

L'INTELLIGENCE MATHÉMATIQUE, L'INFINI ET LES MACHINES

Giuseppe LONGO*

RÉSUMÉ : On évoquera très informellement l'énoncé de quelques résultats récents d'incomplétude des formalismes. Les preuves de ces théorèmes, très importants pour toute l'épistémologie contemporaine des mathématiques, utilisent une variété d'outils conceptuels qui vont démonstrativement au-delà des axiomatisations finitaires. Ces outils ne requièrent aucune ontologie mathématique, mais constituent des constructions humaines particulièrement solides, des formes d'intelligence de l'infini et de l'espace enracinées dans différentes formes de connaissance. On parlera également, mais très brièvement, tant de l'intelligence mathématique du Bon Dieu que de l'intelligence mathématique des ordinateurs digitaux.

MOTS-CLÉS : incomplétude, formalisme, infini, expérience, construction, métaphore, induction, Gödel, Girard, Friedman.

ABSTRACT : Informal mention will be made of the terms in which some recent results have shown the incompleteness of formalism. The proofs of these theorems, which are of great consequence for every aspect of a modern epistemology of mathematics, employ a variety of conceptual tools which take us conclusively further than finite axiomatisation. These tools require no mathematical ontology, and are notably solid human constructs, ways of comprehending infinity and space which are rooted in different forms of knowledge. Discussion will also include, albeit very briefly, the mathematical intelligence of God, as well as the mathematical intelligence of digital computers.

KEYWORDS : incompleteness, formalism, infinity, experience, construction, metaphore, induction, Gödel, Girard, Friedman.

* Texte traduit de l'italien par Charles Alunni.

ZUSAMMENFASSUNG : Auf sehr informelle Weise werden einige neuere Resultate vorgestellt, die die Unvollständigkeit der Formalismen betreffen. Beim Beweis dieser Theoreme, die für jede zeitgenössische Epistemologie von großer Bedeutung sind, wird eine Reihe konzeptueller Hilfsmittel benutzt, die auf demonstrative Weise über die finitären Axiomatisierungen hinausgehen. Diese Hilfsmittel erfordern keine mathematische Ontologie, sondern stellen besonders stabile menschliche Konstruktionen dar. Es sind Formen der Wahrnehmung des Unendlichen und des Raumes, die in unterschiedlichen Erkenntnisformen verwurzelt sind. Sehr kurz wird auch auf die mathematische Intelligenz des lieben Gottes und auf die mathematische Intelligenz von Digitalrechnern eingegangen.

STICHWÖRTER : Unvollständigkeit, Formalismus, Unendliches, Erfahrung, Konstruktion, Metapher, Induktion, Gödel, Girard, Friedman.

RIASSUNTO : Questa nota introduce, in modo del tutto informale, alcuni risultati recenti di incompletezza dei formalismi. Le dimostrazioni di questi teoremi, di grande rilievo per l'epistemologia contemporanea della matematica, utilizzano una varietà di strumenti matematici che vanno al di là (e lo si dimostra) delle assiomatizzazioni finitarie. Questi strumenti non richiedono alcuna ontologia matematica, e costituiscono delle costruzioni concettuali unane particolarmente solide, delle forme di intelligenza dell'infinito e dello spazio radicate in differenti forme di conoscenza. Si parlerà pure, ma brevemente, dell'intelligenza matematica del Buon Dio e di quella dei calcolatori digitali.

PAROLE CHIAVE : incompletezza, formalismo, infinito, esperienza, costruzione, metafora, induzione, Gödel, Girard, Friedman.

Giuseppe LONGO a fait ses études de mathématiques à l'université de Pise (Italie), et il occupe actuellement un poste de chercheur CNRS à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm, dans le département de Mathématiques et d'Informatique. Il dirige par ailleurs la revue *Mathematical Structures in computer science* chez Cambridge University Press.

Adresse : Département de Mathématiques et d'Informatique, École normale supérieure, 45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05.

Internet : <http://www.dmi.ens.fr/users/longo>

Courrier électronique : longo@dmf.ens.fr

Quand on pense aux fondements de « l'intelligence » mathématique, à ses formes de compréhension et de description du monde, c'est immédiatement « la règle » qui nous vient à l'esprit, c'est-à-dire, en fait, les « *regulae ad directionem ingenii* », normes constitutives ultimes des mathématiques et de la pensée. C'est plus particulièrement au cours de ce siècle que l'analyse fondationnelle des mathématiques s'est centrée sur l'analyse de la déduction mathématique; celle-ci, à son tour, s'est appuyée sur le jeu des règles logiques et formelles qui est parfaitement bien décrit par un des plus forts et des plus rigoureux programmes scientifiques de notre époque, le programme formaliste des fondements des mathématiques (et de la connaissance).

Or, s'il ne fait aucun doute que la preuve est bien au cœur des mathématiques et que cette preuve doit suivre (ou doit pouvoir être reconstruite par) des « règles », en mathématiques il n'est pas seulement question de preuve, celle-ci suivant d'ailleurs elle-même des parcours riches de bien des formes d'« intelligence », de méthodes de construction, de références et de significations... Tout cela opérant avec une très grande rigueur, car il n'y a aucune raison pour qu'en mathématiques, la rigueur soit comprise exclusivement comme l'application de règles *sans signification*; c'est là, comme nous le verrons par la suite, l'hypothèse centrale du programme formaliste : la certitude doit résider dans l'absence de toute ambiguïté sémantique au cours d'une déduction qui doit, pour cela même, être de type « finitaire » et « potentiellement mécanisable ».

Il ne s'agit pas ici de nier la composante logique de la déduction mathématique que constituent des « si... alors... » toujours présents, pas plus que le rôle de la déduction conçue comme un pur calcul : maintes preuves en algèbre, ou dans les systèmes logiques de réécriture qui me sont bien familiers, ne sont que des suites non évidentes d'application de règles de manipulation formelle. En tant que telles, ces règles doivent apparaître comme « sans signification », c'est-à-dire que leur application dans la preuve ne doit à aucun moment faire référence à des significations possibles; par exemple, on pourra développer une équation et parvenir à un résultat surprenant, sans jamais « interpréter » l'équation dans des espaces analytiques possibles, mais uniquement en utilisant des règles de calcul algébrique.

Ces deux composantes de la pensée mathématique, la logique, en tant que système de règles signifiantes de la pensée (George Boole, Gottlob Frege, Bertrand Russell...), et le formalisme, en tant que système de règles de calcul sans signification (David Hilbert, Bernays, Post, Curry...), sont donc une partie essentielle de la preuve; le problème est qu'elles ne suffisent pas à l'analyse fondationnelle des mathématiques. La recherche des

fondements et de la certitude, uniquement à l'intérieur de ces systèmes, a constitué une sorte de « diète unilatérale » de la réflexion fondationnelle ; car souvent les logicistes, qui sont profondément antiformalistes, cherchent le fondement seulement dans des règles logiques signifiantes, tandis que les formalistes veulent exclusivement se baser sur le calcul, dépourvu des ambiguïtés de la signification, même logique. Cette diète, sorte de monomanie philosophique ayant tenté de réduire l'entreprise mathématique à un seul niveau conceptuel, a tout particulièrement fait perdre le sens de la construction des concepts et de sa richesse dans le cadre mathématique : le rôle, par exemple, joué par le concept d'infini mathématique, la référence phénoménale à l'espace et au temps, à ces « actes d'expériences » qui non seulement enrachent les mathématiques dans une pluralité de formes de connaissance du monde (Poincaré, Weyl, Enriques...), mais qui entrent également, comme j'essayerai de le démontrer, dans la preuve elle-même. Ces éléments constitutifs de la pensée et de la pratique mathématiques doivent redevenir l'enjeu d'une véritable analyse scientifique, et ne plus être renvoyés au flou des références à l'« intuition », cet interdit de l'analyse fondationnelle, véritable trou noir du mystère ontologique, dernier recours du *working mathematician* qui, fatigué de ces règles imposées à sa pensée, fait trop souvent recours à une philosophie platonicienne naïve lui permettant de se passer de ces systèmes logico-formels, limitatifs de ses pratiques et insuffisants à leur justification.

I. — INCOMPLÉTUDES DES FORMALISMES : DE GÖDEL À GIRARD

L'un des succès majeurs du formalisme en logique mathématique a été de savoir démontrer, avec ses propres outils de preuve, ses propres limites : résultat à la fois remarquable et très rare en sciences, où la crise arrive le plus souvent de l'extérieur, induite par un changement de paradigme et de méthode.

Nous mentionnerons un peu plus bas divers théorèmes démontrés au cours de ces trente dernières années, et où l'on *démontre* qu'il faut sortir du système dans lequel on a énoncé une certaine proposition formelle pour pouvoir la démontrer, et... où l'on *démontre* cette proposition par des méthodes qui doivent sortir du cadre formel donné. Ces limites s'imposent d'ailleurs également aux systèmes logicistes (Frege, Russell), car leurs principes font partie des formalisations en question.

Le fait est qu'un seul niveau d'expressivité, un langage formel préfixé, ne permet pas de représenter complètement des structures mathématiques significatives telles que, par exemple, celle des nombres entiers ; autrement

dit, on démontre que la seule manipulation d'un calcul des signes formels ne peut pas être complète et être en mesure de capturer toutes les propriétés d'une construction conceptuelle, de grande pertinence mathématique et produit de mille expériences, comme dans le cas des nombres ; ou, encore, que la certitude définitive du raisonnement, cherchée par les pères fondateurs, ne peut pas résider dans un seul et unique niveau conceptuel, celui des formalismes linguistiques, qui auraient dû permettre de codifier l'espace pluridimensionnel de la construction mathématique.

Sur ce point, on peut prendre en exemple la « théorie des nombres », ou arithmétique, afin de mettre en évidence la façon dont même des formes d'intelligence apparemment aussi isolées et spécialisées que celles-là, reçoivent en réalité l'apport de différentes formes de compréhension du monde : ce qui n'est autre, à mon avis, que le message transmis par les divers « théorèmes d'incomplétude » relativement aux mathématiques. Le jeu entre une pluralité de niveaux linguistiques et le concept d'infini mathématique seront plus particulièrement au centre de notre analyse.

Mais qu'entend-on effectivement par calcul logico-formel, par méthode axiomatico-déductive à la Hilbert ? Il s'agit avant tout de fixer un langage de formules par une structure syntaxique très précise (« expressions bien formées »), structure qui est définie *indépendamment du sens* ou, plus exactement, par la façon dont sont juxtaposés les lettres et les symboles dans la formule (« A et B est bien formée, « A et » ne l'est pas). Il s'agit donc avant tout de fixer les axiomes, certaines formules bien formées, et les règles pour la déduction où, à nouveau, le passage à travers la règle, des hypothèses aux conséquences, ne se *fonde que sur la structure syntaxique des hypothèses et des conséquences*. Si, par exemple, nous admettons les formules « A » et « A flèche B », alors, mécaniquement, « B » s'ensuivra, et ce, indépendamment des significations possibles de A, de *flèche*, et de B. Si on comprend néanmoins *flèche* comme *implique*, l'on retrouve bien le classique *modus ponens*, bien qu'un tel « sens », humain et historique, soit inessentiel à la déduction formelle et mécanique. Tel est enfin le niveau du langage formel ou de l'objet (d'étude) pour qui analyse les démonstrations.

Le programme de Hilbert s'appuyait, en particulier, sur la distinction entre niveau *mathématique* ou théorique, dit niveau objet, exprimé en un langage de formules, et une *métamathématique* ou métathéorie, c'est-à-dire cette mathématique grâce à laquelle on peut parler du niveau objet. À cela s'ajoutait, dans les années 1930 avec Tarski, un troisième niveau (ou si l'on préfère, une nouvelle dimension conceptuelle) : une *structure sémantique* qui permet d'interpréter formules et opérations formelles mais les mathématiques du siècle précédent avaient déjà jeté les bases d'une telle distinction avec les travaux d'Argand-Gauss, de Beltrami, de Klein et de bien d'autres. Ainsi, pour prendre un exemple qui porte sur la signification géométrique des formules algébriques :

- $(x = \sqrt{-1})$ est une *formule linguistique*, au niveau du langage objet (d'étude, pour qui travaille en algèbre);

- « $x = 2$ et $x = 5$ sont contradictoires » est une *phrase métalinguistique* (elle affirme une *propriété des formules*, le fait d'être contradictoire); et enfin,

- l'interprétation de x dans $(x = \sqrt{-1})$ par un point du plan cartésien qui fournit la *sémantique géométrique* de cette formule algébrique et, plus généralement, des nombres complexes (l'interprétation d'Argand-Gauss).

Dans le cas de l'arithmétique, il fallait alors démontrer, par la métamathématique, que le niveau du langage objet, entièrement formalisé par des axiomes et par des règles de déduction, permet de démontrer toutes les propriétés des nombres entiers (c'est là précisément l'hypothèse de *complétude* du formalisme). Ou encore, qu'axiomes et règles finitaires, espace de certitude du raisonnement, épuisent bien la déductibilité mathématique; qu'en un certain sens, ils épuisent *l'intelligence* et la certitude mathématique ou, plus exactement, permettent de la reconstruire *a posteriori* et de la fonder complètement, en en fournissant le cadre logico-formel. Mais pourquoi une telle importance donnée à l'arithmétique? Pour différents motifs: en premier lieu, les nombres entiers constituent un point de départ élémentaire, et, en même temps, leur théorie s'inscrit au cœur des mathématiques (souvenons-nous que Cantor et Dedekind construisent les réels à partir des entiers et, par suite, le continu géométrique, grâce à l'axiomatisation de la géométrie de Hilbert). Par ailleurs, dans *l'Idéographie* et les *Fondements de l'arithmétique*, ouvrages fondamentaux, datant des années 1880, Frege avait fixé, dans l'arithmétique même, le fondement logique des mathématiques, jetant par là les bases de la logique mathématique.

Il n'est pas inutile de rappeler que le mérite clarificateur de ce programme fut énorme, tant par sa rigueur méthodologique, que du fait que par la suite, et grâce à lui, il fut possible de réifier l'intelligence logico-arithmétique ainsi définie, sous la forme de machines électroniques prodigieuses, parfaitement logico-formelle. Car, une fois que la logique est transférée dans un formalisme et que la signification est oubliée, il suffit d'enseigner à la machine à comparer des suites de lettres: quand on trouve « A » et « A flèche B », alors on écrit « B ». Le *pattern matching* (la comparaison lettre à lettre) ou la recherche d'une structure syntaxique commune de formules non banalement corrélées (qualifiée d'« unification » ou identification modulo certaines transformations syntactiques) constitue en effet le cœur même du raisonnement mécanique et, aujourd'hui, de la démonstration automatique. C'est avec l'apparition des machines que l'idée, selon laquelle le niveau formel, calcul de signes sans signification, pouvait être l'expression de l'intelligence humaine dans son ensemble, a

pris sa forme moderne ; bien au-delà de ce que prétendaient les pères fondateurs de la théorie de la démonstration, qui, pour la plupart, visaient plus modestement à la reconstruction rigoureuse mais *a posteriori* des mathématiques, constituant leur seul *fondement* formel. Outrepassant donc, et largement, le projet formaliste, certains iront jusqu'à affirmer que « l'intelligence [...] est effectivement définie comme ce qu'on peut manifester à travers la communication de symboles discrets¹ ». Manifestation et traitement symbolico-mécanique sont la conséquence de l'hypothèse fonctionnaliste et logico-computationnelle : l'intelligence du geste du mime, de la pratique manuelle, du dessin, l'intelligence de l'espace, tout cela ou bien est communicable (codifiable) au travers de symboles discrets qu'il s'agit tout simplement d'élaborer au niveau formel, ou bien n'est pas de l'ordre de l'intelligence. Bien entendu, ce qui se cache derrière cette conception, c'est à la fois la centralité et l'unicité de l'intelligence mathématique, mais également sa réductibilité à un pur calcul formel des signes, toujours codifiable en suites de 0 et de 1.

Cependant, ce programme de codification et de fondement formel des mathématiques ne tarda pas à échouer, à cause précisément de l'arithmétique elle-même, grâce au théorème (fort justement) hyper-célèbre, dit théorème d'incomplétude de Gödel ; car, si toutes les propositions de l'arithmétique, qui *sont précisément décrites* par des symboles et des nombres, ne peuvent même pas être *démontrées avec cette* « intelligence définie comme communication et traitement formel de symboles discrets », imaginons ce qu'il en est de l'analyse de l'intelligence exprimée par le geste du mime. Il faut dire cependant que ce théorème trouve ses limites dans l'explication qu'il fournit du phénomène, et que les résultats successifs, auxquels je voudrais aboutir, peuvent nous aider à mieux comprendre ce jeu de l'intelligence auquel nous tenons, y compris au niveau de la preuve mathématique. J'essayerai donc maintenant de dire quelques mots très succincts à propos de ce résultat classique, avant de passer à d'autres plus récents et plus informatifs, car il a fait l'objet de mille présentations et de mille réflexions, dont certaines très populaires comme celles de Hofstadter ou de Penrose². Qui sait si en tentant, dans la mesure du possible, de maintenir un style concis, mais en se situant d'emblée à un niveau de rigueur informelle, nous serons en mesure de ne pas faire aspirer à ces éléments d'ontologie et de transcendance qui en poussent bon nombre à s'exclamer : « En mathématique, il existe des propositions vraies, mais non

1. J. HODGES, in *The Universal Turing Machine*, éd. R. HERKEN, Springer Verlag, 1995.

2. Pour une traduction française de l'article de Gödel de 1931, voir *Le Théorème de Gödel*, Paris, Seuil, 1989, qui est introduit par un essai de J.-Y. GIRARD, l'un des plus illustres logiciens contemporains, et dont le travail et la philosophie, profondément antiformalistes, ont été pour moi une source permanente d'inspiration.

démonstrables », laissant en même temps dans un flou mystique cette notion de vérité. Tout ce que je demande, c'est d'être très attentifs à chaque mot sur une trentaine de lignes, car, si j'affirme par exemple : « on démontre que la proposition G est indémontrable », alors la phrase devra être comprise avec un soin tout particulier : ce qui est dit ici, c'est simplement que, une fois un certain système d'axiomes et de règles de déduction fixé, on *démontre* alors que, dans un tel système, *G ne peut pas être démontrée* (c'est-à-dire déduite au sein de ce même système). Mais il ne s'agit là que d'une question d'attention aux mots employés, dans un jeu où l'on utilise souvent des mots ou des phrases qui ne renvoient qu'à eux-mêmes (« démontrer l'indémontrabilité » ou encore « cette phrase n'est pas démontrable »); car, ce que j'affirmerai est absolument informel et littéraire : la démonstration mathématique étant, quant à elle, longue et extrêmement technique.

Je rappellerai en premier lieu que le premier théorème d'incomplétude de Gödel (de 1931) affirme uniquement (et je le répète, uniquement) qu'il existe une proposition ou une phrase formelle de l'arithmétique qui est *indécidable* dans le cadre de l'arithmétique, en supposant que celle-ci soit cohérente (non contradictoire). C'est un théorème d'« indécidabilité », au sens où il fournit une proposition, disons G, que la théorie formelle ne sait pas démontrer, pas plus d'ailleurs que sa négation (G est alors indécidable); absolument rien n'est dit au sujet de la vérité de G ou de sa négation (laquelle des deux serait-elle vraie?). Le second théorème d'incomplétude démontre ensuite qu'à l'intérieur de l'arithmétique, on peut démontrer l'équivalence entre la proposition indécidable G et la proposition, formalisée, de la cohérence. Par conséquent, puisque G est indémontrable, la cohérence de l'arithmétique sera elle-même indémontrable. Plus précisément, aucune métamathématique finitaire, qui est en tant que telle codifiable (cf. plus bas) au sein de l'arithmétique, ne permet de démontrer la cohérence de l'arithmétique. Ce qui, d'ailleurs, devra s'étendre à toute autre théorie mathématique, en dehors de l'arithmétique, qui serait suffisamment expressive pour pouvoir codifier sa propre métathéorie (attention alors au jeu entre niveau théorique et niveau métathéorique!).

C'est là l'une des clés de la preuve de Gödel : l'idée prodigieuse de *codifier les formules arithmétiques avec des nombres*, au moyen d'une technique conceptuellement simple, mais laborieuse. Une fois cela réalisé, les formules, qui décrivent des propriétés de nombres, comme par exemple $(x + 4 = 1 + x + 3)$, peuvent « parler » d'autres formules, y compris de cette formule elle-même, une fois qu'elles ont été codifiées avec ces nombres. Si, par exemple, $(x + 4 = 1 + x + 3)$ est codifiée avec le nombre 76, elle impliquera, en particulier $(76 + 4 = 1 + 76 + 3)$, à savoir une propriété d'« elle-même », saisie comme un nombre, c'est-à-

dire comme la « formule numéro 76 ». En fait, la codification d'une formule (bien formée) ne dépend absolument pas de son sens, mais seulement de sa structure syntaxique, de la séquence finie de symboles qui la composent. Mais, comme il a été dit, la structure syntaxique suffit à l'analyse formaliste de la déduction.

Ici, il s'agit de formules qui peuvent parler d'elles-mêmes ou de propriétés d'elles-mêmes, à l'instar de la cohérence qui est une propriété des formules, *et par conséquent* des nombres, étant donné que les nombres peuvent être biunivoquement associés aux formules. Dès lors, la *métamathématique*, qui étudie les propriétés des formules, devient une mathématique intérieure à l'arithmétique. En bref, en tant que théorie mathématique, l'arithmétique décrit sa propre métathéorie : c'est là une observation mathématiquement difficile et profonde, une sorte de calembour logique rigoureux et très audacieux, une circularité ayant ouvert la voie à tant de belle mathématique et à tant de... spéculation aussi fantastique qu'arbitraire (l'arithmétique est autoconsciente, la conscience de soi se reflétant dans un miroir, etc.).

Or, la cohérence de l'arithmétique *se démontre*, et avec elle la proposition G de Gödel qui lui est équivalente. Il s'agit cependant de le faire *en dehors* de l'arithmétique, conséquence obligée des deux théorèmes du même Gödel ; autrement dit, on ne peut le faire avec un raisonnement purement formel, qui, en tant que tel, est mécanisable ou, ce qui revient au même, codifiable dans l'arithmétique. En d'autres termes encore, on ne peut le faire dans une *théorie formelle*, c'est-à-dire dans une théorie au sein de laquelle on peut faire l'économie du *sens* des axiomes ou des règles ou, plus précisément encore, au sein de laquelle un axiome quelconque ne parle pas de l'infini, c'est-à-dire où certaines règles ne mélangent pas les niveaux métathéorique, théorique et sémantique, comme je tenterai de l'expliquer plus loin. Évidemment, si l'on suppose que la cohérence est vérifiée, il devient alors des plus banal d'observer que G est vraie : car le second théorème de Gödel affirme une équivalence démontrable entre les deux, et très précisément au sein même de l'arithmétique. Il n'existe en effet aucun autre moyen pour *affirmer* que G est vraie, sinon de *démontrer* qu'elle est vraie, ce qui présuppose la cohérence. Sinon, il faut démontrer la cohérence qui lui est équivalente³.

3. Il existe un raisonnement classique qui prouve la vérité de G, une fois démontré le premier théorème d'incomplétude. Supposons que toute proposition ou sa négation doivent être vraies (« *tertium non datur* »). Alors, G, ou « non G », est vraie. Nous voulons démontrer que G est vraie. Supposons alors, par un raisonnement par l'absurde, que ce soit « non G » qui soit vraie. Puisque « non G » a la structure « il existe un nombre qui est (qui codifie) une preuve de G », alors j'essaie l'un après l'autre les nombres 1, 2, 3... ou, plus exactement, les preuves qu'ils codifient, et je contrôle s'ils sont ou non une preuve de « non G ». Si, comme je le suppose par l'absurde, un tel nombre existe (puisque je suppose que « non G » est vraie), je finirai bien tôt ou tard par le trouver. Mais alors, ce serait là une preuve finitaire (donc

Où est donc passé le fameux miracle ontologique auquel prétend tout platonicien qui refuse le programme formaliste ? « G est vraie mais non démontrable » ne veut rien dire d'autre que « G n'est pas démontrable dans le cadre de l'arithmétique formelle, mais qu'elle l'est si l'on suppose la cohérence », ou encore, « G n'est démontrable qu'avec des instruments plus puissants que l'arithmétique, ceux précisément qui permettent d'en démontrer la cohérence » (et nous verrons lesquels). En mathématique, si l'on affirme que quelque chose est vrai, *d'une façon ou d'une autre* on doit *démontrer qu'il est vrai*, et la règle du jeu s'arrête là. C'est cela même qu'il s'agit d'analyser, *ce de quelle façon* ou comment on démontre, en dehors d'un formalisme spécifique, bien avant de sombrer dans la théologie. Ou encore, si l'on préfère, il s'agit de rechercher quelle forme de raisonnement (oserais-je dire quelle forme d'intelligence ?) non mécanisable, non arithmétisable, et cependant humaine, permettrait de le démontrer.

La cohérence fut très rapidement démontrée par Gentzen en 1936. Cependant, sa preuve présuppose une forme d'induction très forte (d'ordre transfini) extrêmement peu convaincante pour qui cherche à démontrer la cohérence de l'arithmétique, dont le cœur est l'induction simple (d'ordre fini)⁴; c'est la raison pour laquelle cette preuve passa quasiment inaperçue, si ce n'est que la technique utilisée (dite de l'« élimination des coupures » dans les preuves) est devenue un véritable pilier de la théorie de la démonstration. Cette preuve peut être donnée dans une théorie des ensembles où l'on se donne un axiome affirmant qu'« il existe un ensemble infini ». Cet axiome n'a de sens que si l'on comprend ce que veut dire infini : sa codification par un prédicat arithmétique n'est pas possible, puisque l'arithmétique ne peut « parler » d'ensembles infinis. Gödel aussi donna une preuve de la cohérence de l'arithmétique en 1958, et ce, à l'intérieur d'un calcul logique intéressant, mais en utilisant toujours l'induction transfinie.

Je trouve beaucoup plus éclairante une autre démonstration, due à Tait et à Girard, en 1970. Dans un calcul semblable, mais plus expressif que

arithmétisable) de « non G », contrairement à ce qui est démontré par le premier théorème d'incomplétude qui, *sous l'hypothèse de cohérence*, démontre que « non G » est indémontrable dans l'arithmétique. Par conséquent, « non G » est fautive, et dès lors, suite à l'hypothèse du « *tertium non datur* », G est vraie. Mais, même dans ce cas, on *démontre* la vérité de G, en *supposant* que l'arithmétique est cohérente (car on applique le premier théorème). Effort relativement inutile, car, sans utiliser le « *tertium non datur* », le deuxième théorème de Gödel déduit G de la cohérence, et opère en outre dans l'arithmétique elle-même.

4. L'induction arithmétique n'est autre que la règle affirmant que si l'on démontre (ou si l'on suppose) $A(0)$ et que l'on démontre (ou suppose) que « pour tout x , $A(x)$ implique $A(x + 1)$ », alors on peut déduire que « pour tout x , $A(x)$ ». De même, si « pour tout z , on a que « pour tout $y \geq z$, $A(y)$ implique $A(z)$ », alors on peut déduire que « pour tout x , $A(x)$ ». L'induction transfinie admet un nombre infini d'hypothèses, ou bien elle peut être réalisée en interprétant « z » (et « x ») avec des « nombres infinis » (dits « ordinaux transfinis »).

celui de Gödel de 1958 (et sur lequel j'ai beaucoup travaillé), Girard démontre, « à la Tait », un résultat de « réduction des preuves sous forme minimale » (normalisation), en utilisant, entre autres, un principe dit de « compréhension du deuxième ordre » qui mêle, d'une manière incontournable, métathéorie, théorie et sémantique. Je voudrais m'expliquer en cherchant à rendre facile ce qui est difficile. À un certain moment de la preuve, on prend un ensemble infini de termes (opération *métathéorique* : on collectionne des termes du langage théorique objet, que l'on regarde du haut de sa métathéorie, opération qu'on peut fort aisément imaginer), et on les met à la place d'une variable d'ensemble à l'intérieur d'un *terme du langage*... ce qui revient à dire qu'on travaille ici au *niveau théorique*. Ainsi, au cours de la preuve elle-même, on a mélangé le métalangage, et même la sémantique, avec le langage des termes, puisque l'opération n'a de sens que si l'on convient d'interpréter certaines variables formelles d'ensembles, précisément avec des ensembles (convention sémantique de l'axiome de compréhension du deuxième ordre).

Ce passage de la démonstration (et il n'est pas le seul) n'est pas codifiable dans l'arithmétique; il est essentiellement infinitaire, et Girard le démontre, en faisant voir que son théorème implique, dans l'arithmétique, la cohérence de l'arithmétique elle-même, pourtant indémontrable (au sein de l'arithmétique, d'après le second théorème de Gödel). Le raisonnement est impeccable, très compréhensible et humain. En un certain sens, cela met en évidence ce qu'avait déjà affirmé Wittgenstein dans les années 1930 : à savoir, que la distinction entre métamathématique et mathématique n'est que fictive. Plus exactement, c'est une belle distinction conceptuelle; mais nous autres, humains, nous sommes en mesure d'évoluer, par le biais du jeu linguistique et du sens, d'un niveau à l'autre, comme nous le faisons chaque jour, y compris en mathématique. C'est pareil chez l'épicier : l'autre jour je lui ai dit, à brûle-pourpoint : « La phrase que je viens de prononcer est fausse », et « je ne prononce jamais de phrases vraies avec plus de six mots » (il s'est alors empressé de me servir pour pouvoir me mettre dehors). Le traitement à un seul niveau linguistique n'autorise pas ce type d'affirmations, pas plus que les raisonnements qui la concernent : le théorème de Tait-Girard, celui de Gödel (ainsi qu'une observation de Tarski) le démontrent. Or, les machines digitales *ne* fonctionnent *qu'au niveau linguistico-formel*, niveau codifiable avec des séquences de 0 et de 1, comme ce premier programmeur de l'histoire (que fut Gödel) nous l'aura appris pour les propositions formelles de l'arithmétique. Notre langage humain est, par contre, en mesure de capturer à la fois le métalangage, le langage et le sens, ce qui, à nouveau, est *démonstrativement* infaisable d'une manière mécano-formelle.

En réalité, c'est là le point central : par définition, un calculateur digital doit codifier avec des symboles, en gros 0 et 1, et la technique de codifica-

tion ne doit pas dépendre du sens ni de l'implémentation. La définition de Hodges s'applique très exactement au calcul mécanique : « l'intelligence (mécanique!)... est effectivement définie comme ce qui peut se manifester avec la communication de symboles discrets », et cette codification, suivant en cela les exigences de l'hypothèse fonctionnaliste, *ne doit pas* dépendre du *hardware* spécifique qui la réalise. Le but des langages de programmation à haut niveau est précisément celui d'être transférables d'un ordinateur à l'autre, d'un milieu de programmation à l'autre, et ce, sans problèmes. Cela n'est possible que parce que leur niveau n'est que formel-théorique, codifiable avec des suites finies de symboles, et ne dépend ni ne doit dépendre d'un sens quelconque, pas plus que des contextes. L'intelligence humaine, par contre, dépend quant à elle de la structure de notre cerveau, du fait qu'elle est logée dans *notre* boîte crânienne, avec tout le poids que représente son histoire évolutive et humaine. Le *sens* de l'élaboration qui prend place en un point du cerveau dépend *du lieu d'où* il advient, du *type* de neurones dont il procède, ainsi de suite, jusqu'à... la position des mains à cet instant, tant à cause du rôle que les mains ont pu jouer dans la complexification évolutive de notre cortex cérébral, qu'au sens plus historique que comprend bien n'importe quel Napolitain. Pour certains, cela pourrait représenter une limite, alors qu'il s'agit en fait d'une richesse : le « geste » du mathématicien, qui fait comprendre la « construction à la limite », c'est-à-dire le concept d'infini, s'inscrit de manière irréductible dans la preuve. Ce geste ne fait pas référence à une ontologie, mais bien plutôt à un parcours constitutif du savoir mathématique dans l'histoire. L'invariant conceptuel qui en procède est le résultat d'une stabilité acquise dans l'intersubjectivité, riche de signification : sa représentation formelle est une tentative remarquable d'en saisir l'expressivité, mais elle est essentiellement incomplète.

II. — SUR L'INFINI DANS LES PREUVES

Dans les démonstrations de cohérence auxquelles il a été fait allusion, l'usage du concept mathématique d'infini s'avère inévitable. Ce fait est d'ailleurs encore mieux explicité dans d'autres théorèmes d'incomplétude plus récents. Attention ! Si je m'acharne à parler de l'usage de l'*infini en acte* dans la théorie des nombres entiers (l'arithmétique), c'est pour jouer volontairement dans le camp adverse : il pourrait sembler facile de soutenir que pour démontrer des résultats sur des variétés différentiables de dimensions infinies (qui sont des espaces très abstraits), les mathématiques ont besoin de parler d'infini ; or, ce que la théorie de la démonstration nous a enseigné, c'est que même pour démontrer les propriétés de nos bons vieux

nombres entiers, 1, 2, 3, 4..., on peut avoir besoin du concept mathématique d'infini (en acte).

Il existe d'autres propriétés issues à proprement parler de l'arithmétique, qui ne sont pas des codifications de propriétés métathéoriques comme la cohérence, mais qui sont des propriétés des nombres (comme pour tout x , il existe y tel que $6 + x = y + 2$, juste... un peu plus compliquées), et dont on démontre qu'elles *ne sont pas démontrables* avec des techniques formelles finitaires, c'est-à-dire avec des déductions codifiables dans l'arithmétique (ou propres au calcul symbolico-mécanique finitaire). Mais on sait *démontrer* à propos de ces formules, qu'elles sont vraies sur les nombres, à travers une démonstration qui implique l'infini mathématique de manière essentielle. Mon but est par ailleurs d'arriver à réfléchir sur la façon dont l'usage de l'infini plonge les mathématiques dans toute une variété de formes de l'intelligence.

Les théorèmes de Paris-Harrington⁵ (PH) et la Forme finie de Friedman (du théorème de Kruskal) (FFF) constituent deux énoncés arithmétiques du genre : « pour tout x il existe y tel que (... bla, bla...) ». Ici, ... bla, bla... est une propriété des nombres, compliquée, mais pas trop⁶. Ces deux énoncés *impliquent* la cohérence de l'arithmétique ; mais, étant donné que la cohérence, formalisée en tant que proposition de l'arithmétique, n'est pas démontrable dans l'arithmétique, aucun des deux énoncés ne peut être démontrable dans l'arithmétique.

Cependant, PH et FFF sont *vrais*. Pour un mathématicien qui est en train de parler de propositions intéressantes (FFF, en particulier, est très intéressante et constitue précisément une variante d'un théorème de Kruskal, riche en applications), cela veut dire qu'il sait les démontrer, *et cela ne peut rien vouloir dire d'autre* ; ou encore, qu'il possède des techniques convaincantes pour déduire la vérité de ces propositions, relativement à la structure en question : les nombres entiers dans ce cas. Ces techniques, en particulier la FFF, se fondent essentiellement sur le bon ordre des entiers, en tant que propriété infinitaire, sur des séquences et des « arbres » finis et infinis : il s'agit de transformer en instruments de preuve notre expérience mathématique de raisonner sur la suite bien ordonnée des entiers, sur de simples structures planaires infinies, des arbres, de les confronter par inclusion, de savoir parler de branchements fini ou infinis⁷.

5. J. PARIS, L. HARRINGTON, « A mathematical incompleteness in Peano arithmetic », in *Handbook of mathematical logic*, éd. J. BARWISE, New York, North-Holland, 1978.

6. Pour FFF, voir H. Friedman's *Research on the foundations of mathematics*, éd. L. HARRINGTON *et al.*, New York, North-Holland, 1985, ouvrage technique écrit en l'honneur de Friedman, et consacré pour moitié à réécrire ce résultat, mais contenant également un ou deux articles vulgarisés de C. Smorinsky.

7. Dans la note 2, j'ai observé que la proposition G de Gödel affirme qu'« il n'existe pas de preuve de G », ou que G, ou plus exactement son nombre code, est solution de l'équation en x suivante : ($x =$ « il n'existe pas de preuve de x »). Jeu extrêmement raffiné entre métathéorie

Rien de miraculeux dans tout cela : c'est tout simplement la laborieuse conquête pratique de l'infini mathématique, organisé en particulier comme un ensemble ordonné de points, ou comme un ensemble partiellement ordonné de nœuds et de branchements d'arbres⁸. Comme l'indique la note, c'est là une preuve relativement facile, mais formellement indériverable : pourquoi son fondement devrait-il être seulement formel ? N'avons-nous pas d'autres choses à dire sur la preuve en mathématiques ? Quel est le *processus constitutif* de cette certitude de la preuve mathématique, même en dehors des formalisations ? Le programme de la formalisation n'est qu'une composante, nécessaire et importante, mais démonstrativement incomplète, de l'analyse de la preuve. En outre, tout étant centré sur l'analyse de la cohérence formelle, il ne fait que renvoyer à des infinités de plus en plus grandes (voir la note appelée précédemment), véritable abîme conceptuel, infini qu'il faut « fonder » à son tour.

Il est donc question ici de la conquête laborieuse du concept d'infini mathématique, car la clarté sur l'infini est une conquête conceptuelle qui a demandé des siècles et des siècles en mathématique : l'analyse de ce processus constitutif est, pour moi, une composante ultérieure et essentielle de l'analyse fondationnelle.

Nous savons en effet comment les Grecs hésitaient face aux successions infinies convergentes de points (le paradoxe de Zénon, la racine de 2), et

(la notion de preuve), théorie (la proposition formelle G) et sémantique (la structure des nombres entiers, où x doit être interprété ou trouvé). Les termes et les contenus de ce jeu nous donnent une idée du pourquoi G est indémontrable : c'est précisément ce que G affirme ! La difficulté tient entièrement dans la construction de G, et non dans la preuve de son indémontrabilité. Il n'en va plus ainsi dans des énoncés comme FFF, qui constitue une proposition formelle, *théorique*, « normale », sur les nombres : son indémontrabilité est due à des propriétés du bon ordre des entiers et d'ordre sur des arbres finis ; ces arbres, chose extrêmement difficile à démontrer, se transfèrent, par immersion isomorphe, sur l'ordre des ordinaux transfinitis. Or, on démontre (Gentzen) que leur « bon ordre » et la cohérence de l'arithmétique sont corrélés.

8. En bref, la preuve de FFF (la preuve que FFF est vraie sur les entiers) utilise un « oracle » sur un ensemble Σ_1^1 , une construction imprédictive, fortement non effective et infinitaire. Toutefois, cette preuve est relativement facile : deux ou trois pages que tout mathématicien d'aujourd'hui peut reconstruire sans beaucoup de présupposés. L'analyse de cette facilité entre pour partie dans nos intentions. Au contraire, la preuve de son indémontrabilité (et de son imprédictivité essentielle) est extrêmement difficile ; c'est une véritable percée technique obtenue par Friedman. Or, si l'on affirme que la preuve de FFF est elle-même « formalisable » dans une théorie des ensembles adéquate, il faut dès lors être très attentif à ce que l'on avance : un « oracle » sur un ensemble Σ_1^1 fait sortir de l'axiomatisabilité et de l'effectivité de la déduction, éléments essentiels du programme formaliste (et *a fortiori* de tout programme de mécanisation de la preuve ; l'énoncé complet, et d'autres remarques techniques sur FFF, se trouvent dans l'appendice à la version *web* de cet article, *downloadable* de <http://www.dmi.ens.fr/users/longo>). De plus, le problème de la cohérence d'une telle « théorie des ensembles » devient d'une complexité ingérable, c'est-à-dire une suite infinie de renvois à des théories de plus en plus infinitaires. Ces analyses ensemblistes sont très importantes et particulièrement informatives, en part. en aidant à spécifier des hiérarchies possibles d'infinis mathématiques. Toutefois, elles ne mettent pas, selon moi, un point final à l'analyse fondationnelle.

comment ils distinguèrent laborieusement, et souvent de manière angoissée, l'infini en puissance, et un infini... indéfini, négativement connoté par Euclide et Aristote (*apeiron*), même si ce dernier apporte une certaine clarté sur la différence entre les deux concepts d'infini. Ce n'est qu'avec saint Thomas, Duns Scot et le Moyen Âge tardif, comme l'explique Zellini⁹, que s'ébauche un véritable tournant du paradigme scientifique : l'infini devient un attribut positif, propre à Dieu, et qui peut être créé par Dieu (l'infini *in actu*, opposé à l'infini *in fieri*). Quant aux mathématiques du XVI^e au XVIII^e siècle, il faut rappeler qu'elles se développèrent au milieu de bien des incertitudes, mais avec une audace toujours croissante concernant l'usage des infinis en acte et des limites, qui ne représentaient plus des concepts négatifs, mais, bien au contraire, un élément du calcul (voir Pascal, Galilée, Cavalieri, Newton, ou la métaphysique de Leibniz...). On parviendra enfin à une grande désinvolture et clarté conceptuelles dans le traitement de l'infini, avec Cantor. Son « paradis des infinis » constitue en effet un tournant ultérieur qui a véritablement marqué notre époque en mathématique : Cantor a introduit l'infini dans des contextes opérationnels, en « travaillant avec l'infini », en additionnant, en multipliant et en itérant des limites sur des infinis d'infinis. Une désinvolture au départ excessive, au point d'aboutir à des paradoxes : un siècle de travail mathématique, accompagné d'un affinement croissant des techniques et d'une solidité tout aussi croissante des définitions (aujourd'hui un mathématicien sait vraiment ce que veut dire « donner une bonne définition », surtout dans les cas difficiles qui impliquent l'infini, grâce également à l'effort entêté des logiciens et des formalistes!) nous permet désormais de gérer des arbres infinis, le bon ordre au-delà de l'infini des nombres entiers, etc. au titre d'instruments quotidiens de la preuve ; et ce, sans tomber dans les erreurs auxquelles furent voués ces audacieux pères fondateurs. Tout cela permet finalement de définir, avec rigueur, et dans différents contextes, l'infini mathématique, c'est-à-dire précisément ce qui n'était qu'indéfini pour Aristote (Cantor était vraiment un mathématicien qui osait conjecturer et prouver des observations vraiment surprenantes pour l'époque, telles que la possibilité d'établir une correspondance biunivoque entre la droite et le plan, etc. ; en bref, il a bel et bien osé « penser au-delà de l'infini »¹⁰).

9. *Breve storia dell'Infinito*, Milan, Adelphi, 1980.

10. Pour nous, aujourd'hui, l'arithmétique transfinie de Cantor n'est pas quelque chose de difficile. On compte 1, 2, 3... On appelle ω la limite de cette séquence, sa clôture à l'horizon. Puis on continue, $\omega + 1$, $\omega + 2$, ... $\omega + \omega = \omega \times 2$.

Ensuite : $\omega \times 2$, $\omega \times 3$, $\omega \times 4$, ... $\omega \times \omega = \omega^2$.

La règle du jeu devrait être claire et on continue à l'appliquer avec les exposants :

$$\omega^2, \omega^3, \dots \omega^\omega.$$

Par suite, ω puissance ω puissance ω ... sera simplement à la limite ω puissance ω , ω fois. Ce nombre ordinal s'appelle ε_0 . Il est solution minimale de l'équation $x = \omega^x$. Si l'on réussit à démontrer (ou si l'on suppose) que ces ordinaux sont « bien ordonnés », c'est-à-dire que tout

En d'autres termes, l'ordre des nombres, dans l'espace ou dans le temps, leur succession dans une géométrie discrète et bien ordonnée, c'est-à-dire étendue au-delà de l'infini en acte des nombres eux-mêmes, la structure planaire des arbres mathématiques possiblement infinis sont tous des propriétés géométriques ou infinitaires qui permettent de démontrer certaines propositions finies, arithmétiques, exigeant *des preuves* échappant à la formalisation dans des suites finies de symboles discrets, codifiables en arithmétique. Évidemment, on doit parler de ces structures et des preuves qui portent sur elles avec des mots humains de longueur finie, mais on ne peut le faire de manière complète avec des *calculs formels* manipulables sans référence au sens : c'est, ni plus ni moins, ce que disent tous ces résultats ; la pratique historique de l'infini, l'ordre selon lequel nous organisons, mentalement ou dans le plan, les nombres et les arbres, si possible infinis, sont le fondement, les racines extrêmement solides de méthodes de preuve qui ne sont pas mécanisables. Ce qui revient à dire que dans ces preuves, dans le fait de faire des hypothèses ou de passer d'une ligne à la suivante, ces lignes étant certainement constituées de mots finis de notre langage, il faut comprendre le concept d'infini en acte : et ce, qu'on soit en train de parler d'ensembles infinis de nombres ou d'arbres infinis dans le plan, en se situant dans une géométrie mentale, ou qu'on fasse le choix du premier élément d'un ensemble non vide arbitraire d'entiers (une opération tout à fait infinitaire, en général). Bien qu'en fin de compte ces preuves soient elles-mêmes décrites par des mots, *pour passer d'une phrase à l'autre de la déduction*, il faut donc saisir derrière les mots des significations (géométriques) de l'infini, *démonstrativement non codifiables* en arithmétique, ou, en d'autres termes, non codifiables ni manipulables en tant que suites finies de symboles sans signification ; car, ces résultats récents d'incomplétude démontrent que même de simples propriétés des entiers sont démontrable-

sous-ensemble non vide admet un plus petit élément, alors on démontre que l'arithmétique est cohérente (c'est le théorème de Gentzen de 1936). Les énoncés PH et FFF, déjà mentionnés, impliquent précisément le bon ordre jusqu'à ε_0 et bien au-delà, puisque évidemment on peut faire ε_1 , ε_2 , ε_3 , ε_ω et bien d'autres choses. En réalité, enfants et mathématiciens s'amusent souvent à ce jeu : tu me donnes un nombre, et je t'en donne un encore plus grand. Mais le jeu n'est pas arbitraire, car il prend son sens dans une structure géométrique intéressante : l'ordre croissant discret, le « bon ordre » pour être précis. Le jeu ne fait qu'*étendre* le bon ordre des entiers, en étendant les opérations de somme, de produit, d'exposant et de limite, au-delà de ω .

Le fait de donner de manière cohérente un nom à l'infini, *son usage dans des contextes opérationnels*, l'a inscrit dans ce réseau conceptuel que nous appelons mathématique. L'ordinal ω n'est pas dans le monde, mais ça n'est pas non plus une convention, ni un pur symbole : il synthétise plutôt un *principe de construction*, un « geste discipliné » par la pratique mathématique, riche d'histoire ; pour des considérations ultérieures, voir Giuseppe LONGO, « The mathematical continuum, from intuition to logic », in *Naturalizing Phenomenology. Issues in contemporary phenomenology and cognitive sciences*, éd. Jean PETTIT et al., Stanford, CA, Stanford University Press, 1999.

ment vraies par des preuves qui ne sont pas représentables au seul niveau théorique, codifiable comme tel avec des 0 et des 1, ou avec d'autres techniques mécanisables du même type.

Mais de telles preuves n'ont aucunement besoin de renvoyer à des miracles ontologiques évoquant des vérités mathématiques inaccessibles. Nous ne sommes absolument pas contraints de ne raisonner que sur des suites formelles finies codifiables avec des 0 et des 1, ce qui est bien ce que font les ordinateurs, ni de déduire à partir de *pattern matching* (si l'hypothèse a la forme « A et A implique B », alors, de la seule forme des hypothèses, on doit déduire mécaniquement « B »). Notre rigueur n'est pas simplement que formelle/linguistique : nous construisons une pratique de l'« infini » dans différents cadres conceptuels, et nous en faisons un concept mathématique (ou géométrique) rigoureux, un acquis difficile, obtenu après des siècles de travail. Les mathématiques sont fort belles et fort solides du seul fait qu'elles se constituent dans notre rapport aux régularités du monde et qu'elles s'enrichissent des pratiques historiques du langage, du dessin et de la rigueur ; et cela, bien au-delà des formalismes linguistiques finitaires, adéquats aux ordinateurs auxquels, certes, cet acquis historique, qui n'est autre que notre *concept* d'infini, ne suggère absolument rien.

Il est difficile de parler de tout cela, car l'un des buts de la logique mathématique de ce siècle a précisément été d'« éviter l'infini » dans l'analyse fondationnelle, même si on doit le considérer comme pertinent pour la pratique mathématique : il est trop dangereux pour être fondateur. Pourtant, l'infini est bel et bien un élément central sur lequel on peut aujourd'hui s'arrêter, grâce, en partie, aux résultats obtenus en logique mathématique. Et l'infini constitue précisément l'un de ces concepts mathématiques qui, pour avoir un sens, ont besoin de références plurielles à d'autres formes d'intelligence, considérées jusque dans leur devenir historique, du fait même qu'il s'agit de formes de la connaissance.

III. — L'INFINI MATHÉMATIQUE ET LES MÉTAPHORES

En fait, au jour d'aujourd'hui, il n'y a pas d'autre fondement *a priori* ni de justification formelle *a posteriori* de l'infini mathématique que la *métaphore*¹¹ en tant que telle. L'infini en acte ne fait pas précisément partie de

11. J'emploie ici la notion de métaphore dans un sens quelque peu dual par rapport à l'usage qui en est fait par LAKOFF et NUNEZ, dans leur article « The metaphorical structure of mathematics. Sketching out cognitive foundations for a mind-based mathematics », in *Mathematical Reasoning. Analogies, metaphors and images*, éd. L. ENGLISH, Hillsdale, NJ, Erlbaum, 1998, p. 21-89 : pour eux, ce sont les descriptions mathématiques qui sont métaphoriques (thèse par ailleurs très intéressante) ; pour moi, c'est en fait la signification d'un certain

nos expériences sensibles, qu'elles soient directes ou indirectes ; ni même de la pratique du comptage ou de l'activité géométrique « à la grecque » centrée sur les figures : pour cela, l'infini potentiel suffit, qu'il s'agisse d'ajouter « + 1 » ou de poursuivre un mouvement sans s'arrêter. La pratique historique, que j'ai mobilisée à plusieurs reprises, d'un infini mathématique *en acte*, constitue un ultérieur progrès : il faut concevoir la limite de cet interminable « + 1 », clôturer l'horizon, tout en proposant un point à la « limite ». Cette pratique est construite à partir de mille réflexions qui se situent entre le mystique et l'émotionnel, comme je le disais : à commencer par les Grecs, et en poursuivant avec les conflits sur la pleine grâce de Marie (l'infini en acte de Duns Scott), les discussions sur le regard esthétique du peintre envers les lignes convergentes (le point perspectif à l'infini, à la limite, propre à la peinture de la Renaissance, qui n'est autre qu'une technologie entièrement construite, qu'une seule parmi tant d'autres possibles), l'ancrage dans les monades et l'infini métaphysique de Leibniz visant à donner sens au calcul infinitésimal. Et c'est précisément cette constitution du concept d'infini en acte, riche d'émotivité sédimentée dans l'histoire et rendue « objective » par la pratique mathématique, qui est devenue une part essentielle de sa spécification mathématique, du fait même de son entrée dans les démonstrations. Pourtant, l'infini mathématique est encore autre chose que les différentes expériences mentales de l'infini, puisqu'il est *l'invariant* que nous proposons après toutes ces expériences plurielles. En même temps, cependant, il trouve son fondement précisément dans la somme de ces expériences, chacune étant une métaphore, un pont ouvert sur d'autres formes de connaissance et d'autres formes d'intelligence.

En réalité, c'est en vain qu'on a cherché à le fonder par des méthodes intérieures aux mathématiques. Avec Cantor d'abord, comme je l'ai déjà rappelé, l'infini est précisé et traité avec une rigueur toute mathématique, objectivé dans des notations et dans un calcul, et, de plus, unifié dans une théorie des ensembles, d'ensembles si possible infinis. Gottlob Frege donnera à cette théorie une forme logique rigoureuse, corrigée par la suite et précisée en une théorie formelle des ensembles, et ce, sous l'influence de l'école hilbertienne. Mais, dès le début de cette aventure, qui changera le visage des mathématiques, l'infini pose de graves problèmes.

Cantor propose sa théorie dans le but d'analyser l'infinité du continu des nombres réels : il démontre que ceux-ci sont strictement plus nombreux que les nombres entiers. Et sa preuve suggère la manière de continuer indéfiniment à construire des infinis toujours plus grands. Il passe alors des

concept, le concept d'infini mathématique dans notre cas, qui, comme j'essaie de l'expliquer, se construit en faisant référence à des métaphores.

années à chercher à démontrer une hypothèse : que le nombre infini des réels, leur cardinalité comme il dit, est « immédiatement successive » à l'infini des nombres entiers, ou, en d'autres termes, à leur cardinalité (l'hypothèse du continu). Il n'y parvient pas. Pas plus d'ailleurs que ses successeurs, Zermelo, Bernays, von Neumann et bien d'autres, tous formalisateurs de la théorie cantorienne des ensembles, qui ne parviendront pas plus à démontrer la dérivabilité d'une autre propriété clé de l'infini : celle affirmant qu'on peut choisir un élément pour chaque ensemble, cet ensemble étant pris dans une collection infinie d'ensembles (axiome du choix).

Les propriétés de l'infini, désormais bien précisé en tant que concept mathématique, semblent échapper au traitement ensembliste formel : puis, grâce à un résultat de Kurt Gödel de 1938, et à un théorème dû à Cohen (1965), on démontrera que la théorie formelle des ensembles ne réussit à rien dire sur l'hypothèse du continu et sur l'axiome du choix. Ou, qu'en d'autres termes, ces propositions sont indécidables dans la théorie formelle des ensembles, comme l'est la proposition G de Gödel en arithmétique. On peut alors se demander si elles sont vraies, et il faut démontrer si et dans quel cadre elles sont vraies, comme pour la proposition de Gödel : si l'on procède à une certaine construction d'un univers d'ensembles, cette construction étant due à Gödel, on démontre alors que l'hypothèse du continu et l'axiome du choix sont vrais *dans cet univers* ; si l'on procède à une autre construction, celle de Cohen, ils s'avèrent tous les deux faux, dans cet autre univers ensembliste. À ceux qui croient en des propositions des mathématiques qui seraient vraies dans l'esprit de Dieu, qui croient en des vérités mathématiques absolues et indémontrables, il faudrait alors demander si, pour Dieu, l'hypothèse du continu et l'axiome du choix sont vrais ou faux. Tout ce que nous pouvons affirmer, nous autres humains, c'est, par exemple, que la construction de Gödel est plus simple, au sens de la simplicité qui nous est suggérée par certaines régularités du monde, tels les principes de minimum, les géodésiques, les constructions « minimales » : mais pour ce faire, il convient de spécifier ce qu'on entend par minimal dans ce contexte précis, de proposer une construction mathématique infinitaire, et de démontrer, en son sein, la vérité de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix. Or, bien qu'elle ne soit pas minimale, même la construction de Cohen n'est pas arbitraire : elle fait usage d'une notion d'« élément générique » qui est déterminante en mathématique.

En définitive, nous dirons qu'en mathématiques on propose un concept, on choisit une méthode, on construit des structures, on démontre, tout en spécifiant où et comment, d'une manière certes non arbitraire : il n'existe pas, en mathématiques, de propositions « vraies et indémontrables » et, en même temps, elle ne s'épuise pas dans des calculs mécanisables puisqu'à

chaque fois il s'agit de démontrer, si nécessaire avec des méthodes infinies, si et dans quel cadre telle ou telle proposition est indémontrable, et si et dans quel cadre elle est vraie. Ceux qui affirment qu'il y a des propositions « vraies et indémontrables » doivent en donner une, en la pointant du doigt : mais, en faisant cela, il leur faudra aussi la démontrer, c'est-à-dire, en démontrer la vérité à l'intérieur d'une construction bien précisée. C'est bel et bien ce qu'il a fallu faire pour la proposition G de Gödel, PH ou FFF, sur les entiers, ainsi que pour l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix, et ce, dans différentes constructions ensemblistes.

Pour en revenir à la question de l'infini en théorie formelle des ensembles, les résultats d'indépendance de l'hypothèse du continu et de l'axiome du choix démontrent que, si l'on en reste au niveau du formalisme, sans qu'il prenne ou avant même qu'il ne prenne un sens dans une construction mathématique, alors cette théorie formelle, créée pourtant pour parler de ces propriétés cruciales de l'infini mathématique, reste à nouveau, et en tant que telle, totalement muette. Mais il faudrait au moins qu'elle soit formellement cohérente (en particulier, si l'on y ajoute l'hypothèse du continu et l'axiome du choix, en tant qu'axiomes, justement). En conséquence de(s), disons certaines extensions des, théorèmes d'incomplétude de Gödel, cette cohérence n'est même pas démontrable... sans supposer pouvoir construire des infinités, des nombres cardinaux extrêmement grands, qui échappent précisément à la théorie formelle dont on veut montrer la cohérence. Rien de métaphysique là-dedans, ni aucune ontologie de l'infini mathématique : ce qu'on affirme, c'est seulement que si, *d'abord*, je suis en mesure de faire, ou je suppose être en mesure de savoir faire certaines constructions conceptuelles d'infinités « très grandes », *alors*, et en utilisant ces mêmes constructions, je peux démontrer la cohérence (construire des modèles) de telle ou telle théorie des ensembles ; et c'est ce à quoi ont conduit certains résultats difficiles de la théorie des ensembles de ces dernières décennies.

Du reste, bien conscients des difficultés de l'infini, nombre de logiciens mathématiciens du début du siècle, Hilbert et Brouwer pour ne citer qu'eux, avaient cherché à extirper l'infini en acte des théories fondationnelles. Hilbert avait reconnu la centralité de l'infini en mathématique ; bien plus, il avait affirmé le caractère indispensable de cette notion pour la pensée mathématique, et que le mathématicien devait travailler dans le paradis des infinis cantorien. Cependant, il s'avère d'après lui que pour garantir la certitude du raisonnement, l'analyse fondationnelle doit en faire l'économie, puisque « les opérations sur l'infini ne peuvent être garanties qu'à partir de l'étude du fini » (deux écrits de 1925, en appendice à la ver-

sion française des *Fondements de la géométrie*, ainsi que dans Van Heijenoort¹², constituent une belle mise au point d'un tel programme).

Par contre, comme nous l'avons vu, les récents résultats d'incomplétude font rentrer l'infini par la fenêtre, et ce de manière essentielle, jusque dans des théories qui, comme l'arithmétique, devraient être finitaires par excellence. Autrement dit, non seulement nous ne réussissons pas avec le fini à garantir la cohérence des théories qui parlent de l'infini, comme dans le cas des différentes théories des ensembles, mais nous pouvons également avoir besoin de l'infini jusques et y compris pour démontrer des énoncés finitaires de l'arithmétique, comme PH ou FFF que nous avons mentionnés plus haut.

Rien de grave dans tout cela, précisément parce que la certitude qui s'inscrit dans l'usage de l'infini est, à mon avis, extrêmement solide : elle tient dans l'entrelacs et le soutien réciproque de nombreuses expériences mentales et historiques qui peuvent même être d'ordre extra-mathématique. Sa solidité conceptuelle tient en son enracinement dans une pluralité de métaphores qui ont permis de concevoir, de proposer et de préciser graduellement à travers l'histoire l'invariant mathématique. Pluralité sur laquelle je reviens une dernière fois en me résumant, car c'est bien là le nœud de tout : l'infini mathématique n'est pas une métaphore, mais bel et bien *notre proposition d'un concept invariant* construit à partir d'une pluralité d'expériences conceptuelles incluant des métaphores religieuses, des gestes de fermeture à l'horizon perspectif, des points lointains de convergence, des pratiques conceptuelles de travail sur des ensembles et des structures mathématiques infinies.

Le splendide théorème de Gödel nous a laissé en héritage une dramatique métaphysique des mathématiques : du fait qu'il s'agit seulement d'un théorème d'indécidabilité (il ne dit rien sur la manière dont on *démontre* la proposition indécidable en arithmétique, ou la cohérence qui lui est équivalente), on n'arrête pas depuis des décennies de parler de vérités absolues des mathématiques, de « regarder par-dessus l'épaule de Dieu », au lieu d'aller étudier les nombreuses et belles preuves de cohérence qui ont été apportées depuis 1936. Car l'indécidabilité n'aidant en rien à comprendre quelles méthodes de preuve peuvent bien exister en dehors de l'arithmétique (en affirmant simplement que certaines propositions ne peuvent pas être démontrées en arithmétique), le débat s'est purement et simplement enfermé dans un conflit manichéen : d'un côté, avec ceux qui disent que les limites de l'homme (*l'human computer*, dans l'acte de la preuve) sont les mêmes que celles de la machine, et de l'autre, ceux qui ont élevé leurs louanges aux mystères mystiques ou quantiques des mathématiques,

12. *From Frege to Gödel*, Cambridge, Harvard University Press, 1967.

précisément parce que, à s'en tenir uniquement aux théorèmes de Gödel, on accepte passivement la notion de *démonstrabilité* (et même de rigueur mathématique !) comme étant exclusivement propre aux formalismes arithmétisables. Une analyse des théorèmes indémonstrables en arithmétique, mais démonstrativement vrais, à laquelle je viens de faire allusion, permettrait de « fonder » une pratique cruciale, l'usage rigoureux du concept mathématique d'infini ; un usage auquel, pour le moment, je ne sais donner d'autre fondement qu'un fondement « pratique » et historique, par ailleurs extrêmement solide, qui fait référence à ses significations métaphoriques.

IV. — MÉTAPHORES ET ANALOGIES, ENTRE INTELLIGENCE, ÉMOTIONS ET AFFECTIVITÉ

Avant d'en venir à un certain discours sur les intelligences et l'affectivité, je voudrais ouvrir une parenthèse. Dans le fait de disséminer les fondements des mathématiques dans une variété de formes de connaissance et d'intelligence, dans cette tentative d'analyse de leur genèse évolutive et historique, je suis, en tant que logicien mathématicien, tout simplement en train de violer explicitement l'un des dogmes les plus solides de la philosophie des sciences de notre siècle, dogme qui interdit toute confusion entre genèse et fondement, créativité et déduction, logique de la découverte et rationalité interne d'une discipline. Mais c'est précisément... « ce dogme de la fracture principielle entre élucidation épistémologique et explicitation historique [...], entre origine épistémologique et origine génétique [...] [qui doit] être renversé de fond en comble », comme l'affirme le Husserl si peu écouté de *l'Origine de la géométrie* (1936). Il s'agit là d'une question cruciale concernant l'ensemble du savoir scientifique, parce qu'en chacun de ces savoirs fonctionne ce jeu difficile entre une autonomie épistémologique, de l'ordre de la logique et de la justification interne, et une genèse du savoir, qui est, entre autres, de l'ordre de la liaison, au cours de l'évolution et dans l'histoire, aux autres formes de connaissance.

On peut dès lors considérer que la hiérarchie qui s'est construite dans nos cultures ne constitue qu'un miroir totalement déformant de l'intelligence humaine, que ce soit sous la forme de l'unique rationalité possible, de la seule méthode scientifique, qui, en dernière analyse, sont celles des mathématiques, ou que ce soit sous la forme de compartiments étanches. Il n'est donc pas abusif de voir une certaine continuité et un certain lien entre les différentes formes d'intelligence, les différentes formes humaines de rapport au monde, et certaines des différentes formes de connaissance scientifique. Antonio Damasio, dans son ouvrage, *L'Erreur de Descartes*,

paru à Paris en 1995, donne par exemple le point de vue des neurophysiologues sur la question. Il cherche en effet à exhiber les évidences neurophysiologiques sur le fondement desquelles l'affectivité et l'intentionnalité s'avèrent faire partie intégrante de la rationalité. C'est là que s'inscrit pour lui l'erreur de Descartes : dans sa séparation de l'âme rationnelle et de l'âme émotionnelle qui, d'après le neurophysiologue, semble quelque chose de totalement impossible.

On peut, cependant, enrichir cette analyse d'un sens de l'intelligence humaine conçue comme dialogue des êtres humains dans l'histoire. De plus, l'intentionnalité et l'affectivité sont non seulement des stimuli essentiels de l'intelligence, ce sur quoi tout le monde peut parfaitement s'accorder, mais elles concernent le *contenu* même de l'intelligence. Ou encore, l'intentionnalité, l'affectivité et les émotions ne sont pas simplement l'éventuel appât ou l'éventuel frein de la machine « rationnelle », mais qu'elles contribuent à lui donner le sens de la marche, et à en déterminer par conséquent le contenu.

Selon moi, la compréhension d'un fait, jusques et y compris la conjecture du mathématicien, se fonde sur des analogies, sur des métaphores, et par conséquent sur des choix de *direction* dans la représentation et dans les contenus de la construction conceptuelle, dont le sens est riche d'affectivité : on propose, on choisit et on comprend une analogie, une métaphore, sur des fondements qui sont également émotionnels ou affectifs ; on est ainsi conduits par l'intentionnalité. C'est dire qu'on choisit d'établir un pont entre des connaissances différentes, entre précisément des intelligences de natures différentes ; et c'est là tout ce qui constitue l'analogie et la métaphore, sur des fondements qui sont tout aussi affectifs qu'émotionnels. C'est pourquoi le contenu même d'une pratique rationnelle, qui s'appuie sur des métaphores et des analogies, est riche en intentionnalité et en émotions, car, à travers la direction donnée à la métaphore ou à l'analogie-« pont », elles contribuent à sa détermination. Or, cet infini, concept clé et notion incontournable d'une mathématique qui demeure le lieu forcé de la rationalité, nous ne le comprenons que comme le concept invariant d'une pluralité d'expériences conceptuelles, à la fois pratiques et émotionnelles, qui vont des métaphores religieuses jusqu'à la métaphore de la profondeur en peinture, en passant par la fermeture à l'horizon des lignes convergentes et par la limite de mouvements itérés. C'est là une sorte de vecteur résultant d'un ensemble de vecteurs, une construction par conséquent différente de tous les vecteurs donnés, mais néanmoins toujours dépendante d'eux, que ce soit en direction ou dans les contenus.

En conclusion, Descartes nous a bel et bien apporté une grande clarification intellectuelle, en nous aidant à fonder la méthode scientifique moderne et en purgeant, entre autres, le « raisonnement » des résidus de magie, du

vide des petites logiques et des syllogismes médiévaux, et d'un mysticisme religieux bien trop envahissant. Maintenant que nous avons compris et que, dans l'ensemble, nous savons assez bien mettre tout cela en œuvre dans le cadre de la science, nous sommes en mesure de recomposer la fracture qu'il nous a léguée avec sa méthode et ses règles « *ad directionem ingenii* » ; ce qui nous permettra d'aller plus loin, de mieux comprendre avec l'aide de l'analyse scientifique, et de mettre ainsi le doigt sur ces points tout particulièrement difficiles où rationalité et affectivité se confondent et se fondent réciproquement, c'est-à-dire où se mêlent une pluralité d'intelligences humaines.

V. — LE BON DIEU, LES MACHINES ET L'INDUCTION

Dans ce programme de recherches, les mathématiques peuvent très bien être utiles, car si nous parvenons à rompre leur état de siège permanent, autrement dit ce rôle absolu et séparé qui leur est dévolu, à briser cette tour d'ivoire dans lesquels platoniciens et formalistes veulent les enfermer, y compris au travers de visions différentes des choses, elles pourront alors nous fournir, entre autres, un bel exemple de pratique cognitive. Voilà un exemple relativement simple, puisque même quand elles sont profondes et difficiles, les mathématiques n'en restent pas moins conceptuellement simples : l'élégance et l'essentialité conceptuelles constituent leur devise, et l'une de leurs raisons d'exister. Élégance et essentialité qui sont mêlées à des constructions humaines, profondément humaines. Tant il est vrai, soit dit entre nous, que le Bon Dieu et les ordinateurs ne savent faire des mathématiques que fort peu et fort mal. Le premier ne parvient pas à maintenir les astres, qui sont pourtant sa création la plus haute, sur des orbites qui soient des sections de cônes, comme le recommandait déjà Kepler. Plus précisément, les orbites de nos propres planètes n'intégrant même pas un système d'équations différentielles, il est dès lors dans la nécessité fort justement intuitionnée par Newton, d'intervenir de temps en temps par des petites pichenettes toutes-puissantes, afin de nous maintenir en orbite autour du soleil¹³ : ce qui, oserai-je remarquer, constitue une façon de faire plus artisanale que mathématique. Et espérons d'ailleurs qu'il continue longtemps à avoir de tels gestes affectueux, car nous ne possédons aucun

13. Newton s'était bien aperçu que les orbites des planètes se perturbent réciproquement, par l'attraction gravitationnelle réciproque. En part., que des effets de « résonance gravitationnelle » pouvaient même mettre en cause la stabilité du système solaire. Sa grande religiosité lui offrit la solution.

théorème de stabilité pour le système solaire. De toutes façons, nous recherchons laborieusement à en décrire le mouvement de manière tout approximative, avec les instruments difficiles du meilleur des langages dont nous disposons pour parler du mouvement des corps, des courbes et des géométries de l'espace, à savoir, les mathématiques des systèmes dynamiques ; mais nous ne parvenons qu'à obtenir des descriptions qualitatives concernant les comportements de principe des systèmes du déterminisme chaotique.

Quant aux calculateurs, outre le fait qu'ils ne peuvent démontrer la cohérence de l'arithmétique ou la FFF, ils ne parviennent même pas à faire une démonstration par induction arithmétique qui soit à peine plus qu'une pure banalité. En effet, par induction arithmétique, comme j'ai pu le rappeler, on entend la règle finitaire suivante : si l'on démontre $A(0)$ et si l'on démontre que, « pour tout x , $A(x)$ implique $A(x + 1)$ », alors on peut en déduire que « pour tout x , $A(x)$ ». Qu'y a-t-il de plus mécanisable ? Eh bien, dans des preuves à peine plus complexes où cette règle est utilisée, il est bien rare que l'on réussisse à faire le pas inductif, ou à donner la preuve que « pour tout x , $A(x)$ implique $A(x + 1)$ », et ce, en utilisant précisément la proposition A qu'on veut démontrer. Dans nombre de cas significatifs, il faut trouver une proposition B , plus forte que A , ou bien telle que « B implique A », et pour laquelle, par contre, on réussit à démontrer que « pour tout x , $B(x)$ implique $B(x + 1)$ ». La proposition B est appelée charge inductive. B peut être beaucoup plus complexe que A : il n'existe aucun critère *a priori* pour choisir B , si ce n'est quelques vagues indications heuristiques selon lesquelles la charge inductive doit « contenir tout ce dont on a besoin », sur la base à la fois des hypothèses, de la structure de la démonstration qu'on est en train de construire et de la thèse visée. En réalité, le choix de B entre une infinité de possibles se fonde sur des *analogies*. Analogie avec une preuve déjà rencontrée, qui peut éventuellement être algébrique, alors même qu'on est en train de travailler en géométrie, ou bien, analogie avec une induction sur le nombre des dimensions, qui est inspirée d'une autre démonstration, très différente, établie sur la longueur des formules, etc. Analogies et ponts entre différentes formes de connaissance, normalement à l'intérieur des mathématiques, mais peut-être pas toujours, car l'analogie, tout comme la métaphore, peut facilement nous en faire sortir.

Évidemment, tout cela n'est en rien préjudiciable au programme du formaliste qui peut toujours, dans ces cas-là, reconstruire *a posteriori* le cadre logico-formel de la preuve où, tout simplement, il remplacera A par B là où cela devra s'avérer nécessaire. Il s'agit là néanmoins d'un obstacle insurmontable sur la voie de l'hypothèse logico-computationnelle, car il n'existe aucune machine qui soit en mesure de choisir B dans le cadre d'une démonstration nouvelle.

La question de la charge inductive constitue désormais un point crucial de l'interactivité pour des programmes intéressants de démonstration automatique. Il existe en réalité de nombreux et beaux systèmes de calcul et de déduction automatique qui sont éminemment interactifs : le mathématicien isole des comptes monstrueux, des explorations de bases de données énormes, qu'il fait ensuite exécuter par l'ordinateur, de manière aussi rapide que parfaite; il distille des lemmes terribles, aux mille passages mécanisables, puis il les transmet au système, en intervenant finalement dans les choix cruciaux touchant à la démonstration d'un théorème, tels le choix de la charge inductive, de l'hypothèse riche de sens, etc. Finalement, libéré des mythes, l'ordinateur, avec sa puissance de calcul déductif-formel toute particulière, donne, dans certains cas, littéralement des ailes au calcul et à la démonstration humains, et ce grâce à une interaction homme-machine bien pensée. C'est là une interaction qui renvoie l'usage de l'analogie, de la métaphore et du sens à l'homme, c'est-à-dire à ces connexions typiques du réseau de connaissances et de formes de l'intelligence qui font précisément l'unité et la force toutes spécifiques de la pensée humaine.

Pour nous résumer, l'hypothèse formaliste affirme que le seul calcul des signes dépourvus de signification peut permettre de reconstruire *a posteriori* tout raisonnement mathématique, et d'en dégager le fondement logico-formel; ses défenseurs reconnaissent cependant la pluralité des formes de déduction (la fameuse « créativité mathématique ») qui, après seulement, c'est-à-dire *a posteriori*, doivent pouvoir se réinscrire au seul niveau formel. L'hypothèse logico-computationnelle, bien plus forte, suppose que l'intelligence logico-formelle, fondée sur la manipulation de formules conçues comme des suites de symboles discrets dépourvues de sens, eux-mêmes codifiés avec, par exemple, des 0 et des 1, permet de représenter toute forme d'intelligence, c'est-à-dire non seulement de reconstruire *a posteriori* le squelette formel des mathématiques, mais de simuler parfaitement l'action « d'avancée » de ceux qui raisonnent dans chacun de ces champs. Or, si les théorèmes d'incomplétude conduisent à l'échec le premier de ces deux programmes, ils conduisent *a fortiori* le second au même résultat; de plus, ce second programme défaille même devant une question aussi banale que celle de la charge inductive en arithmétique.

Comment, dès lors, s'en tirent les défenseurs, toujours nombreux, de ces deux programmes? Les formalistes, bien conscients de la pertinence métamathématique des théorèmes d'incomplétude, affirment qu'il ne s'agit précisément et exclusivement que de « trucs métamathématiques » (impliquant *ad hoc* la métathéorie), et que les démonstrations de propositions intéressantes sont reconstructibles formellement. Or, décider de ce qui est intéressant n'est qu'affaire d'opinion, et pour moi, le théorème de normalisation

de Girard est à la fois intéressant et gros de nombreuses applications, sur le plan informatique en particulier, bien que la preuve à la Tait-Girard engage la métathéorie. On peut dire la même chose à propos de la FFF, où, de manière encore plus explicite, la variété de nos formes de connaissance entre dans la démonstration, et ce, précisément, à travers le *concept d'infini*.

Quant aux défenseurs de l'hypothèse logico-computationnelle, apparemment ou ils ignorent purement et simplement ces résultats, ou ils en donnent des interprétations empruntées aux argumentations formalistes bien plus doctes, bornées néanmoins à la seule mathématique; c'est dire qu'ils continuent à affirmer que les limites de la machine sont également des limites pour l'homme, ou encore que les choses « intéressantes » que l'homme sait faire, la machine le sait également, rejetant tout le reste au nombre des choses inintéressantes ou inexistantes (certains, comme Searle¹⁴, qualifient ces thèses d'« éliminationnistes », terme peut-être un peu trop lugubre, mais expressif). D'autres enfin, plus audacieux, soutiennent que l'ordinateur digital pourrait ne pas se limiter à travailler au seul niveau formel-théorique. Ils contredisent ainsi les deux hypothèses clés du fonctionnalisme (concernant et le dessin des ordinateurs et leurs langages), c'est-à-dire la codificabilité, au seul niveau théorique, de toute forme d'intelligence en symboles discrets, codifiables à leur tour dans l'arithmétique formelle ou dans des théories semblables, et l'indépendance de cette *codificabilité* (mais non du code lui-même, évidemment) à l'égard de toute implémentation spécifique. Comme je l'ai déjà indiqué, la codificabilité symbolique (l'unicité du niveau conceptuel auquel s'inscrit tant de 0 et de 1) et l'indépendance « de ce qu'on sait faire » à l'égard de contextes et d'implémentations spécifiques (l'idée fondamentale de la programmation des ordinateurs, c'est-à-dire la « portabilité du logiciel ») excluent précisément le réseau de connexions typique de la pensée humaine qui se fonde sur l'unité de son *hardware* spécifique avec son *software* : notre cerveau, équipé de ses « modules connexes » et de son histoire. Il s'agit là d'un réseau et d'une unité qui, pour tout moniste, ne peuvent être fragmentés en « logiciel » et « matériel » (âme et corps ?), ni en métalangage, langage et sémantique, pour être ensuite représentés au seul niveau linguistico-théorique, comme l'affirment justement ces mêmes théorèmes.

Par contre, ce sont bel et bien cette unité, ce moi indivisible, si ce n'est pour de pures raisons de commodité mathématique temporaire et en vue de la construction de machines, cette dépendance contextuelle, ce *hardware* spécifique, un matériel biologique vivant dans le monde et dans l'histoire,

14. *The Rediscovery of the mind*, Cambridge, M.I.T. Press, 1982.

qui nous permettent de faire ces « ponts » entre intelligences diverses que constituent analogies et métaphores. Ces analogies et métaphores sont des éléments essentiels du raisonnement humain, raisonnement mathématique compris ; de plus, elles sont fortement commandées par des intentionnalités et des émotions. C'est précisément sur ces éléments constitutifs du « sens », que l'analyse doit aujourd'hui s'arrêter.

Giuseppe LONGO
(février 1999).