LOGICISMUS A PARADOX (II)

Vojtěch KOLMAN

LOGICISM AND PARADOX (II)

This is a sequel to my article devoted to the development of Fregean logicism. The first part dealt with its „rise and fall", i. e. its initial success in analyzing the concept of number and its subsequent fall at Russell's antinomy. In the course of the previous article we did not (have to) leave the area of the classical Fregean research. On the contrary, Russell's paradox and its analysis bring us now to the second part of the whole story – the (alleged) resurrection of the logistic idea in the works of Crispin Wright and George Boolos. We find ourselves in the middle of a neo-Fregean – structuralistic – approach based on the techniques of modern model-theoretical logic and (meta)mathematics. We do not want to criticize it yet, but only present some of the most important results such as the consistency of Hume's Principle or categoricity of Frege's (and Peano's) second-order arithmetic.

Toto je jakési pokračování a dokončení mého článku věnovaného osudům Fregova logicismu. V první části (Kolman (2005); dále jen *LPI*), orientující se na klasickou éru fregovského bádání, jsem se zabýval některými aspekty jeho „vzestupu a pádu", tj. vylíčil jsem hlavní linii Fregovy bezprecedentní analýzy čísla coby pojmového přívlastku a upozornil na signifikantní rysy odvození Russellova paradoxu, který Fregovy výsledky podle široce sdíleného mínění definitivně znehodnotil. Obsah této druhé a poslední části je údajné „znovuvzkříšení" logicistické ideje, iniciované především pracemi Crispina Wrighta a George Boolose.

Zahrneme sem *re*interpretaci abstrakčních principů jako byl *Grundgesetz V* či Humův princip, a tím i nový pohled na Russellův paradox, dále pak důkaz bezespornosti Humova principu, definici Fregovy aritmetiky a hlavní kroky důkazu tzv. Fregova teorému, tj. odvození Dedekindovy resp. Peanovy charakterizace struktury přirozených čísel – tzv. Peanových axiomů – z Humova principu v rámci logiky druhého řádu a Fregův nedávno „objevený" paralelní důkaz jejich kategoričnosti *via* rekurzivní teorém.

Tím budeme mít konečně připraveno pole pro samostatné studie hodnotící zvláště jemnými nástroji jak místo Fregova logicismu ve filosofii matematiky a dějinách logiky (konstruktivistický a strukturalistický výklad Humova principu), tak běžnou argumentaci pro či proti platnosti logicistické teze.

ORGANON F **12** (2005), No. 2, 121 - 140

2. Zmrtvýchvstání v Hilbertově hotelu

Russellův paradox nezasáhl jen Fregův systém, ale všechny „logicistické" pokusy jeho současníků, mezi nimi i Cantorovu teorii množin. Podobně jako u Frega vyšla i Cantorova analýza čísla z relace rovnopočetnosti (EQ),[1] jeho zájmy byly ale poněkud obecnější. Stejně jako Dedekind se Cantor zpočátku zajímal o topologické vlastnosti bodů na přímce (*lineare Punktmannigfaltigkeiten*) – vlastnosti kontinua. Těm odpovídají čísla reálná, která Cantor (i Dedekind) vlastním způsobem z(re)konstruoval, aby si následně mohl klást otázky týkající se jejich počtu, tedy obrátit pozornost k poměřování množin nekonečných.

2.1 Cantorův paradox

Vedle toho, že jsou dvě množiny X, Y, ať konečné či nekonečné, stejně velké, platí-li EQ, tj. existuje-li prosté zobrazení jedné na druhou, bychom měli sklon říci, že je X co do počtu menší než Y, je-li X prostě zobrazitelná na vlastní část Y. Již dávno před Cantorem však bylo pozorováno to, co obecně známe pod Bolzanovým titulem „paradoxy nekonečna", speciálně prostá zobrazitelnost nekonečné množiny na vlastní část.

Začneme-li pod sebe psát přirozená a sudá čísla

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 2 & 4 & 6 & 8 & \dots, \end{array}$$

je záhy zřejmé, že se odpovídající pojmy nacházejí ve vztahu rovnopočetnosti založeném na prostém zobrazení f(x) = 2x, neboli že oběma řadám přísluší stejné číslo NxPx, Cantorovými slovy „stejná mohutnost" nebo také kardinalita.[2] Každému přirozenému číslu odpovídá právě jedno číslo sudé a *vice versa*. (To, že jsme ze výše uvedeného seznamu vynechali číslo 0 nevadí: nekonečné posloupnosti 0, 1, 2, 3 ... a 1, 2, 3, ... jsou evidentně opět rovnopočetné.) Prostá zobrazitelnost na vlastní část zde tedy nemůže znamenat menší kardinalitu (<), neboť pak by měla nekonečná množina menší počet prvků než ona sama. Dané kritérium je třeba uchopit negativně: je-li

---

[1] Připomeňme, že v *LPI* jsme rovnopočetnost dvou pojmů F a G, symbolicky „$EQ_{x,y}$(Fx.Gy)" a volněji také „F eq G", definovali jako relaci

(EQ) $(\exists R)[(\forall x)(Fx \rightarrow (\exists! y)(Gy \wedge xRy)) \wedge (\forall y)(Gy \rightarrow (\exists! x)(Fx \wedge xRy))]$.

[2] Cantorova mohutnost není definována na pojmech, ale na množinách, vyjdeme-li tedy z běžného značení |A| mohutnosti množiny A, pak pro Fregův kardinální operátor platí NxPx = |{x:Px}|.

množina A zobrazitelná na vlastní část množiny B, pak *není* „větší" neboli je menší nebo rovna (≤).

Novým „paradoxem", který tradice neuvažovala, bylo zjištění, že lze podobnou konstrukci provést rovněž u racionálních čísel, tj. že lze zkonstruovat prosté zobrazení přirozených čísel na racionální, což je o to zvláštnější, že racionální čísla mají zjevně od přirozených radikálně odlišnou strukturu: mezi každými dvěma se nachází nekonečné množství dalších (vlastnost hustoty).[3] Čísla racionální, speciálně dvojice čísel přirozených, mají tedy stejnou mohutnost jako přirozená čísla. Totéž lze přirozeně ukázat pro trojice, obecně tedy *n*-tice čísel pro *n* konečné. K podobné, mnohem překvapivější redukci dimenzí dospěl Cantor i pro kontinuum: ukázal, že přímka, rovina, obecně tedy *n*-rozměrný prostor, mají stejný počet bodů.[4]

Chápeme-li přirozená čísla jako jakousi kanonickou strukturu, lze se nyní ptát, je-li možné i jiné nekonečné množiny nějakým způsobem spočíst, tj. očíslovat přirozenými čísly tak, aby každému odpovídal právě jeden její prvek a *vice versa*. Této vlastnosti, tj. rovnopočetnosti množiny (extenze pojmu) s množinou (ne nutně všech) přirozených čísel, se říká *spočetnost* a výše uvedené dílčí výsledky by mohly vést k domněnce, že jiné nežli spočetné nekonečno není. V rozporu s tím Cantor ukázal, že množina reálných čísel (kontinuum) je nespočetná, že tedy „existují" i jiné – vyšší – mohutnosti.

Cantorův argument je opět velmi názorný: Mějme všechna reálná čísla intervalu [0, 1] nějakým způsobem očíslována přirozenými čísly, tj. uspořádána do řady $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jejíž *i*-tý člen zapisujme jako $0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\ldots$. Uvažme nyní reálné číslo $c = 0.c_1c_2c_3\ldots$, pro jehož *j*-tý člen desetinného rozvoje platí

$$c_j = \begin{array}{ll} 1 & \text{jestliže } a_{jj} \neq 1 \\ 2 & \text{jestliže } a_{jj} = 1. \end{array}$$

Toto číslo je jednoznačně popsáno, zároveň se však od každého prvku a_i posloupnosti liší v *i*-tém členu desetinného rozvoje, pro nějž z definice platí

[3] Uvažujeme-li pro jednoduchost systém všech dvojic přirozených čísel, je příslušné zobrazení dáno předpisem $c(x,y) = 1/2(x+y)(x+y+1)+x$. Racionálních čísel je tedy – jak lze odvodit – méně (≤) než přirozených, opačná nerovnost (≥) je triviální, a zbytek vyplývá z tzv. Cantor-Bernsteinovy věty, tj. tvrzení: $|A| \leq |B|, |A| \geq |B| \rightarrow |A| = |B|$.

[4] Pro jednoduchost vezměme „pouze" interval [0,1] reálné osy. Každé číslo z tohoto intervalu má jednoznačně určený nekonečný desetinný rozvoj. Přiřadíme-li dvojici čísel $x = 0,x_1x_2x_3\ldots$ a $y = 0,y_1y_2y_3\ldots$ číslo $z = 0,x_1y_1x_2y_2\ldots$, je zřejmé, že jsme tak prostě zobrazili body příslušného čtverce *do* příslušné přímky, tedy ukázali, že jich není více. – Cantor si původně myslel, že tím dokazuje celou rovnost, tj. že se jedná i o zobrazení *na*, což není pravda s ohledem na dvojznačnost rozvoje čísel typu 0.499999 a 0.500000, srv. Dauben (1979). Tím se zde ale nemusíme trápit: nám stačí aplikovat opět Cantor-Bernsteinovu větu.

$c_i \neq a_{ii}$. Nemůže tedy být v uvedeném výčtu, ačkoli tam podle předpokladu měla být všechna čísla intervalu.

Tomuto a dalším podobným argumentům se říká *diagonální*,[5] neboť zmíněná konstrukce – diagonalizace – čísla *c* spočívá v jeho odlišnosti od diagonály a_{ii}. Obdobným argumentem lze ukázat, že i množina všech podmnožin P(N) přirozených čísel N (obecně tedy nekonečné spočetné množiny) není spočetná, neboli je *nespočetná*. Libovolnou podmnožinu *u* lze reprezentovat jako nekonečnou posloupnost jedniček a nul neboli pomocí charakteristické funkce u(x) takové, že

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 \quad \text{jestliže } x \in u \\ &= 0 \quad \text{jestliže } x \notin u. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li nyní spočetnost všech prvků z P(N), tj. jejich očíslování $u_1, u_2, \ldots$ přirozenými čísly, dovolí nám diagonální úvaha zkonstruovat množinu, která mezi nimi není, totiž *v* takovou, že $v(x) \neq u_x(x)$ neboli $v = \{x; x \notin u_x\}$. Této definice, nyní již bez diagonální (dvojrozměrné) doprovodné ilustrace, lze ovšem použít pro libovolnou, tj. i nespočetnou nekonečnou množinu, necháme-li analogicky všechny její podmnožiny zkusmo indexovat jejími prvky. Proti původní domněnce jediného nekonečna zde tedy stojí neomezená hierarchie větších a větších nekonečen.

2.2 Cantorův paradox

Posledně jmenované tvrzení, tzv. *Cantorova věta*, podle níž má potence množiny větší mohutnost nežli tato množina sama, zajistilo sice teorii množin definitivní status nauky o (nyní již stratifikovaném) nekonečnu, zároveň s ní na svět přišel další z nekonečných paradoxů, tzv. paradox Cantorův. Zabýváme-li se mohutnostmi předmětů, je zřejmé, že největší počet musí mít množina předmětů všech, tj. celé univerzum V. Podle Cantorovy věty ale mohutnější množina existuje, totiž P(V). Spor! – Pro nás je momentálně zajímavé především to, že právě analýzou této antinomie objevil Russell spor ve Fregově systému.

Vycházeje z výše uvedeného předpokladu, že univerzu, tj. extenzi predikátu „$\xi = \xi$" náleží největší číslo Nx(x = x) a že v něm kromě množin existuje báze prvků, které množinami nejsou – logických atomů –, uvažoval Russell[6] zobrazení *f* univerza V *na* P(V) takové, že

[5] Výše uvedený diagonální argument k důkazu nespočetnosti použil Cantor ale až roku 1891, první – v jistém smyslu elegantnější – pocházel z roku 1984 a využíval toho, že je množina reálných čísel uzavřená na suprema. Srv. k tomu Hallett (1984) či obecně Dauben (1979).

[6] Viz Russell (1903), §349.

$$f(x) = \{x\} \quad \text{je-li } x \text{ atom}$$
$$\quad = x \quad \text{jinak.}$$

Toto zobrazení není prosté, neboť je-li x atom, platí $f(x) = \{x\} = f(\{x\})$. Russellovu účelu ovšem postačuje, neboť využívá předpokladu, že je P(V) ve V obsaženo, a to vlastní inkluzí. Paralelně k důkazu Cantorovy věty uvažuje nyní Russell kritickou množinu $v = \{x; x \notin f(x)\}$. Jelikož pro atom platí $x \in \{x\} = f(x)$, redukuje se definice na $v = \{x; x \notin x\}$. Zatímco v Cantorově případě vedl předpoklad existence množiny u takové, že $f(u) = v = \{x; x \notin f(x)\}$, přes pozorování, že $u \in f(u)$ tehdy a jen tehdy, když $u \notin f(u)$, k popření existence zobrazení f, zde se – via Russellův paradox – ocitá v pochybném světle již sama množina $v = \{x; x \notin x\}$, tedy samotný způsob definování množinových objektů: $v \in v$ tehdy a jen tehdy, když $v \notin v$.

Souvislost Russellova paradoxu s Cantorovým je ovšem mnohem hlubší, než by se z výše naznačené historie Russellova objevu mohlo zdát. Podívejme se na princip pojmové abstrakce očima současné teorie modelů, tedy ptejme se, jak musí vypadat struktura, v níž platí formule

$$\#F = \#G \leftrightarrow F \sim G.$$ [7]

V takovéto struktuře má symbolu „#" odpovídat funkce f přiřazující podmnožinám nosiče A (univerza) jeho prvky, a to tak, že množinám ekvivalentním podle relace ~ přiřazuje prvky stejné, množinám neekvivalentním různé. Jedná se tedy o funkci z P(A) do A (symbolicky f: $P(A) \rightarrow A$), pro níž platí:

$$f(X) = f(Y) \leftrightarrow [X]_{\sim} = [Y]_{\sim}.$$

Uvážíme-li namísto množiny P(A) její kvocient PA/~, tj. množinu všech jejích ekvivalenčních tříd $\{[X]_{\sim}; X \in P(A)\}$, můžeme uvedenou ekvivalenci chápat jako požadavek na existenci funkce g_f, která *prostě* zobrazuje P(A)/~ do A (symbolicky g_f: $P(A)/\sim \rightarrow_{1\text{-}1} A$). Pro mohutnost příslušných množin to znamená, že musí platit

$$(1) \qquad |P(A)/\sim| \leq |A|.$$

[7] Připomeňme, že v *LPI* jsme tzv. *Grundgesetz V*

$$(GV) \qquad \{x: Fx\} = \{x: Gx\} \leftrightarrow (\forall x)(Fx \leftrightarrow Gx),$$

odpovědný za odvození Russellova paradoxu, nahlédli jako speciální případ tzv. *pojmového principu abstrakce* formy

$$\#F = \#G \leftrightarrow F \sim G,$$

kde „F" a „G" reprezentují pojmy prvního řádu a „#F", „#G" předměty, které pod ně spadají resp. mohou spadat.

Toto je tedy obecná analýza takovéhoto typu abstrakčních definic. Konkrétnější představy o příslušné funkci f závisí na specifikaci příslušné relace ekvivalence ~, rozdělující P(A) na určitý počet vzájemně disjunktních ekvivalenčních tříd. V případě GV je onou ekvivalencí totožnost prvků, kterou u množin bereme za definici jejich identity – GV je specifická obdoba axiomu extenzionality. To ale znamená, že se P(A) rozpadne na právě tolik ekvivalenčních tříd, kolik je v A podmnožin, tj.

(2) $|P(A)/\sim| = |P(A)|$.

S ohledem na (1) po nás tedy GV chce, aby platilo

(3) $|P(A)| \leq |A|$,

což je ovšem pravý opak tvrzení Cantorovy věty!

2.3 Fregova aritmetika

Cantorův a Russellův paradox mají tedy stejnou pozitivní příčinu – Cantorovu větu. S ohledem na ni není GV splnitelný v žádné standardní struktuře predikátové logiky druhého řádu.

Jestliže Frege od počátku axiomu GV nedůvěřoval, tj. pochyboval, zda se jedná o *analytický* princip, rozhodně neočekával – stejně jako nikdo z jeho současníků –, že se jedná dokonce o negaci takovéhoto principu, tj. *kontradikci*. Odtud také jeho překvapení a neschopnost, ba neochota paradox ošetřit.

Úkol GV v rámci systému byl jasný: zavést logické předměty, mezi nimi i čísla. Jeho vyškrtnutí by tedy sice blokovalo výše popsané odvození sporu, zároveň ale i odvození vět aritmetiky, tedy sledovaný cíl. Odhlédněme ale na okamžik od obecných problémů inkonzistence GV, tedy otázek spjatých s úlohou množinové abstrakce, a vraťme se k Fregově výkladu z *Grundlagen*, speciálně ke kontextu, v němž byl GV zaveden. Zmínili jsme, že tomu tak nebylo explicitně, ale implicitně v rámci důkazu Humova principu (HP), jenž také hraje v poloformálním nárysu dalších kroků rekonstrukce aritmetiky prominentní roli.[8] Je tedy na místě domněnka, zda aritmetika, speciálně její axiomatizace v podobě tzv. Peanových axiomů, není odvoditelná již z Humova principu samotného.

Tuto „hypotézu" vyslovil jako první Charles Parsons roku 1965. Crispin Wright roku 1983 příslušné dedukce předvedl, spolu s další domněnkou, totiž že je Humův princip, narozdíl od GV, konzistentní. V reakci na Wrigh-

[8] V *LPI* jsme Humův princip zavedli jako jeden z pojmových abstrakčních principů

(HP) $NxFx = NxGx \leftrightarrow F \text{ eq } G$,

v němž *eq* značí relaci rovnopočetnosti.

tovu knihu dokázal George Boolos, že Humův princip skutečně konzistentní je a spolu s logikou druhého řádu (L2) tvoří systém ekvivalentní Peanově aritmetice druhého řádu (PA2), který může být nazýván Fregovou aritmetikou (FA).[9] Boolos dále zdůraznil, že Frege ve svém náčrtu vlastního provedení logicistické teze v *Grundlagen* použil inkonzistentní GV pouze k důkazu HP, a navrhl, aby byla odvoditelnost Peanových axiomů z Humova principu nazývána Fregovým teorémem (FT).[10] Richard Heck nakonec ukázal, že Frege všechna zmíněná odvození v rámci formalismu *Grundgesetze* skutečně provedl, a to včetně Dedekindova důkazu kategoričnosti PA2.[11] Výskyt GV se v těchto dedukcích sice neomezuje pouze na důkaz HP, v takových případech jej lze ale eliminovat. Tolik hlavní milníky novofregovského bádání.[12] K posouzení jejich postavení v obecných otázkách vztahu aritmetiky a logiky, čísla a paradoxu, ovšem potřebujeme detaily. Začněme onou bezesporností HP.

Boolosův důkaz spočívá v konstrukci modelu, jehož bází je množina N všech přirozených čísel. Humův princip jakožto případ zákona abstrakce vyžaduje existenci funkce *f*, přiřazující podmnožinám nosiče, tj. prvkům P(N), stejná čísla tehdy a jen tehdy, jsou-li rovnopočetné. Definice $f(X) = |X|$ funguje dobře pro případy, kdy je X konečná. Pak je $|X|$ přirozené číslo *n*, vyjadřující počet předmětů množiny X, a zároveň prvek nosiče. P(N) nemá ovšem pouze konečné prvky: náleží jí celá N, množina všech sudých čísel, lichých čísel atd. $|X|$ je ve všech těchto případech nekonečná mohutnost (nekonečné kardinální číslo). X tedy výše uvedenou funkcí není zobrazována do N, neboť tam jsou pouze konečné kardinály.

Cesta k nápravě ale není obtížná: ačkoli je v P(N) nekonečně mnoho nekonečných množin (vyjmeme-li např. z N konečně mnoho čísel získáme opět nekonečnou), všechny mají stejnou mohutnost, totiž mohutnost celého N. Jinými slovy: jsou spočetné a $|X|$ pro X nekonečné se tak vždy rovná prvnímu nekonečnému kardinálnímu číslu $\aleph_0$. Nyní máme dvě základní možnosti jak definovat model, v němž platí HP.

(1) Ponechat definici $f(X) = |X|$, ovšem s tím, že prvky nosiče rozšíříme o $\aleph_0$; namísto N tedy uvažujeme množinu $\{0, 1, 2, \ldots, \aleph_0\}$, která je opět spočetná, tj. nemá jiné než spočetné podmnožiny.

[9] Viz Boolos (1987). V článku je odkaz na Burgessovu recenzi, v níž je příslušný důkaz konzistence naznačen.

[10] Viz Boolos (1990).

[11] Viz Heck (1993), Heck (1995).

[12] Reprezentativní soubory předchozích, ale i jiných článků moderního fregovského bádání představují Boolos (1998), Demopoulos (1995) a Schirn (1998).

(2) Ponechat nosič N a redefinovat funkci f

$$f(X) = |X|+1 \quad X \text{ je konečná}$$
$$= 0 \quad X \text{ je nekonečná.}$$

V obou případech jsou množinám různé mohutnosti přiřazeny různé prvky nosiče a *vice versa*. HP je tedy splněn, čili bezesporný. Podle Boolosovy rady se měl Frege ihned po obdržení Russellova dopisu zaregistrovat v Hilbertově hotelu.[13]

2.4 Čtyři principy

Idiom *impredikativity* spojil Russell s představou bludného kruhu: princip zavádí nové předměty, zároveň ale již předpokládá, že jsou v univerzu, přes něž kvantifikuje. Tento konstruktivní element v hilbertovské metodě implicitních definic a průkazů bezespornosti předvedením libovolného modelu chybí; hierarchie množin, jejich potencí a funkcí je jednoduše předpokládána jako daná. Russellově představě bludného kruhu tedy odpovídá pouze fakt zobrazování podmnožin nosiče D do tohoto nosiče samotného, tj. skutečnost, že zvažujeme funkci f: P(D)→D. Okolnost, že toto zobrazení realizovat nelze, sama nijak paradoxní není, stejně jako okolnost, že to v jiných případech – jako je HP – vychází.

Výše popsanému konstruktivnímu výkladu abstrakční definice, postupující od ekvivalence nad původními objekty, k rovnosti mezi objekty novými, by pro případ definic typu GV či HP lépe odpovídala úvaha funkce f: P(D)→D', kde D' reprezentuje doménu nových – od předmětů D odlišných objektů. V rámci teorie modelů se jedná o tzv. *přirozené zobrazení f* množiny P(D) do jejího kvocientu P(D)/~, pro které platí $f(X) = [X]_{\sim}$, obecně lze ale uvažovat doménu D' jakoukoli, zůstane-li splněna podmínka abstrakční definice, tj. že $f(X) = f(Y)$ tehdy a jen tehdy, jestliže $[X]_{\sim} = [Y]_{\sim}$ neboli $X \sim Y$; jinými slovy: D' musí mít alespoň takový počet prvků jako P(D)/~. Tím je paradox eliminován.

Otázka, co Fregovi bránilo přijmout tak jednoduché řešení paradoxu, při němž stačilo rozlišit dva různé typy diskurzů, může samozřejmě končit triviálním odkazem na jeho ideu všeobjímajícího diskurzu univerzálního, tedy v rovině osobního – dnes již překonaného – přesvědčení. Důvody jsou však překvapivě technického charakteru. Vraťme se nyní znovu k formuli $\#F = \#G \leftrightarrow F \sim G$ a otázkám její modelově-teoretické interpretace.

V Hilbertově pojetí se zde rovněž jedná o otázku *implicitní definice* funkce f odpovídající symbolu „#" – definovaný objekt není zaveden přímo, ale

[13] Boolos (1987).

v kontextu axiomů, které má splňovat. My jsme v předcházejících kapitolách dospěli k tomu, že ve struktuře s nosičem A může takováto funkce existovat jen tehdy, jestliže $|P(A)/{\sim}| \leq |A|$. Vše záleží tedy od příslušné ekvivalence $\sim$.

Uvažme nyní čtyři případy ekvivalence na P(A), kde pro $X,Y \in P(A)$ platí:

(1) $X{\sim_1}Y \leftrightarrow (\forall x)[(x{\in}X \leftrightarrow x{\in}X) \vee (x{\in}Y \leftrightarrow x{\in}Y)]$

(2) $X{\sim_2}Y \leftrightarrow (X-Y) \cup (Y-X)$ je konečné

(3) $X{\sim_3}Y \leftrightarrow (\exists g,h)[(g\colon X \rightarrow_{1\text{-}1} Y) \wedge (h\colon Y \rightarrow_{1\text{-}1} X)]$

(4) $X{\sim_4}Y \leftrightarrow (\forall x)(x{\in}X \leftrightarrow x{\in}Y)$.

V případě (1) jsou si libovolné dva prvky P(A) ekvivalentní, platí tedy $|P(A)/{\sim_1}| = 1$. Příslušný abstrakční princip lze proto splnit v libovolné struktuře, neboť ta je z definice (kterou se nyní nemá cenu zabývat) neprázdná, tj. ≥ 1.

Případ (4) je náš známý GV, který naopak neplatí v žádné struktuře, neboť by pak muselo platit nepřípustné $|P(A)/{\sim_4}| = |P(A)| \leq |A|$. Zbývají případy (2) a (3). Oba vykazují podobný druh inverze jako případy (1) a (4), totiž rozlišíme-li v nich (a) konečný a (b) nekonečný nosič A.

U konečného nosiče vede případ (2) triviálně na případ (1), tj. všechny podmnožiny jsou ekvivalentní. U nekonečného A se dostaneme naopak k případu (4): Uvažujme nejprve systém všech jeho konečných podmnožin. Ten má kardinalitu stejnou jako A, dejme tomu κ. Pro X libovolnou podmnožinu A tedy existuje jen κ ekvivalentních prvků P(A), čili $|[X]{\sim_2}| = \kappa$. Jelikož kvocient $P(A)/{\sim_2}$ představuje úplný rozklad P(A) do λ disjunktních množin, platí $2^{\kappa} = |P(A)| = \kappa\lambda = \max\{\kappa,\lambda\}$, čili $\lambda = 2^{\kappa}$. Z toho vyplývá, že $|P(A)/{\sim_2}| = |P(A)|$.

V (3) případě je tomu právě naopak. X a Y jsou zde ekvivalentní jestliže $|X| \leq |Y|$ a $|Y| \leq |X|$. Podle Cantor-Bernsteinovy věty můžeme z těchto dvou nerovností usoudit na $|X| = |Y|$, neboli existenci prosté funkce *h* zobrazující X na Y (symbolicky: $h\colon X \leftrightarrow_{1\text{-}1} Y$). (3) je tedy náš známý HP. Uvaž-me nyní A konečné o *n* prvcích $a_1, a_2, ..., a_n$. Přiřadíme-li *i*-tému prvku všechny množiny z P(A) o *i* prvcích, zůstane jedna jediná množina nepřiřazena, a to množina prázdná, reprezentující mohutnost 0. Platí tedy $|P(A)/{\sim_3}| = |A|+1 > |A|$. – Vzpomeneme-li konstrukci modelu HP z předchozí kapitoly, vidíme nyní jasně, že v ní byla využita vlastnost nekonečné báze A, totiž že v ní není počet kardinálů menších nebo rovných $|A|$ větší než $|A|$, ale menší nebo (v tomto případě dokonce) roven $|A|$.

Sečteno a podtrženo: Předpokládaná platnost HP indukuje nekonečnost domény D, což je při budování aritmetiky zásadní zjištění. Tato zásluha ovšem náleží právě zmíněné impredikativitě, která vyloučila existenci funkce g_f: $P(D)/\!\sim_3 \to_{1\text{-}1} D$ pro D konečné, pro nekonečné ale nikoli.

3. Fregův teorém

Výše popsaný sémantický důkaz bezespornosti HP konstrukcí modelu lze snadno převést na syntaktický důkaz v rámci axiomatické teorie množin (Zermelo-Fraenkelova ZF) resp. Peanovy aritmetiky druhého řádu (PA2). V těchto teoriích lze formálně reprodukovat výše uvedené argumenty. Kdyby tedy byl HP nekonzistentní, musely by být ony samy nekonzistentní; jinými slovy: HP je bezesporný relativně k bezespornosti ZF resp. PA2.

Nyní se budeme zabývat opačným problémem, totiž reprodukovatelnosti aritmetiky v systému logiky vyššího, konkrétně druhého řádu (L2), prezentované v *Begriffsschrift*, a Humova principu, prezentovaného v *Grundlagen*, coby jediného mimologického principu formy

$$\mathrm{NxFx} = \mathrm{NxGx} \leftrightarrow \mathrm{F\ eq\ G},$$

kde $\mathrm{Nx\Phi x}$ představuje náš jediný mimologický symbol. Tento systém nazýváme podle Boolosova návrhu Fregovou aritmetikou (FA). Půjde nám o hrubý nárys Fregovy rekonstrukce aritmetiky, zejména dedukce axiomů PA2, z níž a Dedekindovy paralelní analýzy si lze učinit cenný přehled o struktuře přirozených čísel.

3.1 Nula, jedna, ...

Úkolem HP resp. operátoru $\mathrm{Nx\Phi x}$ je zavedení čísel. Vzhledem k tomu, že jsou funkční symboly interpretovány jako totální funkce, platí

$$(\forall F)(\exists x)(x = \mathrm{NxFx}).$$

K čemu se ale vztahuje proměnná „F“ resp. co je oborem hodnot kvantifikace vyšších řádů? V předchozí kapitole jsme ve shodě s moderní tzv. standardní sémantikou předpokládali, že jsou to „všechny“ podmnožiny P(D) oboru D, k němuž se vztahuje předmětná proměnná „x“. Frege ovšem nehovoří o množinách ale o pojmech prvního řádu, lze tedy předpokládat, že kvantifikuje přes výrazy jistého výrazového systému. Této druhé kvantifikaci se říká substituční, té první objektová. Otázky jejich vzájemného vztahu ponechme nyní stranou a v obecném případě předpokládejme použití první z nich, tj. pokračujme v úzu předcházející kapitoly.

Po odvození HP z nekonzistentního GV, který se snažíme eliminovat, předkládá Frege v *Grundlagen* několik definic. Pomineme-li samotný pojem čísla ve smyslu Cantorovy mohutnosti neboli čísla kardinálního, jenž lze snadno získat z HP jako $(\exists F)(\xi = NxFx)$, je první významnou definicí číslo 0:

(D0) $0 =_{Def} Nx(x \neq x)$

coby číslo příslušející pojmu „neroven sobě'". Z HP a D0 lze snadno odvodit, že pojmu F přísluší číslo 0, tj. $NxFx = 0$, tehdy a jen tehdy, je-li F prázdný, tj. $(\forall x)\neg Fx$.

Máme-li jistotu jednoho předmětu, totiž 0, můžeme vytvořit predikát „být roven 0", a dospět tak k definici dalšího předmětu

(D1) $1 =_{Def} Nx(x = 0)$.

Jelikož pod pojem „$\xi \neq \xi$" nespadá žádný předmět, pod pojem „$\xi = 0$" pak předmět jediný, a to 0, platí $\neg(x \neq x \text{ eq } x = 0)$, tedy $Nx(x \neq x) \neq Nx(x = 0)$. Výše uvedeným postupem, tj. konstrukcí

(Dn) $n =_{Def} Nx(x = 0 \vee x = 1 \vee \ldots x = n-1)$

pak získáme nekonečnou posloupnost dokazatelně odlišných předmětů $0 \neq 1 \neq 2 \neq$ atd.

Vzpomeneme-li si znovu na Fregovu adjektivní definici čísla (viz *LPI*, §1.1), tj. uchopení čísel jako tzv. numericky definitivních kvantifikátorů

(E0) $(\exists_0 x)Fx \equiv_{Def} \neg(\exists x)F(x)$,

(En) $(\exists_n x)Fx \equiv_{Def} (\exists x)[Fx \wedge (\exists_{n-1} y)(Fy \wedge x \neq y)]$,

vidíme nyní, že přes zdánlivě shodnou formu je rozdíl mezí ní a definicí právě předloženou zcela zásadní. Kdyby mělo univerzum D pouze konečný počet *n* předmětů, nespadaly by pro $m > n$ pod pojmy $\exists_m x\Phi x$ žádné pojmy prvního řádu a všechny tyto ($m > n$) druhořádové kvantifikátory by si tedy byly extenzionálně ekvivalentní. Budování aritmetiky by tak bylo závislé na stavu počítaného předmětného univerza D čili na mimologickém předpokladu jeho nekonečnosti. V případě HP je tomu (v jistém smyslu)[14] jinak: pojem „neroven sobě", z něhož byla odvozena nula, nepředpokládá, že by v předmětném univerzu D bylo něco, co by pod něj muselo spadat, neboť

[14] Otázka závislosti a nezávislosti příslušných definic a principů na nekonečnosti univerza je trochu složitější, než by se z těchto řádek mohlo zdát, a budeme se jí zabývat jinde. (Viz můj nepublikovaný manuskript Kolman (2004b)). Předběžně řekněme, že lze situaci vidět také takto: adjektivní definice připouští jak konečné tak nekonečné univerzum, v případě konečného je ale *externě* smysluprázdná; definice prostřednictvím HP konečné univerzum vylučuje v tom smyslu, že je v něm nesplnitelná, tj. *interně* smysluprázdná.

pod něj – narozdíl třeba od pojmu „roven sobě" – nikdy nespadá nic. Díky této své „nezávislosti" na stavu univerza garantuje pojem „neroven sobě" libovolnému univerzu existenci jednoho předmětu, čísla 0. To je impredikativita v praxi! Z předpokladu existence *n* předmětů získáme *n*+1-ní téhož typu.

Tento nový postup má v kontrastu k adjektivnímu navíc i výhodu jisté externí plauzibility: tím, že sráží čísla znovu na úroveň předmětu, umožňuje jejich počítání. Nová analýza nám např. dovoluje říci, že pojmu „prvočíslo menší než 10" přísluší číslo 4, aniž by nás tím jako v případě adjektivní analýzy dostala o dvě hierarchie výš k pojmům čtvrtého řádu, určeným k počítání pojmů řádu druhého atd. atd. Zákaz impredikativity, která je obviněna z paradoxu připuštěním „bludného" F({x;Fx}), by např. vedl k vyloučení zjevně pravdivé věty

Nx(x je prvočíslo menší než 12) je prvočíslo menší než 12

z jazyka aritmetiky.

3.2 Následník v řadě a indukce

Analýza problému Julia Caesara pro případ adjektivních definic (E0), (En) nás v *LPI* vedla k potřebě rozhodnout, zda se libovolný objekt příslušného typu nachází v této řadě či nikoli, tedy zda je to číslo. Řekli jsme, že induktivní definice jako (E0), (En) explicitně definují každé číslo v řadě 0, 1, 2, ..., nikoli však pojem čísla samotný. Jelikož jsme mezitím díky velkorysosti relace rovnopočetnosti dospěli i k číslům nekonečným, je třeba říci výslovně, že se nám jedná o definici čísel přirozených, tj. konečných kardinálů neboli následníků čísla 0 v řadě určené definicí (D0), (Dn). Pro kardinální číslo obecné již ostatně explicitní definici máme. – Problém je nyní stejný jako u (E0), (En), tj. jak definovat pojem Fin(x) přirozeného čísla.

Řešení předložil Frege zároveň se svou *Begriffsschrift*, a ve skutečnosti to byl tento problém, kvůli kterému svoji esej napsal. Jeho východiskem byla relace přímého následníka dvou (přirozených) čísel v řadě. V *Grundlagen* (§76) je popsána následovně

(S) $\quad mSn \equiv_{Def} (\exists F)(\exists y)[Fy \wedge NxFx = n \wedge Nx(Fx \wedge x \neq y) = m].$

Podobnou definici lze samozřejmě podat i pro adjektivní případ, tj. lze popsat analogickou relaci třetího řádu, která platí mezi numericky definitivními kvantifikátory tehdy a jen tehdy, liší-li se jejich indexy o 1.

O relaci *S* dokazuje Frege několik důležitých vět. Podle první je to relace jednoznačná vůči levému argumentu, tj.

(V1a) $(mSn_1 \wedge mSn_2) \rightarrow n_1 = n_2.$

Tím máme zajištěno, že se relace přímého následníka chová jako funkce. Podobně lze ovšem dokázat i jednoznačnost vůči pravému argumentu

(V1b) $(m_1Sn \wedge m_2Sn) \rightarrow m_1 = m_2$.

Relace *S* je tedy jedno-jednoznačná.

Další věta říká, že *S* žádnému argumentu nepřiřazuje číslo 0, neboli:

(V2) $\neg mS0$.

To je dáno jednoduše tím, že předcházení ve smyslu mSn vyžaduje z definice (S) existenci prvku *y* spadajícího pod pojem F, pro který NxFx = n. NxFx = 0 platí ovšem tehdy a jen tehdy, je-li pojem F prázdný, což jsme následujíce Frega ukázali v předchozím paragrafu.

V úvodu tohoto oddílu jsme jako cíl další analýzy položili definici přirozeného čísla. Souvislost s definicí *následníka* v číselné řadě je zřejmá: máme-li ji, můžeme přirozené číslo definovat jako *x* takové, které je následníkem 0 v číselné řadě. Relace *S* ovšem kýženou následnickou definicí zdaleka není: je to vlastně jen explicitní přepis induktivního kroku definice (En) resp. (Dn), který nám dovolí nanejvýš říci, že přirozené číslo – následník 0 – je to, k čemu lze dospět nějakým konečným počtem *n* aplikací relace *S přímého* následníka v číselné řadě. Zmíněné *n* je opět schematické písmeno, nikoli součást explicitní definice.

Obecného následníka *S** definuje Frege z *přímého S* pomocí logiky druhého řádu způsobem, který dnes zdomácněl pod názvem „*ancestral definition*", neboli definice předka, což je relace inverzní k té, kterou uvažujeme. Definice samotná je aplikovatelná na libovolnou relaci R:

$$(R^*)\quad aR^*b \equiv_{Def} (\forall F)[(\forall x)(aRx \rightarrow Fx) \wedge \wedge (\forall x,y)(Fx \wedge xRy \rightarrow Fy) \rightarrow Fb].$$

Definujeme-li druhořádový pojem HxΦx vlastnosti Φ dědičné v R-řadě jako

$$(H)\quad Hx\Phi x \equiv_{Def} (\forall x,y)(\Phi x \wedge xRy \rightarrow \Phi y),$$

říká výše uvedená definice, že jsou předměty *a*, *b* ve vztahu obecného následníka R* tehdy a jen tehdy, má-li *b* všechny dědičné vlastnosti v R-řadě, které mají všichni přímí R následníci *a*.

Na základě definice R* lze nyní snadno zavést odvozenou relaci $R^{*=}$:

$$aR^{*=}b \equiv_{Def} aR^*b \vee a = b$$

tzv. nevlastního (*improper*) následníka, který mohl být ostatně definován přímo jako

$$(R^{*=})\quad aR^{*=}b \equiv_{Def} (\forall F)[Fa \wedge (\forall x,y)(Fx \wedge xRy \rightarrow Fy) \rightarrow Fb].$$

Nyní již můžeme snadno definovat kýžené

(Fin) $\mathrm{Fin}(x) \equiv_{\mathrm{Def}} 0S^{*=}x$.

Tím se ovšem role vlastního resp. nevlastního následníka (R^*) resp. ($R^{*=}$) nevyčerpává, ba naopak: s jejich pomocí dokáže Frege k již odvozeným vlastnostem relace *S* přidat netriviální vlastnosti další. Významný úsudkový princip, který při jejich důkazu Frege používá, je přímým důsledkem obou definic: jedná se o princip matematické indukce.

3.3 Peanova relace

Podle principu matematické indukce jsme oprávněni k tvrzení, že vlastnost F platí pro všechna přirozená čísla, jestliže jsme prokázali, že (i) platí pro 0 a (ii) že je dědičná v řadě určené relací *S*. Jedná se tedy o úsudkové pravidlo:

($SI^=$) $F0, Fx \wedge xSy \rightarrow Fy \Rightarrow \mathrm{Fin}(z) \rightarrow Fz$

coby konkrétní příklad obecnějšího:

($RI^=$) $Fa, Fx \wedge xRy \rightarrow Fy \Rightarrow aR^{*=}z \rightarrow Fz$.

Odvození ($RI^=$) z definice ($R^{*=}$) je triviální: Předpokládejme obě formule antecedentu pravidla spolu s antecedentem jeho závěru, tj. formulí $aR^{*=}z$, což je vlastně *definiendum* ($R^{*=}$). Antecedent *definiens* je nyní shodný s antecedentem obhajovaného pravidla, který předpokládáme, a aplikací MP pak získáme formuli Fz, tedy konsekvent konsekventu našeho pravidla. Dokázáno. – Paralelně lze uvažovat a odvodit i pravidlo

(RI) $aRx \rightarrow Fx, Fy \wedge yRz \rightarrow Fz \Rightarrow aR^*w \rightarrow Fw$.

a jeho konkretizací pro S získanou instanci (SI).

Podíváme-li se nyní zpět, vidíme, že pravidla (SI) resp. ($SI^=$) a věty (V1a-b), (V2) jsou zatím vše, co jsme dokázali o relaci *S*. Čtenář znalý Peanových axiomů ví, že jsme tím značně pokročili v důkazu Fregova teorému, explicitnější ale budeme v tomto ohledu až později.

V *Grundlagen* Frege dále načrtává důkaz toho, že relace *S* každému přirozenému číslu přiřazuje opět nějaké přirozené číslo. Z toho plyne, že ji lze na oboru přirozených čísel uchopit jako *totální* funkci. Fregovu rámcovou ideu, jak takového výsledku dosáhnout, jsme již nastínili: Máme-li zkonstruovánu řadu 0, 1, ..., *n* čísel, pak číslo *n*+1 je počet, který náleží této řadě jako celku. Jelikož disponujeme relací $S^{*=}$, jsme toto číslo schopni explicitně vyjádřit formulí jako $Nx(xS^{*=}n)$. Zbývá tedy dokázat

(V3) $\mathrm{Fin}(m) \rightarrow mSNx(xS^{*=}m)$.

Tento důkaz již tak triviální není.

Frege jej provádí indukcí aplikovanou na formuli (vlastnost) $F\xi$: $\xi SNx(xS^{*=}\xi)$. První část induktivního důkazu, tj. formule F0, je relativně snadná. K důkazu dědičnosti vlastnosti Fξ je ale zapotřebí coby významný mezikrok věta, podle níž žádné přirozené číslo není svým vlastním následníkem, neboli:

(V4) $\mathrm{Fin}(m) \rightarrow \neg mS^{*}m.$

Zde je požadavek konečnosti *m* evidentní, neboť podle definice (S) je ihned zřejmé, že nekonečná *m* sama sebe v S-řadě předcházejí. Z (V4) se pak předpoklad Fin(m) přenáší do věty (V3).

K důkazu její netriviální části (tj. rozpisu druhé části důkazu indukcí)

(L) $cSd \rightarrow [cSNx(xS^{*=}c) \rightarrow dSNx(xS^{*=}d)]$

je nyní zapotřebí dokázat, že platí korolár

(K) $cSd \rightarrow (\forall x)(xS^{*=}d \wedge x \neq d \rightarrow xS^{*=}c).$

Frege v *Grundlagen* naznačuje, že na to stačí (V4), tak je ale ve skutečnosti možné odvodit jen podmíněnou variantu (K)

(K') $\mathrm{Fin}(d) \rightarrow (K).$

Máme-li ji, jsme schopni dokázat opět jen podmíněnou variantu (L)

(L') $\mathrm{Fin}(c) \rightarrow (L).$

Takto oslabené (L) ovšem naštěstí k odvození věty (V3) stačí, musíme jen použít mírně upravené podoby indukce ($RI^{=}$)

($RI^{='}$) $Fa, aR^{*=}x \rightarrow (Fx \wedge xRy \rightarrow Fy) \Rightarrow aR^{*=}z \rightarrow Fz,$

resp. její speciální verze ($SI^{='}$). Věta (L') je jejím druhým antecedentem, (V3) tvoří konsekvent.

Důkazem věty (V3) lze dospět k definitivnímu souboru tří vět (V1-3) a jednoho pravidla ($SI^{=}$), jenž úplným způsobem popisuje relaci *S* a na ní založenou strukturu přirozených čísel. Tento v *Grundlagen* nastíněný plán Frege realizoval ve svých *Grundgesetze*, tj. předvedl přísně formální odvození Peanových axiomů z elementárních vět logiky a HP.[15] Analýza role, kterou tam svým teorémům (V1-4) připisoval, vede potom k plauzibilní hypotéze, že to jsou tyto varianty Peanových axiomů, co ve skutečnosti mínil svým titulem „základní zákony aritmetiky".

Kromě Fregova teorému obsahují ovšem *Grundgesetze* významný „metateorém", týkající se zmíněné strukturální jednoznačnosti Fregovy (resp. Peanovy) aritmetiky. K té se nyní – zcela na závěr – stručně vyjádříme.

[15] Podrobnou rekonstrukci tohoto odvození, tedy i zdůvodnění toho, že můžeme Fregovi připsat autorství Fregova teorému, lze nalézt in Heck (1993). Odlišnostmi mezi *Grundlagen* a *Grundgesetze* ve věci Fregova teorému se zabývá Boolos & Heck (1998).

3.4 Kategoričnost

Omezme se pro tento okamžik v úvahách o čísle pouze na následníky 0, tj. x taková, že Fin(x). Na základě věty (V3) víme, že relace S každému číslu m přiřazuje nějaké číslo n, tj. levý argument S je definován na celém oboru, který uvažujeme. Podle věty (V1a) lze tedy relaci S uchopit jako funkci s, přiřazující každému číslu m jeho následníka s(m), neboli tzv. *následnickou funkci* Peanovy aritmetiky.

První dva axiomy tohoto kanonického systému dostaneme z vět (V1b) a (V2), totiž že je s prostá, neboli

(P1) $(\forall x,y)(s(x) = s(y) \rightarrow x = y)$,

a že nepřiřazuje nic 0, neboli

(P2) $\forall x(s(x) \neq 0)$.

Uvážíme-li řadu předmětů 0, s(0), ss(0), ... ss..n-krát(0), je z věty (V4) zřejmé, že člen získaný poslední iterací funkce s nemohl být identický z žádným členem předchozím, tj. je zcela nový. (Tento fakt ovšem plyne již z předchozích dvou axiomů, tj. (P1), (P2)!)[16] Posloupnost získaná aplikací funkce s na předmět 0 je tedy nekonečná.

Z hlediska teorie modelů je nekonečnost domény D potenciálního modelu pro (P1), (P2) dána přímo požadavkem existence prosté funkce zobrazující D na vlastní část. Této charakterizaci nekonečné množiny se říká dedekindovská: každá dedekindovsky nekonečná množina je nekonečná, opačná implikace ovšem platí až v teorii množin obohacené o axiom výběru (AC).[17]

Naším cílem ale nebylo zachytit libovolnou nekonečnou doménu, ale doménu sestávající výhradně z přirozených čísel 0, s(0), ss(0), ..., resp. prvku a odpovídajícího konstantě „0" a následných aplikací funkce f odpovídající konstantě „s". V zamýšleném modelu <D, f, a> by mělo jít každý prvek b popsat jako $f^n(a)$ pro nějaké n, tj. dospět k němu konečnou aplikací funkce f na prvek a. K tomuto účelu měla sloužit právě Fregova definice následníka v řadě, nyní prezentovaná ve formě *axiomu indukce*

---

[16] Ve standardní axiomatizaci aritmetiky se namísto Fregova (V4) vyskytuje jiný redundantní axiom, totiž $(\forall x)[x \neq 0 \rightarrow (\exists y)(x = s(y))]$. Oba jsou zajímavé především z hlediska zkoumání slabých aritmetik, neobsahujících princip indukce.

[17] Podle AC existuje na každé množině X taková funkce f (tzv. selektor), která pro každý prvek X s výjimkou prázdné množiny vybírá prvek tohoto prvku, tj. $(\forall x)(x \in X \rightarrow f(x) \in x)$. S pomocí selektoru na potenci P(D) nekonečné množiny D dokážeme snadno definovat nekonečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots$, vzájemně různých prvků z D, a posléze funkci g na D, která každému a_i přiřadí a_{i+1} a všem ostatním prvkům D sebe sama. Je zjevné, že g zobrazuje D prostě na vlastní část $D-\{a_1\}$.

(I) $(\forall F)[F0 \wedge (\forall x)(Fx \rightarrow Fs(x)) \rightarrow (\forall y)Fy]$.

Uvažujme nyní doménu D interpretace <D, f, a>, v níž platí (I), a množinu $M \subseteq D$, tvořenou všemi prvky získanými aplikací *f* na *a* a ničím jiným. Vezměme dále libovolný prvek $b \in D$. Množina M zjevně splňuje „induktivní předpoklad", neboť z definice platí (i) $a \in M$ a (ii) $x \in M \rightarrow f(x) \in M$, musí tedy platit i závěr $\forall x(x \in M)$. To ale znamená, že i $b \in M$ neboli $D \subseteq M$, tudíž $M = D$.

Platnost (I) v interpretaci <D, f, a> zajišťuje uspořádání D funkcí *f* do řady a, f(a), ff(a), ..., a tím i její *spočetnost*. (P1) a (P2) pak garantují, že je (dedekindovsky) *nekonečná*. Systém všech tří axiomů tvoří tzv. Peanovu aritmetiku druhého řádu (PA2). Libovolný model <D, f, a> PA2 má za doménu *nekonečnou spočetnou* množinu D uspořádanou funkcí *f* do řady počínající prvkem *a*. Tímto pozorováním se zdá být kategoričnost PA2, tj. skutečnost, že jsou její dva libovolné modely $M_1 = \langle D_1, f_1, a_1 \rangle$, $M_2 = \langle D_2, f_2, a_2 \rangle$ strukturálně identické, neboli izomorfní (symbolicky $M_1 \cong M_2$), potvrzena na neformální úrovni. Technicky ovšem potřebujeme ukázat, že existuje zobrazení h: $D_1 \leftrightarrow_{1\text{-}1} D_2$ takové, že

(1) $h(a_1) = a_2$

a pro libovolné x z D_1 platí

(2) $h(f_1(x)) = f_2(h(x))$.[18]

Skutečnost, že se zdá být příslušná bijekce snadno znázornitelná jako

D_1:	a_1	$f_1(a_1)$	$f_1f_1(a_1)$	...
h:	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	...
D_2:	a_2	$f_2(a_2)$	$f_2f_2(a_2)$	....

vedla mnoho matematiků k tomu, že důkaz považovali za zbytečný nebo odbytý poukazem na to, že je-li *h* definována pro a_1 a v kroku $f_1(x)$ se odvolává na již definovanou hodnotu h(x), je definována jednoznačně, a tím i existuje. Toto nemusí být nutně argument kruhem, jehož bludnost – jak argumentuje M. Potter[19] – spočívá v tom, že předpokládá jednoznačnost funkce předtím, než prokázal, že tato funkce vůbec existuje; v našem případě předem zvoleného „strukturalistického" rámce tu ale zřetelný lapsus je,

[18] Kdybychom namísto Dedekindovy funktorové konstanty „s" uvažovali Fregův znak „S" pro (dvojmístnou) relaci, bylo by naopak nutné pro příslušné relace R_1, R_2 a libovolné x, y z D_1 ověřit, že

$xR_1y \leftrightarrow h(x)R_2h(y)$.

[19] Potter (2000), s. 82n.

neboť v popisu funkce *h* jsme nešli dál nežli za rovnice (1), (2), tedy zadání celé úlohy.[20]

Rigorózní (lépe řečeno: nekruhový) důkaz, definující funkci *h* „po částech" resp. metodou minimálního uzávěru množiny $\{<a_1,a_2>\}$ na funkci $g(<x,y>) = <f_1(x),f_2(y)>$, předvedl, jak známo, jako první Dedekind, a to jakožto důsledek mnohem obecnějšího (a podobně „sebeevidentního") výsledku, tzv. *rekurzivního teorému*, jenž garantuje korektnost rekurzivní definice funkce nad oborem argumentů, který má strukturu přirozených čísel. Jak jsme již zmínili, Heck (1995) ukázal, že tyto výsledky existují i ve Fregových *Grundgesetze*, s tím rozdílem, že jsou tam oproti Dedekindovi plně formalizovány. Fakt, že jsou v případě *Grundgesetze* obvykle přehlíženy, lze snadno zdůvodnit tím, že je Frege použil jako pouhých lemmat k důkazu teorému o pojmech nekonečné mohutnosti, konkrétně teorému 263. Celá věc se má takto: Frege definoval nekonečnou kardinalitu ∞ jako číslo příslušející pojmu následníka 0, tj

$$(\infty) \quad \infty =_{\mathrm{Def}} \mathrm{N}x\mathrm{Fin}(x).$$

Teorém 263 nyní tvrdí, že tuto mohutnost má každý pojem G, jehož extenzi lze uspořádat relací Q s vlastnostmi popsanými větami (V1-4), tj. funkcionalitou, „prvním" prvkem, „dalším" prvkem a ireflexivitou. Frege nejprve jako pomocné tvrzení dokázal, že jsou všechny extenze této strukturální vlastnosti vzájemně izomorfní, aby pak z toho, že následníci 0 splňují uvedené axiomy, odvodil i zmíněný teorém. Kategoričnost FA (PA2) je tak snadným důsledkem pomocných lemmat 254 a 259, s lemmatem 256 jakožto variantou Dedekindova rekurzivního teorému. To vše uvádíme jen pro úplnost a další detaily sledovat nebudeme, ještě se ale stručně zmíníme o některých důsledcích důkazu „kategoričnosti" pro ideu zakládání matematiky.

V obecné rovině jsem o tom hovořil již na závěr mého předcházejícího „logicistického" článku,[21] když jsem zmínil, že kategoričnost je pro doktrínu matematického *strukturalismu* tím, co byla pro Hilbertův *formalismus*

---

[20] Problém, na který tu narážím, souvisí s odlišnými koncepcemi pojmu funkce, tedy i tím, jak je nám „dána". Logicisté jako Dedekind či Frege berou za základ obor nespecifikovaných funkcí, množin a relací, z nichž chtějí ty aritmetické vydělit jako speciální případ: rekurzivní definice jako (1), (2) proto nechápou a ani nemohou chápat jako jména konkrétních funkcí, ale jen jako *určité deskripce*, u nichž je z povahy věci nejprve třeba dokázat, zda něco označují a zda to označují jednoznačně. Pro konstruktivistu je oproti tomu výše uvedená rekurze nejelementárnějším zachycením funkce coby korektního výpočtu, tedy právě *vlastní jméno*, u něhož není co dokazovat, neboť denotuje z definice. Podrobnostem k otázkám logicistického standardu „definování" se věnuji in: Kolman (2004b) a Kolman (2004c).

[21] Kolman (2004a).

a *axiomatismus* bezespornost, tj. jakýmsi kritériem smyslu. Nyní technické detaily. – Z věty o úplnosti logiky prvního řádu víme, že neúplná teorie prvního řádu nemůže být kategorická. Z Gödelových vět o neúplnosti aritmetiky tedy plyne, že PA1 není kategorická. Syntaktická neúplnost PA1 se přesouvá i na PA2 coby nadsystém, tj. *ne*platí

$$\mathrm{PA2} \vdash A \leftrightarrow N \models A.$$

Prokázaná kategoričnost má ovšem vliv na úplnost sémantickou, narozdíl od PA1, pro níž jsou z věty o úplnosti relace „$\vdash$" a „$\models$" zaměnitelné, tedy *platí*

$$\mathrm{PA2} \models A \leftrightarrow N \models A.$$

Lze okamžitě tušit, že se tato asymetrie musí dotknout i užité logiky, a skutečně: logika druhého řádu je neúplná! Silná verze této věty je okamžitě zřejmá z právě zmíněných ekvivalencí, které blokují kýžené

$$\mathrm{PA2} \vdash A \leftrightarrow \mathrm{PA2} \models A\ .$$

Důkaz neplatnosti slabé verze věty o úplnosti L2 je rovněž jednoduchý: Mějme nějakou „efektivní" axiomatizaci L2, která je korektní vůči standardní druhořádové sémantice, a uvažme množinu

$$S = \{A;\ (\mathrm{L2}) \vdash \mathrm{PA2} \rightarrow A,\ A \text{ je prvořádová aritmetická sentence}\}.$$[22]

S je z korektnosti L2 podmnožinou množiny

$$\mathrm{Th}(N) = \{A;\ N \models A,\ A \text{ je prvořádová aritmetická sentence}\}.$$

(Podrobněji: $\vdash \mathrm{PA2} \rightarrow A$ implikuje $\models \mathrm{PA2} \rightarrow A$ implikuje $N \models \mathrm{PA2} \rightarrow A$ implikuje $N \models A$). Aby mohla být L2 úplná, muselo by nyní platit $S = \mathrm{Th}(N)$, neboť z kategoričnosti PA2 plyne, že pro pravdivou A je $\mathrm{PA2} \rightarrow A$ druhořádovou tautologií! (Podrobněji: $N \models A$ implikuje $\mathrm{PA2} \models A$ implikuje $\models \mathrm{PA2} \rightarrow A$.) Kdyby to ale nastalo, byla by aritmetika prvního řádu rekurzivně axiomatizovatelná („efektivně" generovatelná sentence po sentenci), tedy úplná, což je v rozporu s Gödelovými výsledky.

Katedra logiky
Filosofická fakulta Karlovy Univerzity
Celetná 20
116 42 Praha 1

[22] Narozdíl od PA1 lze PA2 chápat jako jediný axiom, zápis „$\mathrm{PA2} \rightarrow A$" tedy dává smysl.

LITERATURA

BOOLOS, G., (1987): The Consistency of Frege's Foundations of Arithmetic. In: Thomson, J. (ed): *On Being and Saying: Essays in Honor of Richard Cartwright*. MIT Press, Cambridge (Mass.) 1987, 3 – 20.

BOOLOS, G. (1990): The Standard of Equality of Numbers. In: *Meaning and Method: Essay in Honor of Hilary Putnam*. Cambridge UP, Cambridge 1990, 261 – 277.

BOOLOS, G. (1998): *Logic, Logic, and Logic*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

BOOLOS, G. – HECK, R. Jr. (1998): Die Grundlagen der Arithmetik, §§ 82 – 83. In: Schirn (1998), 407 – 428.

COFFA, A. (1991): *The Semantic Tradition from Kant to Carnap*. Cambridge University Press, Cambridge.

DEDEKIND, R. (1888): *Was sind und was sollen die Zahlen*. Vieweg, Braunschweig.

DAUBEN, J. W. (1979): *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, Princeton.

DEMOPOULOS (ed.) (1995): *Frege's Philosophy of Mathematics*. Harvard University Press, Cambridge (Mass.).

FREGE, G. (1879): *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Nebert, Halle.

FREGE, G. (1884): *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Breslau.

FREGE, G. (1893): *Grundgesetze der Arithmetik. Begriffsschriftlich abgeleitet. I. Band*. Pohle, Jena.

HALLETT, M. (1984): *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Clarendon Press, Oxford.

HECK, R. Jr. (1993): The Development of Arithmetic in Frege's Grundgesetze der Arithmetik. *The Journal of Symbolic Logic* 58, 579 - 601.

HECK, R. Jr. (1995): Definition by Induction in Frege's *Grundgesetze der Arithmetik*. In: Demopoulos (ed.) 1995, 295 – 333.

KOLMAN, V. (2002): *Logika Gottloba Frega*. Filosofia, Praha.

KOLMAN, V. (2004a): Logicismus a moderní logika. *Organon F* 11, č. 3, 243 –271.

KOLMAN, V. (2004b): K Fregově údajnému logicismu. Nepublikovaný manuskript.

KOLMAN, V. (2004c): K Fregově údajnému konstruktivismu. Nepublikovaný manuskript.

KOLMAN, V. (2005): Logicismus a paradox (I). *Organon F* 12, č. 1, 1 – 20.

PARSONS, C (1965): Frege's Theory of Number. In: Black, M. (ed): *Philosophy in America*. Cornell University Press, Ithaca 1965, 180 – 203.

POTTER, M. (2000): *Reason's Nearest Kin: Philosophies of Arithmetic from Kant to Carnap*. Oxford University Press, Oxford.

RUSSELL, B. (1903): *The Principles of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

SHAPIRO, S. (1991): *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic*. Oxford University Press, Oxford.

SCHIRN, M. (ed.) (1998): *The Philosophy of Mathematics Today*. Oxford University Press, Oxford.

WRIGHT, C. (1983): *Frege's Conception of Numbers as Objects*. Aberdeen University Press, Aberdeen.