

Mathématiques et intuitions : Zermelo et Poincaré face à la théorie axiomatique des ensembles et à l'axiome du choix

Françoise Longy,
Université Marc Bloch, Strasbourg et CNRS

Résumé. A l'occasion de réflexions sur l'axiome du choix, Zermelo et Poincaré sont amenés à préciser ce qui doit être au fondement des mathématiques et peut servir à justifier un axiome. Défendant l'autonomie des mathématiques, chacun d'eux invoque une intuition mathématique spécifique visible dans la pratique du mathématicien. D'abord, nous explicitons ce qui distingue l'attitude du mathématicien de celle du logicien, en prenant l'exemple de Zermelo. Puis, pour déterminer la nature réelle de l'intuition invoquée et la position précise de Zermelo, nous analysons dans le détail son argumentation en dissipant certaines confusions relatives aux notions d'évidence et d'intuition. Nous étudions, ensuite, les arguments de Poincaré destinés à établir, premièrement, que les mathématiques doivent avoir un fondement intuitif et, deuxièmement, qu'il est possible d'offrir un tel fondement à l'axiome du choix. Nous montrons qu'ils prouvent moins que Poincaré ne le croyait. Cette analyse comparative des thèses de Zermelo et de Poincaré nous permet de distinguer un vrai intuitionnisme d'une position faussement semblable où l'« intuition » résulte de la pratique et de la culture acquises dans la discipline. À la lumière de cette distinction, nous réévaluons les arguments avancés par chacun d'eux.

Abstract. Zermelo and Poincaré had different positions on the foundations of mathematics. However, both defended the autonomy of mathematics, and both appealed to specific mathematical intuitions to justify basic axioms. Their reflections on the axiom of choice show how a similar appraisal of mathematics can lead to different positions, and a thorough analysis of these reflections offers the means to evaluate their position. In this article, first, we distinguish the mathematician's attitude from that of the logician, using Zermelo's

work as an example. Secondly, we examine Zermelo's arguments to clarify the notions of evidence and intuition that are involved, and to determine what his position is precisely. Thirdly, we consider Poincaré's arguments regarding, first, the need to resort to intuition to justify fundamental mathematical principles and, then, the possibility of giving an intuitive foundation for the axiom of choice. We show that these arguments prove less than Poincaré had thought. The analysis of Zermelo's and Poincaré's arguments delivers a clear distinction between a genuine intuitionism and a deceptively similar position which calls for an "intuition" founded on mathematical practice and culture. And this distinction allows us to evaluate the significance of each argument and to define the position each one of them truly supports.

1 L'exigence de rendre compte de la réalité effective des mathématiques

Dans les discussions relatives à la nature des mathématiques, à leurs fondements ou à n'importe laquelle de ces questions générales qu'on qualifie de philosophiques, il arrive assez fréquemment que le mathématicien, pour réfuter telle ou telle thèse, fasse appel aux mathématiques réelles, c'est-à-dire aux mathématiques telles qu'elles existent pour les professionnels du domaine. Le mathématicien fait alors valoir l'exigence suivante : une bonne philosophie des mathématiques doit être capable de rendre compte du corpus mathématique effectif. Cette exigence, que nous nommerons pragmatique, semble raisonnable, surtout dans les périodes sans crise, quand rien ne met en doute la validité de ce corpus. Elle respecte, en effet, la hiérarchie des compétences : qui peut mieux juger de la légitimité des principes et des démonstrations en mathématiques, sinon les mathématiciens eux-mêmes.

En temps de crise, la situation se présente différemment : la communauté mathématique elle-même se divise sur le diagnostic et sur les remèdes. Le vent de la réforme souffle. Des révisions significatives des principes et des normes de validité deviennent envisageables. On est prêt à redessiner les limites de la discipline et à laisser hors des nouveaux murs une partie de ce qui se trouvait à l'intérieur des anciens. Cependant, même dans ce cas, l'exigence de faire droit à la mathématique réelle peut persister en prenant une forme un peu différente. Le devoir de prendre en compte la réalité effective des mathématiques ne renverra plus alors à l'état actuel de la discipline, mais à son développement historique. C'est ainsi, par exemple, que le promoteur d'une réforme pourra arguer que sa solution est semblable à celles qui ont permis de résoudre telle ou telle

crise précédente, ou encore qu'elle répond à un impératif dont l'histoire de la discipline montre qu'il a toujours primé sur tout autre.

Remarquons, enfin, que si le plus souvent ce sont des mathématiciens professionnels qui ont fait valoir cette exigence pragmatique, cela n'est pas systématique. On la retrouve aussi formulée explicitement chez certains philosophes. Ainsi, pour Kant, les sciences de la nature de son temps, avec leurs caractéristiques propres et la validité qui leur était attribuée, constituaient des faits dont il fallait savoir rendre compte. En particulier, une bonne théorie de la connaissance devait être capable d'expliquer le fait des mathématiques, c'est-à-dire l'existence d'un corpus de théories géométriques et arithmétiques admises universellement.

On peut, nous semble-t-il, sur la base des considérations précédentes, admettre en première analyse que l'exigence pragmatique énoncée plus haut est légitime. Mais à quoi cette réponse nous engage-t-elle ? Voilà qui est moins clair. Permet-elle de condamner certaines approches des mathématiques, comme le disent assez clairement certains¹ et comme semblent le penser beaucoup d'autres ? Pourrait-on, par exemple, récuser la perspective logiciste pour le motif qu'elle aborde la discipline mathématique de l'extérieur, en la soumettant à des questions et à des exigences qui ne sont pas celles des mathématiciens.

Il est difficile de traiter ces questions de façon générale : cela demande de se situer à un niveau d'abstraction élevé, en perdant le lien avec la façon dont elles sont abordées concrètement dans les débats. Dans la majorité des cas, en effet, l'exigence pragmatique n'est pas formulée dans toute sa généralité, mais est plutôt présupposée à travers une demande plus spécifique, par exemple, celle de faire droit aux intuitions fondamentales des mathématiciens. Or, s'il est relativement facile de voir dans certaines demandes spécifiques, une forme particulière donnée à l'exigence pragmatique, il est par contre plus difficile de déterminer quelles sont les conséquences de cette dernière formulée comme principe général.

Dans cet article nous ne chercherons donc pas à affronter directement les questions générales posées plus haut, pas plus que nous n'aurons l'ambition d'y répondre de façon tranchée. Il s'agira seulement, en analysant les positions respectives de Zermelo et de Poincaré à propos de l'axiome du choix et de la théorie axiomatique des ensembles, d'apporter des éléments de réflexion sur ce sujet et sur celui du rôle de l'intuition en mathématiques. Nous verrons, en effet, que ces deux thèmes sont intimement liés.

1. Cf. [Rota 1997]

2 Quel objectif visait Zermelo avec la théorie axiomatique des ensembles ?

Zermelo est connu essentiellement comme le père de l'axiomatisation de la théorie des ensembles. Habituellement, on présente ses travaux ainsi : Zermelo avait comme objectif de redéfinir de façon axiomatique la notion d'ensemble afin d'échapper aux paradoxes, formulés à la fin du XIX^e et au début du XX^e siècles, qui mettaient en cause cette notion. C'était l'une des trois voies principales envisagées pour éliminer les paradoxes, les deux autres étant la voie logique de Russell et la voie intuitionniste de Brouwer. Dans cette présentation, les trois orientations dégagées semblent partager une même sensibilité vis-à-vis des paradoxes et répondre à une même ambition : ces derniers ébranlent gravement l'édifice mathématique, il faut donc, avant tout autre chose, assainir la situation en trouvant les bons fondements, ceux qui élimineront tous ces paradoxes.

Des études historiques un peu plus fines, celles de Gregory Moore en particulier², montrent que la réalité est plus complexe. A l'origine de l'axiomatisation de la théorie des ensembles on trouve au moins autant la nécessité pour Zermelo de justifier son « axiome du choix » que la volonté d'éliminer des paradoxes qui grèveraient la théorie cantorienne des ensembles. Il est intéressant d'analyser le comportement de Zermelo en tant que mathématicien, car il s'accorde bien à la position théorique qu'il défendra par la suite, opposant aux exigences et aux normes du logicien celles du mathématicien.

Présentons, d'abord, rapidement la situation :

D'une part, des paradoxes apparaissent au tournant du siècle qui mettent à mal la théorie cantorienne des ensembles :

- Le « paradoxe de Burali-Forti » relatif au plus grand ordinal³.
- Le « paradoxe de Cantor » relatif au plus grand cardinal⁴.

2. Essentiellement [Moore 1978] et [Moore 1982], mais aussi [Moore 1976], et [Peckhaus 1990].

3. L'ensemble de tous les ordinaux a lui-même la propriété d'être un ordinal, c'est un ordinal strictement plus grand que tous les ordinaux qu'il contient, et donc c'est un ordinal qui est strictement plus grand que tous les ordinaux.

4. Un paradoxe semblable au précédent relativement aux cardinaux : d'une part, il n'existe pas de plus grand nombre cardinal (pour tout ensemble, il existe au moins un ensemble ayant un cardinal strictement supérieur : l'ensemble des parties de cet ensemble), d'autre part, il existe un plus grand nombre cardinal : celui de l'ensemble de toutes les entités (ensembles et individus).

— le « paradoxe de Russell » relatif à la notion même d'ensemble⁵.

D'autre part, l'« axiome du choix » est formulé pour la première fois, en 1904, par Zermelo au cours d'une démonstration. Il est alors présenté comme un « principe général » qu'il convient d'admettre⁶. Cette démonstration était destinée à prouver ce que Cantor avait affirmé en 1883 : que tout ensemble peut être bien ordonné.⁷ La question de déterminer si oui ou non tout ensemble pouvait effectivement être bien ordonné agitaient les théoriciens des ensembles depuis la fin des années 1890. De cette thèse dépendait, en effet, un aspect important de la théorie des ensembles : la possibilité de comparer deux ensembles quelconques quant à leur cardinalité. Le 4 août 1904, Julius König présentait, à l'occasion du 3^e Congrès International de Mathématiques de Heidelberg, une démonstration de l'impossibilité de bien ordonner le continu. Le lendemain, on montrait qu'elle était défectueuse⁸, et le mois suivant, Zermelo transmettait à Hilbert, au contraire, une « Démonstration que tout ensemble peut-être bien ordonné ». Elle suscita très vite de nombreuses oppositions. On critiquait, en particulier, le « principe général » — le futur « axiome du choix » — auquel elle faisait explicitement appel. Zermelo l'introduisait ainsi : il s'agit, écrivait-il, d'un « principe logique, qui ne peut certainement pas être reconduit à un principe plus simple, mais qui est appliqué, sans aucune hésitation, partout dans les déductions mathématiques » [Zermelo 1904, 516]. Mais les protestations montrèrent que cette brève justification était insuffisante.

Ce qui peut sembler paradoxal, c'est que bon nombre de ceux qui refusèrent d'admettre ce principe, l'avaient en fait présupposé au cours de telle ou telle de leurs démonstrations⁹. Mais c'était sans en avoir pleinement conscience. La formulation de ce principe faisait, en effet, apparaître une différence jusque là peu visible entre le fait, d'une part, d'opérer un nombre fini de choix ou une infinité de choix d'après une règle donnée, et celui, d'autre part, d'admettre la possibilité d'une infinité de

5. Un raisonnement simple montre que l'ensemble des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-même doit à la fois être et ne pas être élément de lui-même.

6. Le principe proposé est le suivant : « même pour une totalité infinie d'ensembles, il y a toujours des correspondances qui associent à chaque ensemble un de ses éléments » [Zermelo 1904, 516]. Il est sous-entendu qu'il s'agit d'ensembles non-vides.

7. Un ensemble peut être bien ordonné si l'on peut définir sur celui-ci une relation d'ordre telle que tout sous-ensemble non-vide ait un plus petit élément.

8. D'après Kowalewski, c'est Zermelo qui aurait réfuté la démonstration de König (cf. [Kowalewski 1950, 202]). Mais, d'après une étude récente de W.Punkart, c'est à Hausdorff que reviendrait, en fait, le mérite de cette réfutation (je suis redevable de cette précision à l'évaluateur anonyme de cet article).

9. Par exemple Borel, Lebesgue et Young. Cf., entre autres, [Borel 1898, 12-13] et [Borel 1898, 16-17]; [Lebesgue 1902, 237-239]; [Young 1903, 384-386].

choix arbitraires. Il était effectivement difficile de distinguer le cas où l'on faisait appel à une infinité de choix arbitraires parce que l'on jugeait inutile de préciser la loi selon laquelle effectuer ces choix, et celui où on y faisait appel parce qu'il n'existait aucune loi pour le faire. Zermelo, en brisant la continuité apparente entre ces deux cas, posait clairement la question de savoir s'il était légitime d'admettre dans le champ des objets mathématiques des ensembles dont on ne pouvait pas spécifier les éléments ou des fonctions dont on ne pouvait pas spécifier les valeurs, et si les théorèmes d'existence auxquels on aboutissait en recourant à de telles fonctions ou à de tels ensembles affirmaient vraiment quelque chose puisqu'il était impossible de construire ou de déterminer complètement l'objet dont ils posaient l'existence.

Plus généralement, la question de l'adoption de ce principe reposait le problème des propriétés requises pour accorder à un énoncé le statut de principe général des mathématiques, étant donné le rôle central attribuée par beaucoup à la théorie des ensembles¹⁰. Ce qui explique l'importance donnée à cette question dans les prises de position en faveur de telle ou telle conception des mathématiques. L'ampleur des débats sur ce sujet a d'ailleurs conduit certains à affirmer qu'après le l'axiome des parallèles d'Euclide, l'axiome du choix avait été « le plus discuté des mathématiques » [Fraenkel et Bar-Hillel 1958, 56-57].

Quatre ans plus tard, en 1908, Zermelo publiait deux nouveaux articles : le premier offrait une nouvelle démonstration du théorème du bon ordre, suivie de réponses aux critiques élevées contre sa première démonstration, le deuxième proposait une axiomatisation de la théorie des ensembles [Zermelo 1908a ; 1908b].

Revenons maintenant à la question des motifs qui conduisirent Zermelo à proposer une théorie axiomatique des ensembles. Quelles raisons ont des historiens comme Gregory Moore de douter de la présentation

10. Deux conceptions s'opposaient : soit considérer la théorie des ensembles comme une théorie mathématique parmi d'autres, soit y voir le cadre général des mathématiques, la base sur laquelle fonder l'arithmétique et l'analyse. Le premier point de vue correspond, par exemple, à celui d'un mathématicien comme Hausdorff. En 1908, il publie les fondements d'une théorie des ensembles ordonnés, comprise comme une théorie algébrique valant pour certaines structures mathématiques. Le deuxième point de vue, le plus répandu, est celui d'Hilbert et de Zermelo, où l'on accorde à la théorie des ensembles le statut particulier de théorie première. C'est dans cette perspective qu'elle peut constituer un « paradis » pour le mathématicien, selon l'expression fameuse d'Hilbert : « Personne ne pourra nous faire sortir du paradis que Cantor a créé pour nous » [Hilbert 1926, 170]. La théorie axiomatique des ensembles est alors supposée fournir les principes sur lesquels fonder toutes les mathématiques, et non pas une petite partie d'entre elles.

classique qui fait de l'élimination des paradoxes le motif principal de cette théorie ? D'abord, différents éléments montrent que Zermelo associait intimement ces deux articles, écrits conjointement en 1908, mais surtout une analyse historique plus large de son activité théorique établit que Zermelo ne voyait pas dans les fameux paradoxes ensemblistes des problèmes graves, susceptibles de remettre en cause la théorie des ensembles, et éventuellement avec elle l'ensemble des mathématiques¹¹.

On sait maintenant, de façon certaine, que Zermelo avait formulé, entre 1899 et 1902, une version tout à fait claire du « paradoxe de Russell ». B.Rang et W.Thomas ont retrouvé dans les archives de Husserl la transcription du raisonnement de Zermelo [Rang & Thomas 1981, 16-17]. Zermelo avait communiqué ce raisonnement à Husserl après avoir lu la recension faite par ce dernier de l'*Algèbre de la Logique* de Schröder. Husserl critiquait l'argument de Schröder contre l'existence d'une classe qui « contienne chaque chose concevable » (interprétation que Boole donne de la classe universelle). Or, Zermelo était en possession d'une démonstration qui prouvait que Schröder avait raison sur le fond, même si son raisonnement était mauvais.

L'ensemble de tous les ensembles, expliquait Zermelo, devait avoir la propriété suivante : tous ses sous-ensembles devaient être aussi ses éléments. Or, on pouvait démontrer qu'un ensemble M contenant tous ses sous-ensembles comme éléments était inconsistant, c'est-à-dire que supposer l'existence d'un tel ensemble conduisait à une contradiction. Zermelo établissait l'inconsistance de M , en considérant le sous-ensemble M° de M qui contient tous les sous-ensembles de M qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes. Il prouvait, d'une part, que l'ensemble M° devait être élément de lui-même et, d'autre part, qu'il ne devait pas l'être¹². Zermelo a fait part de cette démonstration à plusieurs personnes, dont Hilbert, mais il n'a jamais cherché à la publier. Ce qui montre le peu d'importance qu'il lui accordait. Alors que cela établissait l'illégitimité de la notion large d'ensemble adopté au départ par Cantor¹³, et qu'il n'y

11. Cf. [Moore 1978].

12. Cf. [Rang & Thomas 1981, 16-17] où la transcription de ce raisonnement est publiée.

13. Cantor définit en 1878 un ensemble comme un « rassemblement en un tout d'objets déterminés, et bien distincts, de notre intuition ou de notre pensée ». A cette définition d'ensemble, qui ne fait intervenir aucune restriction, on associe, en général, l'« axiome de compréhension » d'après lequel on peut faire correspondre à toute propriété un ensemble : l'ensemble des objets qui satisfont cette propriété. La définition de Cantor n'affirmant pas que tout principe de rassemblement définit un ensemble n'inclut, en fait, pas l'axiome de compréhension, mais l'autorise. Il est introduit par Frege en 1893 dans les *Grundgesetze der Arithmetik*, à travers la loi 5.

avait pas encore de notion susceptible de la remplacer — ce que, bien évidemment, il savait —, il ne voyait cependant pas dans ce théorème un paradoxe susceptible de remettre en cause la théorie cantorienne des ensembles.

L'attitude de Zermelo n'avait rien de bien surprenant, elle était même typique. Elle était tout à fait représentative d'un certain groupe d'individus qu'on peut nommer les « mathématiciens » pour les distinguer du groupe des logicistes. Pour un « mathématicien », les paradoxes ne représentaient pas une épée de Damoclès suspendue au-dessus de la théorie des ensembles, mais un problème mathématique parmi d'autres. C'était en poursuivant le développement de la théorie des ensembles qu'apparaîtrait la solution. Peu à peu les contours de la théorie iraient se précisant et il deviendrait possible de cerner ce qui départageait les collections réellement possibles — les ensembles — de toutes celles envisageables.

Cantor, déjà, avait adopté cette attitude quand, au milieu des années 90, il avait été confronté à des ensembles impossibles. La nature contradictoire de l'ensemble de tous les ordinaux — ce qui deviendra le « paradoxe de Burali-Forti » — et de l'ensemble de tous les Alephs — ce qui deviendra le « paradoxe de Cantor » — l'avait conduit à distinguer entre des collections inconsistantes ne donnant pas lieu à des ensembles et des collections consistantes donnant lieu à des ensembles.¹⁴

En fait, la façon dont se développait la théorie des ensembles n'avait aucune raison de choquer un mathématicien. En mathématiques, il arrive fréquemment que les fondements viennent à la fin. Peut-être même est-ce la règle ! Sur un premier socle de notions et de procédures se développe une théorie avec démonstrations et résultats. Et si des résultats troublants ou paradoxaux apparaissent ensuite, une fois que l'intérêt de la première théorie est bien établi, cela ne remet pas en cause les résultats acquis (à quelques exceptions près), mais impulse simplement une réflexion de nature fondationnelle dont l'objectif est conjointement d'assurer à la théorie une bonne base et de délimiter précisément son domaine de pertinence.

14. Si, à un certain niveau de généralité, on peut dire que Zermelo et Cantor adoptent la même attitude, qui est celle de vouloir restreindre la notion d'ensemble, il importe cependant de distinguer leur stratégie. Cantor indique comme voie possible celle d'une bipartition des collections envisageables en collections consistantes et collections inconsistantes, ce que Zermelo jugera scientifiquement inadmissible : on ne peut pas définir les ensembles à partir de quelque chose qui comprendrait, en plus des entités effectivement possibles (les ensembles), des pseudo-entités : les collections inconsistantes. Cf. Les commentaires de Zermelo, éditeur des œuvres complètes de Cantor, en 1932 : [Cantor 1932, 451].

La situation dans laquelle se trouvait la théorie cantorienne des ensembles au tournant du siècle s'accordait parfaitement à ce schéma historique : quand les résultats problématiques apparurent, le cœur de la théorie, étayé par une série de démonstrations clefs, était déjà fort solide. La question des « ensembles impossibles » indiquait simplement que son domaine de validité était encore flou et que ses concepts centraux auraient besoin d'être reprécisés. Du point de vue des mathématiciens, les paradoxes ne créaient donc pas une situation particulièrement inquiétante : ils signalaient simplement qu'il y aurait, dans un avenir plus ou moins proche, un certain type de travail à faire.

Il en allait différemment pour les logicistes qui entendaient donner à la notion d'ensemble une signification de nature logique, afin de fonder les mathématiques sur la logique. Seule une définition très générale, comme celle donnée au départ par Cantor, pouvait leur convenir. Le principe qu'à tout concept pouvait être associé l'ensemble des entités tombant sous lui méritait bien, effectivement, le statut de logique : ce principe valait pour la pensée en général et non pas seulement dans le domaine restreint des questions mathématiques. Or, c'était justement cette notion générale, logique, d'ensemble que les « ensembles impossibles » obligeaient à remettre en cause. Voilà pourquoi Russell et Frege étaient amenés à voir dans les « ensembles impossibles » des paradoxes graves qu'il fallait résoudre toute affaire cessante.

A l'inverse, Zermelo, bien dans l'attitude du mathématicien, avait jugé qu'il n'y avait là rien de primordial, et s'était d'abord lancé dans la recherche d'une démonstration du bon ordre. Seulement plus tard, a-t-il ressenti la nécessité d'affronter les paradoxes : quand il s'est trouvé contraint de défendre sa démonstration du bon ordre.

Les difficultés liées à certains concepts clefs de la théorie des ensembles intervenaient, en effet, dans les raisons invoquées pour rejeter la démonstration du bon ordre. Si une bonne partie des critiques avaient porté sur l'axiome du choix, il y avait eu aussi une série importante d'objections qui renvoyaient au « paradoxe de Burali-Forti », à cause de l'utilisation par Zermelo d'une suite croissante d'ensembles bien ordonnés. Dans la mesure où la démonstration très générale proposée par Zermelo faisait intervenir des « ensembles » éventuellement douteux, le fait de laisser dans le flou cette notion problématique devenait rédhibitoire. Pour convaincre ses adversaires de la validité de sa démonstration, Zermelo devait prouver qu'elle reposait sur des bases saines.

Voilà pourquoi, en 1907, Zermelo travaillait simultanément à la rédaction des deux articles déjà cités. Étant donné que, dans la théorie

axiomatique qu'il proposait, aucun des trois paradoxes ci-dessus ne pouvait être reproduit, toute une série d'objections adressée à la première démonstration, en particulier toutes celles s'appuyant sur le « paradoxe de Burali-Forti », s'éliminaient d'elles-mêmes. Quant au principe général de choix, il devenait un axiome parmi d'autres. Mais étant donné le rôle dévolu par Zermelo et beaucoup d'autres à la théorie des ensembles de Cantor¹⁵, la question de sa légitimité débouchait sur celle plus générale des conditions de légitimité des axiomes censés fixer le cadre général des mathématiques.

En résumé, on peut dire que pour les mathématiciens la question de l'axiome du choix était au moins aussi troublante que celle des paradoxes. En effet, à travers lui, se posait le problème des critères que devait satisfaire une proposition pour pouvoir valoir légitimement comme un principe de base des mathématiques.

3 L'axiome du choix est-il évident ?

En 1904, Zermelo qualifie étrangement le principe du choix de logique [Zermelo 1904, 516]. Étrangement, en effet, puisqu'en 1908, il le défendra, au contraire, comme un principe mathématique, en insistant sur la différence qu'il convient de faire entre les mathématiques et la logique. Selon toute vraisemblance, ce « logique » de 1904 signifie simplement très général et évident. Pour justifier l'introduction d'un principe, il faut, en effet, d'abord exclure la possibilité qu'on puisse le démontrer, et ensuite fournir une bonne raison de l'accepter. Être logique, c'est, d'une part, être trop général et trop abstrait pour qu'une démonstration sur la base des principes mathématiques admis jusqu'ici, soit envisageable et c'est, d'autre part, être suffisamment évident pour pouvoir valoir comme principe. Ainsi, Zermelo exclut que la démonstration qu'il propose dépende d'une conjecture. Cette démonstration dépend certes d'une nouvelle affirmation, mais cette dernière est à la fois indémontrable et évidente : un principe allant de soi qu'il convenait de formuler explicitement. La levée de boucliers qui a suivi montre que, contrairement à ce qu'avait apparemment cru Zermelo, ce sentiment d'évidence n'était pas partagé. Il lui a donc fallu justifier plus sérieusement ce principe.

En 1908, il prend d'abord clairement position contre Peano, et affirme que ce n'est pas au logicien de juger des principes admissibles en mathématiques :

15. cf. supra note 10.

[L'axiome du choix] ne se trouve [...] pas au nombre des principes péaniens, et M. Peano lui-même assure qu'il ne saurait pas non plus le dériver de ceux-ci. Il se contente d'établir cela, et voilà qui lui suffit pour liquider le principe. On n'est cependant pas loin de penser que c'est justement sur ce point que son Formulaire pourrait se révéler incomplet, et comme, en mathématiques, il n'existe pas d'autorité infaillible, nous devons prendre en compte aussi cette possibilité et ne pas l'évacuer d'un geste sans examen objectif. [Zermelo 1908a, 348]

En effet, le *Formulaire* dont il est question était supposé comprendre l'ensemble des principes logiques à partir desquels dériver la totalité des mathématiques.

Au lieu de soumettre les mathématiques et ses principes à la juridiction de la logique, Zermelo propose de regarder quel est le rôle de ce principe à l'intérieur même des mathématiques. Il constate alors que ce principe a déjà été largement utilisé. Ce dont il tire la conclusion suivante : « Une utilisation si étendue d'un principe n'est explicable que par son évidence » [Zermelo 1908a, 348]. Comme on va le voir, l'emploi du terme « évidence » est dans ce cas problématique.

Il est normal de vouloir que les principes ou axiomes que l'on propose soient évidents, puisque c'est en cela que consiste le plus souvent leur justification. Il ne semble, en effet, pas y avoir de meilleure preuve de la validité d'un axiome que le fait qu'il soit évident, c'est-à-dire qu'il apparaisse indubitablement vrai à quiconque le considère. Cette notion d'évidence implique celle d'immédiateté : on qualifie d'évidentes essentiellement les thèses perçues immédiatement comme vraies, l'immédiateté étant alors ce qui assure l'indubitabilité. Mais l'immédiateté peut se comprendre de plusieurs façons : soit temporellement, soit logiquement. Prenons-la ici dans son sens le plus large, c'est-à-dire logiquement. Dans ce cas, est évident ce dont la vérité s'impose à nous avec force dès que l'on a saisi ce qu'il s'agit de saisir. Peut-être faut-il pour cela effectuer un certain parcours intellectuel, et donc prendre un certain temps, mais, une fois atteinte, la connaissance de cette vérité s'impose d'elle-même : elle ne reste pas tributaire du processus mis en œuvre pour y arriver, à l'inverse de ce qui vaut pour les théorèmes pour lesquels seule importe la démonstration.

Mais même en le prenant dans le sens le plus large, le terme d'« évidence » s'applique mal à la situation décrite par Zermelo. En effet, l'utilisation plus ou moins implicite de ce principe dans nombre de démonstrations mathématiques n'est pas un argument en faveur de son évidence. Certes, on pourrait défendre l'idée qu'un principe doit être évident pour

que qui l'emploie ne s'en rende pas compte : c'est parce que ce que l'on présuppose va de soi, que l'on n'a pas conscience de présupposer quoi que ce soit. Cependant, le cas qui nous intéresse révèle justement les limites de cette identification entre présupposition implicite et évidence. En effet, bon nombre de ceux qui ont usé implicitement du principe en cause se refuseront, dès lors qu'il aura été formulé explicitement, à le trouver évident. Ce qui montre de façon incontestable que la présupposition implicite n'est pas une garantie d'évidence. Cela peut seulement constituer un argument supplémentaire en faveur de l'évidence d'un principe si la condition principale, qui est d'apparaître évident une fois formulé, est remplie.

La situation devient plus complexe encore à la phrase suivante, où Zermelo précise : « Quand bien même cette évidence serait jusqu'à un certain point subjective, elle n'en est pas moins une source nécessaire de principes mathématiques. » [Zermelo 1908a, 348] Cette restriction suppose d'opposer une « évidence objective » à l'« évidence subjective ». Au premier abord, une telle opposition déroute étant donnée la nature éminemment subjective de l'évidence. « Etre évident » renvoie, en effet, non pas à la chose perçue ou pensée, mais à la façon dont le sujet la perçoit ou la pense. Cependant, dans un deuxième temps, on voit comment peut y être associé une valeur objective : sera objectivement évident, ce qui apparaîtra tel à *tout* sujet, ou à *tout* sujet rationnel, ou encore à *tout* sujet rationnel qui a effectué un certain parcours intellectuel. Une fois ce sens objectif donné au terme « évident », l'emploi du terme « subjectif » sert à indiquer une restriction : le fait que l'évidence en question ne respecte pas la condition requise pour avoir une valeur objective. La condition d'objectivité présupposée par Zermelo est probablement la suivante : apparaître évidente à tout mathématicien ; ou plus précisément encore, étant donné le principe qui nous intéresse : apparaître évidente à tout mathématicien qui a été confronté à un moment ou à un autre à la question de devoir effectuer une infinité de choix. Or, comme nous l'avons vu, cette condition d'objectivité n'a effectivement pas été remplie, puisque certains des mathématiciens concernés n'ont pas trouvé évident le principe du choix. Zermelo a donc bien raison de parler dans ce cas d'une évidence seulement subjective, c'est-à-dire restant en deçà de ce qui est requis pour avoir valeur objective : au lieu d'être partagée par tous ceux par qui elle devrait l'être, cette évidence n'est telle que pour certains d'entre eux.

Or, est-ce qu'une « évidence seulement subjective » peut servir à justifier la légitimité d'un principe ? Il apparaît clairement que non. Seule l'évidence ayant une valeur objective peut justifier un statut de prin-

cipe premier. C'est toujours à une évidence objective que renvoient ceux qui prétendaient fonder la vérité de telle ou telle affirmation sur son évidence. En effet, seul ce qui s'impose nécessairement à tout sujet rationnel peut avoir une valeur objective et peut donc servir de fondement à quelque chose d'objectif, pas ce qui apparaît évident seulement à quelques uns d'entre eux. Dans ce dernier cas, aucune nécessité n'imposant manifestement sa loi à la pensée, on reste au niveau des convictions, des impressions, ou des sentiments, c'est-à-dire au niveau de ces réalités subjectives auxquelles personne n'a jamais reconnu le pouvoir de justifier quoique ce soit d'objectif.

Bien entendu, si l'on voit avant tout dans la phrase de Zermelo une affirmation sur la possibilité de formuler un tel principe, on peut lui donner raison¹⁶. Peut-être faut-il, en effet, qu'un principe semble évident à un individu pour qu'il soit amené à le proposer. En ce sens on peut effectivement dire qu'une certaine évidence subjective est à la source du principe en question. Mais alors cette affirmation ne sert en rien à justifier sa validité, seulement à expliquer son apparition. On est dans le domaine de la psychologie de la découverte, et plus du tout dans celui de la justification. En conclusion, l'évidence que Zermelo attribue à son principe ne peut en rien servir à le justifier, et par conséquent ne peut pas valoir comme argument contre la doctrine de Peano, ou d'autres. Mais, comme nous allons le voir, l'argumentaire de Zermelo ne se limite nullement à ce recours, dans le fond trompeur, à l'évidence.

4 Justifier un principe par son utilité.

La propriété que Zermelo met en avant et utilise de fait comme critère n'est pas l'évidence mais quelque chose qu'on peut nommer, faute de mieux, l'« utilité mathématique ». Seul un énoncé ayant une certaine « utilité mathématique » méritera le statut de principe possible. La citation suivante indique en quoi consiste cette « utilité mathématique » :

Aussi longtemps que, d'une part, les problèmes relativement simples présentés ici ne pourront pas être traités par les moyens de Peano, et que, d'autre part, le principe du choix ne pourra pas être positivement réfuté, personne ne pourra interdire aux représentants de la science productive de continuer à utiliser cette « hypothèse » — pour ma part je suis prêt à l'appeler ainsi — et d'en développer les conséquences le plus largement possible, d'autant

16. Même, si cela aussi mériterait d'être discuté, mais c'est sans importance pour ce qui nous intéresse ici.

que c'est seulement de cette façon que les contradictions éventuelles liées à un point de vue pourraient être décelées. A cet effet, il suffit de séparer les théorèmes qui requièrent l'axiome du choix de ceux qui peuvent s'en passer pour voir les mathématiques de Peano dans leur entier comme une branche particulière des mathématiques. Exclure des faits ou des problèmes fondamentaux de la science tout simplement parce qu'on arrive pas à en venir à bout en utilisant certains principes prescrits serait comme interdire le développement ultérieur de la théorie des parallèles parce que l'axiome concerné s'est avéré indémontrable. En fait, c'est d'après la science que l'on doit juger des principes, et non juger de la science d'après des principes établis une fois pour toute. [Zermelo 1908a, 351]

« Les problèmes relativement simples présentés ici », évoqués par Zermelo au début de cette citation, renvoient à la liste, qu'il donne juste avant, de sept « théorèmes ou problèmes élémentaires et fondamentaux » dont il affirme, à juste titre, que seul le principe du choix peut permettre de les démontrer ou de leur apporter une solution.

Il ressort de cette citation que l'évaluation de l'« utilité mathématique » consiste d'abord dans la détermination de la part des mathématiques actuelles qui dépend du principe en question, et ensuite dans l'évaluation des potentialités de développement que l'adoption d'un tel principe peut offrir. Dans cette optique, on peut effectivement voir dans le principe proposé une hypothèse, dont il s'agira d'établir graduellement la légitimité en montrant quel rôle elle a et peut avoir dans les mathématiques présentes et à venir.

Remarquons incidemment que l'histoire de l'axiome du choix, au cours des décennies qui suivront, apportera justement une confirmation à la thèse défendue ici par Zermelo. Alors qu'en 1908, la communauté mathématique penche nettement dans le sens du rejet de cet axiome, des développements ultérieurs, établissant sa significative « utilité mathématique », feront basculer la balance dans l'autre sens. Le mérite en reviendra en grande partie à l'école polonaise dirigée par Sierpinski. A partir des années 20, les membres de cette école se donneront comme objectif de dépister tous les théorèmes dont la démonstration réclame l'axiome du choix. Peu à peu, la liste des propositions admises dans tel ou tel domaine des mathématiques, dont on démontrera qu'elles sont équivalentes à l'axiome du choix s'agrandira et, par là même, celle des théorèmes dépendant de cet axiome. Ce phénomène sera au demeurant accentué par le fait qu'à partir du milieu des années 20, les algébristes se mettront à employer de plus en plus fréquemment dans leurs raisonnements des principes de maximalité équivalents, en définitive, à l'axiome

du choix. C'est ainsi, qu'en 1963, plus d'une centaine de propositions mathématiques équivalentes à l'axiome du choix pourront être recensées.¹⁷

A première vue, l'« utilité mathématique » d'un principe et son évidence sont deux choses bien distinctes, cependant la façon qu'a Zermelo dans l'article de 1908 de glisser de l'une à l'autre sans solution de continuité fait croire à une connexion intime entre les deux. Qu'en est-il effectivement ?

5 Des différentes formes d'intuition et de leurs pouvoirs justificateurs

Ce qui relie le thème de l'évidence à celui de l'utilité, comme les deux faces d'une même médaille qu'on pourrait jeter au visage des logiciens comme Peano, c'est probablement l'idée d'une intuition mathématique spécifique. Les évidences supposent l'existence d'une certaine capacité intuitive : pouvoir appréhender ou connaître quelque chose immédiatement, sans dépendre de la médiation d'un raisonnement ou d'une élaboration intellectuelle complexe. Et pareillement, pour apprécier l'« utilité mathématique » d'un principe, on fait appel à l'intuition du mathématicien. En effet, ce qu'on demande alors au mathématicien n'est ni de produire une justification en bonne et due forme : une démonstration ; ni bien sûr d'en référer à une autorité extérieure, celle du logicien par exemple ; mais de se fonder sur sa connaissance intime des mathématiques, c'est-à-dire sur son intuition propre de mathématicien. « Intuition » est donc bien le maître mot dans les deux cas. Mais, malheureusement, un même mot peut recouvrir des choses bien différentes : l'intuition requise pour évaluer l'utilité mathématique n'a que peu en commun avec celle qui délivre des évidences, celle dont un Kant ou un Descartes entendaient, à juste titre, tirer des fondements.

Dans la tradition philosophique, le terme d'intuition revête un sens précis — la capacité d'appréhensions ou de connaissances immédiates — même si c'est avec des inflexions différentes selon les auteurs. (Ainsi, pour Descartes, l'intuition renvoie avant tout à la capacité de percevoir comme indubitables, évidentes, un certain nombre de vérités qu'elles soient ou non abstraites, alors que pour Kant, à l'inverse, l'intuition consiste dans la saisie d'un contenu concret, comme l'est un contenu de perception, et par conséquent les vérités incontestables auxquelles elle est susceptible

17. Cf. [Rubin & Rubin 1963].

de donner lieu dépendent de la donnée d'un objet représentable.) Dans le langage courant, par contre, ce terme a un sens plus lâche. On considérera pareillement comme un produit de l'intuition, ce qui ne dépend pas du raisonnement ou d'une médiation intellectuelle (ce qui se donne directement, que l'on sent ou que l'on voit), mais sans plus se limiter à ce qui est pleinement saisi et peut être source de connaissances certaines. On parlera ainsi d'intuition à propos de ce qui n'est qu'entr'aperçu, entrevu ou pressenti. Souvent même, « intuition » sera utilisé comme un synonyme de « pressentiment ». En fait, le terme « intuition » permet de balayer la totalité du spectre allant du sens « philosophique » décrit plus haut à celui de pressentiment. Et il en va de même quand il s'agit de l'intuition du mathématicien.

Quand Poincaré écrit, par exemple, « Ce sentiment, cette intuition de l'ordre mathématique qui nous fait deviner des harmonies et des relations cachées... » [Poincaré 1908, 47] ou encore « [...] c'est par l'intuition qu'on invente [...] ». La faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition ; sans elle le géomètre serait comme un écrivain ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées. » [Poincaré 1908, 137], le sens qu'il confère de fait au terme « intuition » se trouve entre les deux extrémités de ce spectre. Or, malgré le fond commun des divers sens du mot « intuition », il importe de distinguer nettement certaines parties du spectre, car ce que permet et implique un type d'intuition n'a rien à voir avec ce que permet et implique un autre.

Quand Descartes ou Kant mettent à la base des mathématiques certaines intuitions, ils entendent fonder les mathématiques en les faisant reposer sur un socle de vérités et de principes indubitables qui s'imposent à tout sujet rationnel. Les intuitions dont ils parlent n'ont rien d'historiques, elles sont indépendantes de l'état de la discipline et de l'expérience mathématique et théorique acquise par les mathématiciens au cours de leur carrière, elles sont atemporelles et universelles. À l'inverse, l'intuition qui guide le mathématicien dans son travail ou celle qui lui permet d'apprécier l'« utilité mathématique » de telle ou telle décision ou orientation sont liées à un apprentissage et à une pratique de la discipline, et dépendent de l'état actuel de cette dernière. Le mathématicien développe un sens mathématique, comme le musicien qui écoute, étudie et pratique la musique développe un sens musical de plus en plus riche et solide. Une telle intuition ne peut pas être réduite à de simples pressentiments, ou à de vagues impressions : elle désigne une véritable capacité et confère ainsi à son possesseur une légitimité pour juger des questions touchant à sa discipline. Mais elle ne peut pas non plus être identifiée à des intuitions atemporelles et universelles, productrices de

vérités évidentes et incontestables. Cela se voit, entre autres, dans le fait que des mathématiciens pareillement compétents peuvent légitimement diverger dans leurs jugements. Dans ce cas, la discussion rationnelle est possible. Elle réclame, à la fois, une bonne connaissance de la discipline et la capacité de prendre en compte des considérations de multiples natures. On peut invoquer des principes méthodologiques généraux ou des intuitions relatives au type d'objets en cause, des applications possibles ou les contraintes imposées par les domaines limitrophes, ou bien encore la façon dont des questions ressemblantes ont été résolues. Il s'agit d'évaluer rationnellement différentes options en s'appuyant sur une expérience aussi large et aussi réfléchie que possible, et non pas de découvrir une nécessité implacable devant laquelle on ne pourrait que s'incliner.

L'intuition qui résulte d'une bonne formation de professionnel n'autorise pas à se croire le détenteur d'une vérité incontestable, mais seulement à accorder plus de valeur à ses propres jugements qu'à ceux du néophyte. La décision d'ignorer le jugement d'un individu à faible compétence mathématique peut être légitime, comme peut l'être celle de choisir telle ou telle option en se fondant sur son intuition de mathématicien professionnel alors qu'il n'y pas d'argument décisif, c'est-à-dire d'argument capable de convaincre n'importe quel individu rationnel. Cette sorte d'intuition, fondée sur le développement d'un sens spécifique, a donc bien une valeur objective, mais celle-ci n'est que relative : elle ne suffit pas à assurer une validité incontestable à ce qu'elle voit, elle lui confère simplement une légitimité provisoire qui lui permet de primer sur la simple opinion, ce qui n'est évidemment pas le cas pour les pressentiments ou les impressions vagues. Cette objectivité et cette validité relatives de l'intuition du mathématicien assurent ainsi une certaine autonomie à la discipline, une autonomie relative, alors que les théories de Descartes ou Kant, qui fondaient les mathématiques sur des intuitions mathématiques spécifiques, lui assuraient une autonomie absolue.

Que l'admissibilité d'un principe dépende de son évidence ou d'une évaluation de son « utilité mathématique », dans les deux cas, une certaine autonomie des mathématiques en résulte, et donc ce n'est pas à la logique ou au logicien de statuer sur l'admissibilité en question. C'est pensons-nous à cause de cette conséquence commune que Zermelo a associé à tort ces deux exigences, évidence et utilité mathématique, et n'a pas clairement distingué le type de capacité intuitive auquel renvoyait chacune d'elle. Les arguments qu'il développe dans son article servent seulement à établir l'utilité mathématique de l'axiome du choix, et l'exigence méthodologique de juger d'après cette utilité suffit à remettre en cause les prétentions des logiciens comme Peano. Il n'a donc nul besoin

de faire intervenir une quelconque évidence des principes, et d'établir à travers elle une complète autonomie des mathématiques. D'ailleurs, pour qu'un fondement sur des évidences confère une autonomie disciplinaire, encore faut-il établir que les évidences en cause sont bien spécifiques à la discipline concernée. Dans ce cas, où il s'agit d'opérer sur des ensembles infinis, l'appartenance au champ des mathématiques semble, à première vue, ne pas devoir poser de problèmes. Cependant, on peut noter que Russell en a jugé autrement : quand il a découvert la nécessité d'introduire un axiome du choix dans son système logique, il n'a pas considéré que cela devait nécessairement invalider son logicisme, même si évidemment il en a été troublé.¹⁸

La maxime méthodologique de Zermelo, selon laquelle « c'est d'après la science que l'on doit juger des principes » et qui donne lieu à la directive d'apprécier la légitimité des principes d'après leur utilité disciplinaire, est une parfaite mise en œuvre de l'exigence pragmatique dont nous parlions au début. On vient de voir comment cette exigence conduit tout naturellement à accorder une place essentielle à l'intuition. Cependant, cette intuition n'a pas grand chose à voir avec celle des philosophes de la tradition, intuition qui en fondant les mathématiques délimitait leur domaine et expliquait leur absolue validité. Fonder les mathématiques sur ce type-là d'intuition obligeait effectivement à une philosophie des mathématiques bien particulière. Mais pourquoi cela devrait-il être encore le cas quand on fait appel à une intuition construite par l'apprentissage, une intuition qui assure pratiquement une certaine autonomie à la discipline, mais ni ne l'arrime à un socle, ni n'exclut les interactions avec d'autres disciplines ? Voilà qui n'est pas clair.

6 Poincaré et les différentes façons de justifier la théorie des ensembles

Dans plusieurs articles, Poincaré, comme Zermelo, critique le point de vue des logicistes et défend l'autonomie des mathématiques par rapport à la logique¹⁹. Il faut cependant se méfier de cette similitude, car Poincaré opte pour une dichotomie qui l'amène à ranger les défenseurs du point de vue axiomatique — c'est-à-dire, entre autres, Hilbert et Zermelo — du côté des logicistes.

18. Cf. [Grattan-Guinness 1977, 26-29].

19. Cf., en particulier, [Poincaré1905/06, 1906b, 1909b et 1912].

La place accordée à l'intuition doit être, selon Poincaré, l'élément discriminant : d'un côté, se trouveront ceux qui attribuent un rôle fondateur à l'intuition et qu'on peut appeler les kantienens au sens large, de l'autre, ceux qu'on peut nommer les logicistes au sens large. A différentes occasions, Poincaré énonce en effet l'alternative suivante : soit on est logiciste, soit on est kantien :

Si tout traité de mathématiques peut être traduit dans le langage péanien, ce sont les logiciens qui ont raison. Si cette traduction est impossible, ou si on ne peut le faire qu'en introduisant des prémisses irréductibles à la logique, les kantienens triomphent. [Poincaré 1905/06, 825]

Or, la façon commune qu'ont les hilbertienens et les logicistes de comprendre la théorie cantorienne, autorise, selon Poincaré, l'assimilation des uns aux autres. Ils veulent mettre la théorie de Cantor à la base des mathématiques et fonder sur elle, en particulier, l'arithmétique. Ainsi, pense Poincaré, ils sont victimes d'une double illusion : croire que l'arithmétique n'est pas première mais se fonde sur une autre théorie et croire qu'on peut de cette façon se passer d'un fondement intuitif tant pour l'arithmétique que pour l'ensemble des mathématiques. Par ailleurs, Poincaré reproche à la théorie de Cantor de s'engager dans les sables mouvants de l'infini actuel²⁰.

Poincaré ne défend cependant pas le principe que la seule justification légitime pour une théorie mathématique est d'être fondée sur l'intuition. Cela est naturel, étant donné ses réflexions sur la géométrie²¹. On peut aussi établir la légitimité d'une théorie en établissant que l'ensemble de ses axiomes est consistant. Mais, dans le cas de l'arithmétique, cette voie est impraticable car le cercle vicieux est inévitable. Ce sera son argument principal à l'encontre du projet de Hilbert. Si l'on veut fonder l'arithmétique et le reste des mathématiques sur un système d'axiomes non fondés intuitivement, il faut prouver la consistance du système en question. Or cela n'est possible, explique-t-il, qu'en s'appuyant sur l'arithmétique. On se retrouve donc dans une situation où ce qui est « à fonder » sert, par ailleurs, de fondement. C'est pour échapper à une circularité de ce type que Hilbert sera effectivement amené à préciser les choses et qu'il exigera une métamathématique finitiste afin d'établir la cohérence de l'arithmé-

20. Cf. par exemple, [Poincaré 1912, 10].

21. Les géométries non-euclidiennes sont aussi légitimes que la géométrie euclidienne, puisque, premièrement, elles sont soit toutes consistantes, soit toutes inconsistantes et que, deuxièmement, l'expérience ne permet pas de trancher entre elles. Par conséquent, il est possible de choisir entre ces différentes géométries. Ce qui prouve, entre autres, qu'il n'y a pas d'intuition fondamentale qui en impose une obligation.

tique en ne s'appuyant que sur sa partie incontestable, celle qui suppose simplement la capacité de manipuler un nombre fini d'objets.

De façon générale, cet argument montre qu'on ne peut pas prouver la consistance *ab nihilo*, c'est-à-dire sans présupposer la validité d'une ou de plusieurs théories (ou d'un certain corpus d'énoncés). Par conséquent, il est impossible de justifier une théorie supposée être première en prouvant sa consistance²². Or, comme, pour Poincaré, seuls deux modes de justification sont admissibles : celui du recours à l'intuition et celui de la preuve de consistance, il ne reste que le recours à l'intuition si la théorie à justifier est celle qu'on entend placer à la base de l'édifice.

Pour que cela soit légitime [de proposer une théorie axiomatique comme le fait Zermelo], il faut démontrer que les axiomes ainsi introduits ne sont pas contradictoires, [...]. M. Zermelo n'a pas démontré que ses axiomes étaient exempts de contradiction, et il ne pouvait le faire, car, pour cela, il lui aurait fallu s'appuyer sur d'autres vérités déjà établies ; or des vérités déjà établies, une science déjà faite, il suppose qu'il n'y en a pas encore, il fait table rase, et il veut que ses axiomes se suffisent entièrement à eux-mêmes.

Les postulats ne peuvent donc tirer leur valeur d'une sorte de décret arbitraire, il faut qu'ils soient évidents par eux-mêmes. [Poincaré 1909b, 473].

Et Poincaré va chercher à établir que les défenseurs de la méthode axiomatique moderne, comme Zermelo, ne peuvent effectivement pas se passer de recourir de façon essentielle à l'intuition pour la théorie axiomatique des ensembles malgré qu'ils en aient.

22. Cela indique bien la différence qu'il convient de faire entre l'arithmétique, ou toute théorie supposée être première, et la géométrie : on a pu établir les consistances relatives des différentes géométries entre elles et donc leur égale légitimité, mais une telle stratégie n'est pas applicable pour des théories destinées à être premières. Dans les preuves de consistance des géométries, on pouvait en effet utiliser sans problème les vérités de l'arithmétique. De façon générale, on peut présenter ainsi ce type de preuve : en présupposant les théories X utilisées dans la preuve, la géométrie Y est consistante si la géométrie Z l'est. Et, il est entendu que la géométrie Y ne doit pas faire partie des théories utilisées dans la preuve. Mais, on ne peut pas espérer réaliser cette saine exigence de ne pas présupposer d'un côté ce qu'on cherche à démontrer de l'autre quand il s'agit de la théorie première. La théorie première ne peut pas être exclue des théories utilisées directement ou indirectement dans les preuves, puisqu'en tant que théorie première, elle est présupposée par toute théorie.

7 La théorie axiomatique de Zermelo et le besoin de recourir à l'intuition

Les six premiers axiomes de Zermelo, explique Poincaré, sont évidents dès qu'on donne au terme d'ensemble son sens intuitif et dès qu'on pense à des collections finies (le 7^e est celui qui de fait pose l'existence d'un ensemble infini). Mais ils ne le sont pas plus que ce 8^e : « des objets quelconques forment un *Menge* [ensemble] »²³. Pourquoi exclure ce dernier axiome ? Et comment justifier une telle exclusion ? De telles questions ne peuvent trouver de réponse que si cette axiomatique est autre chose que la définition implicite du terme « Menge » qu'elle semble être, et repose sur l'intuition. Voilà en substance, si nous l'avons bien compris, un des arguments principaux de Poincaré :

Si [...] nous nous reportons à l'énoncé des axiomes [les axiomes de Zermelo], nous aurons un premier étonnement ; nous constaterons que tous ces axiomes sans exception ne nous apprennent qu'une chose, c'est que certaines collections, formées d'après certaines lois constituent des *Mengen* ; de sorte que ces axiomes ne nous apparaîtront plus que comme des règles destinées à étendre le sens du mot *Menge*, comme de pures définitions de mots. Et cela est vrai aussi bien du 8^e axiome que nous rejetons, que des sept premiers que nous acceptons.

Nous sommes avertis pourtant bien vite que cette première impression est trompeuse ; de semblables définitions de mots ne nous exposeraient pas à la contradiction ; celle-ci ne serait à craindre que si nous avions d'autres axiomes affirmant que certaines collections *ne sont pas des Mengen*, et nous n'en avons pas. Cependant, si nous rejetons le 8^e axiome, c'est pour éviter la contradiction : M. Zermelo le dit explicitement.

Il faut donc bien qu'il n'ait pas considéré ses axiomes comme de simples définitions de mots, et qu'il ait attribué au mot *Menge* un sens intuitif pré-existant à tous ses énoncés, quoique différent quelque peu du sens habituel. [Poincaré 1909b, 475-76].

Bien entendu, si Zermelo avait rajouté le 8^e axiome ou remplacé son axiome de séparation par le 8^e, il aurait retrouvé certains paradoxes bien connus, en particulier celui de Russell. Mais, faut-il vraiment ajouter à

23. La théorie axiomatique de Zermelo comprend 7 axiomes. Le huitième axiome que Poincaré envisage d'ajouter est une formulation un peu cavalière de l'axiome de compréhension, dont il a justement été montré le caractère problématique cf. *supra*. L'axiomatique que propose Zermelo échappe aux contradictions connues en restreignant la possibilité de former des ensembles. Et ce, en particulier, en remplaçant le coupable axiome de compréhension, par un axiome bien plus restrictif : le n°3, appelé " axiome de séparation ".

la théorie axiomatique un contenu intuitif particulier relatif à la notion d'ensemble pour aboutir à ce résultat ? Poincaré ne dit pas où un tel contenu intuitif est supposé intervenir dans la dérivation du paradoxe, il se contente d'un argument indirect : on ne peut pas aboutir formellement à des contradictions si les axiomes disent seulement que certaines collections méritent d'être appelées des ensembles sans préciser celles qui ne le peuvent pas. Il est peut-être troublant qu'on puisse dériver formellement des contradictions d'axiomes ayant cette caractéristique. Cependant, c'est bien ce que prouve, à première vue et jusqu'à maintenant, le paradoxe découvert par Russell. En effet, il suffit d'adopter ce 8^e axiome dont parle Poincaré, pour aboutir à ce paradoxe, et ce sans devoir faire appel à aucun moment à une intuition particulière relative à la notion d'ensemble. (D'ailleurs, la leçon à tirer d'une telle démonstration n'est-elle pas, justement, qu'il faut se méfier des intuitions ? En effet, comme l'indique Poincaré, l'intuition naturellement associée à la notion de *Menge* est celle de Cantor²⁴. Or, c'est cette intuition qui s'est révélée être problématique !)

Établir que l'intuition joue un rôle significatif dans la justification d'une théorie ou d'une thèse demande en fait bien plus que ce que Poincaré semble croire. Même si, en diverses occasions, il distingue parfaitement les motifs psychologiques des raisons théoriques, et les moteurs de l'invention des exigences de la justification, déclarant même à un moment vouloir se limiter à ce seul dernier point de vue²⁵, ses conceptions de la présupposition, du fondement et de la justification restent cependant souvent trop psychologiques pour que ses arguments prouvent ce qu'il entend prouver²⁶. Pour établir qu'une certaine thèse présuppose ef-

24. Cf. Poincaré1909b p.474 : « Mais qu'est-ce que cette intuition peut être si elle n'est pas la définition de Cantor que nous avons dédaigneusement rejetée ? » ; ou encore : « [...] pourquoi [...] ai-je conservé le mot allemand *Menge* au lieu de le traduire par le mot français *ensemble* ? C'est parce que je ne suis pas sûr que le mot *Menge* conserve dans ces axiomes son sens intuitif, sans quoi il serait difficile de rejeter la définition de Cantor ».

25. Cf. par exemple [Poincaré 1905/06, 817] : « Chercher l'origine de cet instinct, étudier les lois de cette géométrie profonde qui se sentent et ne s'énoncent pas, ce serait encore une belle tâche pour les philosophes qui ne veulent pas que la logique soit tout. Mais ce n'est pas à ce point de vue que je veux me placer, ce n'est pas ainsi que je veux poser la question. Cet instinct dont nous venons de parler est nécessaire à l'inventeur, mais il semble d'abord qu'on pourrait s'en passer pour étudier la science une fois créée. Eh bien, ce que je veux rechercher, c'est s'il est vrai qu'une fois admis les principes de la logique, on peut je ne dis pas découvrir, mais démontrer toutes les vérités mathématiques sans faire de nouveau appel à l'intuition. »

26. Cf. [Goldfarb 1988], en particulier, p.64, pp.67-68 et p.70. Dans cet article, Goldfarb montre que, malgré certaines de ses déclarations, Poincaré reste continuellement tributaire d'une approche psychologique et donne un sens essentiellement psycholo-

fectivement certains contenus intuitifs, il ne suffit pas de montrer qu'elle n'aurait pas pu être produite sans eux : une condition de possibilité relative à la formulation, à la découverte ou à l'élaboration d'une thèse ou d'une théorie, n'est pas nécessairement une condition de sa validité. On n'a rien établi quant à la validité de $5 + 7 = 12$, si l'on se contente de montrer que pour formuler de telles égalités, il fallait avoir la capacité de se représenter intuitivement certains nombres, par exemple les plus petits.²⁷

Ce manque de distinction entre différents types de présuppositions est à l'œuvre dès le commencement de l'analyse menée sur la théorie axiomatique de Zermelo. Grâce à une alternative qui fait sens à première vue, Poincaré oppose globalement le besoin de recourir à l'intuition à la possibilité d'un fondement plus formel, celui d'une preuve de consistance.

M. Zermelo se borne à dire : considérons un domaine (*Bereich*) d'objets quelconques, il peut arriver qu'entre deux de ces objets x et y , il y ait une relation de la forme $x\epsilon y$; nous dirons alors que x est un élément de y , et que y est un ensemble, une *Menge*.

Evidemment ce n'est pas une définition, quelqu'un qui ne sait pas ce que c'est qu'une *Menge*, ne le saura pas davantage quand il aura appris qu'elle est représentée par le symbole ϵ , puisqu'il ne sait pas ce que c'est que ϵ . Cela pourrait aller si ce symbole ϵ devait être défini dans la suite par les axiomes eux-mêmes qui seraient regardés comme des décrets arbitraires. Mais nous venons de voir que ce point de vue était intenable²⁸ Il faut donc que nous sachions d'avance ce que c'est qu'une *Menge*, que nous en ayons l'intuition, et c'est cette intuition qui nous fera comprendre ce que c'est que ϵ , qui ne serait sans cela qu'un symbole dépourvu de sens, et dont on ne pourrait affirmer aucune propriété évidente par elle-même. [Poincaré 1909b, 473-4]

Bien sûr, « Il faut [...] que nous sachions d'avance ce que c'est qu'une *Menge* » pour attribuer axiomatiquement les propriétés voulues à ϵ , mais

gique aux notions de « fondement » et de « présupposition ». Il analyse comment cela conditionne sa compréhension des logicistes et vicie à la base les critiques qu'il leur adresse.

27. Il faudrait établir un lien précis entre conditions d'existence et conditions de validité pour qu'il en aille éventuellement autrement. Mais là où une réflexion poussée s'imposerait, Poincaré se contente de déclarations. Comme il le dit en conclusion d'un article, il s'agit, en fin de compte, d'une « profession de foi ». Imaginant un échange avec Russel, il écrit : « M. Russell me dira sans doute qu'il ne s'agit pas de psychologie, mais de logique et d'épistémologie ; et moi je serai conduit à répondre qu'il n'y a pas de logique et d'épistémologie indépendantes de la psychologie, et cette profession de foi clora probablement la discussion parce qu'elle mettra en évidence une irrémédiable divergence de vues. » [Poincaré 1909, 482].

28. Cela renvoie à l'impossibilité de prouver, dans ce cas, la consistance de l'axiomatique considérée, cf. *supra*.

l'intuition dont il s'agit alors a fonction de guide et non de justification. Poincaré établit sa critique sur une alternative : d'un côté, il y aurait la théorie axiomatique dont la consistance aurait été prouvée et pour laquelle on pourrait se passer de l'intuition, et de l'autre, l'axiomatique dont la consistance n'aurait pas été prouvée, et pour laquelle il faudrait nécessairement faire appel à l'intuition. Mais, une telle alternative existe-t-elle vraiment au niveau où il se situe : celui de la nécessité de savoir de quoi on parle ? N'aura-t-on pas pareillement besoin, dans les deux cas, de « savoir d'avance ce que c'est qu'une *Menge* », c'est-à-dire de recourir à l'intuition ? Pour déterminer la validité et la portée de l'alternative proposée par Poincaré, regardons plus précisément comment l'existence d'une preuve de consistance peut influencer sur la nécessité de recourir ou non à l'intuition.

Qu'on ait ou non une preuve de consistance pour une certaine théorie axiomatique importe peu quant il s'agit de déterminer si oui ou non un énoncé est bien une conséquence de cette axiomatique. Soit on a une bonne démonstration de cet énoncé : on dérive cet énoncé des axiomes en appliquant des principes d'inférence légitimes, soit on n'en a pas. Le fait qu'on ait ou non démontré la consistance de la théorie n'intervient à aucun moment. Par conséquent, en premier examen, le recours à l'intuition pour établir si la démonstration proposée est valide ne semble pas devoir s'imposer plus dans un cas que dans l'autre. Poursuivons notre analyse en voyant comment l'intuition peut jouer un rôle, et regardons dans chaque cas si l'existence ou non d'une preuve de consistance fait quelque différence.

Si l'intuition doit jouer un rôle, c'est par le biais des axiomes ou par celui des principes d'inférence étant donné que ce sont les seuls éléments à intervenir concrètement dans les démonstrations. Ce que l'on peut démontrer rigoureusement à propos des *Mengen*, sur la base de l'axiomatique que l'on propose, ne dépend donc pas directement du sens intuitif que l'on peut attribuer à ce terme ou au symbole ϵ . L'intuition associée à la notion de *Menge* sera sans aucun doute décisive pour le choix des axiomes, mais cela est sans lien avec le fait que l'on prouve *ensuite* ou non la consistance des axiomes. Par conséquent, si l'intuition est effectivement requise pour nous guider dans le choix des axiomes, elle l'est de la même façon dans les deux cas. Et il en va, à première vue, de même quant il s'agit des principes d'inférence. Qu'on admette ou non certains principes d'inférence jugés intuitifs n'a rien à voir avec le fait qu'on ait ou non démontré la consistance des axiomes. Cependant, si l'on pense à la façon dont le mathématicien produit et justifie ses inférences, on peut être amené à voir les choses différemment.

Le mathématicien, expliquera-t-on, ne se limite pas à utiliser un petit stock de principes d'inférence établis une fois pour toute par la logique, il développe des méthodes de preuves et des principes d'inférence relatifs au type d'objets dont il traite. Et donc tout naturellement, le sens intuitif qu'il donnera aux termes centraux de sa théorie, par exemple à celui d'ensemble, déterminera, au moins en partie, les principes d'inférence utilisés. Mais, cela ne pourra pas être le cas si la théorie développée est relative à des entités censées être définies par les axiomes. Or c'est bien, selon Poincaré, ce qui est visé dès que l'on prouve la consistance d'une théorie axiomatique. Dans ce cas, le sens des termes devant être complètement déterminé par l'axiomatique considérée, on ne saurait faire appel à leur sens intuitif pour justifier l'emploi de tel ou tel principe d'inférence spécifique. Seuls les principes d'inférence généraux de la logique seront admissibles. La preuve de consistance exclura donc les recours à l'intuition envisageables dans les autres cas²⁹.

29. Au début du 20^e siècle, on n'est pas encore très sensible au risque de confusions de niveaux quand on parle d'"êtres mathématiques" en relation avec des questions de définition et d'axiomatique, à l'exception de logiciens comme Frege [cf. Frege & Hilbert 1900, 233]. Ainsi, Poincaré affirme qu'il suffit qu'une définition soit non-contradictoire pour qu'existe « un être mathématique » qui lui corresponde [Poincaré 1902/1968, 70] ; Cf. aussi [Poincaré 1906a, 297], ce qui s'applique, en particulier, au cas où les axiomes sont des « définitions déguisées ». Or les « êtres mathématiques » auxquels se rapportent les axiomatiques classiques comme celles d'Euclide, dont les axiomes n'ont pas pour ambition de définir quoi que ce soit, ne sont pas du tout du même ordre que les « êtres mathématiques » censés être définis par une théorie axiomatique consistante où interviennent un ou plusieurs termes dénués de sens. Dans le premier cas, les axiomatiques portent sur des entités mathématiques telles que les nombres ou les figures géométriques, alors que dans le second cas il y a une indétermination quant à la nature des entités en cause. En effet, ce que définit une axiomatique consistante ce sont des formes structurelles susceptibles d'être réalisées par différents ensembles d'entités. Ou pour le dire plus simplement, en employant le langage de la théorie des modèles : dans le premier cas, un seul modèle est concerné et les axiomes énoncent des choses vraies relativement aux entités du modèle considéré et à leurs relations ; dans le deuxième cas, c'est une classe de modèles qui est concernée : la classe de toutes les interprétations des termes dénués de sens qui rendent les axiomes vrais. On peut, en effet, interpréter une axiomatique dans de multiples structures (une structure consiste en un ensemble d'éléments sur lequel sont définies certaines propriétés et relations) et ce, souvent, de multiples manières (autant de manières qu'il y a de fonctions associant les termes non interprétés de l'axiomatique à des entités, des propriétés, et des relations de la structure considérée de façon à satisfaire les relations posées par les axiomes). Le fait que l'on puisse imaginer de construire un modèle ayant exactement les propriétés voulues pour satisfaire l'axiomatique consistante considérée explique probablement la facile confusion entre ces deux niveaux avant le développement de la théorie des modèles. Mais si la consistance d'une axiomatique suffit effectivement à assurer l'existence d'un modèle (cf. le théorème de complétude de Gödel de 1930), elle n'assure par contre nullement son unicité.

Mais une telle thèse n'est pas recevable. Une fois encore, il importe de bien distinguer les conditions de formulation des conditions de validité. Si un certain type de déduction semble légitime seulement dans certains cas, selon l'espèce d'entités en cause (nombres, grandeurs géométriques ou n'importe quoi d'autre), on peut grâce à un travail d'analyse dégager les principes d'inférence spécifiques mis en œuvre, et chercher à les transformer en axiomes supplémentaires. Un bon exemple de cette façon de procéder est justement ce qu'a fait Zermelo avec l'axiome du choix. Zermelo, confronté dans une démonstration au fait de devoir utiliser un principe d'inférence relativement nouveau, décide de le formuler explicitement pour le transformer ensuite en un axiome de la théorie des ensembles. Le rôle de l'intuition se révèle donc ici purement heuristique : une bonne analyse des démonstrations a permis de compléter l'axiomatique de la théorie concernée de façon à limiter les principes d'inférence utilisés aux principes généraux de la logique.

L'opposition à faire n'était donc pas entre, d'une part, des théories dont les déductions auraient pu s'appuyer sur l'intuition et, d'autre part, celles qui ne l'auraient pas pu, mais entre des bonnes et des mauvaises axiomatisations. Le fait qu'on ait ou non prouvé la consistance de l'axiomatique considérée n'avait donc aucune raison de jouer un rôle quelconque quant aux principes d'inférence admissibles, puisque la bonne règle aurait dû être de limiter ces principes aux principes généraux de la logique et d'incorporer dans l'axiomatique tout ce qui était spécifique.³⁰

Si la preuve de consistance n'avait aucune raison de changer quoi que soit au rôle joué par l'intuition dans le choix des axiomes et dans la déduction, sur quelle question offrait-elle une alternative à l'intuition ? Sur la question de la justification des axiomes. La condition fondamentale posée à toute théorie mathématique est d'être non contradictoire.

La supposition erronée qu'une théorie axiomatique consistante pouvait déterminer la signification de ses termes non-interprétés de façon telle qu'elle devenait équivalente à une théorie axiomatique classique pouvait effectivement suggérer que preuve de consistance et intuition étaient deux façons différentes d'aboutir à des théories axiomatiques valant pour un type bien déterminé d'objets mathématiques. Mais, cela ne suffisait de toute façon pas à justifier l'alternative formulée par Poincaré : pour cela, il aurait fallu montrer que l'intuition ne pouvait pas être éliminée, dans une deuxième étape, et remplacée par une preuve de consistance.

30. Tout ce développement est à replacer dans le contexte de l'époque où il n'y a pas encore de conditions précises pesant sur les axiomes susceptibles de limiter la possibilité de transformer en axiomes des principes d'inférences spécifiques. Bien entendu, dans le cadre d'une théorie logique bien mieux précisée où cette conversion ne va plus pareillement de soi, la question est plus complexe. Mais, il s'agit ici simplement de montrer que les raisons que Poincaré pouvait avoir de faire cette distinction étaient d'ordre psychologique ou historique, et non pas logique.

Or, pour établir que cette condition est remplie, on peut soit chercher à produire une preuve de consistance de la théorie axiomatique en l'envisageant comme une théorie formelle (on prive les termes de la théorie de leur sens), soit établir la vérité de chacun des axiomes indépendamment, ce qu'on peut faire en fondant chaque axiome sur une évidence intuitive.

Mais, il ne suffit pas d'établir qu'à un moment ou à un autre on doit faire appel à l'intuition, sans autre précision, pour prouver que les axiomes sont fondés sur des vérités intuitives. Il faut bien plus. Il faut montrer que la justification des axiomes déclarés et des éventuels axiomes cachés, utilisés implicitement, renvoie effectivement à des évidences intuitives. Que nous ayons besoin à un certain moment de savoir « d'avance ce que c'est qu'une *Menge* », d'en avoir l'intuition, ne prouve rien, car ce besoin renvoie à une nécessité heuristique — servir de guide dans l'élaboration de la théorie — et non pas justificatrice — établir, une fois la théorie bien élaborée, que certaines intuitions nous assurent de la validité des axiomes. Et, il en va de même de l'argument indirect censé prouver qu'on doit faire appel à l'intuition pour saisir la nature contradictoire d'une théorie axiomatique des ensembles comprenant le 8^e axiome. Quelle qu'ait été l'intuition directrice de Zermelo, ce n'est pas sur elle qu'il se fonde pour rejeter le 8^e axiome, mais sur les démonstrations existantes : la sienne en 1898 et celle de Russell en 1902. Seule une analyse précise de ces démonstrations, indiquant quel principe intuitif spécifique elles présupposent, serait un argument recevable et permettrait d'entamer une réflexion sur le type d'intuition convoquée et le besoin d'y faire ou non appel.

Par conséquent, les arguments de Poincaré destinés à montrer que le théoricien des ensembles recourt à un moment ou à un autre à l'intuition ne prouvent rien quant à la question décisive qui est : peut-on et doit-on faire appel à des vérités intuitives pour justifier les axiomes de la théorie des ensembles ? Cependant, les réflexions de Poincaré sur les fondements intuitifs de la théorie des ensembles ne se réduisent pas aux arguments que nous venons d'examiner. Il affronte aussi, de façon directe, la question centrale, celle du fondement intuitif des axiomes. Et c'est à propos de l'axiome du choix qu'il est amené à pousser sa réflexion le plus loin et à dépasser la position simple et séduisante, mais malheureusement insuffisante, consistant à identifier fondement intuitif et évidence.

8 Quelle intuition justifie l'axiome du choix ?

La position générale de Poincaré est que si le fondement doit être intuitif, il doit consister en une évidence :

Les postulats ne peuvent donc tirer leur valeur d'une sorte de décret arbitraire, il faut qu'ils soient évidents par eux-mêmes.

Il nous faudra donc, non pas démontrer cette évidence, puisque l'évidence ne se démontre pas, mais chercher à pénétrer le mécanisme psychologique qui a créé ce sentiment d'évidence. [Poincaré 1909b, 473]

Comme on le voit, il s'agit bien de l'évidence au sens courant, psychologique, du terme. Et Poincaré de façon tout à fait cohérente défend l'idée que c'est à la psychologie qu'il revient d'expliquer ce sentiment. Mais, cette position se révèle insuffisante face à un axiome comme l'axiome du choix, si l'on estime qu'il mérite d'être adopté, ce que pense Poincaré³¹.

Les axiomes en question [ceux dont parle Russell : l'axiome du choix et son équivalent l'axiome multiplicatif] ne seront jamais que des propositions que les uns admettront comme « self-evident » et dont les autres douteront. Chacun n'en croira que son intuition. Il y a toutefois un point sur lequel tout le monde sera d'accord. L'axiome est « self-evident » pour les classes finies ; mais s'il est indémontrable pour les classes infinies, il l'est sans doute aussi pour les classes finies, qu'on n'a pas encore distinguées à ce stade de la théorie ; c'est donc un jugement synthétique *a priori* sans lequel la « théorie cardinale » serait impossible, aussi bien pour les nombre finis que pour les nombres infinis.[Poincaré 1906a, 313].

La première phrase fait apparaître la condition qui était restée sous-entendue dans les déclarations précédentes : l'évidence doit être partagée par tous pour avoir valeur de justification. Or, ce n'est pas le cas pour l'axiome du choix. Poincaré est donc obligé de recourir à un argument plus complexe : une sorte de raisonnement transcendantal destiné à prouver que ce principe est nécessairement valide. Remarquons d'abord, qu'on évite ici la confusion habituelle entre le psychologique et le logique. Poincaré entend montrer non pas que le mathématicien doit présupposer le principe du choix, mais que nos théories mathématiques le font.

Qu'est-ce qui caractérise essentiellement un argument transcendantal ? Malgré la difficulté de la question, étant donné la complexité du discours de Kant, il existe un certain accord pour mettre en avant l'élément suivant : ce qui vise à établir la validité de certains jugements en

31. Cf. [Poincaré 1906a, 315], et Cf. [Cassinet 1983].

montrant qu'ils découlent des conditions de possibilité d'un trait constitutif de notre réalité théorique ou sociale.³² Les conditions de possibilité correspondent donc à des conditions nécessaires : pour qu'une certaine chose existe, il faut que certaines conditions soient réalisées. Cet argument autorise, par conséquent, s'il est valide, à tirer de l'existence d'une certaine chose, la réalisation de certaines autres : ses conditions de possibilité. Mais seuls certains arguments de ce genre ont un intérêt qui leur mérite le qualificatif de transcendantal : ceux qui permettent de réfuter des thèses sceptiques en offrant un fondement à telle ou telle partie de notre corpus théorique. Pour cela, il faut non seulement, bien sûr, que soit admise la réalité de la chose dont on entend dégager les conditions de possibilité, mais aussi qu'elle soit suffisamment fondamentale et constitutive de l'ensemble de notre réalité pour qu'envisager son inexistence revienne à s'imaginer un monde essentiellement différent du nôtre. Ainsi, les conditions de possibilité de l'expérience peuvent servir à fonder les différents jugements ou principes qu'elles impliquent, parce que le sceptique ne remet pas en cause l'existence d'une expérience ayant certaines caractéristiques, et qu'un monde où elle n'existerait pas n'aurait plus grand chose à voir avec le nôtre.

Revenons maintenant à l'argument de Poincaré. Il s'agit de fonder un certain principe en montrant qu'il est une condition nécessaire de toute théorie cardinale qu'elle concerne le fini ou l'infini, et par là une condition de possibilité de la théorie cardinale des nombres finis, qui existe effectivement et dont on ne peut concevoir l'absence si ce n'est dans un monde étrange où les mathématiques seraient radicalement autres. On retrouve donc bien le schéma décrit plus haut. Aussi, Poincaré a-t-il raison de parler à ce propos de jugement synthétique *a priori*, puisqu'en établissant la validité d'un jugement synthétique par le biais d'un argument transcendantal, on prouve sa nature *a priori*. Mais, il convient de s'interroger sur la validité d'un tel argument transcendantal. Le principe du choix est-il, effectivement, une condition de possibilité de la théorie cardinale des nombres finis ?

La question d'un principe du choix dans le cas fini ne se pose habituellement pas, étant donné que le « principe » du choix dans le cas fini se démontre à partir du principe d'induction et de la possibilité de se donner comme objet un élément quelconque d'un ensemble non vide³³.

32. Cf., par exemple, *The Cambridge Dictionary of Philosophy* à la voix « transcendantal argument » [Audi (éd.) 1995, 808].

33. Il ne faut pas se représenter le choix d'un élément dans plusieurs ensembles comme une suite d'opérations. « Choisir » un élément dans un ensemble non vide signifie simplement se donner la possibilité de considérer un élément quelconque de cet en-

C'est un théorème banal. Mais ce n'est pas le cas, affirme Poincaré, si l'on se place dans une perspective plus générale, la distinction entre le fini et l'infini devant intervenir à un stade ultérieur.

Effectivement, dans le cadre de la théorie des ensembles, les ensembles finis sont des ensembles particuliers, des ensembles à caractériser par une certaine propriété. Les travaux de Cantor et ceux de Dedekind ont abouti, de fait, à deux définitions différentes du fini : pour Cantor, un ensemble est fini s'il ne peut pas être mis en bijection avec aucune de ses parties propres ; pour Dedekind, il est fini si ses éléments, pris dans leur totalité, peuvent constituer une chaîne simple avec dernier élément. En 1907, Zermelo démontrera l'équivalence de ces deux propriétés, mais pour ce faire il devra utiliser l'axiome du choix.³⁴ Par conséquent, l'obtention d'une caractérisation du fini satisfaisante, en ce sens qu'elle rend équivalentes les deux options possibles, semble devoir dépendre de l'axiome du choix. Est-ce que cela ne prouve pas, *a posteriori*, que Poincaré avait raison en faisant de l'axiome du choix une condition de possibilité de la théorie des cardinaux finis ?

La démonstration de Zermelo fait effectivement de l'axiome du choix un présupposé pour une certaine théorie des ensembles finis. Mais cela autorise-t-il à affirmer qu'il est une condition de possibilité de toute théorie cardinale des nombres finis ? Non, car la situation qui semble rendre ce présupposé inévitable n'a elle-même rien d'inévitable. Pour affirmer qu'elle est inévitable, il faudrait d'abord attribuer à la théorie des ensembles un statut que très sûrement Poincaré ne lui reconnaît pas : celui d'être nécessairement au fondement de la théorie des cardinaux finis, c'est-à-dire de l'arithmétique. Et, il faudrait, ensuite, établir que l'équivalence de ces deux définitions du fini est elle aussi un présupposé nécessaire. L'argument de Poincaré ne vaut qu'à condition de défendre ces deux thèses. Ce que personne n'est disposé à faire, pas plus les défenseurs de la théorie des ensembles que Poincaré.

Affaibli, l'argument de Poincaré peut effectivement servir à justifier l'axiome du choix, comme nous allons le voir, mais il n'a plus alors la force d'un argument transcendantal capable d'établir sa nécessité. En admettant qu'une sorte d'argument transcendantal puisse venir pallier

semble. Si E est un ensemble non-vide, tout énoncé du genre « Soit e un élément de l'ensemble E » sera légitime. Et, il n'y a pas lieu de penser à une succession, même quand il s'agit d'une pluralité de choix : « choisir » un élément dans chaque ensemble, revient simplement à se donner un élément du produit cartésien de ces ensembles. Or, démontrer par récurrence que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles non-vides est non-vide est élémentaire.

34. cf. [Zermelo 1909].

un sentiment d'évidence défaillant, Poincaré avait déjà pris bien des libertés avec sa propre exigence de fonder les axiomes sur leur évidence. De cette façon, il mettait, en effet, de côté le phénomène psychologique de l'évidence qu'il avait auparavant mis explicitement sur le devant de la scène. Cependant, si son argument avait été valable, l'axiome du choix aurait effectivement possédé une propriété de même nature, une sorte d'évidence objective implicite : la propriété d'être nécessairement vrai pour nous, car présupposé par des parties irrévocables de notre savoir théorique.

Mais, si l'on ne peut admettre tel quel l'argument de Poincaré et affirmer la nécessaire validité de l'axiome du choix, on peut, par contre, comme nous l'avons signalé plus haut, en extraire une bonne raison d'adopter cet axiome : qu'on ait besoin de faire appel à lui pour établir l'équivalence des deux définitions envisageables des ensembles finis montre qu'il faut probablement l'inclure parmi les axiomes si l'on veut obtenir une théorie générale des ensembles qui incorpore harmonieusement la théorie des ensembles finis. En effet, comme dans la partie relative aux cas finis la restriction de ce principe est valide, et comme cette partie devrait se fondre dans le reste de la théorie générale, il serait bien que ce qu'affirme ce principe puisse valoir en général. Et comme il semble exclu de pouvoir faire dans le cas général ce qui serait envisageable dans le cas fini — le démontrer à partir de principes plus simples ou plus fondamentaux —, la meilleure solution est de l'adopter comme principe. Modifié de cette façon, l'argument de Poincaré peut s'ajouter aux sept théorèmes ou problèmes cités par Zermelo pour justifier l'adoption de l'axiome du choix. Mais de cette façon, on ne fonde pas cet axiome, on fait apparaître simplement son utilité pour les mathématiques actuelles et futures. On ne révèle pas un lien nécessaire entre la validité du principe du choix et une partie irrévocable de nos mathématiques — irrévocable au point qu'il faudrait supposer un monde tout autre pour les imaginer différentes —, on fournit simplement une bonne raison de penser que l'axiome du choix devrait faire partie de la théorie générale, celle capable de fournir une base unitaire à l'ensemble des mathématiques.

La distinction entre, d'une part, justifier directement un principe par son évidence ou par sa nécessité et, d'autre part, le justifier indirectement en justifiant une théorie le comprenant peut sembler, au premier abord, bien tenue. Est-ce que les principes d'une théorie bien justifiée ne se trouveront pas, par la même occasion, eux-mêmes bien justifiés ? Et, si la crédibilité de la théorie rejaillit sur ses principes, pourquoi l'évidence d'un principe ne pourrait-elle pas résulter de la crédibilité de la théorie à laquelle il appartient ? Pour percevoir la différence notable qu'il y a

entre justification directe et justification indirecte, il suffit de considérer la grande variété des justifications convoquées quand il s'agit de théories. En faveur d'une théorie on peut faire valoir non seulement sa plus ou moins grande évidence, et donc la plus ou moins grande évidence de ses principes, mais aussi la connaissance des contradictions résultant d'autres choix de principes, la cohérence du tout, l'étendue des questions qu'elle permet de traiter, la simplicité de ses démonstrations, la nature attendue des résultats, les liens qu'elle permet d'établir avec d'autres domaines, etc.

Aussi, la situation à laquelle est confronté celui qui, au début du siècle, réfléchit sur les mathématiques n'est plus du tout celle qu'envisageait Kant ; et elle ne justifie plus pareillement l'établissement d'un lien entre validité, fondement intuitif, et évidence. Pour Kant, les théories mathématiques qu'il connaissait étaient universellement valides : ni alternatives ni modifications n'étaient envisageables. Cet état particulier remontait selon lui à l'antiquité grecque. C'était « chez l'admirable peuple grec », que les mathématiques étaient entrées dans « la voie sûre d'une science », c'est-à-dire une voie dans laquelle tâtonnements et conflits sur « la manière dont il faut poursuivre le but commun » n'avaient plus leur place³⁵. La chose à expliquer était, par conséquent, cette validité intemporelle qui excluait toute possibilité de crises.

Par le biais d'une argumentation transcendantale, il cherchait à établir que certains principes non logiques devaient être eux-mêmes universellement valides pour qu'une telle validité soit possible. Il expliquait l'existence de tels principes par l'existence d'un certain nombre de contenus intuitifs partagés universellement. (Certaines intuitions s'imposaient pareillement à tous, car elles dépendaient non pas de l'expérience sensible mais de formes universelles de représentation prédéterminant cette expérience.) Fondés sur des intuitions, ces principes renvoyaient donc à des évidences. Chaque homme se représentant l'espace ne pouvait que constater la vérité des axiomes d'Euclide. Ainsi, s'instaurait effectivement un lien entre validité des principes mathématiques et évidence.

Mais, ce lien doit être remis en cause si l'on abandonne la thèse kantienne que les mathématiques sont entrées dans une voie qui exclut tout doute et toute alternative. Alors qu'une validité intemporelle et universelle semble, effectivement, ne pouvoir s'expliquer que par l'existence d'intuitions elles-mêmes universellement partagées, ce n'est plus le cas si la validité de nombre de théories se révèle dépendre largement du contexte intellectuel en faisant intervenir des raisons de différents

35. cf. [Kant 1787, 15-16].

ordres³⁶. Comme nous l'avons déjà fait valoir plus haut, quand on juge de la validité d'une théorie en prenant en compte de multiples facteurs et en comparant ses avantages et ses inconvénients à ceux d'éventuelles théories rivales, l'évidence n'a plus un rôle décisif.

Le type d'argument utilisé par Poincaré n'établit donc pas, en fait, un lien positif entre validité et évidence. Au contraire, dans cette situation où la validité des théories est tributaire de plusieurs facteurs, elle conduit à dévaluer les évidences et à nier l'existence de véritables fondements intuitifs. Et la démarche, par laquelle on cherche à justifier les principes par le biais des théories qui les présupposent, conduit bien plutôt à un principe d'utilité mathématique comme celui mis en œuvre par Zermelo : par delà les questions de consistance, l'élément décisif pour évaluer la légitimité d'un principe sera sa fonction dans le développement de théories jugées elles-mêmes utiles et légitimes.

9 Conclusion

Poincaré et Zermelo, forts de leur expérience de mathématiciens, s'opposent à l'idée d'une législation et d'une justification venant de l'extérieur. La mathématique n'est pas la science ancillaire de la logique, elle n'a besoin de la logique ni pour se fonder, ni pour régler sa conduite. Qu'en dernière instance, ce soit aux mathématiciens de trancher, en invoquant éventuellement leurs intuitions, suffit à prouver une certaine autonomie des mathématiques. Mais après avoir établi cette autonomie, il reste encore à l'expliquer et à en préciser la portée. L'analyse des textes de Zermelo et de Poincaré montre qu'il faut se méfier d'une certaine homogénéité de discours des défenseurs de l'autonomie mathématique. Le partage de certains mots-clés, comme celui d'« évidence », ne garantit ni la similitude des positions, ni une vraie continuité avec la tradition

36. Ce qui ne signifie bien sûr pas que leur vérité dépende du contexte en question. Même si dans le cas particulier de la validité universelle, on peut vouloir associer validité universelle à vérité, il ne faut pas confondre le registre auquel ressort le terme de « validité », avec celui auquel appartient « vérité », ni non plus d'ailleurs avec celui de termes gnoséologiques comme « certitude ». Affirmer qu'une théorie est vraie, c'est affirmer qu'il en est ainsi que la théorie le dit, et donc tenir un discours ontologique. Parler de certitude, c'est faire référence au rapport que le sujet entretient avec les croyances ou les discours en question, et donc renvoyer à la psychologie. Par contre, dire d'une théorie qu'elle est valide, c'est dire qu'elle répond aux conditions requises pour être adoptée rationnellement. (Et une théorie méritera le qualificatif d'« universellement valide » si elle s'impose à tout être rationnel en toute circonstance, c'est-à-dire indépendamment d'un contexte intellectuel bien déterminé.)

philosophique qui place au fondement des mathématiques des contenus intuitifs irrévocables : des évidences intuitives.

Si Poincaré entend donner un fondement intuitif aux axiomes de la théorie mathématique de base, l'arithmétique, il n'est pas prêt, comme Brouwer, à lui fixer *a priori* des limites en déterminant préalablement de façon précise ses bases intuitives. Comme on le voit clairement, nous semble-t-il, dans le cas de l'axiome du choix, l'engagement intuitionniste de Poincaré n'est pas lié de façon contraignante à un critère précis permettant de trancher sans ambiguïté quant à la nature intuitive des axiomes envisagés. Ainsi, au lieu de juger, sur la base d'un critère intuitionniste bien déterminé, de la nature de cet axiome pour déterminer s'il convient ou non de l'accepter, il procède à rebours. Diverses considérations liées à sa connaissance intime des mathématiques le conduisant à juger que l'axiome du choix mériterait d'être admis, il élargit le critère qu'il avait adopté au départ : l'évidence. Mais, le type d'argument qu'il utilise alors ne permet nullement d'offrir un fondement intuitif à cet axiome : nulle nécessité résultant de certaines intuitions fondamentales, nul corpus de vérités mathématiques élémentaires et irrévocables qui le présupposeraient inévitablement.

De façon plus générale, on peut se demander, s'il est possible d'associer cette attitude peu dogmatique vis-à-vis des axiomes possibles, et un intuitionnisme véritable, un intuitionnisme à la Kant ou à la Brouwer. Cette étude montre, nous semble-t-il, que non. Il faut déterminer précisément l'intuition mathématique à laquelle on entend faire appel dans les questions de justification, soit une intuition universelle à la Kant ou à la Brouwer, soit une « intuition »³⁷ dépendante du contexte à la Zermelo. Il n'y a pas de moyen terme qui, en conciliant les deux, offrirait la force fondatrice de l'une et la souplesse de l'autre. Ne nous méprenons pas, il ne s'agit pas d'exclure la possibilité que les mathématiques, pour une part, dépendent d'intuitions universelles spécifiques et, pour une autre part, d'« intuitions » contextuelles (c'est-à-dire d'un mixte plus ou moins explicite de raisons de différentes natures)³⁸, mais simplement de montrer

37. Ici « intuition » désigne ici simplement la faculté spécifique d'orientation et d'évaluation qu'acquière le professionnel grâce à la pratique (cf. *supra*). Cet emploi, déviant par rapport au sens plus restreint qu'on lui confère généralement en philosophie, se justifie, à la fois, par l'ambiguïté de ce mot chez Poincaré et par notre projet : montrer que derrière une même notion ou une série de notions apparentées (évidence, intuition), et derrière une même thèse — le besoin du mathématicien de faire appel à son intuition et de ne pas se limiter aux seuls principes de la logique — peuvent se dissimuler deux positions différentes.

38. C'est d'ailleurs une position tout à fait défendable, comme le montre bien Penelope Maddy, qui, à la fois, interprète Gödel en ce sens, et en fait une des thèses de

que les bénéfices offerts par une fondation sur des intuitions universelles — une véritable autonomie de la discipline — sont alors perdus. On ne peut donc pas, impunément, laisser planer un certain vague sur la nature des intuitions qu'on invoque.

L'intuition contextuelle à la Zermelo justifie qu'on accorde un certain privilège aux intuitions des professionnels qui, de par leur pratique, ont développé un sixième sens mathématique, mais elle n'assure aucune véritable autonomie à la discipline. La prise en compte du contexte que ce type d'intuition implique, ouvre ainsi la porte, qu'on le veuille ou non, à une relativisation de la spécificité des mathématiques. Les mathématiques se révèlent semblables aux autres sciences, non pas des constructions s'élevant selon des plans déterminés depuis la nuit des temps, mais des théories qui occupent une certaine position dans l'espace hétérogène, mais continu, de la connaissance scientifique.

Références bibliographiques

ASPRAY, W. ET KITCHER P. (ÉDS.)

1988 *History and Philosophy of Modern mathematics*, Minnesota studies in the philosophy of science, XI, Minneapolis : Minnesota Univ. Press.

AUDI, R (ÉD.)

1995 *The Cambridge Dictionary of Philosophy*, Cambridge : Cambridge Univ. Press.

BOREL, ÉMILE

1898 *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris : Gauthier-Villars.

CASSINET, JEAN

1983 « La position d'Henri Poincaré par rapport à l'axiome du choix, à travers ses écrits et sa correspondance avec Zermelo (1905-1912) », *History and Philosophy of Logic* 4, 145-155.

FRAENKEL, A. ET BAR-HILLEL Y.

1958 *Foundations of Set Theory*, Amsterdam : North-Holland.

FREGE, GOTTLOB ET HILBERT, DAVID

1900 Correspondance, traduit et reproduit dans [Rivenc & Rouilhan (éds.) 1992, 220-235].

GOLDFARB, WARREN

1988 « Poincaré against the Logicians » dans [Aspray & Kitcher (éds.) 1988, 61-81].

GRATTAN-GUINNESS, IVOR

1977 *Dear Russel-Dear Jourdain*, London : Duckworth.

HEINZMANN, G. (ÉD.)

1986 *Poincaré, Russell, Zermelo et Peano, Textes de la discussion (1906-12) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Paris : Blanchard.

HILBERT, DAVID

1926 « Über das Unendliche », *Mathematische Annalen*, 95, 161-190.

LEBESGUE, HENRI

1902 « Intégrale, longueur, aire », *Annali di matematica pura ed applicata*, 3, 231-359.

MADDY, PENELOPE

1990 *Realism in Mathematics*, Oxford : Clarendon Press.

MOORE, GREGORY H.

1976 « Ernst Zermelo, A.E. Harward, and the Axiomatization of Set Theory », *Historia Mathematica*, 3, 206-209.

1978 « The Origins of Zermelo's Axiomatization of Set Theory », *Journal of Philosophical Logic*, 7, 307-329.

1982 *Zermelo's Axiom of Choice : its Origin, Development and Influence*, New York : Springer-Verlag.

PECKHAUS, VOLKER

1990 « 'Ich habe mich wohl gehütet, alle Patronen auf einmal zu verschiessen'. Ernst Zermelo in Göttingen », *History and Philosophy of Logic*, 11, pp.19-58.

POINCARÉ, HENRI

1902 *La science et l'hypothèse*, Paris : Flammarion, 1968.

1905/06 « Les mathématiques et la logique », *Revue de métaphysique et de morale*, 13 (1905), 815-835, et 14 (1906), 17-34, reproduit dans [Heinzmann (éd.) 1986].

1906a « Les mathématiques et la logique », *Revue de métaphysique et de morale*, 14, 294-317, reproduit dans Heinzmann éd.1986

1906b « A propos de la logistique », *Revue de métaphysique et de morale*, 14, 866-868, reproduit dans Heinzmann éd.1986.

1908 *Science et Méthode*, Paris : Flammarion. Réédition : cahier spécial 3 de *Philosophia Scientiæ*, Paris : Kimé, 1999.

- 1909a « Réflexions sur les deux notes précédentes de A.S. Schönflies et de Zermelo », *Acta Mathematica*, 32, 195-200, reproduit dans [Heinzmann (éd.) 1986].
- 1909b « La logique de l'infini » (1), *Revue de métaphysique et de morale*, 17, 461-482, reproduit dans [Heinzmann (éd.) 1986].
- 1912 « La logique de l'infini » (2), *Scientia*, 1-11, reproduit dans [Heinzmann (éd.) 1986].
- RANG, B. ET THOMAS, W.
- 1981 « Zermelo's discovery of the « Russell paradox », *Historia mathematica*, 8, 15-22.
- RIVENC, F. ET ROUILHAN, PH. DE (ÉDS).
- 1992 *Logique et fondements des mathématiques*, Paris : Payot.
- ROTA, GIANCARLO
- 1997 *Indiscrete Thoughts*, Boston : Birkhauser.
- YOUNG, WILLIAM H.
- 1903 « Overlapping Intervals », *Proceedings of the London Mathematical Society*, 35, 384-388.
- ZERMELO, E.
- 1904 « Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann », *Mathematische Annalen*, 59, 514-16.
- 1908a « Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung », *Mathematische Annalen*, 65, 107-128, trad. fr. dans [Rivenc & Rouilhan (éds.) 1992], 342-366.
- 1908b « Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre », *Mathematische Annalen*, 65, 261-281, trad. fr. partie I dans [Rivenc & Rouilhan (éds.) 1992], 370-378.
- 1909 « Sur les ensembles finis et le principe d'induction complète », *Acta Mathematica*, 32, 185-193, reproduit dans [Heinzmann (éd.) 1986].