Philosophiques

Heinzmann, Gerhard, Éditeur, *Poincaré, Russell, Zemerlo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1986, 332 p.

Mathieu Marion

Volume 18, numéro 1, printemps 1991

URI : https://id.erudit.org/iderudit/027148ar
DOI : https://doi.org/10.7202/027148ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Société de philosophie du Québec

ISSN

0316-2923 (imprimé)
1492-1391 (numérique)

Découvrir la revue

Citer ce compte rendu

Marion, M. (1991). Compte rendu de [Heinzmann, Gerhard, Éditeur, *Poincaré, Russell, Zemerlo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité*, Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1986, 332 p.] *Philosophiques*, *18*(1), 184–188. https://doi.org/10.7202/027148ar

HEINZMANN, GERHARD, ÉDITEUR, ***Poincaré, Russell, Zemerlo et Peano. Textes de la discussion (1906-1912) sur les fondements des mathématiques : des antinomies à la prédicativité***, Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1986, 332 p.

par Mathieu Marion

Volume compagnon de l'étude de Gerhard Heinzmann sur la philosophie des mathématiques d'Henri Poincaré intitulée *Entre intuition et analyse. Poincaré et le concept de prédicativité* (Paris, Blanchard, 1985), ce livre est un recueil des principaux écrits de la polémique sur les fondements des mathématiques qu'a provoqué un long article de Poincaré lui-même, paru dans la *Revue de métaphysique et de morale* (RMM) en 1905-6. Comme le titre l'indique, on y retrouve des textes de Poincaré, bien sûr, mais aussi de Bertrand Russell, Ernst Zermelo et Giuseppe Peano. Ceux-ci sont reproduits selon leurs premières éditions. Cette politique a l'avantage de réduire le coût de production de l'ouvrage et rend disponible au chercheur sous un seul couvert des textes classiques, auquel il a accès dans leur version originale. Ce qui n'est pas évident dans certains cas, comme pour l'article de Russell intitulé « Le réalisme analytique », merveille de concision, où Russell expose les grandes lignes de sa philosophie — l'atomisme logique — à l'époque de la publication des *Principia Mathematica* (PM). A ce chapitre, il faut mentionner que le recueil contient une lettre inédite de Poincaré à Zermelo (p. 105). Le défaut de cette politique, outre le fait que la qualité esthétique de l'ensemble souffre beaucoup — en particulier lorsqu'on reproduit sur la même page les variantes du texte de Poincaré de 1905-6, « Les mathématiques et la logique » — c'est que le lecteur doit maîtriser quatre langues, soit le français, l'anglais, l'allemand et... le *latino sine flexione*, la langue universelle qu'a développé Peano, et sur laquelle il fondait de grands espoirs. Heureusement, la compréhension en est plutôt facile pour le locuteur de langue française. Il ne sera pas question ici d'épuiser la matière de ces textes fondamentaux, mais d'en relever certains des aspects les plus féconds.

Les textes choisis ont pour thème principal le concept de prédicativité, associé au nom de Poincaré. Cependant, dans « Les mathématiques et la logique » Poincaré s'en prend tout d'abord à la métathématique de Hilbert, qu'il qualifie de tentative de replâtrage, et aux prétentions du logicisme de Russell et Couturat, lorsque ceux-ci prétendent éviter tout recours à l'intuition. Poincaré a adopté et toujours défendu un point de vue kantien selon lequel le principe d'induction complète en mathématique était un jugement synthétique *a priori*. Il ne pouvait donc pas accepter les conclusions anti-kantiennes des logicistes, en particulier celles de Couturat qui publiait en 1904 un article condamnant sévèrement Kant dans la RMM.

Le premier argument de Poincaré est d'indiquer qu'afin de prouver la non-contradiction des axiomes de Peano, on doit faire appel à l'induction complète (p. 33). Hilbert fut particulièrement sensible à cet argument, puisque Poincaré lui reprochait d'avoir besoin dans sa métamathématique d'une forme d'induction afin de justifier l'usage de l'induction complète dans l'arithmétique naïve, et que la première forme d'induction ne pouvait pas être plus faible que la seconde. La réponse de Hilbert fut d'insister sur l'obtention d'une preuve de consistance finitaire, usant d'une « récurrence qui s'arrête dans le fini », pour reprendre le mot de Jacques Herbrand. Certains ont vu dans le second théorème de Gödel la confirmation de la critique de Poincaré : la métamathématique doit utiliser une forme d'induction plus forte (c'est ici qu'entrera en scène la ω-rule avec Tarski et Gentzen).

Poincaré se contentait de ne voir tout bonnement dans les antinomies ou paradoxes de la théorie des ensembles, ceux de Burali-Forti, Richard, et bien entendu celui de Russell-Zemerlo, l'indication d'un défaut majeur de l'approche ensembliste. Partisan d'une approche génétique, il n'a jamais accepté l'approche pour laquelle « l'infini préexiste au fini » et « le fini s'obtient en découpant un petit morceau dans l'infini » (p. 306). Mais au même moment, Russell et Zermelo cherchaient activement une solution pour rescaper la théorie des ensembles. Russell proposait dans un article de 1906, « On some difficulties in the Theory of Transfinite Numbers and Order Types » (pp. 54-78) trois solutions, soit la « zigzag theory », la « theory of limitation of size » et la « no classes theory ». Russell penchera un temps pour la dernière, Zermelo optera pour la deuxième.

Poincaré parlait déjà de « cercle vicieux » à propos des tentatives de sauvetage initiées par Hilbert (p. 45). Mais lorsque Russell introduit dans son article de 1906 la notion de fonction propositionnelle « non-prédicative » — une fonction est dite prédicative si elle définit une classe, sinon elle est dite non-prédicative (p. 59) — Poincaré lui répond que « les définitions qui doivent être regardées comme non-prédicatives sont celles qui contiennent un cercle vicieux » (p. 94). Russell formule par la suite son principe du cercle vicieux, cause des paradoxes ensemblistes selon lui : « Tout ce qui contient une variable apparente ne doit pas être une des valeurs possibles de cette variable » (p. 128). Russell fera de ce principe la pierre angulaire de sa fameuse théorie des types, dont témoignent dans ce recueil un extrait de l'important article de 1908, « Mathematical Logic as based on the Theory of Types » (pp. 200-23) ; et un article paru dans la RMM « La théorie des types logiques » (pp. 257-95), qui sera repris de façon modifiée dans l'introduction à PM. L'échec de la théorie des types (simples ou ramifiés) est chose connue : le manque d'évidence de l'axiome de réductibilité, que Russell lui-même reconnaît (p. 293), ainsi que son caractère non logique, qu'il partage avec l'axiome de l'infini provoqueront l'abandon de cette approche.

Poincaré faisait dès 1905-6 le reproche de circularité aux définitions logicistes des nombres naturels. De façon assez surprenante, il ne s'en prend jamais aux définitions classiques de R. Dedekind et G. Frege. Cette dernière est de la forme :

$$N =_{df} \bigcap \{X \mid (0 \in X) \wedge [(\forall x)\ ((x \in X) \wedge (y\ S\ x)) \rightarrow (y \in X)]\}$$

En 1905-6, il s'en pris plutôt à une définition donnée par A. N. Whitehead, dans un article qui préfigurait le monumental PM (« On Cardinal Numbers », *American Journal of Mathematics*, Vol. 24, pp. 366-394). Pour Poincaré la définition donnée par Whitehead des nombres inductifs est circulaire, donc imprédicative, car elle fait appel à la notion de classe inductive, qui elle-même fait appel à la notion de nombre inductif. Cette critique sera étendue aux définitions de Dedekind et Frege par Hermann Weyl dans **Das Kontinuum**, en 1918 et dans de nombreux articles par la suite. En effet, il devient évident que la définition frégéenne que nous avons donnée est circulaire puisqu'on définit l'ensemble de nombre naturels par *l'intersection de tous* les ensembles héréditaires auxquels appartient 0 et le successeeur de x si x leur appartient. La totalité à définir est présupposée dans la définition.

Le fait que les définitions 90.163, *90.164 et la preuve *90.31 de la première édition de PM s'avérèrent circulaires — un reproche fait par L. Wittgenstein dans le **Tractatus Logico-Philosophicus**, section 4.1273 — a obligé Russell à publier un appendice (l'appendice B) à la seconde édition, où la notion de nombre naturel est définie à partir de $\in$ et $=$. On sait depuis que cette ultime tentative d'une définition prédicative est un échec (voir Myhill, J., « The Undefinability of the Set of Natural Numbers in the Ramified *Principia* » in Nakhnikian, G., (ed.), *Bertrand Russell's Philosophy*, Londres, Duckworth, 1974, pp. 19-27). Notons en passant que la recherche d'une définition des nombres naturels dans le style de Frege continue de nos jours, avec en particulier une discussion autour de la variante proposée par M. Dummett :

$$Ny =_{df} (\forall a)[(0 \in a \wedge (\forall x)\ (x \neq y \rightarrow Sx \in a) \rightarrow y \in a] \rightarrow (\exists a)\ (0 \in a \rightarrow (\forall x)\ (x \neq y \rightarrow Sx \in a)),$$

une telle définition pouvant être décrite comme prédicative si les variables portent sur des ensembles finis. (Voir, par exemple : George, A., « The Imprecision of Impredicativity », *Mind*, Vol. 96 (1987), pp. 514-518 ; et Parsons, C., « Developping Arithmetic in Set Theory without Infinity : Some Historical Remarks », *History and Philosophy of Logic*, Vol. 8 (1987), pp. 210-213).

À propos du principe d'induction mathématique, on notera que Poincaré remarquait déjà qu'il ne correspond pas à la descente infinie de Fermat (p. 88). Ce principe, utilisé fréquemment en théorie des nombres, est classiquement équivalent au principe du plus petit nombre et donc à l'induction complète, mais un tel raisonnement n'est pas acceptable pour les constructivistes (voir à ce sujet : Gauthier, Y., « Finite

Arithmetic with Infinite Descent», *Dialectica*, Vol. 43 (1989), pp. 329-337).

Tandis que Russell optait pour la théorie des types, Zermelo développait dans «Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I» (pp. 179-199) une approche axiomatique, où grâce à son axiome de séparation (*Axiom der Aussonderung* (p. 181)) il réussit à éliminer la source du paradoxe de Russell-Zermelo en limitant la grandeur de la théorie, c'est-à-dire en évitant de postuler des ensembles fautifs tels que l'ensemble de tous les ensembles de Frege. Ce texte est à l'origine de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel à laquelle souscrivent la majorité des mathématiciens de nos jours.

Les articles de Zermelo font ressortir le débat sur l'axiome du choix. En fait le théorème du bon ordre, dont la seconde preuve (p. 157-61) — qui utilise la notion de «Θ-Ketten» dérivée de celle de Dedekind — nous est présentée dans son article «Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung» (p. 157-78), est lui-même un équivalent de cet axiome douteux. Voilà pourquoi les deux preuves de Zermelo ont suscité une telle polémique, notamment en France, où E. Borel, H. Lebesgue et R. Baire ont pris position contre. Mais la plupart des mathématiciens de l'époque ont préféré s'abstenir de tout jugement. C'est l'attitude de Peano : «Opinione nostro es indifferente» (p. 111). C'est aussi l'attitude qu'adoptent Whitehead et Russell dans PM.

Ce débat aura eu pour mérite de dégager une notion, celle de prédicativité, qui préoccupe toujours les chercheurs contemporains. Le prédicativisme initié par Poincaré fut mis en forme par H. Weyl dans **Das Kontinuum**, en utilisant un système apparenté à la théorie des types ramifiés, et fut poursuivi par la suite à divers degrés de fidélité par P. Lorenzen, K. Schütte et S. Feferman, ce dernier démontrant récemment la viabilité du programme en montrant que toutes les mathématiques nécessaires à la physique peuvent être formalisées dans sa propre théorie W, issue de celle de Weyl (Feferman, S., «Infinity in Mathematics : Is Cantor Necessary?», in Toraldo di Francia, G., ed., *L'infinito nella scienza?/Infinity in Science*, Rome, Enciclopedia Italiana, pp. 151-210). Cependant, entre les protagonistes de ce débat les différences étaient irréconciliables, et la discussion devint vite un dialogue de sourds. On prendra comme exemple la défense par Zermelo de sa deuxième preuve du théorème du bon-ordre contre le reproche d'imprédicativité, qui s'achève sur ces mots : «... und die Befolgung der Poincaréschen Forderung würde jede definition und damit jede Wissenschaft unmöglich machen» [... et le strict respect du réquisit de Poincaré aurait pour effet de rendre impossible toute définition et par ce fait toute science] (p. 168) ! Un prédicativiste pourrait répliquer en disant : avec les largesses permises par Zermelo *tout* est en effet possible ! Le mot de la fin appartient à Poincaré : «Les hommes ne s'entendent pas parce qu'ils ne parlent pas la même langue et qu'il y a des langues qui ne s'apprennent pas» (p. 315).

Le choix des textes par G. Heinzmann est judicieux, malgré qu'on doit déplorer l'absence de textes de Louis Couturat, le défenseur des idées de Russell en France — auquel s'adresse directement Poincaré dans ses textes — ou encore de l'Italien Mario Pieri. Mais de tels ajouts n'apporteraient peut-être pas de nouveaux éléments essentiels à la discussion et auraient pour effet d'allonger le texte indûment. Mais pourquoi, par exemple, ne pas avoir inclu le texte de Jules Richard («Les principes des mathématiques et le problème des ensembles», *Revue générale des sciences pures et appliquées*, Vol. 16, p. 541 ; ou «Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences», *Acta Mathematica*, Vol. 30, pp. 295-6) où il introduit son fameux paradoxe, puisque celui-ci est au centre de la discussion ? D'autre part, puisque le débat connexe sur l'axiome du choix prend une place importante dans l'ouvrage (en particulier dans les textes de Zermelo), pourquoi ne pas avoir publié un texte indiquant la réaction des mathématiciens français, telle la note d'Émile Borel intitulée «Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles» (*Mathematische Annalen*, Vol. 60, pp. 194-5) ? Ce sont deux textes très courts, mais instructifs.

C'est avec nostalgie que le lecteur parcourt ce recueil, où l'on voit par exemple Zermelo répondre en français et dans une revue de mathématiques prestigieuse, («Sur les ensembles finis et le principe de l'induction complète», *Acta Mathematica*, Vol. 32, pp. 185-193 ; ici pp. 148-156) aux critiques fondationnelles de Poincaré, parues dans la *Revue de métaphysique et de morale*. On ne peut pas ne pas remarquer, de nos jours, la presque complète disparition des intervenants de langue française dans ces débats fondationnels dont j'ai pris soin de mentionner qu'ils étaient toujours d'actualité. Certains s'en targueront peut-être, mais pour l'A. cette démission n'a pas de quoi rendre fier.

New College, Oxford