Cadernos de Filosofia Alemã 5, p. 64-75, 1999

De analysi situs

Gottfried Wilhelm Leibniz

Quæ vulgo celebratur *Analysis Mathematica*, est *magnitudinis*, non *situs*; atque adeo directe quidem et immediate ad Arithmeticam pertinet, ad Geometriam autem per circuitum quendam applicatur. Unde fit, ut multa ex consideratione situs facile pateant, quæ calculus Algebraicus ægrius ostendit. Problemata Geometrica ad Algebram, id est quæ figuris determinantur ad æquationes revocare, res non raro satis prolixa est, et rursus alia prolixitate difficultateque opus est, ut ab æquatione ad constructionem, ab Algebra ad Geometriam redeatur, sæpeque hac via non admodum aptæ prodeunt constructiones, nisi feliciter in quasdam non prævisas suppositiones assumtionesve incidamus. Hoc ipse Cartesius tacite fassus est, cum lib. 3 Geometriæ suæ problema quoddam Pappi resolvit. Et sane Algebra sive numerica sive speciosa addit, subtrahit, multiplicat, dividit, radices extrahit, quod utique arithmeticum est. Nam ipsa Logistica, seu scientia magnitudinis proportionisve in universum, nihil aliud tractat quam numerum generalem seu indeterminatum et has in eo species operandi, quoniam *Magnitudo* revera determinatarum partium multitudine æstimatur, quæ tamen manente re variat, prout alia aut alia mensura vel unitas assumitur. Unde mirum non est, Scientiam Magnitudinis in universum esse Arithmeticæ genus, cum agat de numero incerto.

Habebant Veteres aliud Analyseos genus, ab Algebra diversum, quod ma-

Cadernos de Filosofia Alemã 5, p. 64-75, 1999

Sobre a análise da situação*

Gottfried Wilhelm Leibniz

*Tradução de Homero Santiago***

A *análise matemática* comumente praticada é a da *grandeza*, não a da *situação*; e mais, pertence direta e imediatamente à aritmética, aplica-se à geometria, porém, por um certo rodeio. Daí ocorre que muitas coisas que o cálculo algébrico bem penosamente mostra sejam com facilidade patentes a partir da consideração da situação. Reduzir problemas geométricos à álgebra, isto é, reduzir problemas que são determinados pelas figuras às equações, é coisa não raro bastante prolixa e, por seu turno, é preciso outra prolixidade e dificuldade para retornar da equação à construção, da álgebra à geometria; e por esta via não se produzem com freqüência construções inteiramente aptas, a não ser que por sorte incidamos em certas suposições ou assunções não previstas. O próprio Descartes confessou-o tacitamente quando, no livro 3 de sua Geometria, resolveu um problema de Pappus. Decerto a álgebra, quer numérica, quer especiosa, soma, substrai, multiplica, divide, extrai raízes, o que de todo modo é aritmético; pois a logística, ou seja, a ciência da grandeza ou da proporção em geral, não trata de outra coisa senão do número geral ou indeterminado e das formas de operar nele, porquanto a *grandeza* de determinadas partes é deveras estimada pela multiplicidade, a qual varia, porém a coisa permanecendo, conforme uma ou outra medida ou unidade é assumida. Daí não ser espantoso que a ciência da grandeza em geral seja um tipo de aritmética, visto que se ocupe de um número incerto.

Os antigos tinham um outro tipo de análise, diferente da álgebra, que mais ~~se aproxima da con~~sideração da situação, tratando do que se questiona sobre

* Texto redigido em 1679. A tradução, que contou com a colaboração de Luciano Codato, foi feita a partir do texto latino oferecido por C. I. Gerhardt em sua edição dos *Mathematische Schriften*, Berlim & Halle, 1849-63, vol. V, p. 178-3 (reprodução facsimilar: Hildesheim, Georg Olms, 1962).

** Mestrando do Departamento de Filosofia – FFLCH-USP e bolsista da FAPESP.

gis ad situs considerationem accedit, tractans de *Datis* et de *Sedibus* quæsitorum seu *Locis*. Et huc tendit Euclidis libellus de Datis, in quem Marini Commentarius extat. De Locis vero planis, solidis, linearibus actum est cum ab aliis, tum ab Apollonio, cujus propositiones Pappus conservavit, unde recentiores Loca plana solidaque restituerunt, sed ita, ut veritatem magis quam fontem doctrinæ veteris ostendisse videantur. Hoc tamen Analyseos genus neque ad calculum rem revocat, neque etiam producitur usque ad prima principia atque elementa situs, quod ad perfectam Analysin necesse est.

Vera igitur Situs Analysis adhuc supplenda est, idque vel ex eo constat, quod omnes Analytici, sive Algebram exerceant novo more, sive data et quæsita ad veterem formam tractent, multa ex Geometria elementari assumere debent, quæ non ex magnitudinis, sed figuræ consideratione deducuntur neque determinata quadam via hactenus patent. Euclides ipse quædam axiomata satis obscura sine probatione assumere coactus est, ut cætera procederent. Et Theorematum demonstratio solutioque Problematum in Elementis magis aliquando apparet laboris opus quam methodi et artis, quanquam et interdum artificium processus suppressum videatur.

Figura in universum præter quantitatem continet qualitatem seu formam; et quemadmodum *æqualia* sunt quorum eadem est magnitudo, ita *similia* sunt quorum eadem est forma. Et similitudinum seu formarum consideratio latius patet quam mathesis, et ex Metaphysica repetitur, sed tamen in mathesi quoque multiplicem usum habet, inque ipso Calculo algebraico prodest, sed omnium maxime similitudo spectatur in sitibus seu figuris Geometriæ. Itaque Analysis vere geometrica non tantum æqualitates spectat et proportionalitates, quæ revera ad æqualitates reducuntur, sed similitudines etiam, et ex æqualitate ac similitudine conjunctis natas congruentias adbibere debet.

Causam vero cur similitudinis consideratione non satis usi sunt Geometræ, hanc esse arbitror, quod nullam ejus notionem generalem haberent satis distinctam aut ad mathematicas disquisitiones accommodatam, vitio philosophorum, qui definitionibus vagis et definito obscuritate paribus, in prima præsertim philosophia contenti esse solent, unde mirum non est sterilem esse solere doctrinam illam et verbosam. Itaque non sufficit similia dicere, quorum eadem forma est, nisi *formæ* rursus generalis notio habeatur. Comperi autem, instituta qualitatis vel formæ explicatione, rem tandem eo devenire, ut *similia* os *dados* e as *sedes* ou *lugares*. E para isso tende o pequeno livro de Euclides sobre os dados, em que se baseia o comentário de Marino. Na verdade, os lugares, os planos, os sólidos, os lineares, foram tratados por outros e também por Apolônio, cujas proposições Pappus conservou; daí os mais recentes restituiram os lugares planos e sólidos, mas de tal forma que parecem ter mostrado mais a verdade que a fonte da doutrina dos antigos. Esse tipo de análise, todavia, nem se refere ao cálculo, nem sequer é levado até os primeiros princípios e elementos da situação, o que é necessário à análise perfeita.

Logo, a verdadeira análise da situação ainda precisa ser suplementada; sabe-se disso porque todos os analíticos que, ou praticam a álgebra de uma maneira nova, ou tratam os dados e o que se questiona segundo a forma antiga, têm de assumir muitas coisas da geometria elementar, as quais não são deduzidas da grandeza, mas da consideração da figura, e até o momento não são patentes por qualquer via determinada. O próprio Euclides foi obrigado a assumir sem prova alguns axiomas bastante obscuros para avançar no restante; e a demonstração de teoremas e a solução de problemas, nos Elementos, vez por outra mais aparece como obra do esforço que do método e da arte, ainda que por vezes o artifício do processo pareça suprimido.

A figura em geral contém, além da quantidade, qualidade ou forma; do mesmo modo, são *iguais* as coisas cuja grandeza é a mesma, assim como *semelhantes* aquelas cuja forma é a mesma. E a consideração das semelhanças ou das formas é de longe mais patente que a matemática, e é tomada à metafísica, mas, por outro lado, tem múltiplo uso também na matemática e é útil no próprio cálculo algébrico; mas a semelhança de tudo é observada ao máximo nas situações ou figuras da geometria. Assim, a análise verdadeiramente geométrica não apenas observa igualdades e proporcionalidades, que deveras se reduzem a igualdades, mas também semelhanças, e a partir da igualdade e semelhança juntas deve empregar congruências inatas.

Na verdade, a razão por que os geomêtras não se serviram o bastante da consideração da semelhança, julgo ser esta: dela não tinham nenhuma noção geral satisfatoriamente distinta ou acomodada às investigações matemáticas, pelo vício dos filósofos, que especialmente na filosofia primeira costumam contentar-se com definições vagas e idênticas ao definido em obscuridade; daí não ser espantoso que aquela doutrina seja estéril e verborrágica. E assim, não basta dizer semelhantes as coisas cuja forma é a mesma, a não ser que se tenha, por sua vez, uma noção geral de forma. Porém, estabelecida a explicação da qualidade ou da forma, descobri chegarmos a isto: são *semelhantes* as coisas sint, quæ singulatim observata discerni non possunt. Quantitas enim sola rerum compræsentia seu applicatione actuali interveniente deprehendi potest, qualitas aliquid menti objicit, quod in re separatim agnoscas et ad comparationem duarum rerum adhibere possis, actuali licet applicatione non interveniente, qua res rei vel immediate vel mediate tertio tanquam mensura confertur. Fingamus duo templa vel ædificia exstructa esse haberi ea lege, ut nihil in uno deprehendi queat, quod non et in alio observes: nempe materiam ubique eandem esse, marmor Parium candidum, si placet; parietum, columnarum, cæterorumque omnium easdem utrobique esse proportiones, angulos utrobique eosdem seu ejusdem rationis ad rectum; itaque qui in hæc bina templa ducetur clausis oculis, sed post ingressum apertis, et nunc in uno, nunc in altero versabitur, nullum indicium ex ipsis inveniet, unde alterum ab altero discernat. Et tamen magnitudine differre possunt, atque adeo discerni poterunt, si simul spectentur ex loco eodem, vel etiam (licet remota sint invicem) si tertium aliquod translatum nunc cum uno, nunc cum altero comparetur, veluti si mensura aliqua, qualis ulna aut pes aut aliud quiddam ad metiendum aptum, nunc uni nunc alteri accommodetur, nam tum demum discernendi ratio dabitur inæqualitate deprehensa. Idem est, si ipsum spectatoris corpus aut membrum, quod utique cum ipso de loco in locum transit mensuræque officium præstat, his templis applicetur; tunc enim magnitudo diversa, et per hanc discernendi modus apparebit. Sed si spectatorem non nisi ut mentem oculatam consideres, tanquam in puncto constitutam, nec ullas secum magnitudines aut re aut imaginatione afferentem, eaque sola in rebus considerantem, quæ intellectu consequi licet, velut numeros, proportiones, angulos, discrimen nullum occurret. Similia igitur dicentur hæc templa, quia non nisi hac coobservatione vel inter se, vel cum tertio, minime autem sigillatim et per se spectata discerni potuere.

Hæc evidens et practica et generalis similitudinis descriptio nobis ad demonstrationes geometricas proderit, ut mox patebit. Nam duas figuras oblatas similes dicemus, si aliquid in una singulatim spectata notari nequeat, quod in altera non æque deprehendatur. Itaque eandem utrobique ingredientium rationem sive proportionem esse debere consequitur, alioqui per se sigillatim seu nulla licet amborum coobservatione instituta, discrimem apparebit. At Geomeque não se podem discernir isoladamente. Com efeito, a quantidade pode ser depreendida intervindo só a copresença das coisas ou a aplicação atual; a qualidade propõe à mente algo que reconheças na coisa separadamente e possas empregar na comparação de duas coisas, embora não intervindo a aplicação atual, com o que a coisa é comparada à coisa ou imediata ou mediatamente por um terceiro como medida. Finjamos dois templos ou edifícios que foram construídos por esta lei, de forma que nada se possa depreender de um que não observes no outro; a matéria é por toda parte a mesma, mármore branco de Paros, se quiseres; as proporções das paredes, das colunas e de todo o restante são as mesmas em ambos; os ângulos, ou sua razão relativamente ao reto, em ambos são os mesmos; assim, quem for levado ao interior desses templos duplos de olhos fechados e, abertos depois da entrada, voltar-se ora para um, ora para outro, não encontrará neles nenhum indício pelo qual possa discernir um do outro. E, todavia, podem eles diferir em grandeza, e mais, poderão discernir-se se observados simultaneamente de um mesmo lugar, ou também (embora estejam longe um do outro) se algum terceiro templo transportado for comparado ora com um, ora com outro, tal como se uma medida, a braça ou o pé ou outra qualquer apta para a medição, fosse aplicada ora a um, ora a outro, pois então, finalmente, a razão de discernir será dada pela desigualdade depreendida. Tem-se o mesmo se o próprio corpo ou um membro do observador, que de alguma forma vai com ele de um lugar para outro e presta-se ao trabalho da medida, for aplicado a esses templos; nesse caso, pois, também por esse modo de discernir a grandeza diversa aparecerá. Mas, se considerares o observador não mais que uma mente com olhos, como se constituída em um ponto, e não levando consigo, ou pela coisa ou pela imaginação, nenhuma daquelas grandezas, e considerando nas coisas só o que é possível conseguir pelo intelecto, tais como números, proporções, ângulos, nenhuma discriminação surge. Logo, semelhantes sejam ditos esse templos, pois a não ser por essa coobservação, ou entre eles, ou com um terceiro, de modo algum, observados isoladamente e por si mesmos, poderiam discernir-se.

Esta evidente, prática e geral descrição da semelhança será útil às demonstrações geométricas, como logo será patente. Diremos, pois, que duas figuras oferecidas são semelhantes se algo que não puder ser notado em uma, isoladamente observada, igualmente não puder ser depreendido na outra. E assim se conclui que em ambas a razão ou proporção dos elementos internos deve ser a mesma; de outra forma, por si mesmas isoladamente ou, se quiseres, por nenhuma coobservação de ambas seja estabelecida, aparecerá uma discriminação.

træ cum generali similitudinis notione carerent, figuras similes ex æqualibus respondentibus angulis definierunt, quod speciale est, non ipsam naturam similitudinis in universum aperit. Itaque circuitu opus fuit, ut demonstrarentur, quæ ex nostra notione primo intuitu patent. Sed ad exempla veniamus.

Ostenditur in Elementis, triangula similia seu æquiangula latera habere proportionalia, et vicissim; sed hoc multis ambagibus Euclides quinto demum libro conficit, cum primo statim ostendere potuisset Elemento, si nostram notionem fuisset secutus. Demonstrabimus primum, *triangula æquiangula esse similia*. Esto triangulum ABC (fig. 1) et aliud rursus LMN, sintque anguli A, B, C ipsis L, M, N respective æquales, dico triangula esse similia. Utor autem hoc *axiomate novo*: *Quæ ex determinantibus* (seu datis sufficientibus) *discerni non possunt, ea omnino discerni non posse*, cum ex determinantibus cætera omnia oriantur. Jam data basi BC datisque angulis B et C (adeoque et angulo A) datum est triangulum ABC; itemque data basi MN datisque angulis M, N (adeoque et angulo L) datum est triangulum LMN. Sed ex his datis sufficientibus singulatim discerni triangula non possunt. Nam in uno quoque data sunt basis et duo ad basin anguli; jam basis angulis conferri nequit; nihil aliud ergo superest quod in triangulo alterutro ex determinantibus sigillatim spectato examinari possit, quam ratio anguli cujusque dati ad rectum vel duos rectos, id est anguli ipsius magnitudo. Quæ ipsa cum utrobique eadem reperiantur, necesse est triangula sigillatim discerni non posse, adeoque similia esse. Nam ut in Scholii modum addam, etsi magnitudine triangula discerni possint, tamen magnitudo nisi per coobservationem vel triangulorum amborum simul, vel utriusque cum aliqua mensura agnosci non potest, sed ita jam non tantum spectarentur singulatim, quod postulatur.

Vicissim manifestum est, *triangula similia etiam æquiangula esse**; alioqui si esset angulus aliquis ut A in triangulo ABC, cui nullus reperiretur æqualis angulus in triangulo LMN, utique daretur angulus in ABC, habens rationem ad duos rectos (seu ad omnium trianguli angulorum summam), quam non habet ullus in LMN, quod sufficit ad triangulum ABC a triangulo LMN singulatim

* Na ed. Gerhardt, por falha de impressão, apenas *sse*.

Porém, os geomêtras, como carecessem de uma noção geral de semelhança, definiram as figuras semelhantes a partir dos ângulos correspondentes iguais, o que é particular, e não dá a ver a própria natureza da semelhança em geral. E assim foi preciso um rodeio para demonstrar o que, a partir de nossa noção, é patente ao primeiro olhar. Mas vamos aos exemplos.

Mostra-se nos Elementos que triângulos semelhantes ou eqüiângulos têm os lados proporcionais, e vice-versa; mas Euclides o conclui tão-somente no quinto livro, com muitas ambigüidades, quando o poderia mostrar de imediato no primeiro, se fosse seguida nossa noção. Demonstraremos, primeiro, que *os triângulos eqüiângulos são semelhantes*. Seja o triângulo ABC (fig. 1) e um outro, por sua vez LMN, e sejam os ângulos A, B, C respectivamente iguais aos L, M, N; digo que os triângulos são semelhantes. Ora, sirvo-me deste *novo axioma*: *O que não se pode discernir a partir dos determinantes* (ou seja, os dados suficientes) *não se pode discernir totalmente*, já que todo o restante surge a partir dos determinantes. Agora, dada a base BC e dados os ângulos B e C (e com isso também o ângulo A), é dado o triângulo ABC; da mesma forma, dada a base MN e dados os ângulos M, N (e com isso também o ângulo L), é dado o triângulo LMN. Mas, a partir desses dados suficientes, os triângulos não se podem discernir isoladamente; pois são também dados, em um e outro, a base e os ângulos em relação à base, já a base não pode ser comparada com ângulos; portanto, nada mais resta que possa ser examinado a partir dos determinantes em um e outro triângulo, isoladamente observados, senão a razão do ângulo e deste dado relativamente ao reto ou a dois retos, isto é, a grandeza do próprio ângulo. Como o mesmo se descobre em ambos, é necessário que não se possam discernir isoladamente, e por isso são semelhantes. Pois, para acrescentar ao modo da Escola, mesmo que os triângulos possam discernir-se pela grandeza, todavia, não se pode reconhecer a grandeza a não ser pela coobservação ou de ambos os triângulos simultaneamente ou de um e de outro com alguma medida, mas assim já não seriam observados apenas isoladamente, o que se postula.

Em troca é manifesto que *triângulos semelhantes são eqüiângulos*; de outra forma, se houvesse algum ângulo, A por exemplo, no triângulo ABC, e nenhum ângulo igual a ele fosse descoberto no triângulo LMN, e de algum modo se desse um ângulo em ABC que tenha uma razão relativamente aos dois retos (ou à soma de todos os ângulos do triângulo) que não há em LMN, isto bastaria para distinguir isoladamente o triângulo ABC do triângulo LMN. Consta também que *triângulos semelhantes têm lados proporcionais*; visto que, com efeito, dados os lados são dados os triângulos, pois caso se dessem dois distinguendum. Constat etiam *triangula similia habere latera proportionalia*. Nam si dentur duo aliqua latera, velut AB, BC, habentia rationem inter se, quam nulla trianguli LMN latera inter se habeant, jam poterit alterum triangulum ab altero singulatim discerni. Denique *si latera proportionalia sint, triangula similia erunt*; quoniam enim datis lateribus data sunt triangula, sufficit (per axioma nostrum) ex laterum ratione discrimen haberi non posse, ut ex nullo in triangulis his singulatim spectatis alio haberi posse judicemus. Ex his vero etiam patet, *triangula æquiangula habere latera proportionalia, et vicissim*.

Eodem modo primo statim mentis obtutu ex nostra similitudinis notione directe ostenditur, *circulos esse ut quadrata diametrorum*, quod Euclides demum decimo libro ostendit, et quidem per inscripta et circumscripta, rem reducendo ad absurdum, cum tamem nullis ambagibus esset opus. Diametro AB (fig. 2) descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum CD; eodemque modo diametro LM descriptus sit circulus, eique circumscriptum diametri quadratum NO. Determinatio utrobique est similis, circulus circulo, quadratum quadrato, et accommodatio quadrati ad circulum, itaque (per axioma supradictum) figuræ ABCD et LMNO sunt similes. Ergo (per definitionem similitudinis) erit circulus AB ad quadratum CD, ut circulus LM ad quadratum NO; ergo etiam circulus AB ad circulum LM est ut quadratum CD ad quadratum NO, quod affirmabatur. Pari ratione *sphæræ* ostendentur esse *ut cubi diametrorum*. Et in universum in similibus lineæ, superficies, solida homologa erunt respective ut longitudines, quadrata, cubi laterum homologorum, quod hactenus generaliter assumtum magis quam demonstratum est.

Porro hæc consideratio, quæ tantam præbet facilitatem demonstrandi veritates alia ratione difficulter demonstrandas, etiam novum calculi genus nobis aperuit, a calculo algebraico toto cœlo diversum, notisque pariter et usu notarum operationibusve novum. Itaque Analysin situs appellare placet, quod ea situm recta et immediate explicat, ita ut figuræ etiam non delineatæ per notas in animo depingantur, et quicquid ex figuris imaginatio intelligit empirica, id ex notis calculus certa demonstratione derivet, cæteraque etiam omnia consequatur, ad quæ imaginandi vis pertingere non potest: imaginationis ergo supplementum, et ut ita dicam perfectio in hoc, quem proposui, calculo situs continetur, neque tantum ad Geometriam, sed etiam ad machinarum inventiones, lados quaisquer, como AB, BC, que tenham uma razão entre si que nenhum dos lados do triângulo LMN têm entre si, já se poderia discernir isoladamente um triângulo do outro. Enfim, *se os lados são proporcionais, os triângulos serão semelhantes*, basta (por nosso axioma) que não possa haver discriminação a partir da razão dos lados para que julguemos que de nada mais se pode ter uma discriminação em triângulos isoladamente observados. A partir disso é também patente que *triângulos eqüiângulos têm lados proporcionais, e vice-versa*.

Do mesmo modo, a partir de nossa noção de semelhança, apresenta-se diretamente e de imediato, ao primeiro olhar da mente, que *os círculos são como quadrados dos diâmetros*, o que Euclides mostrou tão-somente no décimo livro, e assim mesmo através de inscritos e circunscritos, reduzindo a coisa ao absurdo, quando todavia não seria preciso nenhuma ambigüidade. Seja descrito um círculo pelo diâmetro AB (fig. 2) e a ele circunscrito o quadrado do diâmetro CD; e do mesmo modo, pelo diâmetro LM, seja descrito um círculo e a ele circunscrito o quadrado do diâmetro NO. A determinação em ambos é semelhante, o círculo pelo círculo, o quadrado pelo quadrado, e a acomodação do quadrado ao círculo, e assim (pelo axioma mencionado) as figuras ABCD e LMNO são semelhantes. Portanto (pela definição de semelhança) o círculo AB estará para o quadrado CD como o círculo LM para o quadrado NO; portanto, também o círculo AB está para o círculo LM como o quadrado CD para o quadrado NO, o que se afirmava. Por um raciocínio idêntico mostra-se que as *esferas são como cubos dos diâmetros*. E, nos semelhantes em geral, linhas, superfícies, sólidos homólogos serão respectivamente como comprimentos, quadrados, cubos de lados homólogos, o que até o momento foi, geralmente, mais assumido que demonstrado.

Prosseguindo, esta consideração, que oferece tanta facilidade para demonstrar verdades que de outro modo são demonstradas dificilmente, também nos deu a ver um novo tipo de cálculo, de todo diferente do cálculo algébrico, e igualmente novo nas notações, e no uso das notações, ou nas operações. E assim é bom chamá-lo de análise da situação, pois explica correta e imediatamente a situação, de tal forma que também as figuras não desenhadas sejam representadas no espírito por notações e, seja o que for que a imaginação intelige empiricamente pelas figuras, isso derive das notações por uma demonstração certa e também consiga todas as outras coisas, as quais a força da imaginação não pode alcançar; portanto, é suplemento da imaginação, e, assim como digo que a perfeição está contida nesse cálculo da situação que propus, terá ele uma utilidade até o momento desconhecida, não apenas para a geometria, mas ipsasque machinarum naturæ descriptiones usum hactenus incognitum habebit.

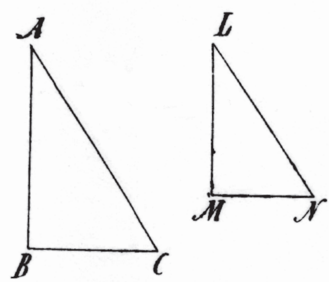

Fig. 1

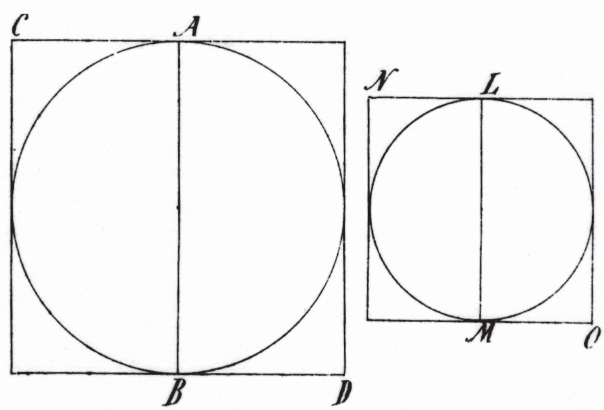

Fig. 2

também para as invenções das máquinas e as próprias descrições da natureza das máquinas.