Final published version in: Zbornik u čast Franji Zenku, ed. by E. Banić-Pajnić and M. Girardi Karšulin, Zagreb: Institute of Philosophy, 2006, pp.123-135.

Meršić o Hilbertovoj aksiomatskoj metodi

Srećko Kovač

Institut za filozofiju, Zagreb

Franjo Zenko [20] prvi je pisao o filozofijskim odrednicama djela gradišćanskoga Hrvata Mate Meršića.[1] Zenko je, razlikujući, s jedne strane, skolastičku i novoskolastičku struju u hrvatskoj filozofiji od, s druge strane, moderne, građansko-liberalne, Meršića uvrstio u ovu potonju, ističući njegovu "modernističku" kritičku nastrojenost prema novoskolastičkim filozofima i teolozima. Pritom ga je priključio skupini hrvatskih filozofa svećeničkoga staleža kao što su Čučić, Čevapović, mladi Rački, koji su filozofiju razumjeli u modernističkome duhu, i koji su se nadahnjivali filozofima i teolozima kao što su Descartes, Kant, njemački idealisti, Günther i dr. Meršićev je "neposredni inspiracijski izvor", na što upozorava Zenko, matematičar i filozof Hermann Scheffler (1820-1903).[2]

Zenko je također istaknuo i Meršićevo osporavanje neeuklidske i, osobito, Hilbertove geometrije (Meršić im niječe karakter znanstvenosti), kao također i njegovu kritiku euklidske geometrije (Meršić ju više drži "kazuističkom" nego znanstvenom). Zadržimo se na glavnim odrednicama Meršićeva odbacivanja Hilbertove aksiomatske metode (iz Hilbertovih

[1] M. Meršić rođen je u Frakanavi (Frankenau, Gradišće u Austriji). Najveći je dio života proveo kao župnik u Hrvatskoj Kemlji (Horvátkimle, kod Mosonmagyaróvára, Ugarskoga Staroga Grada, u Mađarskoj blizu austrijske granice). Premda je više poznat kao pjesnik ("Mate Meršić Miloradić"), intenzivno se je bavio matematikom, prirodnim znanostima, ekonomijom, filozofijom, teologijom. Rezultat je toga bavljenja, uz ostale objavljene i neobjavljene radove, i Meršićeva knjiga *Organistik der Geometrie*, 1914 [16], koja je također i sastavni dio njegove knjige *Modernes und Modriges*, 1914 [15]. O Meršiću (životopis i razni obziri njegova djelovanja) usp. Karall, K. (ur.) [10]. O Meršićevoj znanstvenoj djelatnosti v. N. Benčić [10, str. 25-36].

[2] Usp. osobito Schefflerove opsežne *Naturgesetze* [18]. O Meršićevu odnosu prema Scheffleru v. [20, str. 155 i bilj. 23]

Grundlagen der Geometrie [7][3]), kako ih je Meršić izložio u *Organistik der Geometrie* [16, str. 207-220].

1. Hilbertova metoda aksiomatizacije geometrije

Hilbertova aksiomatizacija geometrije u *Grundlagen der Geometrie* smatra se začetnicom moderne, *formalne* aksiomatske metode. Pod formalnom aksiomatskom metodom mislimo na deduktivni sustav dokazivanja iz aksioma pomoću pravila zaključivanja opisan sasvim neovisno o značenjima formula koje se javljaju u dokazu.[4] Valja naime imati na umu da, primjerice, Fregeova aksiomatizacija logike i aritmetike (u *Pojmopisu* i poslije) nije u strogome smislu formalna, jer Frege svoje aksiomatske sustave opisuje izravno u osloncu na značenja simbola i formula koji se javljaju u sustavu. Podsjetimo, primjerice, kako se, uvodeći aksiome ("zakone") u svojim *Grundgesetze der Arithmetik*, pozivlje na istinitost ("das Wahre") i neistinitost ("das Falsche"), a za šesti aksiom izravno kaže da "slijedi iz značenja" u aksiomu uporabljenoga, prethodno definiranoga simbola ('$\backslash\xi$') [5, str. 34-36].

Spomenutu se Hilbertovu aksiomatizaciju geometrije, osim toga, drži i prvom uspjelom aksiomatizacijom euklidske geometrije.[5] Naime, kako se obično ističe, Euklidovi dokazi sadrže i pretpostavke koje su, doduše, zorne, ali nisu opravdane ni jednim postulatom ili aksiomom [2, 3]. Npr. dokaz Euklidova poučka I, 1 (o konstrukciji jednakostraničnoga trokuta) pretpostavlja neprekinutost kružnice; Euklidov poučak I, 4 zapravo je postulat

[3] Meršić najvjerojatne citira treće izdanje Hilbertovih *Grundlagen der Geometrie*, sudeći prema tekstualnome poklapanju i opisu knjige, nikako ne prvo (iz 1899) ili četvrto (iz 1913).
[4] Npr. S. C. Kleene kaže: "The axiomatic method …, where the axioms are prior to any specification of the system *S* of objects which the axioms are about (and serve to introduce or 'define implicitly' the *S*), was first developed systematicaly in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* … (1899), and may be distinguished as *formal* or *existential axiomatics"* [11, str. 28]. Također "To Hilbert is due now …the emphasis that strict formalisation of a theory involves the total abstraction from the meaning, the result being called a *formal system* or *formalism* (or sometimes a *formal theory* or *formal mathematics* …)" [11, str. 63-64].
[5] Npr. "first really satisfactory set of axioms for Euclidean geometry" [12, str. 683]; "prva potpuna aksiomatika euklidske geometrije" [3, *Pogovor*, str. 242].

sukladnosti trokutā sa sukladnim dvjema stranicama i sukladnim kutem među njima (usp. Hilbertov aksiom IV, 5); Euklid također općenito pretpostavlja poredak točaka na crti (usp. Hilbertove aksiome poretka). Također, ne mogu svi pojmovi Euklidova sustava biti definirani u tom istom sustavu, osim ako smisao polaznih Euklidovih definicija (točke, crte itd.) nije opisni (a ne definitorni u užem smislu). S druge strane, kako se često ističe, peti Euklidov postulat (o paralelnim pravcima), za razliku od ostalih postulata, izlazi iz okvira zornosti, jer spominje (u Euklidovoj formulaciji) mogućnost beskonačnoga produživanja pravca.

U Hilbertovoj "glavnoj nakani" da dođe do "mogućnosti razumijevanja" bitnih pitanja o karakteru i međupovezanosti geometrijskih aksioma i poučaka (npr. pitanja o neovisnosti aksioma o paralelama, pitanja zašto je zbroj kutova u trokutu 180° i kako je to povezano s aksiomom o paralelama), prepoznajemo također i filozofijski motiv i interes da se dospije do temelja geometrije.[6] Ponajprije, sam zahtjev za strogoćom dokazivanja za Hilberta ima filozofijski karakter.[7] Nadalje, Hilbert sam spominje da su ga i "filozofijski razlozi" doveli do "uvjerenja" ("aksioma") o "rješivosti svakoga matematičkoga problema" (bilo odgovorom na pitanje, bilo pokazivanjem nemogućnosti rješenja), te kako mu je to uvjerenje bilo "snažan poticaj" u poslu [8, str. 297-298].[8] Zanimljivo je vidjeti kako se Meršić odnosi prema Hilbertovoj aksiomatskoj metodi, osobito u svjetlu spomenute činjenice da ga ni

[6] "Ich bin zu der Aufstellung meines Systems von Axiomen durch die Not gezwungen: ich wollte die Möglichkeit zum Verständnis derjenigen geometrischen Sätze geben, die ich für die wichtigsten Ergebnisse der geometrischen Forschung halte" [4, str. 11].
[7] "In der Tat, die Forderung der Strenge [in der Beweisführung] …entspricht einem allgemeinen philosophischen Bedürfnis unseres Verstandes" [8, str. 293].
[8] To bi uvjerenje (aksiom), pomišlja Hilbert, trebalo možda i poopćiti na sva pitanja koja uopće postavlja naš razum [8, str. 297]. – Usp. i *Grundlagen*: "…in der Tat wird, wenn wir bei unseren mathematischen Betrachtungen einem Probleme begegnen oder einen Satz vermuten, unser Erkenntnistrieb erst dann befriedigt, wenn uns entweder die völlige Lösung jenes Problems und der strenge Beweis dieses Satzes gelingt, oder wenn der Grund für die Unmöglichkeit des Gelingens und damit zugleich die Notwendigkeit des Mißlingens von uns klar erkannt worden ist" [7, str. 120].

tradicionalna, euklidska geometrija nije u znanstvenome i metodologijskome smislu zadovoljavala.

2. Meršić o Euklidovoj aksiomatici

U razlici prema suvremenoj kritici glavni je nedostatak Euklidove aksiomatike, prema Meršiću, taj što Euklidovi principi (definicije, postulati, aksiomi) uopće nisu prave "osnove" geometrije, nego tek proizlaze iz temeljnih geometrijskih radnja (*operationes*). Sve su prostorne tvorbe, prema Meršiću, uzrokovane iz sveprostora prema peterim geometrijskim temeljnim operacijama (načinima uzrokovanja) [16, str. 192-193, 206].[9] Tako, primjerice, definicija točke ne može stajati na početku jer je točka "nulti operat", "anihilat" iz pet geometrijskih temeljnih radnja [16, str. 206].

Meršić ističe da je geometrija kao "znanost i organistika", tj. kao utemeljana na pravim osnovama geometrije, u Euklida već pretpostavljena, te da, primjerice, zbiljska spoznaja točke već pretpostavlja takvu geometriju, a ne prethodi joj [16, str. 205-206]. Euklidovi su "principi" (definicije, postulati, aksiomi) doduše materijalno, sadržajno, istiniti, a ne tek po volji izabrani stavci. No oni su tek nadomjestak za pravo znanstveno utemeljenje geometrije [16, str. 204, 205-206]. To nisu principi u smislu znanstvenih osnova ("Wissenschaftsgrundlagen"), nego principi u smislu početaka (kao ono "početničko", "naivno", "dječje") [16, str. 205]. Euklidovi aksiomi, štoviše, prema Meršiću, uopće ne spadaju u geometriju (jer ne sadrže ništa prostorno), nego su to (početnička) algebarska znanja (teorija jednačaba). Euklidovi aksiomi samo su nadomjestak logike i aritmetike, koje su potrebne kako bi geometrija dobila znanstvenu formu [16, str. 206-207].

[9] "Izravne" su ("analitičke") geometrijske temeljne radnje "geometrijska sumacija", "prostorna adicija", "prostorna multiplikacija", "prostorno potenciranje" i "prostorna integracija" [16, str. 206].

Naime, prema Meršićevoj koncepciji, znanost se u formalnome smislu temelji na "umskoj algoritmici". Na umskoj se algoritmici ponajprije osniva logika, a na njoj opet aritmetika. Aritmetika pak izravno daje znanstvenu formu geometriji, njezin je "organon". Geometrija se stoga kao znanost, kao "organistika", treba utemeljiti na spomenutim disciplinama. To za Meršića ne znači da se geometrija svodi na aritmetiku, aritmetika na logiku, a logika na umsku algoritmiku, nego da je logika pojmovna "konkrecija" umske algoritmike (kao "čistoga nauka o idejama"), aritmetika konkrecija logike u "zoru", a geometrija primjena aritmetike na prostor.[10] Meršić kritizira tisućljetnu zabludu matematičara, kao i modernih "geometarskih filozofa" (tu misli na Hilberta), koji ne slute da je aritmetika "organon ili formalni princip" geometrije (bez aritmetike se u geometriji ne može napraviti nijedan korak) [16, str. 207] – kako je to uvidio, ali, ističe Meršić, ni sam nije do kraja proveo, još Descartes.

Euklidova je aksiomatska geometrija stoga za Meršića "geometrijska kazuistika", ne prava znanost. Ona ima vrijednost silogistički dobro uređene zbirke zadataka iz geometrije, i u tom je smislu to "majstorsko djelo" [16, str. 204].

3. Meršić o Hilbertu

Meršić je pristalica sadržajne ("sintetične") aksiomatike, koja polazi od temeljnih istina, a Hilbertova ideja čistoga formalnoga aksiomatskoga sustava geometrije potpuno mu je nespojiva sa znanošću. Stoga, dok Meršić Euklidovoj aksiomatici ipak priznaje relativnu vrijednost (primjerice, kako smo spomenuli, da je majstorski izložio geometrijske istine, ali u znanstveno nesavršenoj formi), Hilbertovoj aksiomatizaciji geometrije ne priznaje nikakvu vrijednost.[11]

---

[10] Usp. [13, str. 144-145].

[11] Meršić u svojem temperamentnome načinu raspravljanja čak izjavljuje da Hilbert "nema nikakva pojma o matematici kao znanosti" te drži sramotnim i štetnim da se takvi ljudi

1. Osnove i aksiomi (Meršićev § 48)

To da bi geometrija (kao i aritmetika) zahtijevala za svoj razvoj "samo malen broj jednostavnih načela" (*Grundsätze*), kako u prvoj rečenici svoga *Uvoda* u *Osnove geometrije* kaže Hilbert,[12] zajednička je točka Euklidu i Hilbertu, koju Meršić osporava na način kako smo već spomenuli.

Osim toga, Meršić osporava da bi sami geometrijski aksiomi (kako Hilbert odmah u drugoj rečenici nazivlje spomenuta "načela") bili "osnove" geometrije, jer su aksiomi stavci (rečenice) i spoznaje, a to su rezultati osnova, a ne same osnove. Naime, prema Meršiću, jedno su osnove, a drugo je znanje o osnovama – nema osnova formu stavka, nego znanje. Same su osnove temeljne predodžbe, temeljni pojmovi, iz kojih se pomoću više formalne znanosti, napokon pomoću umske algoritmike, oblikuju načela, aksiomi itd.

Osnove geometrije, prema Meršiću, čini sam prostor, što ga Meršić (u skladu s kantovskom tradicijom) svodi na "prostorni zor" (*Raumanschauung*), i koji se "raspada" na pet prostornih uzroka: protežnost, mjesnost, smjer, dimenzitet, lik (*Figur*). Sam prostorni zor nešto je duhovno izvorno i dalje nesvedljivo.[13] Od onih pet prostornih (geometrijskih) uzroka prethodni je uvijek osnova potonjemu, i to tako da potonji svaki put na prethodni kao osnovu dodaje nešto novo, izvorno, nesvedljivo [16, str. 191]. Tih pet prostornih uzroka u Meršićevu sustavu ("algoritmici"), koji potječu od Schefflera, nisu drugo nego prostorna konkrecija opće "umsko algoritamske sheme", koja glasi: "bitak, bivanje, djelovanje, vrstanje, oblikovanje", a dobiveni su preko posredne aritmetičke konkrecije i opće sheme za veličinu, koja glasi: "vrijednost, položaj, odnos, vrsta, oblik" [16, str. 191]. Zanimljivo je uočiti kako i Hilbert poslije, u svojoj "teoriji dokaza" ("metamatematike"), pozivljući se na Kanta, matematiku želi

---

pojavljuju na sveučilištima, akademijama i u literaturi [16, str. 208]. To je, dakako, u velikoj suprotnosti s visokim mjestom koje se danas pripisuje Hilbertu u povijesti matematike.

[12] U 1. izd. iz 1899. stoji "Grundthatsachen" umjesto "Grundsätze" [7, 1. izd., str. 3].

[13] "…eine ureigene Fungibilität oder Ergehungsform des geistigen Naturwesens, die als

svesti na zornost, i to u smislu simboličnoga prikaza matematike – tj. zorne dostupnosti (konačnih) simboličnih izraza (usp. [9, str. 170-171]).

U geometriji se, kako se već vidi iz gornjega, prema Meršiću, ne radi tek o "logičkoj analizi našega prostornoga zora", nego upravo o konkreciji aritmetičkoga "analitičko-sintetičnoga" spoznavanja na "pra-danome prostornome zoru". A kako je aritmetika za Meršića samo jedna, i kako je i prostor također samo jedan, to on zaključuje da i geometrija može biti samo jedna. Dakle, Meršić isključuje bilo kakav pluralizam geometrija, koji bi, kao u Hilberta, proizlazio iz međusobne logičke neovisnosti različitih skupina aksioma [16, str. 210].

Hilbertovo fokusiranje na simboličnu razinu postaje sasvim očito već u prvome paragrafu njegovih *Grundlagen*. Meršić ističe kako je tu riječ samo o "stvarima" koje se tako i tako zovu i označuju, a ne spoznaju se, o hipotezama, a ne o samoizvjesnim osnovama. Tu se samo "povezuju" riječi bez pojma, dok se u istraživanju osnova ne radi o riječima i imenima, nego o pojmovima; točka, pravac, ravnina, sve to u Hilberta ostaje nepoznato, nepojmljeno, a upravo to treba poslužiti kao osnova znanja [16, str. 211]. Na taj se način, drži Meršić, nikako ne može doći do geometrije kao znanosti.

Meršić kritizira i sam Hilbertov pokušaj da se geometrija zasnuje na vlastitim aksiomima. Meršić drži da čak kad bi Hilbertovi "aksiomi" opisivali prave "prapojmove", to ne bi bili pravi aksiomi, nego tek iz osnova (prostor, zor itd.) i pravih aksioma izvedeni poučci, jer se pravi aksiomi tvore (iz osnova) tek pomoću viših "formalnih znanosti": umske algoritmike, logike i aritmetike [16, str. 212-213, 214]. Čini se da Meršić tu i nije daleko od istine. Sam se Hilbert u dokazu neprotuslovnosti svoga sustava oslanja na aritmetiku realnih brojeva, samu geometriju maksimalno logificira, a u postavljanju se aksioma, na neobjašnjen

---

solche, als ureigene Anschauungsform, keine weitere Ergründung mehr zuläßt" [16, str. 187].

način, oslanja na neku fenomenologiju prostornoga zora. Zadržimo se na trenutak na nekim s time povezanim pojedinostima.

Hilbertu je prostorni zor polazište u postavljanju aksioma (i implicitnom definiranju pojmova). On kao geslo svojim *Grundlagen* stavlja Kantovu rečenicu iz *Kritike čistoga uma*, B 730: "Tako sva ljudska spoznaja počinje sa zorovima, odatle prelazi pojmovima i završuje s idejama",[14] a čitav problem svoga spisa svodi na "logičku analizu *prostornoga zora*" (kurziv naš).[15] Svaka od pet skupina Hilberovih aksioma, ističe Hilbert, "izražuje određene međusobno povezane temeljne činjenice našega zora" [7, str. 2], iako nije vidljiv postupak kojim Hilbert iz prostornoga zora izlučuje upravo te činjenice. Čak je možda premalo, sa Shapirom, reći da se uloga prostornoga zora u Hilberta svodi samo na "motivaciju i heuristiku" [19, str. 157]. Jasno je, međutim, da Hilbert odgovore na svoja glavna i legitimna pitanja kao što je, primjerice, slijedi li aksiom o paralelnim pravcima (ili aksiomi o neprekidnosti) iz ostalih aksioma [4, str. 11], ne može dobiti iz samoga prostornoga zora kao takva, nego tek logičkom analizom aksioma koji opisuju prostorni zor. Hilbert želi odgovore na svoja pitanja dobiti maksimalnom strogoćom dokazivanja [8, str. 294, 295], koju u geometriji postiže isključivanjem svake zorne pomoći u zaključivanju, kad je već jednom aksiomima opisao, kako tvrdi, prostorni zor. U tom formalnom aksiomatskome sustavu sami (netumačeni) aksiomi dolaze na mjesto prostornoga zora, dobivaju hipotetični karakter, a kao takvi mogu iznova dobiti i svoje novo tumačenje pomoću najrazličitijih (ne samo zornoprostornih) modela (kao što, primjerice, u dokazu neprotuslovnosti Hilbert rabi model s realnim brojevima [7, str. 25-27]).[16]

---

[14] Usp. i B 355: "Sva ljudska spoznaja započinje od osjetila, odatle prelazi pojmovima i završuje kod uma".

[15] "Die bezeichnete Aufgabe läuft auf die logische Analyse unserer räumlichen Anschauung hinaus" [7, str. 1]

[16] M. Detlefsen upozorava kako Hilbertov rani formalizam u konačnici teži "formalnomu ujedinjenju misli" koje se proteže izvan okvira matematike i cilja na nešto što se može nazvati "majkom (majkama) svih struktura". U kasnijem Hilbertovu razvoju Detlefsen vidi kantovsku

Meršićeva se kritika Hilbertove aksiomatizacije geometrije u prvome redu odnosi, kako smo vidjeli, na opće (“filozofijsko”) shvaćanje geometrije i njezine aksiomatizacije. Meršić nigdje ne dokazuje da se u Hilbertovu sustavu ne bi mogla izvesti euklidska geometrija, nego samo načelno napada Hilbertov formalizam i sintakticizam. No granice su se Hilbertova formalizma pokazale tek poslije, ne na geometrijskome, nego na aritmetičkome formalnome sustavu (Gödelov poučak o nepotpunosti, 1931). Prenesena na aritmetički formalizam Meršićeva bi kritika i od Schefflera preuzeta pentarhijska algoritmika mogla biti pozitivno uzeta u obzir (koliko to analogija dopušta), primjerice s motrišta Gödelove težnje za sustavnom (ali nemehaničkom) procedurom iznalaženja novih aksioma u matematici i teoriji skupova [6], na što ćemo se vratiti poslije.

2. Organska povezanost i međusobna neovisnost aksioma (Meršićev § 49)

Prema Meršićevoj umskoj algoritmici i njegovu shvaćanju aksiomatskoga sustava svaki dio sustava treba biti bitan moment cjeline, te ako nedostaje neki dio, nema ni cjeline. Stoga je Hilbertovo okupljanje aksioma u međusobno neovisne skupine (aksiomi spoja, poretka, paralela, sukladnosti, neprekidnosti)[17] Meršiću neprihvatljivo. Meršić insistira na pitanju kako se te skupine integriraju u jedinstven potpun sustav? Zapravo, iza Hilbertova grupiranja aksioma Meršić ne vidi nikakvu sustavnu ideju [16, str. 214-215]. Doista se čini da se jedinstvenost spomenutih skupina aksioma za Hilberta svodi na njihovu neprotuslovnost i na njihovo zajedničko, ne dalje razjašnjeno podrijetlo iz prostornoga zora. Hilbertova je ideja zapravo bila da svojim grupiranjem logički upravo osamostali pojedine momente aksiomatskoga opisa prostornoga zora, i time omogući razumijevanje, primjerice i neeuklidskih geometrija.

težnju jedinstvu cjelokupnoga našega znanja [1, str. 291-294].

[17] “Verknüpfung”, “Anordnung”, “Parallelen”, “Kongruenz”, “Stetigkeit”.

Nadalje, tu su, prema Meršiću, i teškoće sa samim Hilbertovim pojmovima oko kojih se okupljaju aksiomi. “Spoj”, “poredak”, “paralelnost”, “sukladnost”, “neprekidnost”, nigdje nisu potpuno određeni ni razjašnjeni, odnosno Hilbert vidi njihov potpun i točan opis sadržan u samim aksiomima. Taj je Meršićev prigovor sličan Fregeovu, koji traži jasno razdvajanje aksioma i definicija, tj., prema Fregeu, odnosi koji se spominju u aksiomima (“biti na pravcu”, “između” itd.) trebali su već prethodno biti definirani, te njihovu odredbu ne treba očekivati tek od aksioma [4, str. 6-10, 16-17]. Također, Meršiću su pojmovi poput “sukladnost”, “paralelizam”, “neprekidnost” već suviše specijalni a da bi mogli biti postavljeni kao univerzalni (temeljni u skupini aksioma). K tomu, ti se glavni pojmovi skupina međusobno isprepliću (nije li spoj ujedno i poredak, nisu li sukladnost, paralelizam i neprekidnost samo posebni načini spoja?) [16, str. 215]. Hilbert je, međutim, dokazao međusobnu neovisnost tih pojmova onako kako ih je definirao aksiomima, a svim je aksiomima zajedno uspio formalno aksiomatizirati euklidsku geometriju.

Iz Meršićeve perspektive sadržajne i jedinstvene aksiomatske geometrije besmisleno je dokazivati neprotuslovnost i neovisnost geometrijskih aksioma. Neprotuslovnost aksiomā slijedi, ističe Meršić, iz njihove istinitosti, a pitanje istinitosti treba riješiti za svaki aksiom zasebno (sumaran je dokaz neprotuslovnosti aksioma, za Meršića, “iluzija”) [16, str. 216]. I Frege tvrdi da neprotuslovnost aksioma slijedi iz njihove istinitosti, koja se pak ne dokazuje, jer “proistječe” iz prostornoga zora (*Raumanshauung*) [4, str. 9]. Za Meršića je “prostorni zor” (*Raumanschauung*) “materijalni princip” geometrije (“geometrijski sve-uzrok”) iz kojega proizlaze sve geometrijske spoznaje (formalni je princip “aritmetička algoritmika”) [16, str. 203]. Stoga bi se tvrdnja o istinitosti geometrijskih aksioma, prema Meršiću, trebala osloniti na “sveobuhvatnu predodžbu uvijek samo jednoga sveprostora samoga” (“prostorni zor uopće”) [16, str. 188].[18] Tomu je Hilbert suprotstavio svoj stav da istina, obratno, slijedi iz

[18] Alternativno, tvrdnja bi se o geometrijskoj istinitosti mogla osloniti uvijek samo na konačan

neprotuslovnosti.[19] Hilbert je istinu zapravo shvatio kao istinu u modelu,[20] dok su Meršić (i Frege) govorili o nerelativiranome pojmu istine.[21] Iako je, općenito, Hilbertova tvrdnja (i u smislu teorije modela) prejaka (jer neprotuslovnost nekoga aksiomatskoga sustava nije sasvim isto što i njegova pouzdanost[22]), ona ipak vrijedi u određenim i to vrlo bitnim okvirima.[23]

Meršić, nadalje, vidi za Hilbertov aksiomatski sustav problem i u tome što, da bi se uvidjela istina stavka (identitet subjekta i iskaza), a zatim i neprotuslovnost, nije dostatna konfuzna predodžba značenja riječi, nego je potrebno eksplicitno definiranje pojma (kako traži i Frege). To je pak u Hilberta, koji ustraje na implicitnim definicijama pojmova pomoću samih aksioma, nepotrebno. Ne želeći u geometriji pretpostaviti ništa izvan nje osim logike, Hilbert se mora služiti implicitnim definicijama, jer bi se inače definicije kretale u krugu. Pojam treba, prema Hilbertu, definirati pomoću njegovih odnosa prema drugim pojmovima, a te odnose formulirati u aksiomima [4, str. 23]. Primjerice, pojam točke Hilbert ne uvodi nekom unaprijed danom eksplicitnom definicijom, nego potpunu definiciju točke daje tek cijelom zgradom aksioma [4, str. 12].

Nadalje, Meršić drži da je nemoguće da su geometrijski aksiomi međusobno neovisni, te drži, posljedično, proizvoljne geometrije nemogućima. Pod pretpostavkom proizvoljnih geometrija, prema Meršiću, nikakvo protuslovlje ne bi bilo moguće, jer bi se potvrđivalo da je ono što je paralelno ujedno neparalelno, a ono što je ravno ujedno zakrivljeno itd. [16, str. 216-217]. Srušilo bi se načelo istovjetnosti, na kojem se temelje svi iskazi i istine [16, str.

---

broj zamijećenih činjenica o prostoru, s upitnom ekstrapolacijom na beskonačan broj činjenica. Usp. [17, 20].

[19] "Wenn sich die willkürlich gesetzten Axiome nicht einander widersprechen mit sämtlichen Folgen, so sind sie wahr, so existieren die durch die Axiome definirten Dinge. Das ist für mich das Criterium der Wahrheit und der Existenz" [4, str. 12].

[20] Hilbert kaže u pismu Fregeu: "eine jede Theorie kann stets auf unendliche viele Systeme von Grundelementen angewandt werden" [4, str. 13].

[21] Usp. [19, str. 159].

[22] U pouzdanu (*sound*) sustavu dokazana je postavka istinita kad god su i pretpostavke u dokazu istinite.

[23] Naime, suvislost sustava koji sadrži elementarnu aritmetiku, znači ujedno i njegovu

217-218]. Takav Meršićev zaključak posljedica je toga što on i o mogućim proizvoljnim geometrijama razmišlja samo kao o sastavnicama jedne, jedinstvene geometrije. Jer A u nekoj teoriji T_1, i $\neg A$ u nekoj drugoj teoriji T_2 ne čine protuslovlje. U tom naime smislu euklidska i neeuklidska geometrija mogu ipak obje opstojati svaka sa svojim jezikom i modelima, a da nisu u izravnome međusobnome protuslovlju.[24]

4. Algoritmika i formalna aksiomatika (zaključci)

Meršić je dobro uočio prednosti algoritmike, koju je vidio najbolje ozbiljenom u tadašnjoj aritmetici, u kojoj se pak do spoznaje može doći pomoću algebarskoga jezika i mehaničke procedure, nakon što se takvom procedurom dobiveni rezultat "prevede u pojmove i misli" [16, str. 214]. Bavio se ostvarenjem algoritmike, primjerice u logici i geometriji, zahtijevaći u logici savršenu semiotiku (poklapanje simbola i misli do potpune zanemarivosti njihove razlike),[25] a u geometriji zahtijevajući aritmetičku algoritmiku kao isključiv formalni princip spoznaje prostornih tvorba (aritmetički "algoritmizirani prostor" [16, str. 190]).[26] Meršić je, međutim, svoju formalnu algoritmiku uvijek zamišljao u najužoj svezi sa sadržajem, predmetom (u geometriji s prostorom) te nije uviđao smisao te mnoge mogućnosti i prednosti čiste formalne aksiomatike kakvu je razvijao Hilbert.

S druge strane, neodgovorenim ostaje u Hilberta zašto bira upravo te i te aksiome, i te i te osnovne pojmove, osim što se pozivlje na to da je riječ o fundamentalim činjenicama prostornoga zora i što na taj način uspješno rekonstruira euklidsku geometriju te objašnjava

---

pouzdanost za $\prod_1$-rečenice (tj. za opće rečenice, oblika $\forall x\ \varphi(x)$, s odlučljivim φ).

[24] Hilbert, primjerice, ističe da je točka u euklidskoj, neeuklidskoj, arhimedskoj i nearhimedskoj geometriji uvijek nešto drugo [4, str. 12].

[25] Usp. [14] i [13, str. 159-170].

[26] Meršić spominje kako ni sam Descartes, a kamoli ijedan drugi matematičar, nije pomišljao na analizu kao na "jedinu, isključivu pravu znanstvenu formu geometrije", te kako se i u njegovo, Meršićevo vrijeme "analitična geometrija" drži samo pravoj geometriji "izvanjski nametnutom algebrističkom umješnošću" koja može biti najviše tek dobra pripomoć [16, str. 199].

mogućnost neeuklidskih geometrija. Aksiomi uzeti apstraktno, neovisno o zornome sadržaju, imaju hipotetični karakter, a njihova je istinitost potisnuta u drugi plan.[27] Stoga otvorenim ostaje pitanje, osobito nakon Gödelova poučka o nepotpunosti, o nekoj sustavnoj metodi iznalaženja samih aksioma.

Meršićeva algoritmika ima dvije strane. Jedna je strana algoritmika kao učinkovit (mehanički) postupak rješavanja problema. Druga je pak strana samo postavljanje algoritamskih principa, za koje se Meršić više, naravno, ne može pozvati na algoritmiku, nego se pozivlje na samopromatranje duha.[28] Odavde potječe sadržajni moment Meršićeve algoritmike. A tu su vidljivi i rudimenti Gödelova zahtjeva za "sustavnim postavljanjem matematičkih aksioma". Tim sustavnim postupkom "uvijek iznova postaju evidentnima novi i novi aksiomi, koji ne slijede formalnologički iz onih dosad postavljenih", nego slijede na temelju "razjašnjenja značenja" primitivnih pojmova, nesvodljivoga na davanje definicija [6, str. 384, 382]. Stoga se može reći da je Meršić, iako ne uočivši mnoge logičke i spoznajne prednosti suvremene aksiomatske metode, koja u njegovo doba nastaje, dobro anticipirao neka njezina bitna ograničenja.

---

[27] Opisujući jednu stranu Hilbertova formalizma, Gödel kaže "es wird … anerkannt, daß die Axiome … sich in ihrer Wahrheit in keiner Weise begründen oder erkennen laßen und daher das Zeichen von Folgerung[en] aus ihnen nur in einem hypothetischen Sinn Bedeutung hat, wobei man dieses Folgern selbst … als ein bloßes Spiel mit Symbolen nach gewissen, ebenfalls nicht einsichtigen, Regeln, auffaßt" [6, str. 378]. Taj je Gödelov sud kao preuzet iz Meršićeve kritike Hilberta. No Gödel ističe i drugu (pozitivnu) stranu Hilbertova formalizma, a to je Hilbertovo insistiranje na "sigurnom utemeljenju" spoznaja i na jednoznačnome odgovoru na svako precizno formulirano da–ne pitanje u matematici [6, str. 378].

[28] "Jenes Grundschema [= Sein, Werden, Wirken, Arten, Gestalten, naša op.] ist einfach durch den Hinweis auf das Zeugnis der Reflexion und Selbstbesinnung zu rechtfertigen. Wer seinen Geist in dessen Ergehungen gebührend zu beobachten weiß, kann unmöglich verkennen, daß dessen Verfassung überhaupt eine pentarchische ist, und daß in ihm das obige Grundschema überall waltet" [16, str. 138]. Usp. i napomenu o prostornome zoru, str. 8 s bilješkom 13.

Literatura

[1] Detlefsen, M.: Hilbert's formalism, *Revue international de philosophie*, 47 (1993), 285-304.

[2] Euklid, *Elementa, I-XV*, ed. I. L. Heiberg, vol. 1-5, Lipsiae: Teubner, 1883-1888.

[3] Euklid, *Elementi I-VI*, Zagreb: Kruzak, prev. M. Hudoletnjak Grgić, 1999. V. Volenec, *Pogovor*, str. 233-247.

[4] Frege, G., *Gottlob Freges Briefwechsel*, Hamburg: Meiner, 1980.

[5] Frege, G., *Grundgesetze der Arithmetik*, Hildesheim etc.: Olms, 1988. 2. Nachdruck der Ausgaben 1893 i 1903.

[6] Gödel, K., The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy, u *Kurt Gödel, Collected Works* (izd. S. Feferman et al.), vol. 3, New York etc.: Oxford UP, str. 374-387.

[7] Hilbert, D., *Grundlagen der Geometrie*, 3. Aufl., Leipzig etc.: Teubner, 1907. (1. izd., Leipzig: Teubner, 1999).

[8] Hilbert, D., Mathematische Probleme, u: *Gesammelte Abhandlungen*, Bd. 3, Berlin: Springen, 1932., str. 290-328.

[9] Hilbert, D., Über das Unendliche, *Mathematische Annalen* 95 (1925), 161-190. http://dz-srv1.sub.uni-goettingen.de/sub/digbib/loader?did=D26816

[10] Karall, K. (ur.), *Mate Meršić Miloradić*, Beč: Hrvatski akademski klub, 2000.

[11] Kleene, S. C., *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam etc.: North-Holland, 1952.

[12] Kneale, W., Kneale, M., *The Development of Logic*, Oxford: Clarendon, 1962.

[13] Kovač, S., *Logičko-filozofijski ogledi*, Zagreb: Hrvatsko filozofsko društvo, 2005. http://www.ifzg.hr/~skovac/page3.html

[14] Meršić, M., Utrum in dialectica Aristotelea recte distinguantur figurae modique syllogismi, u: *Compte rendu du quatrième Congrès Scientifique International des*

Catholiques, Troisième section: sciences philosophiques, Fribourg, 1898, str. 380-407 (skup održan 1897).

[15] Meršić, M., *Modernes und Modriges*, Horvátkimle bei Moson, Ungarn: Selbstverlag, 1914.

[16] Meršić, M., *Organistik der Geometrie: Grundzüge der geometrischen Prinzipienlehre*, Horvátkimle bei Moson, Ungarn: Selbstverlag, 1914.

[17] Nagel, E., Newman, J. R., *Gödelov dokaz*, prev. M. Hudoletnjak Grgić, Zagreb: Kruzak, 2001.

[18] Scheffler, H., *Naturgesetze und ihr Zusammenhang mit den abstrakten Wissenschaften*, vol. 4+3, Leipzig: Foerster, 1876-1881.

[19] Shapiro, S.: *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, New York etc.: Oyxford UP, 1997.

[20] Zenko, F. Meršićevo razumijevanje i određenje filozofije, *Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine* 15 (1989), 149-160.