ARTYKUŁY

ZAGADNIENIA FILOZOFICZNE
W NAUCE
XXX / 2002, s. 18–30*

Krzysztof MAŚLANKA

Obserwatorium Astronomiczne UJ
Kraków

RIEMANN I JEGO FUNKCJA ζ

All animals are equal but some are more equal than others.

George Orwell (*1984*)

WIELKI WIZJONER

Można by — parafrazując sławną sentencję George'a Orwella — powiedzieć, że wszystkie obiekty, które bada matematyka, są równie piękne. A jednak pewne zdają się piękniejsze niż inne. Ale nie ma wątpliwości, że najpiękniejsza w całej matematyce jest funkcja zeta Riemanna.

Tak radykalna teza robi wrażenie nietaktownej, demagogicznej wręcz autoreklamy kogoś, kto zajmując się akurat zetą, nie znalazł czasu, by dostrzec też inne rzeczy — i nic ponadto. Ostatecznie, jak wszyscy wiemy, matematyka jest dziedziną precyzyjną, zatem, z samej swej natury, wolną od pustego wartościowania.

Lecz mimo wszystko nie jest to jedynie przekorna parafraza czy literacki slogan bez głębszej treści. Nie ma bowiem w całej matematyce obiektu, który by w bardziej niepozornej postaci zawierał więcej głęboko ukrytej treści. Na tym właśnie polega zdumiewające piękno tej funkcji.

---

*UWAGA: Tekst został zrekonstruowany przy pomocy środków automatycznych; możliwe są więc pewne błędy, których sygnalizacja jest mile widziana (obi@opoka.org). Tekst elektroniczny posiada odrębną numerację stron.

Pierwsze, bardzo jeszcze fragmentaryczne, formuły związane z funkcją zeta pojawiły się na początku siedemnastego stulecia. Potem badali ją inni, w szczególności Leonhard Euler. Lecz kim był ten, którego nazwisko łączy się z tą funkcją?

Schematyczny życiorys światowej sławy uczonego, lub przynajmniej cieszącego się powszechnym szacunkiem eksperta, powinien zawierać ten nieodłączny zwrot: „W młodości odebrał staranne wykształcenie”. Ktoś taki, i to już od wczesnych swych lat, powinien też zadziwiać wszystkich niezwykłą siłą charakteru i pracowitością — a zwłaszcza szczególnym zamiłowaniem do tej dziedziny, z którą później historia na trwałe złączy jego imię. No bo jakże by inaczej mógł odnieść sukces?...

... chyba, że ktoś jest geniuszem. W bardzo precyzyjnym sensie: kimś obdarzonym przez naturę rzadkim talentem wyraźnego widzenia w swej wyobraźni rzeczy odległych, pozornie nie związanych, zakrytych dla wszystkich innych. Tak, wtedy „staranne wykształcenie” nie jest niezbędne, a może wręcz szkodliwe?

Geniusz szczególnie wielki bywa zwykle prawie nieznany i niedoceniany za życia. Niepozorny, nieśmiały i słabego zdrowia, podświadomie czuje, że los nie dał mu wiele czasu i dlatego winien się spieszyć. Nakreśla więc ogólne, śmiałe myśli w kilku, radykalnie odmiennych kierunkach badań, ale na ich rozwijanie nie wystarcza mu już życia. Odkrycie owych myśli, częściowe zrozumienie i dalszy rozwój nastąpi dopiero po jego, często przedwczesnej, śmierci. Wtedy dopiero zaczyna się właściwe życie geniusza: gdy żyją jego idee — podziwiane i niezdarnie naśladowane przez potomnych.

Bernhard Friedrich Georg Riemann spełniał większość tych schematycznych wymagań. Uważa się go za jednego z największych matematyków w historii „królowej nauk”. Lecz tak naprawdę (przynajmniej według współczesnych kryteriów), był raczej fizykiem matematycznym. Mimo przejawianych wcześnie zdolności do matematyki, początkowo nie studiował jej systematycznie. Posłuszny swemu ojcu, duchownemu protestanckiemu, rozpoczął studia teologiczne na uniwersytecie w Getyndze. Na szczęście, prawdziwe powołanie zwykle zwycięża to narzucone, choćby i w najlepszej wierze, przez innych. Tak więc matematyka zastąpiła teologię. Niedoszły teolog — a byłby zapewne tylko jednym z wielu — został matematykiem. Jedynym w swym rodzaju.

Był chorobliwie nieśmiały i dlatego każde publiczne wystąpienie stanowiło dlań autentyczne przeżycie. Biografowie przekazali znamienny epizod z jego dzieciństwa: gdy dowiedział się o upadku powstania listopadowego w Polsce i późniejszych represjach politycznych, bardzo to przeżywał; prosił też bez końca, by mu o tym czytano.

Swymi pracami w dziedzinie geometrii przygotował Riemann właściwy grunt pod rozwój nowoczesnej teorii grawitacji: ogólnej teorii względności Einsteina. Można by spekulować, czy — gdyby tylko dane mu było żyć dłużej — sam by teorii tej nie sformułował. Nie jest to nieprawdopodobne: był przecież świetnym znawcą elektrodynamiki. Właściwie miał wszystkie niezbędne formuły, w których dopiero pół wieku później Albert Einstein rozpoznał, i dzięki którym poprawnie opisał, istotę grawitacji jako zakrzywienie czasoprzestrzeni. Jedno jest raczej pewne: nie byłoby teorii Einsteina bez geometrycznych prac Riemanna.

Wszystko to są sprawy względnie dobrze znane i szczegółowo już analizowane. Tu jednak chcę opowiedzieć o innej dziedzinie, której Riemann poświęcił swą jedyną, ośmiostronicową zaledwie pracę: o teorii liczb. Ukazała się ona w roku 1859 i nosiła długi tytuł: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (*O liczbie liczb pierwszych mniejszych niż pewna zadana wielkość*) .

Praca ta to autentyczny klejnot matematycznej myśli. Jest do dziś wnikliwie studiowana w każdym szczególe, zaś bezlitosny czas, tak bezwzględny w stosunku do współczesnych artykułów, nie zdezaktualizował jej wcale. Trafiają się wręcz autorytatywne opinie, że praca ta nie jest nawet do końca zrozumiana — w tym sensie, że nie znamy wszystkich źródeł oraz inspiracji, z których autor czerpał zawarte w niej, tak bogate w treść, i skrajnie trudne stwierdzenia. Lecz, co najważniejsze, Riemann sformułował w niej, nie dowiedzioną do dziś, sławną, głęboką i brzemienną we wnioski hipotezę. Według powszechnej opinii jest to najważniejsza z niedowiedzionych hipotez matematycznych. Jak pokazano niedawno, jest ona ważna też i dla fizyki — mechaniki kwantowej skomplikowanych jąder atomowych oraz teorii chaosu kwantowego.

Dowód, lub ewentualne obalenie tej hipotezy, to bez wątpienia największe marzenie matematyków. Marzenie od ponad stu lat, upragnione i wciąż bardzo odległe. Ostatnio pojawiła się dość konkretna sugestia, że rozwiązanie może nadejść ze strony fizyki.

Teoria liczb to najbardziej chyba — prócz geometrii — szacowna gałąź matematyki. Jednym z jej kluczowych, i do dziś nierozwiązanych, problemów jest rozkład liczb pierwszych, czyli takich, które dzielą się tylko przez siebie i przez jeden. Już wielki Euklides, twórca geometrii i autor sławnego od ponad dwudziestu stuleci bestsellera *Elementy*, wykazał, że liczb tych jest nieskończenie wiele. Jego elegancki dowód jest do dziś cytowany we wszystkich podręcznikach teorii liczb.

Teoria liczb pierwszych to domena wszystkiego, co dyskretne. Odkryty przez Eulera, nieoczekiwany związek pewnej funkcji oznaczanej grecką literą zeta z liczbami pierwszymi to jednocześnie pomost pomiędzy tym, co dyskretne, a tym, co ciągłe. Wraz z zetą (zwanej później zetą Riemanna) bowiem, do teorii liczb pierwszych weszły wszystkie potężne oraz skuteczne metody analizy zespolonej.

LICZBY PIERWSZE: PROSTY PROBLEM, TRUDNE ROZWIĄZANIE

Liczby, nie bez racji zwane *naturalnymi*, znają wszyscy. To te, które służą na przykład do numerowania przedmiotów, lub które są odpowiedzią na wrzaskliwą komendę kaprala: „Kolejnooo ooodlicz!”:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$$

Nie wszystkie one są tego samego typu; jak wszystkim dobrze wiadomo, pewne z nich można rozłożyć na czynniki zwane pierwszymi, czyli rozfaktoryzować, innych zaś — nie. Czyli:

$$1, 2, 3, 2 \cdot 2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2 \cdot 2 \cdot 2, 3 \cdot 3, 2 \cdot 5, ...$$

albo inaczej, przy użyciu potęg:

$$1, 2, 3, 2^2, 5, 2 \cdot 3, 7, 2^3, 3^2, 2 \cdot 5, ...$$

Powstaje naturalne pytanie: *jakie prawo rządzi pojawianiem się liczb pierwszych w takim ciągu?* Prostota problemu sugeruje naiwnie, że odpowiedź też powinna być dość prosta. W istocie jest ona skrajnie zawiła i do dziś właściwie nieznana. Trafiają się autorytatywne poglądy, że nigdy nie zostanie poznana. Ale jedno wiemy: jakakolwiek by ona była, odpowiedź ta tkwi w funkcji zeta Riemanna.

Liczby pierwsze są podstawą multiplikatywnej struktury wszystkich innych liczb; zgodnie z Podstawowym Twierdzeniem Arytmetyki są dla nich swoistymi „atomami”[1] , ale odpowiednik ich „tablicy Mendelejewa” daleki jest od jakiejkolwiek prostoty.

Przeprowadzane od czasów Gaussa aż do dziś eksperymenty numeryczne sugerują bowiem brak jakiejkolwiek prawidłowości w rozkładzie liczb pierwszych[2] . Np. po dwu liczbach pierwszych odległych od siebie o 2 może się pojawić (dowiedziono tego ściśle) dowolnie długa przerwa. Z drugiej jednak strony wiemy, że wszystko jest tu określone — jak to wyraził matematyk Don Zagier — z militarną precyzją.

Gdy nie ma dobrego pomysłu na rozwiązanie trudnego problemu, wówczas pozostają eksperymenty z użyciem komputera. Dla fizyka, astronoma czy, tym bardziej, inżyniera droga taka jest naturalna, a często wręcz jedyna. Ale nie ukrywajmy: dla konserwatywnego matematyka komputer to tylko wstydliwa proteza mózgu... Niemniej droga

---

[1] W tym sensie, że dowolną liczbę naturalną można, w sposób *jednoznaczny*, rozłożyć na iloczyn czynników pierwszych.

[2] Polski fizyk matematyczny z Uniwersytetu Wrocławskiego, Marek Wolf, pokazał ostatnio w eksperymentach numerycznych, że istnieją jednak pewne subtelne okresowości w pojawianiu się bardzo dużych liczb pierwszych (fenomen tzw. *jumping champions*) .

taka bywa często pożyteczna. Zawsze przecież można powiedzieć: Zanim przejdę do poważnych, ścisłych rozważań, pobawię się trochę numerycznie, w celu wyrobienia sobie intuicji.

A oto wynik takich rachunków: części urojone liczb zespolonych, w których zeta przyjmuje wartość zero (liczby te powszechnie nazywa się prostu „zerami”):

Numer zera	**Część urojona zera**
1	14.13472514173...
2	21.02203963877...
3	25.01085758015...
4	30.42487612586...
...	...
10	49.77383247767...
10^2	236.524229666...
10^3	1419.422480946...
10^4	9877.782654004...
10^5	74 920.827498994...
10^6	600 269.677012445...
10^{22}	1 370 919 909 931 995 308 226.627511...

Jak stwierdzono numerycznie, aż do zera o numerze 1,500,000,000 ich części rzeczywiste są wszystkie równe *dokładnie* 1 / 2. Że tak będzie dla *wszystkich* zer, tego wciąż nie wiemy. Riemann w swej sławnej hipotezie postulował, że istotnie tak jest.

Nieskończony ciąg tych tajemniczych liczb, o których wiemy bardzo niewiele, z których każda jest (prawdopodobnie) liczbą przestępną, czyli nie jest rozwiązaniem równania algebraicznego, zdradza jednak głębokie korelacje. Są one natury statystycznej. Jest rzeczą zdumiewającą, że identyczne prawidłowości występują w poziomach energetycznych skomplikowanych jąder atomowych. Jest to z pewnością bardzo głęboka wskazówka na temat związków najczystszej matematyki z żywą fizyką doświadczalną. Ponieważ wspomniane prawidłowości są nader szczególne, przypadek zatem nie wchodzi zapewne w rachubę[3].

Czy zatem wynika stąd, że funkcja zeta, niby abstrakcyjna moneta ma dwie pozornie różne strony: jedną teorioliczbową, a drugą kwantową? Najwyraźniej tak. W przeciwnym bowiem przypadku byłaby to autentyczna złośliwość w strukturze wszechświata i praw, które nim rządzą. A przecież Stwórca, według sławnej sentencji Einsteina, choć wyrafinowany, nie jest jednak złośliwy.

CZTERY WCIELENIA FUNKCJI ZETA RIEMANNA

Dotychczas funkcja ta pojawiła się w czterech co najmniej, nader różnych wcieleniach, reprezentacjach. Każde z nich odkrył i badał ktoś inny: Euler, Dirichlet, Hadamard. Genialny Riemann wyciągnął wnioski z tego, co dzieje się na granicy tych wcieleń. Miał już wtedy do dyspozycji aparat analizy zespolonej oraz coś, co jest słabą stroną i zmorą studentów nauk ścisłych: fenomenalną zdolność do całkowania.

Znajomość poniższych formuł nie jest konieczna do zrozumienia istoty problemu: można je traktować jako symboliczne hieroglify.

Wcielenie pierwsze: definicja, szczególny szereg Dirichleta

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

---

[3]Rekord w tych eksperymentach należy do Andrew Odlyzko, matematyka polskiego pochodzenia z AT&T Labs, obecnie Minnesota University. Korzystając z własnego algorytmu, obliczył on wartość zera o numerze kolejnym 10 22 (!) oraz kilku milionów zer sąsiednich. Obliczenia te — a właściwie eksperymenty numeryczne — to prawdziwa sztuka wymagająca skrajnej biegłości zarówno w teorii liczb, jak i w programowaniu komputerów.

Statystyki rozkładu takich wysokich zer są identyczne z tzw. statystykami GUE (ang. *Grand Unified Ensemble*) , którym podlegają poziomy energii ciężkich jąder atomowych. Trzeba podkreślić, że Odlyzko nie natknął się na żaden kontrprzykład dla hipotezy Riemanna. Heurystyczne (i nader niepewne) oszacowania sugerują jednak, że kontrprzykład taki — o ile w ogóle istnieje — znajduje się daleko poza zasięgiem wszelkich komputerów.

Początki takiej reprezentacji zety giną w mrokach dziejów matematyki. Wiadomo, że wyrażenia szczególne typu

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

które dziś oznaczylibyśmy po prostu jako $\zeta(2)$, badał już w roku 1620 matematyk włoski, niejaki Pietro Mengoli (1625(6?)-1686). Być może spodziewał się, że skoro inna (pozornie tak podobna!) suma

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + ... = 1$$

posiada prostą oraz łatwą do policzenia wartość, to również i poprzednia powinna. W swej książce na temat szeregów Mengoli stwierdził szczerze: „Aby policzyć powyższą sumę, potrzebny jest intelekt [lepszy od mojego]”. Taki intelekt[4] pojawił się dopiero po z górą stu latach: w roku 1735 Leonhard Euler znalazł nieoczekiwany związek: $\zeta(2) = \pi^2/6$. Wynik ten nie jest bynajmniej oczywisty, bo, mówiąc wprost: co ma przysłowiowy piernik do wiatraka? Co ma wspólnego sumowanie odwrotności kwadratów liczb naturalnych z liczbą π, która „od urodzenia” wiąże się z kołem i trygonometrią?

Takie właśnie, nieoczekiwane przypadki, które łączą ze sobą pozornie odległe pojęcia, zwiastują zawsze jakiś przełom w zrozumieniu, jakiś drogowskaz dla dalszych poszukiwań.

Wcielenie drugie: iloczyn Eulera

$$\zeta s = \prod_p \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

Wskaźnik p przebiega po wszystkich liczbach pierwszych. Jest to reprezentacja absolutnie fundamentalna: związek zety z liczbami

[4]Choć Mengoli został dość szybko zapomniany, nie oznacza to, że jako matematyk nie był człowiekiem sukcesu: dowiódł rozbieżności szeregu harmonicznego Σ 1/ n ; dowiódł też, że naprzemienny szereg harmoniczny Σ (-1) n / n jest zbieżny do -ln(2). Napisał m.in. *Novae quadraturae arithmeticae* (1650). Interesował się także geometrią, astronomią a nawet teorią muzyki. Otrzymał święcenia kapłańskie i od roku 1860 aż do śmierci pracował w jednaj z parafii w Bolonii.

pierwszymi; stąd właśnie wynika ważność tej funkcji. Dowód tego, że jest to faktycznie zeta Riemanna jest zupełnie elementarny.

Wcielenie trzecie: iloczyn Hadamarda

$$\zeta(s) = f(s)\prod_i (1 - \frac{s}{\rho_i}).$$

Mniej efektowna, niż poprzednia, niemniej równie ważna reprezentacja zety: kompletna faktoryzacja szeregu Dirichleta, w której wszystkie zera $\rho\ i$ występują w sposób jawny. $f\ (s)$ to trywialny czynnik.

Wcielenie czwarte: reprezentacja całkowa

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1}\,dt.$$

Mniej czytelna w interpretacji niż poprzednie, niemniej i ta reprezentacja odegrała kluczową rolę w sławnej pracy Riemanna.

Jak już wspomniałem, Riemann wzniósł się ponad swych poprzedników. Ci bowiem rozważali funkcję zeta wyłącznie dla liczb rzeczywistych; on dokonał stosownego *przedłużenia analitycznego* na całą płaszczyznę zespoloną. Matematyk wie, co to oznacza. Zwykłym ludziom wystarczy powiedzieć, iż jest to procedura, która radykalnie poszerza horyzonty. Matematyk francuski Jacques Hadamard wyraził to jeszcze dobitniej:

„Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe.” („Najkrótsza droga pomiędzy dwiema prawdami w dziedzinie rzeczywistej prowadzi przez dziedzinę zespolona.”)

Co więcej, Riemann dostrzegł też niezwykłe związki *pomiędzy* wymienionymi wcieleniami funkcji zeta. Są to tzw. formuły bezpośrednie (ang. *explicit formulae*) wiążące wprost liczby pierwsze z zespolonymi zerami zety. Jedna z nich, w postaci, którą później badał von Mangoldt, ma postać:

$$\sum_{1<\nu<x} \Lambda(n) = x - \log(2\pi) - \frac{1}{2}\log(1 - \frac{1}{x^2}) - \sum_p \frac{x^p}{\rho}, \tag{$*$}$$

gdzie Λ (n) jest funkcją von Mangoldta. Zlicza ona liczby pierwsze oraz ich potęgi z wagą równą logarytmowi danej liczby pierwszej. Mniejsza o szczegóły techniczne: ważne jest to, że z lewej strony równości pojawiają się liczby pierwsze, z prawej zaś — zespolone zera zety. Po lewej mamy bardzo prostą funkcję schodkową: każdy taki schodek ma wysokość logarytmu naturalnego liczby pierwszej (2, 3, 5, 7,. ..) lub *podstawy* jej potęgi (4, 8, 9, 16, 25,. ..). Liczby złożone, np. $6 = 2 \cdot 3$ czy $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ są ignorowane. Natomiast po stronie prawej, z pozornego chaosu zespolonych zer, wskutek jakiejś niepojętej interferencji, stopniowo wyłania się dokładnie ta sama funkcja schodkowa.

W internecie można znaleźć efektowną animację tej interferencji[5] . Odtworzyłem ją sam za pomocą programu *Mathematica* i nie ukrywam, że często, wciąż z tym samym zdumieniem, kontempluję szczegóły tej niepojętej interferencji. Wiem, że jest to jakaś obiektywna prawda o naszym świecie, prawda nie mniej fascynująca niż pierwotny wielki wybuch, odległe galaktyki czy struktura DNA — a o ileż bardziej subtelna i przez to ukryta dla oczu goniących za pustą sensacją współczesnych ludzi.

Angielski fizyk-teoretyk Michael Berry wyraził to bardziej poetycko: „Liczby pierwsze zawierają w sobie muzykę”. Wbrew pozorom, jest w tym więcej precyzyjnej prawdy matematycznej, niż mglistej poezji. Znane dobrze wszystkim liczby pierwsze istotnie są „akordami” utworzonymi z dźwięków elementarnych — zer zety Riemanna. Te ostatnie byłyby zatem czyś bardziej fundamentalnym, niż — zdawałoby się proste — liczby pierwsze.

Dlaczego więc w naszej niezdarnej, antropocentrycznej percepcji odczuwamy coś dokładnie przeciwnego? Dlaczego pozornie „łatwe” liczby pierwsze (ang. *prime* = główny, podstawowy) pojawiają się już w początkach nauczania arytmetyki, natomiast „skomplikowane” zespolone zera zety wyłącznie w uniwersyteckich kursach specjalistycznych?

[5]Na bardzo profesjonalnie zrobionej stronie poświęconej popularyzacji wszelkich aspektów funkcji zeta: http://www.maths.ex.ac.uk/~mwatkins/zeta/

Ilustracja formuły von Mangoldta

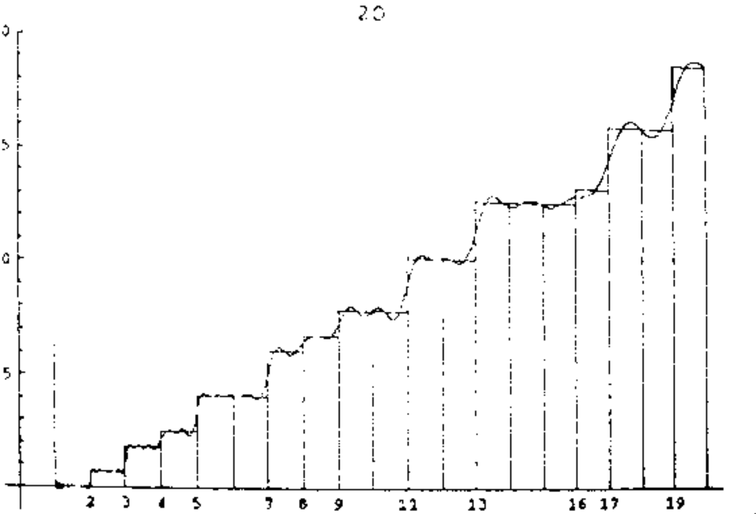
liczby pierwsze — „prosto” zdefiniowane, lecz wtórne matematycznie:

$$2, 3, 3^2.5.7.2^3, 3^2, ...$$

zespolone zera zety — „trudne” w percepcji, lecz bardziej fundamentalne

$$\frac{1}{2} + i \cdot 14,134625...$$

$$\frac{1}{2} + i \cdot 21.022039...$$



Graficzna ilustracja formuły von Mangoldta. Na dolnej osi wyróżniono początkowe liczby pierwsze p i ich potęgi p n. W liczbach tych schodkowa funkcja von Mangoldta doznaje skoków o wartość ln (p) . Linia falista przedstawia prawą stronę równania (*) dla 20 początkowych zer zety. Widać, że linia ta odtwarza funkcję von Mangoldta — tym lepiej, im więcej zer zostanie uwzględnionych.

Cóż możliwe, iż Stwórca wszechrzeczy chciał zostawić coś do zbadania nie tylko geniuszom na miarę Riemanna, ale też psychologom i filozofom matematyki.

LITERATURA

E.T. Bell, w: *Men of Mathematics*, rozdział XXVI: *Anima candida*, London 1937M.

V. Berry, J.P. Keating, *The Riemann Zeros and Eigenvalue Asymptotics*, SIAM Review, vol. 41, no 2, 1999A. Connes, *Trace formula in noncommutative Geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, preprint ESI 620.

A. Odlyzko, *The* 10^{22}*-nd zero of the Riemann zeta function*, AT&T preprint, 2000I. Steward, *Jumping Champions*, Scientific American, no. 12, 2000.

M. Wolf, informacja prywatna