Øystein Linnebo, *Philosophy of mathematics*, Princeton University Press, Princeton 2017, pp. 216, € 29.00, ISBN 978-0691161402

Filippo Mancini, Università degli Studi di Padova.

La matematica viene generalmente considerata uno degli ambiti più affidabili dell'intera impresa scientifica. Il suo successo e la sua solidità sono testimoniati, ad esempio, dall'uso imprescindibile che ne fanno le scienze empiriche e dall'accordo pressoché unanime con cui la comunità dei matematici delibera sulla validità di un nuovo risultato. Tuttavia, dal punto di vista filosofico la matematica rappresenta un *puzzle* tanto intrigante quanto intricato. *Philosophy of Mathematics* di Ø. Linnebo si propone di presentare e discutere le concezioni filosofiche della matematica che hanno dominato la scena da Frege ai giorni nostri.

In apertura, l'autore introduce le nozioni fondamentali di conoscenza *a priori*, di verità necessaria e di oggetto astratto, e presenta un'utile riduzione schematica della filosofia della matematica. Da una parte, la metafisica della matematica (da intendersi in un'accezione che comprende anche l'ontologia) indaga se vi siano o meno oggetti matematici e la loro natura; dall'altra, l'epistemologia della matematica cerca di comprenderne i processi conoscitivi e lo statuto delle sue conoscenze. Da questo quadro emerge la sfida che la matematica rappresenta per la filosofia (denominata *the integration challenge*): formulare una teoria metafisica e una epistemologica che siano non solo consistenti di per sé, ma che possano integrarsi l'una con l'altra.

La prima posizione filosofica discussa da Linnebo è quella fregeana. I punti cardine del pensiero di Frege sono due: il platonismo e il logicismo. Il platonismo corrisponde alla concezione secondo cui esistono oggetti matematici e tali oggetti sono astratti e indipendenti dalla nostra capacità di concepirli. Il logicismo è la tesi secondo cui è possibile derivare tutte le verità dell'aritmetica da sole leggi logiche. Frege difende la posizione platonista muovendo dall'oggettività della matematica: siccome gli enunciati della matematica sono oggettivamente veri, allora i termini singolari che occorrono in essi designano oggetti. La tesi logicista è, invece, difesa col teorema di Frege, che il matematico tedesco deriva partendo dalla sfortunata assunzione denominata *Basic Law V*, dimostrata inconsistente con la scoperta del paradosso di Russell.

A seguire, Linnebo dedica ampio spazio alla concezione della matematica nota come *formalismo*. Vi sono due versioni dell'approccio formalista: il *game formalism* e il *term formalism*. Il *game formalism* svuota del tutto la matematica di qualsiasi valore semantico, riducendola a pura sintassi. Il *term formalism*, invece, concede che i simboli del linguaggio matematico abbiano un riferimento, ma che tale riferimento sia nient'altro che il suo stesso segno, così da ridurre la semantica a mera sintassi. I problemi che le concezioni formaliste – compresa quella di Hilbert, definita da Linnebo come "il più sofisticato sviluppo della concezione formalista" (p.56) – devono affrontare sono onerosi. Quello che ne decretò la fine è legato al secondo teorema di incompletezza di Gödel: il più importante requisito che i formalisti sembrano richiedere ai sistemi formali studiati dai matematici è la consistenza, ma questo teorema nega la possibilità che essa venga stabilita internamente al sistema stesso. Per questa ragione, i programmi formalisti vennero abbandonati.

Dopo il formalismo, l'analisi dell'autore si sposta sull'*intuizionismo*. Si tratta di una concezione antirealista, sviluppata dal matematico L. Brouwer. Linnebo racchiude l'idea alla base dell'intuizionismo nello slogan "essere è essere costruito" (p.76), riferito agli oggetti matematici. Tale visione implica la dipendenza dell'oggetto matematico dall'esistenza e dalla capacità di costruzione del soggetto che lo concepisce, così da risultare in radicale opposizione al platonismo. Da questa assunzione di fondo, l'intuizionismo sviluppa una logica propria, basata su una semantica fondata sulla nozione di prova anziché su quella di verità. Segue che la logica intuizionista, e di conseguenza la matematica intuizionista, differiscono notevolmente da quelle classiche.

Linnebo prosegue occupandosi delle concezioni empiriste della matematica di J. S. Mill e di W. V. Quine. L'autore sottolinea come la matematica rappresenti da sempre un problema per gli empiristi. Le strategie adottate per farvi fronte sono essenzialmente due. La prima: ritenere che la matematica sia effettivamente *a priori*, pur negando che essa costituisca un autentico controesempio all'empirismo. La seconda: affermare che la matematica sia *a posteriori*. Tra le due, questa seconda strada è quella meno battuta, e il tentativo più rilevante di percorrerla è quello di Quine. Egli elabora una nuova forma di conferma, che prende il nome di *olismo della conferma*. Secondo tale visione, non sono il singolo enunciato o la singola teoria ad affrontare il "tribunale dell'esperienza", ma l'intera scienza. La conferma empirica della matematica è, allora, olistica, indiretta e mediata dalle parti della scienza empirica che fanno ricorso ad essa. Tuttavia, anche in questo caso non mancano problemi. Ad esempio, la concezione di Quine non sembra riuscire a dar conto dell'ovvietà della matematica elementare: le credenze matematiche di base, come 2 + 2 = 4, sembrano godere di uno statuto epistemologico diverso da quello delle credenze matematiche più complesse, in virtù del quale la loro giustificazione appare essere più diretta.

Segue l'analisi del *nominalismo*. Linnebo presenta questa concezione filosofica introducendo il dilemma messo in evidenza da P. Benacerraf, che richiama la *integration challenge* discussa in precedenza. Tale dilemma consiste nel conflitto che si instaura tra due *desiderata*. Da una parte, il filosofo desidera una semantica plausibile per il linguaggio della matematica. A questo riguardo, l'analisi di tale linguaggio è stata tipicamente condotta facendo ricorso alla semantica standard. In questo paradigma semantico, la mancanza di un riferimento priva di senso l'intero enunciato in cui occorre il termine "vuoto". Dall'altra, il filosofo desidera un resoconto epistemologico plausibile per la matematica. Tale resoconto deve essere capace di dar conto del fatto che il modo con cui ci formiamo credenze matematiche non conduce accidentalmente a verità, ma vi è una ragione che rende epistemologicamente affidabile questo metodo. La questione relativa a questo secondo ambito di indagine filosofica è, dunque, quale sia questa ragione. Seguendo Benacerraf, il conflitto sarebbe il seguente: il primo *desideratum* tende a condurci verso la visione realista, secondo cui esistono oggetti matematici astratti, mentre il secondo sembra richiedere una connessione causale tra questi oggetti e il matematico. Ma, poiché astratti, tali oggetti non intrattengono alcuna relazione causale col soggetto, da cui l'incompatibilità delle due richieste. Da essa seguirebbe la necessità di scegliere quale dei due corni del dilemma salvare a discapito dell'altro. Il primo corno può essere abbandonato in tre modi: la prima opzione è quella di negare che la nozione di verità si applichi agli enunciati matematici; la seconda è negare che gli enunciati matematici possano essere analizzati con la semantica standard; la terza è negare che gli oggetti della matematica siano astratti. Quest'ultima strada è la più esplicita manifestazione della concezione nominalista, secondo cui, appunto, non esistono oggetti astratti. Il secondo corno può essere anch'esso abbandonato in diversi modi: una possibilità consiste nell'abbracciare l'olismo della conferma, in modo da rendere superflua l'esistenza di una connessione diretta tra conoscente e conosciuto, quando questo sia il contenuto di un singolo enunciato; una seconda opzione – quella preferita da Linnebo – è negare che tutte le forme di conoscenza debbano essere vincolate ad una qualche forma di connessione causale.

Ampio spazio viene riservato all'analisi della strategia nominalista di H. Field. La sua idea è quella di mostrare come tutte le scienze possano "continuare a funzionare" senza fare ricorso ai presunti oggetti matematici, così da dimostrare come questi siano solamente utili espedienti puramente linguistici. Per far questo sono necessari due passaggi: nominalizzare tutte le teorie scientifiche, riformulandole in un linguaggio che non si impegni ontologicamente rispetto alle entità astratte, e mostrare che la matematica platonista è conservativa sotto tale riformulazione (ovvero, che la relazione di deducibilità tra le formule in ciascuno dei due sistemi, quello platonista e quello nominalista, è invariante rispetto alla riformulazione). L'impresa di Field è impegnativa e, per quanto i suoi sforzi siano notevoli, rimangono diverse controversie legate sia al primo che al secondo dei due citati passaggi.

L'ultimo importante approccio filosofico analizzato da Linnebo è lo *strutturalismo*. Questa visione filosofica pone al centro della matematica la nozione di struttura astratta, ritenendo che il lavoro del matematico consista esclusivamente nella caratterizzazione delle diverse tipologie di strutture matematiche (o *patterns*), a prescindere dalle loro molteplici realizzazioni. ("[…] si dice che due sistemi istanziano la stessa struttura se sono isomorfi" (p.155).) Esistono due forme differenti di strutturalismo. Da una parte, lo *strutturalimo eliminativista* riconosce l'utilità euristica della nozione di struttura astratta, ma non si impegna ontologicamente rispetto a tali strutture. Dall'altra, lo *strutturalismo non-eliminativista* considera i *patterns* come reali oggetti matematici.

Infine, Linnebo affronta la questione della ricerca di nuovi assiomi. Grazie a Gödel sappiamo che, dato un sistema formale sufficientemente potente, vi sono enunciati indecidibili, ovvero che non possono essere dimostrati né veri né falsi a partire dai soli assiomi del sistema. Un esempio famoso è rappresentato dall'*ipotesi del continuo* di Cantor (CH), che oggi sappiamo essere un enunciato indecidibile nella teoria standard degli insiemi. Una questione importante che segue da queste considerazioni è la seguente: dovremmo abbandonare la ricerca della prova di CH, oppure dovremmo continuarla costruendo sistemi formali dotati di nuovi assiomi in cui CH risulti decidibile? Ora, se la decidibilità di una proposizione matematica dipende dalla base assiomatica del sistema formale che consideriamo, la domanda precedente trova risposta se siamo in grado di individuare delle evidenze per mezzo delle quali poter giudicare quando un insieme di assiomi è migliore di un altro. A tal proposito, Linnebo si definisce *gradualista* e *pluralista*. Con "gradualismo" si intende la tesi secondo cui le evidenze a favore di una teoria matematica possono avere pesi diversi; con "pluralismo" si intende la tesi secondo cui le evidenze a cui ricorre il matematico non sono tutte dello stesso genere. A questo riguardo, Linnebo le suddivide in due categorie: quelle *intrinseche* e quelle *estrinseche.* L'evidenza intrinseca è quella che scaturisce dall'intuizione, da intendersi come una sorta di apprensione intellettuale tale da guidarci nella direzione delle verità concettuali. L'evidenza estrinseca consiste, invece, negli effetti che scaturiscono da una certa scelta di assiomi. Un assioma non intuitivo può finire comunque per imporsi in virtù, ad esempio, dei teoremi che permette di derivare, delle spiegazioni che offre di altre proposizioni matematiche, o del grado di sistematicità che riesce a conferire al sistema formale.

In conclusione, *Philosophy of Mathematics* è un libro di straordinaria chiarezza e completezza. I meriti di Linnebo sono numerosi. Anzitutto, la capacità di individuare e presentare in modo sintetico ma perspicuo i passaggi fondamentali del dibattito sulle tematiche dirimenti della filosofia della matematica; secondo, lo sforzo di tradurre questioni di natura tecnica in un linguaggio comprensibile anche ai non specialisti; terzo, l’aver fornito i riferimenti bibliografici più significativi per approfondire ulteriormente il tema affrontato alla fine di ogni capitolo; quarto, l’aver saputo adottare un commento critico e sempre equo delle diverse posizioni filosofiche prese in analisi.