf{R_{cont}}$ *est complet pour les deux distances* $\mathrm{d_{fc0}}$ *et* $\mathrm{d_{fc1}}$. *Les deux distances définissent les mêmes suites convergentes. Une suite* $(x^{(n)})$ *dans* $\mathbf{R_{cont}}$ *converge (pour l'une de ces deux distances) si, et seulement si, pour tout* $k \in \mathbf{N}$, $(x^{(n)}_k)_{n\in\mathbf{N}}$ *est constante à partir d'un certain rang* N_k, *la limite de* $(x^{(n)})$ *dans* $\mathbf{R_{cont}}$ *est alors* $(x^{(N_k)}_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Preuve.
1. Pour la distance $\mathrm{d_{fc0}}$ c'est clair car c'est une distance correspondant à $\mathbf{R_{cont}}$ vu comme produit d'ensembles $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{N}$ munis de métriques discrètes.
2. Soit $(x^{(n)})$ une $\mathrm{d_{fc1}}$–suite de Cauchy dans $\mathbf{R_{cont}}$.
Supposons sans perte de généralité que $\mathrm{d_{fc1}}(x^{(m)}, x^{(n)}) \le 1/2^{\min(m,n)}$.
Pour tous $m \ge n \ge 1$, on a donc : $x^{(m)}_0 = x^{(n)}_0$ et $x^{(m)}_1 = x^{(n)}_1$.
On pose $y_0 = x^{(1)}_0$ et $y_1 = x^{(1)}_1$.
On définit alors pour $n \ge 2$ les entiers $\alpha(n)$ et y_n par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} \alpha(n+1) := \lg(y_1) + \cdots + \lg(y_n) + 1 \\ y_{n+1} := x^{\alpha(n+1)}_{n+1} \end{cases}$$

On prouve alors facilement par récurrence que pout tout $n \ge 2$ on a :

$$\forall m \ge \alpha(n) \quad x^{(m)}_0 = y_0,\ \ldots,\ x^{(m)}_n = y_n.$$

Et donc $y = [y_0; y_1, \ldots, y_n, \ldots]$ est la limite de la suite $(x^{(n)})$ pour les distances $\mathrm{d_{fc0}}$ et $\mathrm{d_{fc1}}$. ∎

Lemme 3.10 *Soit k un entier. L'application π_k définie de $(\mathbf{R}_{\text{cont}}, \mathrm{d}_{\text{fc}0})$ vers $\mathbf{Z}$ qui à $x = (x_n)$ associe x_k est uniformément continue. La même application π_k, de $(\mathbf{R}_{\text{cont}}, \mathrm{d}_{\text{fc}1})$ vers $\mathbf{Z}$, est séquentiellement continue.*

Preuve. Pour la distance $\mathrm{d}_{\text{fc}0}$ le résultat est un cas particulier du fait que les "fonctions coordonnées" définies sur un produit sont uniformément continues.
Pour la distance $\mathrm{d}_{\text{fc}1}$, c'est une conséquence du lemme 3.9. ■

Lemme 3.11 **Dfc** *et* $\mathbf{Dfc}_1$ *sont fermés dans* $\mathbf{R}_{\text{cont}}$ *pour chacune des distances* $\mathrm{d}_{\text{fc}0}$ *et* $\mathrm{d}_{\text{fc}1}$.

Preuve. Selon leur définition, et en appliquant le lemme précédent, ces parties de $\mathbf{R}_{\text{cont}}$ sont en effet des intersections d'images réciproques de fermés par des applications uniformément ou séquentiellement continues. Par exemple la condition $x_k = 0 \Rightarrow x_{k+1} = 0$ signifie $(\pi_k(x), \pi_{k+1}(x)) \in \{(0,0)\} \cup ((\mathbf{N} \setminus \{0\}) \times \mathbf{N})$ qui est une partie fermée de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. ■

4 L'ensemble des irrationnels comme espace métrique complet

Dans cette section nous montrons que les distances $\mathrm{d}_{\text{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\text{fc}1}$, d et d_{mir} définissent sur l'ensemble **Irr** une stucture d'espace métrique complet. Nous donnons une caractérisation des suites convergentes de **Irr** pour ces quatre distances. Nous étudions ensuite les compacts de **Irr** pour chacune de ces distances. Enfin, nous montrons qu'elles définissent la même topologie au sens constructif sur **Irr**.

4.1 Problèmes liés à la complétude de Irr

Nous avons les deux théorèmes suivants qui nous disent quelles distances (pour les six distances introduites) rendent **Irr** complet.

Théorème 4.1 *L'espace* **Irr** *est complet pour les distances* $\mathrm{d}_{\text{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\text{fc}1}$, d, *et* d_{mir}.

Preuve. Pour $\mathrm{d}_{\text{fc}0}$ et $\mathrm{d}_{\text{fc}1}$ cela résulte immédiatement des lemmes 3.9 et 3.11.
Par ailleurs, les distances d et d_{mir} sont des distances naturelles sur **Irr** vu comme intersection d'une famille dénombrable de complémentaires de fermés situés dans **R** :

$$\mathbf{Irr} = \bigcap_{\substack{p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N}^* \\ (p,q)=1}} U_{p,q} \quad \text{avec} \quad U_{p,q} = \mathbf{R} - \{p/q\}$$

et donc **Irr** est complet pour ces distances (voir section 1). ■

Théorème 4.2 *L'espace* **Irr** *n'est pas complet pour les distances* $\mathrm{d}_{\text{fc}2}$ *et* d_{cut}.

Preuve. Les distances $\mathrm{d}_{\text{fc}2}$ et d_{cut} sont métriquement équivalentes. On fait la preuve pour $\mathrm{d}_{\text{fc}2}$.
Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_n = [0, 2^n, 1, 1, 1, \ldots]$.
$(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\text{fc}2})$ puisque $\mathrm{d}_{\text{fc}2}(u_n, u_{n+p}) = 2^{-n}$.
Cependant, cette suite n'est pas convergente : s'il y avait une limite dans **Irr**, elle serait aussi une limite dans **R** pour la distance euclidienne (voir proposition 3.7), or cette limite est égale à 0 qui n'appartient pas à **Irr**. ■

Dans la section 6 nous étudierons le séparé-complété de **Irr** pour les distances métriquement équivalentes $\mathrm{d}_{\text{fc}2}$ et d_{cut}.

4.2 Caractérisation des suites convergentes de Irr

Nous avons le théorème suivant qui caractérise les suites convergentes pour les quatre distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$.

Théorème 4.3 *Soit* (x_n) *une suite dans* **Irr** *et* $z \in$ **Irr**. *Les propriétés suivantes sont équivalentes (pour n'importe laquelle des quatre distances* $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, d *et* $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$*)*

a) la suite (x_n) *converge vers* z *dans* **Irr**

b) la suite $(j_1(x_n))$ $|\;|$*–converge vers* $j_1(z)$ *dans* **R**

Preuve. Pour les deux distances d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ c'est le théorème 1.10 (1).
D'autre part, d'après le lemme 3.9 $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$ ont les mêmes suites convergentes, il suffit alors de faire la preuve pour la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$.
L'application $j_1 \; : \; (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}) \rightarrow (\mathbf{R}, |\;|)$ est uniformément continue, donc une suite convergente pour $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ converge aussi pour la distance $|\;|$.
Inversement, soit $(x^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ une suite dans $(\mathbf{Irr}, |\;|)$ qui converge vers $z \in \mathbf{Irr}$. Soit (z_i) le dfc de z. Nous allons démontrer la continuité au point z :

$$\forall k \in \mathbf{N} \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in \mathbf{Irr} \qquad (|\, z - x \,| < \delta \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, z) \leq 2^{-k}).$$

Ceci impliquera que la suite $(x^{(m)})$ $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$–converge vers z. Soit p_k/q_k le k-ème convergent de z. Soit $k \geq 1$. On sait que x a le même dfc que z jusqu'à l'ordre k, c.-à-d. que $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, z) \leq 2^{-k}$, dès que x est sur l'intervalle d'extrémités p_k/q_k et $(p_k + p_{k-1})/(q_k + q_{k-1})$. On peut donc prendre $\delta \;:=\; \min(|\, z - p_k/q_k \,|, |\, z - (p_k + p_{k-1})/(q_k + q_{k-1}) \,|)$. ∎

La proposition ci-après est un corollaire du théorème précédent.

Proposition 4.4 *Pour une partie* X *de* **Irr** *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) X *est fermé pour l'une des cinq distances* $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, d, $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ *ou* $|\;|$

b) X *est fermé pour toutes les distances* $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, d, $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ *et* $|\;|$.

Remarque 4.5 En mathématiques classiques, des métriques qui définissent les mêmes suites convergentes sont topologiquement équivalentes. En mathématiques constructives, ceci ne semble valable que pour des métriques complètes. En outre si c'est le cas le résultat doit être redémontré à chaque fois, même s'il ne fait guère de doute. En fait, il semble qu'on n'a aucun exemple constructif pour deux distances qui feraient d'un même ensemble un espace métrique complet et qui ne seraient pas topologiquement équivalentes (par exemple, on ne peut pas définir constructivement la topologie discrète sur **R**). Moralement, tout ensemble convenable arrive sur la scène constructive muni d'une métrique complète, avec une topologie parfaitement définie. La suite de la section consiste donc à vérifier des équivalences topologiques de ce type, en vérifiant que certains types de majorations ont bien lieu de manière complètement explicites.

4.3 Problèmes liés à la compacité dans Irr

L'étude des compacts de **Irr** pour les quatre distances qui le rendent complet est intéressante en soi. C'est également une étape indispensable pour montrer qu'elles définissent la même topologie au sens constructif, c.-à-d. que les fonctions identité correspondantes sont uniformément continues près de tout compact.

Le premier théorème donne une condition nécessaire concernant les compacts pour ces quatre distances, explicitée au moyen de la version **Dfc** de **Irr**. Vu l'équivalence métrique de d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ nous ne traitons que la distance d dans les preuves.

Introduisons les notations suivantes.

Notations 4.6

– Nous notons Sc l'ensemble des suites croissantes d'entiers naturels
– Pour $a = (a_n) \in Sc$ nous notons K_a ou $K_{(a_n)}$ la partie de **Dfc** définie par

$$K_a = \{(z_n)/ \mid z_0 \mid \leq a_0 \text{ et } z_i \leq a_i \text{ pour tout } \ i \geq 1\}$$

– Pour $a \in Sc$ et $\ell \in \mathbf{N}$ nous notons $U_{a|\ell}$ ou $U_{(a_0,\ldots,a_\ell)}$ la partie de **Dfc** définie par

$$U_{a|\ell} = \{(z_n)/ \mid z_0 \mid \leq a_0 \text{ et } z_1 \leq a_1, \ldots, z_\ell \leq a_\ell\}$$

Proposition 4.7 *Pour la distance* $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$*, si* $a \in Sc$ *et* $\ell \in \mathbf{N}$ *alors* K_a *est un compact et* $U_{a|\ell}$ *est un ouvert.*

Preuve. K_a est compact pour $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ dans $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ (donc dans **Irr**) parce que, pour la métrique produit, un produit de compacts non vides est compact.
L'ensemble $U_{a|\ell}$ est un ouvert car c'est l'image réciproque d'un ouvert par la projection du produit (infini) $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ sur le produit fini correspondant aux $\ell + 1$ premières coordonnées. ∎

Théorème 4.8 *Tout compact* K *de* $(\mathbf{Irr}, \delta)$ *avec* $\delta \in \{\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}, \mathrm{d}, \mathrm{d}_{\mathrm{mir}}\}$ *est contenu dans un ensemble de la forme* $K_a = \{(z_n)/ \mid z_0 \mid \leq a_0 \text{ et } z_i \leq a_i \text{ pour tout } i \geq 1\}$ *où* $a = (a_n) \in Sc$*.*

Preuve.
i) Dans le cas de la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ puisque les projections (ou fonctions coordonnées) sont uniformément continues, l'image de K est précompacte dans chaque espace de coordonnées.
ii) Soit K un compact de $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1})$. Pour $\varepsilon = 1$, soit $c_1^{(0)}, c_2^{(0)}, \ldots, c_{n_0}^{(0)}$ une ε–approximation de K, cela donne :

$$\forall x \in K \quad \exists i \ \ 1 \leq i \leq n_0 \text{ avec } \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, c_i^{(0)}) < 1.$$

D'où, pour tout $x = [x_0; x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ dans K, il existe un indice i tel que x et $c_i^{(0)}$ ont le même premier quotient partiel $c_{i,0}^{(0)}$.
D'où, en posant $a_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq n_0} \left\{ \left| c_{i,0}^{(0)} \right| \right\}$, nous avons $\mid x_0 \mid \leq a_0$.
Pour $\varepsilon = 4^{-1}$, soit $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, \ldots, c_{n_1}^{(1)}$ une ε–approximation de K, on a donc :

$$\forall x \in K \quad \exists i \ \ 1 \leq i \leq n_1 \text{ avec } \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, c_i^{(1)}) < 4^{-1}.$$

Or, d'après le lemme 3.5, si ℓ est le premier indice i tel que les dfc de x et de $c_i^{(1)}$ sont distincts au rang $i + 1$, et q_ℓ le dénominateur du ℓ-ème convergent commun de x et de $c_i^{(1)}$, alors

$$\frac{1}{(2q_\ell)^2} \leq \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, c_i^{(1)}).$$

D'où, $q_\ell > 1$, c'est à dire $\ell \geq 1$ et par suite x et $c_i^{(1)}$ ont le même deuxième quotient partiel $c_{i,1}^{(1)}$. Par conséquent, en posant $a_1 = a_0 + \max\limits_{1 \leq i \leq n_1} \left\{ \left| c_{i,1}^{(1)} \right| \right\}$, nous avons $x_1 \leq a_1$.
Supposons qu'il existe des entiers $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k$ tels que $\mid x_0 \mid \leq a_0$ et $x_i \leq a_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$, ceci pour tout $x \in K$.
Pour $\varepsilon = (2q_k^a)^{-2}$, où q_k^a est le dénominateur de $[a_0; a_1, \ldots, a_k]$, soit $c_1^{(k+1)}, c_2^{(k+1)}, \ldots, c_{n_{k+1}}^{(k+1)}$ une ε–approximation de K. On a donc

$$\forall x \in K \quad \exists i \ \ 1 \leq i \leq n_{k+1} \text{ avec } \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, c_i^{(k+1)}) < (2q_k^a)^{-2}.$$

Alors, d'après le lemme 3.5, on a :

$$\frac{1}{(2q_\ell)^2} \leq \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, c_i^{(k+1)}) < \frac{1}{(2q_k^a)^2}.$$

D'où, $q_\ell > q_k$ et alors $\ell \geq k+1$.
Par suite, x et $c_i^{(k+1)}$ ont le même $(k+1)$-ème quotient partiel $c_{i,1}^{(1)}$.
Par conséquent, en posant $a_{k+1} = a_k + \max\limits_{1 \leq i \leq n_{k+1}} \left\{ \left| c_{i,k+1}^{(k+1)} \right| \right\}$, nous avons $x_{k+1} \leq a_{k+1}$.
iii) Soit K un compact de $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d})$.
Démontrons d'abord qu'il existe a_0 tel que $\mid x_0 \mid \leq a_0$ pour tout $x = [x_0; x_1, \ldots, x_n, \ldots]$ dans K.
Pour $\varepsilon = 1$, soit $d_1^{(0)}, \ldots, d_{m_0}^{(0)}$ une ε–approximation de K, donc $\mathrm{d}(x, d_i^{(0)}) < 1$ pour au moins un indice i.
D'où, $\left| x - d_i^{(0)} \right| < 1$ et x et $d_i^{(0)}$ ont alors la même partie entière $d_{i,0}^{(0)}$ à 1 près.
Par suite, en prenant $a_0 = \max\limits_{1 \leq i \leq m_0} \left\{ \left| d_{i,0}^{(0)} \right| + 1 \right\}$ on a $\mid x_0 \mid \leq a_0$.
Pour $\varepsilon = 4^{-(1+a_0)}$, soit $d_1^{(1)}, \ldots, d_{m_1}^{(1)}$ une ε–approximation de K, cela donne $\mathrm{d}(x, d_i^{(1)}) < 4^{-(1+a_0)}$ pour au moins un indice i.
D'où,

$$\left| \frac{1}{|x - x_0|} - \frac{1}{\left| d_i^{(1)} - x_0 \right|} \right| < 4^{-(1+a_0)},$$

ainsi,

$$\frac{1}{|x - x_0|} < 1 + \frac{1}{\left| d_i^{(1)} - x_0 \right|}.$$

Par suite, en prenant $a_1 = \max \left(a_0, \mathrm{Ent} \left(1 + \max\limits_{\substack{|x_0| \leq a_0 \\ 1 \leq i \leq m_1}} \left\{ \frac{1}{\left| d_i^{(1)} - x_0 \right|} \right\} \right) \right)$ on a $x_1 < a_1$.
Supposons qu'il existe des entiers $a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_k$ tels que $\mid x_0 \mid \leq a_0$ et $x_i < a_i$ pour tout $1 \leq i \leq k$, ceci pour tout $x \in K$.
Soient $\dfrac{p_k^a}{q_k^a} = [a_0; a_1, \ldots, a_k]$ et $\varepsilon = 4^{-(p_k^a + q_k^a)}$. Soit $d_1^{(k+1)}, \ldots, d_{m_{k+1}}^{(k+1)}$ une ε–approximation de K, donc

$$\left| \frac{1}{|x - \widetilde{x}_k|} - \frac{1}{|d_i^{(k+1)} - \widetilde{x}_k|} \right| < 4^{-(p_k^a + q_k^a)},$$

pour au moins un indice i.
Ainsi,

$$\frac{1}{|x - \widetilde{x}_k|} < 1 + \frac{1}{|d_i^{(k+1)} - \widetilde{x}_k|}.$$

Par conséquent, en prenant $a_{k+1} = \max \left(a_k, \mathrm{Ent} \left(1 + \max\limits_{\substack{|x_0| \leq a_0 \\ x_1 < a_1, \ldots, x_k < a_k \\ 1 \leq i \leq m_{k+1}}} \left\{ \frac{1}{|d_i^{(k+1)} - \widetilde{x}_k|} \right\} \right) \right)$ nous obtenons $x_{k+1} < a_{k+1}$.

■

Nous donnons ci-après deux lemmes qui vont nous servir dans la sous-section 4.4.

Lemme 4.9 *Soit $a = (a_n) \in Sc$ et p/q un rationnel. Alors il existe un entier positif ℓ et un réel positif ε tels que* $[\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon] \cap U_{a|\ell} = \emptyset$.

Preuve. Considérons un élément $a = (a_n)$ de Sc, un rationnel p/q, et un élément x de l'ensemble K_a.
Supposons, par exemple, $\dfrac{p}{q} > x$.
Nous avons $\dfrac{p}{q} > \widetilde{x}_k > x$ avec $k = 2\lg(q) + 1$ car $q_k^x \geq 2^{\frac{k-1}{2}} > q$.

Par suite,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| > \left| \widetilde{x}_k - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q q_k^x} > \frac{1}{{q_k^x}^2}.$$

Or, $q_k^x \leq \prod_{i=1}^{k} (x_i + 1) \leq (a_k + 1)^k$, d'où $\left| x - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{(a_k + 1)^{2k}}$.

Donc, en prenant $\ell = k$ et $\varepsilon = \frac{1}{(a_k + 1)^{2k}}$, nous avons $[\frac{p}{q} - \varepsilon, \frac{p}{q} + \varepsilon] \cap U_{a|\ell} = \emptyset$. ∎

Lemme 4.10 *Soient $a = (a_n)$ un élément de Sc et ℓ un entier positif.*
Alors il existe un réel positif ε ne dépendant que de a et ℓ tel que : si x est un élément de $U_{a|\ell+2}$ et y un irrationnel, $\mathrm{d_{fc0}}(x, y) \geq 2^{-\ell} \quad \Rightarrow \quad |\, x - y \,| > \varepsilon$.

Preuve. Soient $x \in U_{a|\ell+2}$ et $y \in \mathbf{Irr}$ tels que $\mathrm{d_{fc0}}(x, y) \geq 2^{-\ell}$.
Supposons, par exemple, que $\mathrm{d_{fc0}}(x, y) = 2^{-\ell}$, et soient $\widetilde{x}_\ell, \widetilde{x}_{\ell+1}, \widetilde{x}_{\ell+2}$ et $\widetilde{x}_{\ell+3}$ respectivement les convergents de rang $\ell, \ell+1, \ell+2$ et $\ell+3$ de x.
Alors x appartient à l'intervalle $(\widetilde{x}_{\ell+2}, \widetilde{x}_{\ell+3})$, et puisque $\mathrm{d_{fc0}}(x, y) = 2^{-\ell}$ y ne peut pas être dans l'intervalle $(\widetilde{x}_\ell, \widetilde{x}_{\ell+1})$, d'où,

$$|\, x - y \,| \geq \max(|\, \widetilde{x}_{\ell+2} - \widetilde{x}_\ell \,|, |\, \widetilde{x}_{\ell+1} - \widetilde{x}_{\ell+3} \,|) \geq \frac{1}{q_{\ell+1}(q_{\ell+1} + q_{\ell+2})} \geq \frac{1}{2 q_{\ell+2}^2}.$$

Or,

$$q_{\ell+2} \leq \prod_{i=1}^{\ell+2} (x_i + 1) \leq \prod_{i=1}^{\ell+2} (a_i + 1) \leq (a_{\ell+2} + 1)^{\ell+2},$$

d'où

$$|\, x - y \,| \geq \frac{1}{2(a_{\ell+2} + 1)^{2(\ell+2)}}.$$

Par conséquent, il suffit de prendre $\varepsilon = 1/2(a_{\ell+2} + 1)^{2(\ell+2)}$. ∎

La proposition ci-après découle immédiatement du lemme 4.10.

Proposition 4.11 *L'application identité* $(\mathbf{Irr}, |\ |) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d_{fc0}})$ *est uniformément continue près de K_a (et donc près de tout compact de* $\mathbf{Irr}$ *pour* d*).*

Remarque 4.12 D'après le théorème 1.11, les compacts pour $|\ |$ contenus dans $\mathbf{Irr}$ sont exactement les d–compacts de $\mathbf{Irr}$. Vu la proposition précédente et la proposition 3.7, l'identité $(\mathbf{Irr}, |\ |) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d})$ ainsi que l'identité réciproque sont uniformément continues près de tout compact. Pour autant cette identité est-elle un homéomorphisme au sens de D. Bridges (cf. section 1 10) ? Il faudrait pour cela s'assurer que toute image compacte dans $(\mathbf{Irr}, |\ |)$ est contenue dans un ensemble K_a. Et ceci ne semble pas pouvoir être prouvé constructivement. Nous sommes ici dans une situation analogue à celle de l'application $f : x \mapsto 1/x \ : (]0, 1], |\ |) \to ([1, \infty[, |\ |)$ qui, contructivement, est uniformément continue près de tout compact, mais ne peut pas être prouvée uniformément continue près de toute image compacte[9]. En fait, il semble que la continuité à la Bridges interdit la possibilité de construire un homéomorphisme entre un espace métrique complet et un espace métrique non complet.

[9] On peut en effet construire une fonction réelle récursive uniformément continue de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$ qui admet 0 pour borne inférieure mais qui ne peut atteindre cette borne qu'en des réels non récursifs. Dans tout système formel constructif qui laisse ouverte la possibilité d'un univers mathématique purement récursif, il est certainement impossible de prouver qu'une telle fonction atteint son minimum, et il est donc impossible de réfuter que $]0, 1]$ soit l'image d'un compact.

4.4 Comparaison des quatre distances qui font de Irr un espace complet

Dans cette partie nous montrerons (constructivement) que les quatre distances qui rendent **Irr** complet définissent sur **Irr** la même topologie au sens constructif, c.-à-d. que les identités correspondantes sont uniformément continues près de tout compact. Nous avons déja comparé les distances d et $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ dans la proposition 3.3, nous comparerons maintenant les distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$ et d.

Proposition 4.13

a) L'identité $id_1 : (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1})$ *est uniformément continue.*

b) Son inverse id_1^{-1}*, par contre, ne l'est pas. Mais elle est uniformément continue près de tout compact.*

Preuve.
a) Immédiate, car $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, y) \le \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, y)$ pour tous x et y éléments de **Irr**.

b) Soient $x = [0, 1, 1, \ldots, 1, n, 1, \ldots]$ et $y = [0, 1, 1, \ldots, 1, n, 2, \ldots]$ où n est au rang ℓ.
Nous avons $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, y) = \dfrac{1}{2^{\lg(n)+\ell-1}}$ qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, par contre $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, y) = 2^{-\ell}$ reste constant. Ce qui traduit bien la non continuité uniforme de id_1^{-1}.
Soit K un compact de $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1})$. D'après le théorème 4.8, il existe un élément $a = (a_n)$ de Sc tel que K soit inclus dans l'ensemble $K_a = \{(z_n)/ \mid z_0 \mid \le a_0 \text{ et } z_i \le a_i, \text{ pour tout } i \ge 1\}$.
Il suffit alors de montrer la continuité uniforme près de K_a : or si $x \in K_a$ et $y \in \mathbf{Irr}$ on voit immédiatement que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, y) < \frac{1}{2^{\lg(a_1)+\cdots+\lg(a_n)}} \quad \Rightarrow \quad x_0 = y_0,\, x_1 = y_1,\, \ldots, x_n = y_n \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, y) \le \frac{1}{2^n}$$

∎

Remarque 4.14 La distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x, y)$ a été introduite pour sa lisibilité sur les dfc de x et y alliée à sa signification arithmétique, illustrée par le lemme 3.5. Cependant, la preuve de l'équivalence topologique entre $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$ est très générale et s'appliquerait à toute modification de $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ d'un type analogue à celle opérée pour définir $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, c.-à-d. à toute distance du type $\delta(x, y) = |x_0 - y_0| + 1/\varphi(x_1, \ldots, x_\ell)$ (où $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, y) = |x_0 - y_0| + 1/2^\ell$) dès que φ est une fonction croissante (i.e., $\varphi(x_1, \ldots, x_\ell) < \varphi(x_1, \ldots, x_\ell, x_{\ell+1})$) qui tend vers l'infini avec ℓ.

Proposition 4.15

a) L'identité $id_2 : (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d})$ *n'est pas uniformément continue.*

b) L'identité $id_3 : (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d})$ *est uniformément continue près de tout compact.*

c) L'identité inverse $id_3^{-1} : (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0})$ *est aussi uniformément continue près de tout compact.*

Preuve.
a) Considérons les deux irrationnels $x = [x_0; x_1, \ldots, x_\ell, 3, x_{\ell+2}, \ldots]$ et
$y = [x_0, x_1, \ldots, x_\ell, 1, , y_{\ell+2}, \ldots]$. Comme x et y sont de même côté de $p_{\ell-1}/q_{\ell-1}$ nous avons :

$$\mathrm{d}(x, y) \ge \min\left(\frac{1}{4^{p_{\ell-1}+q_{\ell-1}}}, \frac{\mid x - y \mid}{\left|x - \frac{p_{\ell-1}}{q_{\ell-1}}\right| \cdot \left|y - \frac{p_{\ell-1}}{q_{\ell-1}}\right|}\right).$$

Or,

$$\left|x - \frac{p_{\ell-1}}{q_{\ell-1}}\right| < \frac{1}{q_\ell q_{\ell-1}}, \qquad \left|y - \frac{p_{\ell-1}}{q_{\ell-1}}\right| < \frac{1}{q_\ell q_{\ell-1}}, \qquad |x - y| > \frac{1}{q_{\ell,3} q_{\ell,2}}$$

et de plus

$$q_{\ell,3} = 3q_\ell + q_{\ell-1} < 4q_\ell \qquad \text{et} \qquad q_{\ell,2} = 2q_\ell + q_{\ell-1} < 3q_\ell,$$

par suite

$$\mathrm{d}(x,y) > \min\left(\frac{1}{4^{p_{\ell-1}+q_{\ell-1}}}, \frac{q_{\ell-1}^2 q_\ell^2}{q_{\ell,3}q_{\ell,2}}\right) > \min\left(\frac{1}{4^{p_{\ell-1}+q_{\ell-1}}}, \frac{q_{\ell-1}^2}{12}\right).$$

Supposons maintenant $x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1}$ fixés et x_ℓ variable. Alors, lorsque q_ℓ tend vers l'infini, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}(x,y)$ tend vers zéro d'après le lemme 3.5, contrairement à $\mathrm{d}(x,y)$ qui reste supérieure à $\min\left(\frac{1}{4^{p_{\ell-1}+q_{\ell-1}}}, \frac{q_{\ell-1}^2}{12}\right)$. Par suite, l'application id_2 n'est pas uniformément continue.

b) Montrons, maintenant, que id_3 est uniformément continue près de tout compact. Ceci revient à prouver que pour tout élément $a = (a_n)$ de Sc et pour tout rationnel p/q, on a

$$\lim_{x \in K_a, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x,y) \leq 1/2^k, k \to \infty} \quad \frac{1}{\left|x - \frac{p}{q}\right|} - \frac{1}{\left|y - \frac{p}{q}\right|} = 0.$$

D'après le lemme 4.9, il existe $\ell > 0$ et $\varepsilon > 0$, dépendant uniquement de p, q et a, tels que l'intervalle $[(p/q) - \varepsilon, (p/q) + \varepsilon]$ ne contient aucun élément x de K_a, ni aucun y coïncidant avec un élément x de K_a jusqu'à ℓ.

Donc, pour $x \in K_a$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x,y) \leq 1/2^k$, on a :

$$\left|\frac{1}{\left|x - \frac{p}{q}\right|} - \frac{1}{\left|y - \frac{p}{q}\right|}\right| \leq \frac{|\ x - y\ |}{\left|x - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|y - \frac{p}{q}\right|} \leq |\ x - y\ | / \varepsilon^2.$$

Or,

$$|\ x - y\ | \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}},$$

d'où le résultat cherché.

c) Découle du théorème 4.8, de la proposition 4.11 et de la proposition 3.7. ■

Notez que la preuve du point (c) ci-dessus donnerait également la continuité de id_1^{-1} : $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}) \to (\mathbf{Irr}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0})$, mais elle est moins simple et moins structurelle que celle que nous avons donnée à la proposition 4.13.

Les deux propositions précédentes sont résumées dans la théorème suivant.

Théorème récapitulatif 4.16 *Les quatre distances* $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$, d *et* $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$ *sont topologiquement équivalentes.*

Désormais lorsqu'on parle de l'espace **Irr** c'est, sauf mention contraire, **Irr** muni de l'une des quatre distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}, \mathrm{d}$ ou $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$.

Puisque les quatre distances sont topologiquement équivalentes, la proposition qui suit est un corollaire de la proposition 4.7 (qui affirmait le résultat pour la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$).

Proposition 4.17 *Pour chacune des distances* $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}, \mathrm{d}$ *et* $\mathrm{d}_{\mathrm{mir}}$*, si* $a \in Sc$ *et* $\ell \in \mathbf{N}$ *alors* K_a *est un compact et* $U_{a|\ell}$ *est un ouvert.*

Soit $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ou $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ une fonction $|\ |$-continue et supposons que pour tout $x \in \mathbf{Irr}$ on ait $\varphi(x) \in \mathbf{Irr}$. Ceci définit une fonction $\phi : \mathbf{Irr} \to \mathbf{Irr}$ ou $\phi : [a,b] \cap \mathbf{Irr} \to [c,d] \cap \mathbf{Irr}$ qui est continue en tout point d'après le théorème 4.3. Sous quelle condition cette dernière fonction est-elle continue au sens constructif ? Nous avons suffisamment étudié l'espace **Irr** pour donner la réponse suivante, qui résulte de la proposition 4.11.

Proposition 4.18 *Soit* $\varphi\ : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *(resp.* $\varphi : [a,b] \to [c,d]$*) une fonction* $|\ |$*-continue et supposons que pour tout* $x \in \mathbf{Irr}$ *on ait* $\varphi(x) \in \mathbf{Irr}$*. Ceci définit une fonction* $\phi : \mathbf{Irr} \to \mathbf{Irr}$ *(resp.* $\phi : [a,b] \cap \mathbf{Irr} \to [c,d] \cap \mathbf{Irr}$*).*

Cette fonction est continue si et seulement si pour tout compact K de **Irr***, $\varphi(K)$ est contenu dans un compact de* **Irr** *(resp. pour tout compact K de $[a,b]\cap \mathbf{Irr}$, $\varphi(K)$ est contenu dans un compact de $[c,d]\cap \mathbf{Irr}$.)*
Cette condition est réalisée lorsque φ est un homéomorphisme (c.-à-d. une bijection strictement monotone).

Lorsque φ est un homéomorphisme l'image d'un compact est un compact, et on sait que les compacts de $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d})$ sont les compacts de $(\mathbf{R}, |\ |)$ contenus dans **Irr** (théorème 1.10). Ceci explique la dernière affirmation de la proposition.
On notera aussi que la condition donnée dans la proposition peut se réécrire

$$\forall u \in Sc \quad \exists v \in Sc \qquad \varphi(K_u) \subset K_v.$$

Problèmes ouverts Il resterait à étudier notamment les problèmes suivants. Primo, trouver une condition équivalente à la précédente mais plus maniable. Secundo, essayer de caractériser les fermés situés dans l'espace **Irr**, ce qui a priori n'est peut être pas indépendant de la distance choisie sur **Irr**.

5 Une extension des irrationnels dans laquelle ils forment une partie fermée

L'espace métrique $\mathbf{Dfc}_1$

Il existe plusieurs manières naturelles de "compléter" l'ensemble $\mathbf{Dfc} \simeq \mathbf{Irr}$ en lui rajoutant l'ensemble des dfc de nombres rationnels. La première consiste à considérer l'ensemble $\mathbf{Dfc}_1 \subset \mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$.

Notations 5.1

- Nous notons $j_{\mathbf{Q},1} : \mathbf{Q} \to \mathbf{Dfc}_1$ l'injection canonique qui envoie le rationnel r sur son dfc fini (le plus court) complété par une suite infinie de zéros.
- $\mathbf{Q}_{\mathrm{fc}}$ est l'image de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{Dfc}_1$ par l'injection canonique $j_{\mathbf{Q},1}$
- $j_{\mathrm{fc}1} : \mathbf{Dfc}_1 \to \mathbf{R}$ désigne la restriction de j_{cont} à $\mathbf{Dfc}_1$ (voir notations 2.3)

Classiquement, l'ensemble $\mathbf{Dfc}_1$ est la réunion de **Dfc** et de $\mathbf{Q}_{\mathrm{fc}}$ et $j_{\mathrm{fc}1}$ est une bijection de $\mathbf{Dfc}_1$ sur $\mathbf{R}$. Nous verrons plus loin comment modifier ces affirmations dans un cadre constructif. Nous commençons par examiner certaines propriétés classiques intéressantes qui admettent également des preuves constructives.

Théorème 5.2

a) Les deux distances $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}1}$ sur l'ensemble $\mathbf{Dfc}_1$ sont topologiquement équivalentes.

b) L'espace métrique $\mathbf{Dfc}_1$ ainsi défini est complet.

c) **Dfc** *est un sous-espace fermé dans $\mathbf{Dfc}_1$.*

d) $\mathbf{Q}_{\mathrm{fc}}$ est une partie dense de $\mathbf{Dfc}_1$ et tous ses points sont isolés.

Preuve.
a) La preuve de la proposition 4.13 donnée pour **Dfc** fonctionne à l'identique pour $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ ou pour $\mathbf{Dfc}_1$.
b) et c) Découlent du fait que **Dfc** et $\mathbf{Dfc}_1$ sont fermés dans $\mathbf{R}_{\mathrm{cont}}$ (lemme 3.11).
d1) Considérons un élément $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{Dfc}_1$. Soit (x_n) la suite de rationnels définie par :
— $x_0 = u_0$
— si $u_1 = 0$ alors $x_n = u_0$ pour tout $n \geq 1$
— si $u_1 \neq 0$ et $n \geq 1$ alors
$x_n = [u_0; u_1, \ldots, u_n]$ si $u_n \neq 0$
$x_n = [u_0; u_1, \ldots, u_k]$ si $u_n = 0$, $1 < k \leq n-1$, $u_k \neq 0$ et $u_{k+1} = 0$.
Il est clair que $\lim_{n\to\infty} j_{\mathbf{Q},1}(x_n) = u$. Donc, $\mathbf{Q}_{\mathrm{fc}}$ est dense dans $(\mathbf{Dfc}_1, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}0})$.

d2) Soient $r \in \mathbf{Q}$, $[r_0; r_1, \ldots, r_k]$ son dfc standard. On a $j_{\mathbf{Q},1}(r) = [r_0; r_1, \ldots, r_k, 0, 0, \ldots]$.
Soit $x \in \mathbf{R}_{\text{cont}}$ avec $\mathrm{d}_{\text{fc}0}(x, j_{\mathbf{Q},1}(r)) < 1/2^{k+1}$, donc

$$[x_0; x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}] = [r_0; r_1, \ldots, r_k, 0].$$

Alors, par définition de $\mathbf{Dfc}_1$, $x = [x_0; x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots]$; c.-à-d. $x = j_{\mathbf{Q},1}(r)$.
Ainsi, la boule ouverte de centre $j_{\mathbf{Q},1}(r)$ et de rayon $1/2^{k+1}$ est réduite à $j_{\mathbf{Q},1}(r)$. ∎

Remarque 5.3 L'application $j_1 : \mathbf{Irr} \to \mathbf{R}$ ne possède pas stricto sensu de "prolongement par continuité" à $\mathbf{Dfc}_1$ puisque $\mathbf{Irr}$ est fermé. Cependant, considérons la bijection réciproque de $j_{\mathbf{Q},1}$ et notons la $t : (\mathbf{Q}_{\text{fc}}, \mathrm{d}_{\text{fc}0}) \to (\mathbf{Q}, |\ |)$. Cette application est la restriction de j_{cont} à $\mathbf{Q}_{\text{fc}}$. Elle est uniformément continue, et puisque $\mathbf{Q}_{\text{fc}}$ est une partie dense de $\mathbf{Dfc}_1$ elle se prolonge par continuité (uniforme) en l'application $j_{\text{fc}1} : (\mathbf{Dfc}_1, \mathrm{d}_{\text{fc}0}) \to (\mathbf{R}, |\ |)$ qui est donc un prolongement naturel à $\mathbf{Dfc}_1$ de j_1 (c.-à-d. $j_{\text{fc}1}|_{\mathbf{Q}_{\text{fc}}} = t$ et $j_{\text{fc}1}|_{\mathbf{Dfc}_1} = j_1$).

Caractérisation des suites convergentes de $\mathbf{Dfc}_1$

Le théorème suivant caractérise les suites convergentes dans $\mathbf{Dfc}_1$, du moins lorsque la limite est dans $\mathbf{Q}_{\text{fc}}$ ou bien dans $\mathbf{Dfc}$.

Théorème 5.4 *Soit $z \in \mathbf{Dfc}_1$ et $(x^{(n)})$ une suite d'éléments de $\mathbf{Dfc}_1$. Alors*
a) si $z \in \mathbf{Q}_{\text{fc}} \subset \mathbf{Dfc}_1$, on a l'équivalence

$$(x^{(n)}) \textit{ converge vers } z \textit{ dans } \mathbf{Dfc}_1 \iff (j_{\text{fc}1}(x^{(n)})) \textit{ stationne à } j_{\text{fc}1}(z) \textit{ dans } \mathbf{R}$$

b) si $z \in \mathbf{Dfc} \subset \mathbf{Dfc}_1$, on a l'équivalence

$$(x^{(n)}) \textit{ converge vers } z \textit{ dans } \mathbf{Dfc}_1 \iff (j_{\text{fc}1}(x^{(n)})) \textit{ converge vers } j_{\text{fc}1}(z) \textit{ dans } \mathbf{R}$$

Preuve.
a) Clair, puisque z est un point isolé de $\mathbf{Dfc}_1$.
b) ($\Longrightarrow$) Par ce que $j_{\text{fc}1} : (\mathbf{Dfc}_1, \mathrm{d}_{\text{fc}0}) \to (\mathbf{R}, |\ |)$ est uniformément continue.
($\Longleftarrow$) Reprenons la preuve du théorème 4.3 qui est l'analogue retreint au cas de $\mathbf{Dfc}$. Elle est basée sur la propriété suivante :
un irrationnel x a le même dfc qu'un irrationnel z jusqu'à l'ordre k, c.-à-d. $\mathrm{d}_{\text{fc}0}(x, z) \leq 2^{-k}$, dès que x est sur l'intervalle ouvert d'extrémités p_k/q_k et $(p_k + p_{k-1})/(q_k + q_{k-1})$.
Or il est facile de vérifier que cette propriété est encore vraie pour tout élément $x = j_{\text{fc}1}(y)$ où $y \in \mathbf{Dfc}_1$. ∎

Quelques propriétés de $\mathbf{Dfc}_1$

Les applications $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Irr} \to \mathbf{Dfc}_1 \to \mathbf{R}$ *ne* sont *pas* surjectives bien qu'elles le soient classiquement. Constructivement, nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.5
a) L'injection naturelle $\mathbf{Q}_{\text{fc}} \cup \mathbf{Dfc} \to \mathbf{Dfc}_1$ (ou, ce qui revient au même, l'injection $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Irr} \to \mathbf{Dfc}_1$) est surjective si et seulement si on a **LPO***.*
b) L'application $j_{\text{fc}1} : \mathbf{Dfc}_1 \to \mathbf{R}$ est surjective si et seulement si on a **LPO***.*

Preuve.
a) Un élément de $\mathbf{Dfc}_1$ est une suite d'entiers (a_n). Déterminer s'il est dans $\mathbf{Dfc}$ ou dans $\mathbf{Q}_{\text{fc}}$ revient à déterminer si la suite $(a_n)_{n>0}$ contient un terme nul ou non. Ceci donne clairement l'équivalence avec **LPO**.
b1) Soit $(u_n)_{n>0}$ une suite partout nulle sauf peut être en un indice avec sa valeur égale à 1 (une telle suite est dite fugitive).

Soit $x = -\sum u_n 2^{-n}$. C'est un réel bien défini. Supposons $x = j_{\mathrm{fc}1}([v_0; v_1, \ldots, v_n, \ldots])$, alors :
– $v_0 = 0$ implique que u_n est partout nulle
– $v_0 = -1$ implique que $u_n = 1$ pour un certain n.

b2) Supposons **LPO**, et soit x un réel arbitraire. Comme $x \geq n$ ou $x < n$ pour chaque entier n, on peut calculer la partie entière de x. Donc, par récurrence, on peut calculer le dfc, fini ou infini, de x. On obtient ainsi une application $\mathbf{R} \to \mathbf{Dfc}_1$ qui est la bijection inverse de $j_{\mathrm{fc}1}$. ∎

La proposition suivante constitue une version constructive du théorème classique qui affirme que $\mathbf{Dfc}_1 = \mathbf{Dfc} \cup \mathbf{Q}_{\mathrm{fc}}$.

Proposition 5.6 *Si $x \in \mathbf{Dfc}_1$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, j_{\mathbf{Q},1}(r)) > 0$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$ alors $x \in \mathbf{Dfc}$.*

Notez que la condition $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, j_{\mathbf{Q},1}(r)) > 0$ équivaut à $j_{\mathrm{fc}1}(x) \neq r$. Et que " $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, j_{\mathbf{Q},1}(r)) > 0$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$ " peut se réécrire " $\mathbf{Q}_{\mathrm{fc}} \subset \mathbf{Dfc}_1 - \{x\}$ ".

Preuve. Soit $x = (x_n)$ un élément de $\mathbf{Dfc}_1$. Pour montrer que $x \in \mathbf{Dfc}$, il suffit de montrer que $x_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
Montrons tout d'abord que $x_1 > 0$. Par hypothèse, $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, j_{\mathbf{Q},1}(x_0)) > 0$, d'où $x_1 > 0$, car sinon $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ et $j_{\mathbf{Q},1}(x_0) = x$.
Supposons $\forall j, 1 \leq j \leq n, \quad x_j > 0$, et considérons le rationnel $r = [x_0; x_1, \ldots, x_n]$. Puisque $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}0}(x, j_{\mathbf{Q},1}(r)) > 0$, on a $x_{n+1} > 0$ car sinon $j_{\mathbf{Q},1}(r) = x$. ∎

Problèmes ouverts Les problèmes analogues à ceux que nous avons signalé pour **Irr** à la fin de la section 4 mériteraient d'être étudiés pour $\mathbf{Dfc}_1$.

6 Un séparé-complété intéressant de l'ensemble des irrationnels

Définition de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$

Rappelons que $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ sont deux distances métriquement équivalentes sur **Dfc**. Nous étendons la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$ à $\mathbf{Dfc}_2$ de la manière suivante (cf. remarque 3.2 (5)) : on applique la définition en convenant que, si x et y ont un dfc commun (sans 0) pour les indices $1, \ldots, \ell$ et $x_{\ell+1} = 0$, $y_{\ell+1} \neq 0$ on prend $\lg(x_{\ell+1}) = \infty$ de sorte que $\min(\lg(x_{\ell+1}), \lg(y_{\ell+1})) = \lg(y_{\ell+1})$. Cette convention est naturelle, comme nous allons le voir maintenant.

Considérons en effet la suite de terme général $y_n = [x_0; x_1, \ldots, x_k, 2^n, 1, 1, \ldots]$. C'est une suite de Cauchy dans $\mathbf{Irr} \simeq \mathbf{Dfc}$ pour la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$. Si on convient de représenter sa limite (dans son complété) par l'élément $[x_0; x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots]$ de $\mathbf{Dfc}_2$, la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc}2}$ doit être prolongée de **Dfc** à $\mathbf{Dfc}_2$ de la manière que nous avons convenue.

Par ailleurs dans **R** cette suite converge vers le rationnel $r = [x_0; x_1, \ldots, x_k]$
– par valeurs supérieures si k est pair
– par valeurs inférieures si k est impair.

Ceci indique que l'élément $[x_0; x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots]$ de $\mathbf{Dfc}_2$ représente, au moins intuitivement dans le complété de $(\mathbf{Dfc}, \mathrm{d}_{\mathrm{fc}2})$, le rationnel r "par valeur supérieure ou par valeur inférieure" selon la parité de k.

D'où les notations suivantes.

Notations 6.1
– Nous notons $j_{\mathrm{fc}2}$ la restriction de j_{cont} à $\mathbf{Dfc}_2$
– Nous notons $[x_0; x_1, \ldots, x_k, \infty]$ l'élément $[x_0; x_1, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots]$ de $\mathbf{Dfc}_2$ (avec $k \geq 0$).
– Nous notons $\mathbf{Q}^+$ l'ensemble

$$\{ [x_0; x_1, \ldots, x_{2k}, \infty] \ ; \ k \geq 0, x_0 \in \mathbf{Z}, x_1, \ldots, x_{2k} > 0 \} \subset \mathbf{Dfc}_2.$$

L'élément $[x_0; x_1, \ldots, x_{2k}, \infty]$ sera noté q^+ où q est le rationnel $[x_0; x_1, \ldots, x_{2k}]$.

– Nous notons $\mathbf{Q}^-$ l'ensemble

$$\{\,[x_0; x_1, \ldots, x_{2k+1}, \infty]\ ;\ k \geq 0, x_0 \in \mathbf{Z}, x_1, \ldots, x_{2k+1} > 0\,\} \subset \mathbf{Dfc}_2.$$

L'élément $[x_0; x_1, \ldots, x_{2k+1}, \infty]$ sera noté q^- où q est le rationnel $[x_0; x_1, \ldots, x_{2k+1}]$.

Le lemme suivant est immédiat.

Lemme 6.2 $\mathrm{d_{fc2}}$ *est une distance sur* $\mathbf{Dfc}_2$ *et induit la relation d'inégalité usuelle sur les suites. Plus précisément : pour tous* $x, y \in \mathbf{Dfc}_2$ $\quad \mathrm{d_{fc2}}(x, y) > 0 \iff \exists k \quad x_k \neq y_k$.
Enfin, les parties $\mathbf{Dfc}$, $\mathbf{Q}^+$ *et* $\mathbf{Q}^-$ *de* $\mathbf{Dfc}_2$ *sont denses pour la distance* $\mathrm{d_{fc2}}$.

Ainsi l'application canonique de $\mathbf{Dfc}_2$ dans son séparé-complété pour la distance $\mathrm{d_{fc2}}$ est une injection, et ce séparé-complété s'identifie à celui de $\mathbf{Dfc}$. Ceci justifie la définition suivante.

Définition 6.3 Les espaces métriques $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d_{fc2}})$, $(\mathbf{Dfc}_2, \mathrm{d_{fc2}})$ et $(\mathbf{Irr}, \mathrm{d_{cut}})$ possèdent le même séparé-complété qu'on notera $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$. On notera également j_{fc2} le prolongement par continuité de j_{fc2} à $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$

Relation d'ordre compatible avec une métrique

Sur un ensemble X, une relation $x \neq y$ est appelée une *inégalité forte* lorsque sont vérifiées les deux propriétés suivantes :

$$\forall x, y \ \ (x = y \ \Leftrightarrow\ \neg x \neq y) \quad \text{et} \quad \forall x, y, z \ \ (x \neq y \ \Rightarrow\ (x \neq z \vee y \neq z)).$$

Une *relation d'ordre total strict* sur un ensemble muni d'une inégalité forte $\neq$ est une relation transitive qui vérifie

$$x \neq y \iff (x < y \text{ ou } y < x).$$

La relation d'ordre total $\leq$ correspondante est définie par $x \leq y \ \Leftrightarrow\ (\neg\, y > x)$ et on a $x = y \ \Leftrightarrow\ (x \leq y \text{ et } y \leq x)$ ainsi que $\forall x\ \forall y\ \forall z\ \ (x < y \ \Rightarrow (x < z \text{ ou } z < y)\ )$.
Dans le cas d'un espace métrique (X, d) une relation d'ordre total strict est dite *uniformément compatible avec la métrique* si on a

$$\forall \alpha \ \ \exists \varepsilon > 0\ \forall x\ \forall y\ \forall x'\ \forall y' \ \ (\ (x < y,\ d(x, y) < \alpha,\ d(x, x') < \varepsilon,\ d(y, y') < \varepsilon) \ \Rightarrow\ x' < y')\ )$$

Dans un tel cas, la relation d'ordre total strict se prolonge de manière unique en une relation d'ordre total strict uniformément compatible avec la métrique du complété $(\widetilde{X}, d)$.
Une relation d'ordre total strict est dite *fortement compatible avec la métrique* si on a

$$\forall x\ \forall y\ \forall x'\ \forall y' \quad (\ x' \leq x < y \leq y' \ \Rightarrow\ d(x, y) \leq d(x', y')\ )$$

Dans un tel cas, la relation d'ordre total strict se prolonge de manière unique en une relation d'ordre total strict fortement compatible au complété $(\widetilde{X}, d)$. Par ailleurs, la compatibilité forte implique la compatibilité uniforme.

Relation d'ordre naturelle sur $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$

La relation d'ordre total strict suivante est bien définie sur $\mathbf{Dfc}_2$:

Définition 6.4 Pour $x = (x_n) \neq y = (y_n)$ dans $\mathbf{Dfc}_2$ on pose

$$x < y \iff (-1)^j x_j < (-1)^j y_j \text{ pour le plus petit } j \text{ tel que } x_j \neq y_j$$

(en convenant de remplacer un éventuel 0 par ∞ si $j > 0$).

Pour $x \neq y$ dans $\mathbf{Dfc}_1 \subset \mathbf{Dfc}_2$ on a alors l'équivalence $x < y \ \Leftrightarrow j_{\mathrm{fc1}}(x) < j_{\mathrm{fc1}}(y)$.
En fait, cette relation d'ordre total strict est fortement compatible avec $\mathrm{d_{cut}}$ et $\mathrm{d_{fc2}}$ sur $\mathbf{Dfc}_2$. Elle se prolonge de manière unique (en une relation d'ordre fortement compatible) à $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$. On a $q^- < q^+$ pour tout $q \in \mathbf{Q}$.

Comparaison des éléments de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ avec les rationnels

On peut intercaler les éléments de $\mathbf{Q}$ entre les éléments de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ selon le schéma $q^- < q < q^+$. Pour le faire de manière constructive, on remarque que pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ puisque $q^- < q^+$ on a $q^- < x$ ou $x < q^+$. Si $q^- < x$ on pose $q < x$, si $x < q^+$ on pose $x < q$.
L'ensemble $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2 \cup \mathbf{Q}$ se trouve alors muni d'une relation d'ordre total strict.

On peut présenter les choses également de la manière suivante. Considérons l'application notée t_r (r étant un rationnel fixé) définie de $\mathbf{Dfc}_2$ vers $\{-1, 1\}$ par :

- $t_r(x) = 1 \quad$ si $\quad x > r$
- $t_r(x) = -1 \quad$ si $\quad x < r$.

Cette application est uniformément continue sur $\mathbf{Dfc}_2$: en effet, si $x, y \in \mathbf{Dfc}_2$ tels que $\mathrm{d_{cut}}(x, y) < \mathrm{d_{cut}}(r^-, r^+)$ alors $\quad t_r(x) = t_r(y)$. Ceci montre que t_r est uniformément continue pour $\mathrm{d_{cut}}$ et donc se prolonge par continuité à $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$, ce qui donne le test de comparaison d'un élément de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ à un élément de $\mathbf{Q}$.

Extension de la distance $\mathrm{d_{cut}}$ à $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$

Puisque $\mathrm{d_{cut}}$ et $\mathrm{d_{fc2}}$ sont équivalentes sur $\mathbf{Dfc}$, la distance $\mathrm{d_{cut}}$ est définie sur $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ par prolongement par continuité depuis $\mathbf{Dfc}$.
En particulier, $\mathrm{d_{cut}}(r^-, r^+) = 1/q$ où q est le dénominateur de r.
On établit facilement le lemme suivant.

Lemme 6.5 *Si (x_n) une suite de Cauchy dans $\mathbf{Dfc}$ (ou même dans $\mathbf{Dfc}_2$) et si r est donné dans $\mathbf{Q}$ alors il existe un entier positif n_0 tel que pour tous entiers $n, m > n_0$, x_n et x_m sont de même côté de r.*

Vu le lemme précédent, et vu le test de comparaison d'un élément de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ à un élément de $\mathbf{Q}$, la distance $\mathrm{d_{cut}}$ s'étend sur $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ par : si $x \neq y$ alors $\mathrm{d_{cut}}(x, y) = 1/q$ où $p/q \in \mathbf{Q}$ est strictement compris entre x et y, q étant minimum.

Remarque 6.6 La distance $\mathrm{d_{cut}}$ peut être définie sur $\mathbf{Q}$ par la convention suivante : si $x < y$ alors $\mathrm{d_{cut}}(x, y) = 1/q$ où q est le plus petit des dénominateurs des rationnels de l'intervalle $[x, y]$. Le complété de cet espace métrique contient $(\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2, \mathrm{d_{cut}})$ et $\mathbf{Q}$, les points de $\mathbf{Q}$ étant isolés. Pour $r = p/q \in \mathbf{Q}$ on a $\mathrm{d_{cut}}(r, r^+) = \mathrm{d_{cut}}(r, r^-) = 1/q = \mathrm{d_{cut}}(r^+, r^-)$ et pour $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ $\mathrm{d_{cut}}(x, r) = \mathrm{d_{cut}}(x, r^+)$ si $x < r$.

Difficulté d'envoyer $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ sur $\mathbf{Dfc}_1$

Il est légitime de se demander si l'application naturelle de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ vers $\mathbf{R}$ peut se factoriser par $\mathbf{Dfc}_1$ (suivi de l'application naturelle de $\mathbf{Dfc}_1$ vers $\mathbf{R}$). Cette factorisation éventuelle peut être définie sur $\mathbf{Dfc}_2$ de la manière suivante.
Soit $j_{2,1} : \mathbf{Dfc}_2 \to \mathbf{Dfc}_1$ l'application définie par : si $\quad x = (x_n) \in \mathbf{Dfc}_2$ et $k \geq 1$ alors

— si $\quad x_{k+1} \neq 0$, $(j_{2,1}(x))_k = x_k$

— si $\quad x_{k+1} = 0$, on considère le premier indice $\ell \geq 0$ tel que $x_{\ell+1} = 0$ et on prend

- $j_{2,1}(x) = [x_0, x_1, \ldots, x_\ell, 0, 0 \ldots] \quad$ si $\quad x_\ell \neq 1$ ou $\ell = 0$
- $j_{2,1}(x) = [x_0, x_1, \ldots, x_{\ell-1} + 1, 0, 0 \ldots] \quad$ si $\quad x_\ell = 1$ et $\ell > 0$.

On a donc $j_{2,1}(x) = x$ si $x \in \mathbf{Dfc}$ et $j_{2,1}(r^+) = j_{2,1}(r^-) = j_{\mathbf{Q},1}(r)$ si $r \in \mathbf{Q}$. Cependant, l'application $j_{2,1}$ ainsi définie n'est pas continue. En effet, considérons la suite (v_n) définie par $v_n = [0, 2, 1, n, 1, 1, \ldots]$ pour tout entier naturel n. Cette suite converge vers $[0, 2, 1, \infty]$ dans $\mathbf{Dfc}_2$ alors que $j_{2,1}(v_n) = v_n$ n'est pas convergente dans $\mathbf{Dfc}_1$. Comme $j_{2,1}$ n'est pas continue, on ne peut pas la prolonger de manière explicite à $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$.

Caractérisation des suites convergentes de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$

Soit $j\ :\ \mathbf{Irr}\to\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ l'application représentant l'inclusion de $\mathbf{Irr}\simeq\mathbf{Dfc}$ dans $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$. Rappelons que $j_{\mathrm{fc}2}$, l'application naturelle de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ vers $\mathbf{R}$, peut être obtenue en prolongeant par continuité l'injection canonique $j_1\ :\ \mathbf{Irr}\to\mathbf{R}$.
En particulier, on a :
– $j_{\mathrm{fc}2}(x)=j_1(x)$ si $x\in\mathbf{Irr}$
– $j_{\mathrm{fc}2}(x)=q$ si $x=q^+$ ou $x=q^-$.

Dans la suite, pour simplifier, nous noterons $j_{\mathrm{fc}2}(x)$ par $\overline{x}$.

Les deux théorèmes ci-après caractérisent les suites convergentes d'éléments de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ dans les cas où on sait si la limite est dans $\mathbf{Dfc}$, $\mathbf{Q}^+$ ou $\mathbf{Q}^-$.

Théorème 6.7 *Soit $z\in\mathbf{Irr}$ et (x_n) une suite dans $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
a) la suite (x_n) $\mathrm{d_{fc2}}$–converge vers z dans $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$
b) la suite $(\overline{x_n})$ $|\ |$–converge vers $j_1(z)$ dans $\mathbf{R}$.

Preuve.
$(a\Longrightarrow b)$ Clair, car $j_{\mathrm{fc}2}$ est uniformément continue sur $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$.
$(b\Longrightarrow a)$ Soit (x_n) une suite $|\ |$–convergente vers z dans $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$. Pour tout entier naturel n, on a une suite $x_{n,k}$ dans $\mathbf{Dfc}$ vérifiant $\mathrm{d_{fc2}}(x_n,x_{n,k})\le 1/2^k$. D'où, $\lim_{k\to\infty}|\overline{x_{n,k}}-\overline{x_n}|=0$ et donc $\lim_{n\to\infty}|\overline{x_{n,\varphi(n)}}-z|=0$ pour un φ convenable. D'après le théorème 4.3 on en déduit $\lim_{n\to\infty}\mathrm{d_{fc1}}(x_{n,\varphi(n)},z)=0$. Or $\mathrm{d_{fc2}}\le\mathrm{d_{fc1}}$ sur $\mathbf{Dfc}$, donc $\lim_{n\to\infty}\mathrm{d_{fc2}}(x_n,z)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{d_{fc2}}(x_{n,\varphi(n)},z)=0$. ∎

Théorème 6.8 *Soit $r\in\mathbf{Q}$ et (x_n) une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
a) la suite (x_n) $\mathrm{d_{fc2}}$–converge vers r^+ dans $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$.
b) 1) la suite $(\overline{x_n})$ $|\ |$–converge vers r dans $\mathbf{R}$
2) $x_n\ge r^+$ à partir d'un certain rang dans $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$.

Preuve. On fait la preuve avec la distance $\mathrm{d_{cut}}$ au lieu de $\mathrm{d_{fc2}}$.
$(a\Longrightarrow b)$ Le 1) est évident car $j_{\mathrm{fc}2}$ est uniformément continue.
Par ailleurs pour $x\in\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$, si $\overline{x}<r$ alors $\mathrm{d_{cut}}(x,r^+)\le 1/q$ où q est le dénominateur de r.
Donc à partir d'un certain rang n_0, $\mathrm{d_{cut}}(x_n,r^+)<1/q$ et alors $\overline{x}_n\ge r$.
$(b\Longrightarrow a)$ Nous supposons la suite $(\overline{x_n})$ $|\ |$–converge vers $r=p/q\in\mathbf{Q}$ avec $x_n\ge r^+$. On intercale un rationnel $s_n=p_n/q_n$ entre x_n et r^+ de sorte que $\mathrm{d_{cut}}(x_n,r^+)=1/q_n$. On a $r<s_n$ et s_n tend vers r, donc le dénominateur q_n tend vers l'infini. ∎

Fonctions homographiques rationnelles sur $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$

Théorème 6.9 *Soient a,b,c,d des entiers premiers entre eux tels que $ad-bc\neq 0$, et $\varphi\ :\ \mathbf{Dfc}\to\mathbf{Dfc}$ la fonction homographique définie par : $\varphi(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$. Alors*
a) φ est $\mathrm{d_{fc0}}$–uniformément continue
b) φ est $\mathrm{d_{cut}}$–uniformément continue près de toute partie $|\ |$–bornée
c) φ est $\mathrm{d_{fc2}}$–uniformément continue près de toute partie $\mathrm{d_{fc2}}$–bornée, et donc se prolonge par continuité à $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$.

Preuve.
a) Ce résultat est démontré dans [11].
b) Soit K une partie $|\ |$–bornée de $\mathbf{Dfc}$ ($K\subset[-A,A]$).
Soit Q le dénominateur de $-d/c$. Soit $x\in K$. On va se limiter à considérer des y tels que

$\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(x,y) < 1/Q$ de sorte que x et y sont situés du même coté de $-d/c$. En outre $|x-y| < 1$. Pour un $q > Q$ supposons que $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(x,y) \geq 1/q$.
Donc il y a un p/q' qui s'intercale entre x et y avec $q' \leq q$. Puisque φ est strictement monotone sur l'intervalle d'extrémités x et y, $\varphi(p/q')$ est dans l'intervalle d'extrémités $\varphi(x)$ et $\varphi(y)$. Par suite, $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(\varphi(x),\varphi(y)) \geq 1/q$" où $q" = cp + dq'$ est le dénominateur de $\varphi(p/q')$ (avant une éventuelle simplification de la fraction).
Puisque $p/q' \in [-A-1, A+1]$, on a $q" \leq Bq$ avec $B = |c|(A+1) + |d|$.
Par suite,

$$\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}(\varphi(x),\varphi(y)) \geq 1/Bq.$$

En utilisant l'implication contrapposée on voit que φ^{-1} est uniformément continue sur K. En remplaçant φ par φ^{-1} on obtient ce qu'on voulait.
c) Découle immédiatement de b), puisque $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$ est métriquement équivalente avec $\mathrm{d}_{\mathrm{cut}}$ et que toute partie $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$–bornée est aussi $|\ |$–bornée. ∎

Comparaison entre $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ et $\mathbf{Dfc} \cup \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-$

Les applications $\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \mathbf{Dfc} \to \mathbf{Dfc}_2$ et $\mathbf{Dfc}_2 \to \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ *ne* sont *pas* surjectives bien qu'elles le soient classiquement. Constructivement, nous avons le théorème suivant :

Théorème 6.10 *On a les équivalences suivantes.*
1) L'injection naturelle $\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \cup \mathbf{Dfc} \to \mathbf{Dfc}_2$ *est surjective si et seulement si on a* **LPO**.
2) L'injection canonique $\mathbf{Dfc}_2 \to \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ *est surjective si et seulement si on a* **LPO**.

Preuve.
1) Comme pour le théorème 5.5 a).
2) Soit (a_n) une suite fugitive (c.-à-d. une suite infinie prenant uniquement les valeurs 0 et 1 mais au plus une fois la valeur 1). A partir de cette suite, on fabrique la suite

$$\mu(n) = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

où $u_k = 1 - \sum_{i=1}^{k} a_i$.
Alors $\mu(n) = n$ si $\forall i \leq n \ \ a_i = 0$, et $\mu(n) = n_0$ si $\exists i = n_0 < n$ tel que $a_i = 1$.
On considère la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de **Dfc** donnée par $y_n = [1, \mu(n), 1, 1, \ldots]$.
Notons $z = \lim y_n$ au sens de la distance $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}$ et supposons l'injection canonique $\mathbf{Dfc}_2 \to \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ surjective. Donc $z = [z_0; z_1, \ldots]$ et alors

$$z_1 = \begin{cases} n_0 - 1 & \text{si} \quad a_{n_0} = 1 \\ 0 & \text{si} \quad \text{pour tout } i \quad a_i = 0 \end{cases}$$

On a donc **LPO**.

Inversement, Soit $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ c.-à-d. $x = \lim x^{(n)}$ avec $(x^{(n)})$ une suite dans **Dfc**. Donc, il existe un entier n_0 tel que $\mathrm{Ent}(x^{(n)}) = \mathrm{Ent}(x^{(n_0)}) = a_0$ pour tout $n \geq n_0$.
D'après **LPO**, ou bien $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(a_0^+, x) = 0$, ou bien $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(a_0^+, x) > 0$.
Si $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(a_0^+, x) = 0$ alors $x = [a_0, \infty] \in \mathbf{Dfc}_2$.
Si $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(a_0^+, x) > 0$, on pose $\hat{x}_1 = \dfrac{1}{x - a_0}$ (il est bien défini d'après le théorème 6.9 (c)).
Alors $\hat{x}_1 = \lim \hat{x}_1^{(n)}$ avec $\hat{x}_1^{(n)} = \dfrac{1}{x^{(n)} - a_0}$ d'après la continuité de la fonction homographique.
Il existe donc un entier n_1 tel que $\mathrm{Ent}(\hat{x}_1^{(n)}) = \mathrm{Ent}(\hat{x}_1^{(n_1)}) = a_1$ pour tout $n \geq n_1$.
D'après **LPO**, ou bien $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(a_1^+, \hat{x}_1) = 0$, ou bien $\mathrm{d}_{\mathrm{fc2}}(a_1^+, \hat{x}_1) > 0$.

Si $\mathrm{d_{fc2}}(a_1^+, \hat{x}_1) = 0$ alors $x = [a_0, a_1, \infty] \in \mathbf{Dfc}_2$.

Si $\mathrm{d_{fc2}}(a_1^+, \hat{x}_1) > 0$, soit $\hat{x}_2 = \dfrac{1}{\hat{x}_1 - a_1}$ et on réitère le même processus.

Ainsi de proche en proche, nous calculons le dfc fini ou infini de x et par suite $x \in \mathbf{Dfc}_2$. ■

On a constructivement le théorème suivant, qui, classiquement, implique que $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ est la réunion disjointe des ensembles **Irr**, $\mathbf{Q}^+$ et $\mathbf{Q}^-$.

Théorème 6.11 *Si $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ et $x \neq y$ pour tout $y \in \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-$, alors $x \in j(\mathbf{Irr})$.*

Notez que " $x \neq y$ pour tout $y \in \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-$ " peut se réécrire " $\mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^- \subset \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2 - \{x\}$ ".

Preuve. Découle des lemmes 6.12 et 6.13 ci-après.

Lemme 6.12 *Si $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$, $z \in \mathbf{Irr}$ et $\overline{x} = j_1(z)$ alors $x = j(z)$.*

Preuve. Soit (x_n) une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d_{fc2}}(x_n, x) = 0$.
Donc $\lim_{n\to\infty} |\overline{x_n} - \overline{x}| = 0$. C'est à dire, $\lim_{n\to\infty} |j_1(x_n) - j_1(z)| = 0$.
D'où, d'après le théorème 6.7, $\lim_{n\to\infty} \mathrm{d_{fc2}}(x_n, j(z)) = 0$. Par suite, $x = j(z)$. ■

Lemme 6.13 *Si $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ et $x \neq y$ pour tout $y \in \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-$ alors $|\, \overline{x} - r \,| > 0$ pour tout $r \in \mathbf{Q}$.*

Preuve. Soit $x \in \widetilde{\mathbf{Dfc}}_2$ et $r \in \mathbf{Q}$. On a $x < r^+$ ou $x > r^-$. Traitons par exemple le premier cas. On a $x \leq r^-$ et donc $x < r^-$ puisque $x \neq r^-$. Donc $\overline{x} < r$ et $|\, \overline{x} - r \,| > 0$. ■

Conclusion

La notion constructive d'homéomorphisme mérite une étude approfondie. Ce travail a été écrit en bonne partie dans ce but. Nous avons vérifié dans des cas concrets que pour des espaces topologiques typiquement non localement compacts, différentes distances "naturelles" qui définissent les mêmes suites convergentes sont bien des homéomorphismes au sens constructif.

Signalons quelques questions connexes qu'il serait bon d'étudier.

Peut-on prouver que pour deux distances topologiquement équivalentes, les parties fermées situées sont les mêmes ? Si la réponse à cette question est négative, ce qui semble probable[10], y a-t-il moyen d'introduire d'autres critères de controle dans la définition de la continuité de manière à remédier à ce défaut ?

Peut-on de même trouver un critère naturel et constructif qui impliquerait que lorsqu'on a deux distances topologiquement équivalentes sur un espace X, si l'une fait de X un espace complet, alors l'autre également ?

La définition de la continuité comme continuité uniforme près de tout compact (dans le cas d'un espace complet) soulève aussi le problème suivant qui nous semble particulièrement important. Dans le cas d'un espace tel que **Dfc**, le module de continuité sur tout compact est une opération qui prend en entrée un entier naturel n (correspondant à la précision $1/2^n$) et une suite croissante $\alpha \in Sc$. Ainsi, pour controler une fonction définie sur **Dfc** on fait appel à une fonction définie sur $\mathbf{N} \times Sc$. Or l'ensemble $\mathbf{N} \times Sc$ est du même ordre de complexité que l'ensemble **Dfc**. Moralement, pour ne pas avoir tourné en rond, il faudrait que le module de continuité soit plus facile à controler que la fonction elle-même. Pour qu'une fonction soit bien définie constructivement, il faudra en effet non seulement qu'elle soit continue, mais que son module de continuité soit bien défini constructivement.

En termes de fonctionnelles récursives, cela renvoie au problème suivant : est-ce bien le cas qu'une fonctionnelle récursive de type 2 partout définie a un module de continuité sur tout compact qui

[10] Même pour deux distances métriquement équivalentes une telle preuve semble difficile.

est donné par une fonctionnelle récursive de type 2 *plus simple*, en un sens convenable qu'il faudrait définir, que la fonctionnelle de départ ? Si c'est bien le cas, le processus de controle de la fonctionnelle via son module de continuité sur tout compact, lorsqu'on l'itère pour controler a son tour le module de continuité sur tout compact, permet-il toujours une maîtrise complète de la situation en un nombre fini d'étapes ?

Références

[1] Beeson M. : *Foundations of Constructive Mathematics.* Springer-Verlag (1985). 3, 4

[2] Bishop E. : *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw Hill (1967). 2

[3] Bishop E., Bridges D. : *Constructive Analysis.* Springer-Verlag (1985). 4, 6

[4] Bridges D. : *Constructive Functional Analysis.* Pitman, London (1979). 4, 9

[5] Bridges D., Richman F. : *Varieties of Constructive Mathematics.* London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press (1987). 4

[6] Khintchine A. Ya. : *Continued fractions.* P. Noordhoff Ltd. Netherlands (1963).

[7] Khalouani M. : *Étude constructive de problèmes de topologie pour les réels irrationnels* . Thèse de troisième cycle. Marrakech (1997) 7, 8, 9

[8] Khalouani M., Labhalla S., Lombardi H. : *Espaces métriques rationnellement présentés et complexité : le cas d'espaces topologiques liés aux réels irrationnels* . En préparation 6

[9] Ker-I. KO, Friedman H. : *Computational complexity of real functions.* Theoretical Computer Science, 20, 323–352, (1982). 6

[10] Labhalla S., Lombardi H. : *Real numbers, continued fractions, and complexity classes.* Annals of Pure and Applied Logic, 50, 1–28 (1990). 5, 6

[11] Labhalla S., Lombardi H. : *Transformation homographique appliquée à un développement en fraction continue fini ou infini.* Acta Arithmetica, 73 (1), 29–41, (1995). 29

[12] Labhalla S., Lombardi H., Moutai E. : *Espaces métriques rationnellement présentés et complexité : le cas de l'espace des fonctions réelles uniformément continues sur un intervalle compact.* A paraître dans Theoretical Computer Science. 6

[13] Mandelkern M. : *Constructive Irrational Space.* Manuscripta mathematica. 60, 397–406, (1988). 4, 9, 13

[14] Mandelkern M. : *Limited Omniscience and the Bolzano-Weierstrass Principle.* Bull London Math. Soc. 20, (1988). 3

Table des matières