Philosophiques

La réflexion de Poincaré sur l’espace, dans l’histoire de la géométrie

Alain Michel

Volume 31, numéro 1, printemps 2004

Poincaré et la théorie de la connaissance

URI : https://id.erudit.org/iderudit/008935ar
DOI : https://doi.org/10.7202/008935ar

Aller au sommaire du numéro

Éditeur(s)

Société de philosophie du Québec

ISSN

0316-2923 (imprimé)
1492-1391 (numérique)

Découvrir la revue

Citer cet article

Michel, A. (2004). La réflexion de Poincaré sur l’espace, dans l’histoire de la géométrie. *Philosophiques*, *31*(1), 89–114. https://doi.org/10.7202/008935ar

Résumé de l'article

Les conceptions de Poincaré en matière de physique mathématique demandent à être mises en relation avec son travail mathématique. Ce qu’on a appelé son « conventionnalisme géométrique » est étroitement lié à ses premiers travaux mathématiques et à son intérêt pour la géométrie de Plücker et la théorie des groupes continus de Lie. Sa conception profonde de l’espace et son insertion dans un environnement post-kantien concourent à composer les traits d’une doctrine dont on a souvent sous-estimé l’originalité, dans ses différences avec celle de Riemann.

La réflexion de Poincaré sur l'espace, dans l'histoire de la géométrie

ALAIN MICHEL
CEPERC, CNRS, Université de Provence
amichel@fr.inter.net

RÉSUMÉ. — Les conceptions de Poincaré en matière de physique mathématique demandent à être mises en relation avec son travail mathématique. Ce qu'on a appelé son « conventionnalisme géométrique » est étroitement lié à ses premiers travaux mathématiques et à son intérêt pour la géométrie de Plücker et la théorie des groupes continus de Lie. Sa conception profonde de l'espace et son insertion dans un environnement post-kantien concourent à composer les traits d'une doctrine dont on a souvent sous-estimé l'originalité, dans ses différences avec celle de Riemann.

ABSTRACT. — It is necessary to link the philosophical conceptions of Poincaré to his mathematical work. What has been named his « geometrical conventionalism » is closely tied to his first mathematical works and to his interest in Plücker's geometry and in the theory of continuous groups of Lie. His profound conception of space and the immersion in the post-Kantian tradition are the specific features of a doctrine greatly original, different in many respects from the Riemannian doctrine.

Introduction

Dans ce qu'il est convenu d'appeler sa « philosophie » de l'espace et de la géométrie, Poincaré a traité trois grands types de problèmes, qui consistent à chercher l'explication de trois grands ordres de faits : l'applicabilité des différentes géométries, euclidienne et non euclidiennes, à notre espace ; les origines de nos idées fondamentales de l'espace et de la géométrie ; le statut de l'énoncé-croyance usuel que notre espace a trois dimensions[1]. Il s'est prononcé simultanément sur chacun de ces points, et il est assez difficile de les séparer si l'on veut respecter la cohérence de sa pensée. C'est la première exigence. Mais cela ne veut pas dire que cette pensée soit restée fixe ou stable. Poincaré était tout sauf un dogmatique. S'il écrivait apparemment d'un seul jet et sans se relire ni raturer, il n'hésitait pas à reprendre ses analyses et à réviser ses vues chaque fois que, entre temps, des critiques lui étaient apparues légitimes, ou que de nouvelles théories, ou même de nouvelles expériences, lui donnaient l'occasion de les rectifier, à tout le moins de les reformuler. C'est ainsi qu'on le voit revenir, à intervalles quasiment réguliers, sur certaines questions, jusqu'à la fin de sa vie. Un

1. Nous empruntons cet excellent résumé à Dale M Johnson, *The Problem of Invariance of Dimension in the Growth of Modern Topology*, II, Archive for History of Exact Sciences, n° 25, 1981, p. 86.

bon exemple est celui de la question des dimensions de l'espace, pièce maîtresse de son épistémologie de l'espace, qu'il traite successivement en 1898, 1903, et 1912[2]. Il est donc légitime de se proposer de restituer les grandes lignes de ce qu'on peut supposer avoir été sa genèse.

Précisons immédiatement que, s'il s'agit bien de situer la formation des idées de Poincaré dans l'histoire de la géométrie, il n'est pas question pour autant d'y dissoudre ses positions philosophiques, ni d'ailleurs de supposer qu'il avait une connaissance parfaite des œuvres de l'histoire. On sait par exemple qu'il n'a pris connaissance qu'assez tard de l'œuvre de certains mathématiciens, notamment allemands, qu'au demeurant ce qui était, dans certains cas, une complète ignorance ne l'a pas desservi — on pourrait même soutenir le contraire —, dans sa création mathématique. Il ne saurait y avoir, pour Poincaré, d'explication par l'histoire, au sens où il n'y a pas de raisons historiques aux choix de Poincaré, mais on peut attendre de l'histoire qu'elle nous éclaire sur le choix de ses raisons. Car il y avait plusieurs manières de faire ce choix.

Cette histoire est alors particulièrement riche, et l'œuvre de Poincaré s'appuie solidement sur l'ensemble des conquêtes majeures de la pensée géométrique de la deuxième moitié du XIX^e^ siècle. La plus grande partie tourne autour de la géométrie projective et des géométries non euclidiennes : fondation par Von Staudt de la géométrie projective dans son autonomie, relativement à la géométrie euclidienne classique, suggestion par Cayley de l'idée d'une métrique projective générale, susceptible de régler à la fois la géométrie euclidienne et les géométries non euclidiennes, formulation par Plücker de son principe d'équivalence, qui ne représente lui-même qu'un aspect du principe général de dualité de Poncelet et Gergonne, publication (en 1869) de la thèse d'habilitation de 1854 de Riemann (*Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*) qui affirme, entre autres, l'égalité de validité des trois géométries à courbure constante (euclidienne, hyperbolique, elliptique), premières réflexions sérieuses sur le fondement de la géométrie (après une tentative de Steiner) de Helmholtz, enfin et surtout, dominant le tout, le prodigieux développement de la théorie des groupes de transformations de Lie, dans lequel le fameux programme d'Erlangen de Klein, en 1872, ne fait somme toute, à la réflexion, que figure d'épisode, chargé après coup d'une valeur symbolique et d'une signification de paradigme.

---

2. Henri Poincaré, « On the Foundations of Geometry », *The Monist*, vol. V, n° 9, 1898-1899 (une traduction en français, par Louis Rougier, de la traduction anglaise de l'étude manuscrite originale qui s'était perdue, est parue ensuite *Des fondements de la géométrie*, Paris, 1921 ; voir aussi *La Science et l'hypothèse*, Paris, 1902, chap. V, « L'expérience et la géométrie », § VIII, supplément) ; « L'espace et ses 3 dimensions », *Revue de métaphysique et de morale*, 1903, vol. 11(voir aussi *La Valeur de la science*, Paris, 1905, chap. III (« La notion d'espace »), chap. IV (« L'espace et ses 3 dimensions ») ; « Pourquoi l'espace a 3 dimensions », *Revue de métaphysique et de morale*, n° 20, 1912 (voir aussi *Dernières Pensées*, Paris, 1913, chap. III).

Les traits primitifs de la doctrine, qui resteront fondamentaux, sont fixés dans les textes du premier recueil « philosophique » qu'il ait publié, *La Science et l'hypothèse*. On y trouve formulé, en des termes qui ne varieront guère, ce qu'on appelle communément son « conventionnalisme », un conventionnalisme que l'on qualifie souvent de « géométrique ». Illustré d'abord par l'interprétation du statut des axiomes de la géométrie, il est ensuite étendu aux principes de la physique, sans que Poincaré y inclue jamais les axiomes de l'arithmétique ni les lois de la physique, admettant, semble-t-il, pour l'analyse, une situation mixte (les théorèmes de l'analyse peuvent être des vérités synthétiques *a priori*). Cette doctrine trouve son point d'appui essentiel, et aussi quelques unes de ses insuffisances, dans la théorie des groupes de transformation de Sophus Lie, qui lui fournit en même temps les bases de son explication de la genèse de nos idées d'espace et de sa théorie du continu. C'est de là qu'il faut donc partir.

Dans les prises de position épistémologiques de Poincaré, il convient, nous semble-t-il, de distinguer deux sortes de raisons : les raisons de droit, qui sont de l'ordre des principes doctrinaux, les plus explicites, et les raisons de fait, qui sont de l'ordre de la pratique mathématique, plus cachées, demeurant le plus souvent implicites. Tentant de mettre en évidence ces dernières, nous ne pouvons nous dispenser de rappeler, à intervalles réguliers, celles des premières que nous estimons essentielles à sa doctrine. Il va de soi que nous ne prétendons pas en faire le tour, ni même nous prononcer sur les questions les plus importantes qu'elles soulèvent. Résumons donc d'abord les traits bien connus de son « conventionnalisme ».

1. Le « conventionnalisme géométrique » de Poincaré

C'est en premier lieu une réponse à un problème de *théorie de la connaissance* : quel est le statut épistémologique des géométries (en incluant *a priori* le cas éventuel d'une géométrie unique, donc de *la* géométrie), qui sont les plus étroitement reliables, ou applicables, à l'espace ?

D'abord Poincaré accepte la géométrie comme une science mathématique exacte, à ce titre partie de notre connaissance mathématique certaine. Aucune remise en cause n'est ici recevable. Les géométries jugées les plus capables de fournir une description de notre espace seront du même coup considérées comme exactes.

C'est ainsi que Poincaré n'a jamais eu le point de vue de la géométrie pure, abstraite. Il s'est défié des géométries très générales, développées dans des espaces abstraits, à la manière de Riemann. Le trait le rapproche de Klein : comme ce dernier, et la plupart des mathématiciens de son temps, Poincaré est soucieux d'application et de concret[3]. Élève d'Hermite, on le

3. Klein n'a jamais montré d'inclination à adopter un point de vue vraiment général. Par exemple, à propos des géométries non euclidiennes et le problème des formes d'espace, il

voit refuser les théories générales, celles qui sont forgées pour le plaisir d'inventer des théories générales, et adopter une attitude de prudence dans les exemples qu'il prend de ses théories les plus audacieuses, notamment en ce qui concerne les espaces à plusieurs dimensions. Soit l'exemple de son « théorème du retour » dans les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* : il commence par le démontrer dans le cas d'un liquide ordinaire dans l'espace usuel (à 3 dimensions), et ce n'est qu'ensuite, au prix de multiples précautions destinées à aider son lecteur par des raisonnements analogiques, qu'il étend le théorème à un espace à nombre quelconque de dimensions, pour l'appliquer finalement aux systèmes dynamiques généraux obéissant aux équations de Hamilton. C'était au demeurant déjà le cas, dans le même ouvrage, de sa théorie des invariants intégraux : « la représentation géométrique dont nous avons fait usage, y explique-t-il, ne joue évidemment aucun rôle essentiel ; nous pouvons la laisser de côté, et rien n'empêchera d'étendre les découvertes précédentes au cas où le nombre de variables est plus grand que 3 ».

Ainsi notera-t-on que la question de la relation de la géométrie à l'espace ne se pose, comme l'a remarqué Jules Vuillemin, que pour des espaces *concrets*, c'est-à-dire ici compatibles avec le déplacement d'une figure rigide (comme c'est le cas des espaces de Helmholtz-Lie), à défaut d'être empiriques, et non pour des espaces donnés abstraitement, c'est-à-dire par des formules analytiques. Pour de tels espaces, définis par des conditions purement analytiques, comme des formules en coordonnées, le conventionalisme apparaît comme un truisme. On peut naturellement choisir à sa guise le système de coordonnées, ainsi que les fonctions particulières qui expriment tel changement de coordonnées.

Du point de vue de Poincaré, l'expérience ne peut nous fournir une connaissance absolument certaine, car des résultats expérimentaux sont par nature toujours sujets à révision. Ainsi la géométrie, même restreinte à cette branche qui s'applique à notre espace, ne peut être une science empirique.

D'autre part les géométries applicables à notre espace doivent être *reliées à* la science empirique. La géométrie spatiale doit commencer avec

---

ne considère pas, à la différence de Killing, le problème de la détermination des structures de toutes les algèbres de Lie fini-dimensionnelles possibles. Il ne cherche pas à exhiber toutes les possibilités logiques. Il a eu le souci quasi exclusif de la pertinence *physique* de la géométrie non euclidienne, et ce trait est peut-être dû à l'influence de Plücker, qui a été professeur, non seulement de mathématiques, mais encore de physique expérimentale. Or, *physiquement*, selon lui, à la différence de Riemann qui a cru à l'intérêt physique du concept de variété à courbure variable (mais Klein considère que la contribution majeure de Riemann à la géométrie non euclidienne est le concept de variété à courbure constante), l'expérience semble exiger une variété à courbure constante. C'est toujours l'expérience qui délimite chez lui les possibilités géométriques : il ne montre pas d'intérêt pour un développement de la géométrie qui se situerait en dehors des bornes imposées par l'expérience.

l'expérience et être fondée dans l'expérience. S'il s'agit de géométrie spatiale, ce ne peut être de l'analyse pure.

D'où la question de fond : comment rendre compte de la relation entre la géométrie spatiale et l'expérience, étant donné la séparation instituée des mathématiques exactes, dont relève la géométrie, et de la connaissance empirique, inexacte ?

Il s'agit bien d'une question de théorie de la connaissance, qu'on peut interpréter, sans danger d'en fausser le sens, comme la mise en forme d'une question léguée par la doctrine kantienne. Celle-ci installe en effet à son point de départ la discontinuité entre l'intuition, comme donnée empirique à la source de l'expérience, et le concept, comme essence logique, au fondement de la pensée[4]. Mais Poincaré rejette la solution kantienne, de type rationaliste, fondée sur une forme *a priori* de notre sensibilité, comme incompatible avec l'égalité de statut qu'on doit reconnaître par ailleurs à toutes les géométries, qu'elles soient euclidiennes ou non euclidiennes. Au total, le conventionalisme géométrique se présente comme un *intermédiaire* entre l'empirisme géométrique, que Poincaré critique explicitement, et le rationalisme kantien, qui lui paraît à réformer. Entre ces deux pôles,

---

4. On se contentera de rappeler que Kant est parti de l'opposition tranchée entre *vérités de raison* et *vérités de fait* (selon la distinction de Leibniz), de leur radicale dissociation : d'un côté l'usage logique de la raison analytique, de l'autre l'expérience, qui lui est irréductible. Voir les écrits pré-critiques, *Recherche sur l'évidence des principes de la théologie naturelle et de la morale*, montrant qu'il y a une différence entre l'analyse abstraite des concepts en philosophie et le processus synthétique de la définition mathématique, *Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative,* exposant la distinction entre opposition logique et opposition réelle, et encore *De l'unique fondement possible d'une démonstration de l'existence de Dieu* (1763-1764), *De la forme et des principes du monde sensible et du monde intelligible* (dite « Dissertation de 1770 »), etc., tous écrits qui dénoncent l'*incompatibité* radicale de la tradition de la logique formelle avec les procédés féconds de la science rationnelle, la différence entre la fonction logique de la pensée dans le jugement, où le concept est analytique, discursif, non producteur, et sa fonction rationnelle dans les mathématiques ou la physique, qui est productrice et dynamique en raison de sa relation à l'intuition. Ce qu'il y a de fécond dans les procédés de la science ne peut venir de la logique, discipline formelle, fondée sur la subsomption des concepts, mais seulement de l'expérience, dont le donné intuitif est source de toute synthèse. On pourrait aller jusqu'à parler en général de mise en œuvre d'un *postulat de discontinuité* qui, tout en étant lié à des éléments doctrinaux très importants, tels que l'identification comme essentielle de la tâche d'avoir à isoler les éléments purs de la connaissance, le met en opposition flagrante avec Leibniz, pour lequel il n'y a partout, entre phénomène et chose en soi, entre sensibilité et entendement, qu'une différence de degré, non de nature, si bien que l'on passe insensiblement du premier au second. D'où la grande question de la quasi totalité des post-kantiens : n'y aurait-il pas, entre le réel et notre entendement, un « abîme » qui ne peut être comblé ? Et Kant n'est-il pas obligé d'admettre finalement un *hiatus*, selon sa propre expression dans la *Critique du jugement*, entre l'analogie universelle, constituée par les lois pures de l'entendement transcendantal, et les analogies particulières, ou empiriques, que sont les lois de nos sciences ? D'une certaine manière, Poincaré, qui était certainement informé de ces difficultés de la théorie kantienne (il était proche d'Emile Boutroux), répond à cette question.

Poincaré admet que l'établissement d'une relation précise entre expérience et géométrie spatiale est affaire de *conventions*. On impose une géométrie à notre espace par le moyen de conventions, bien que ce soit l'*expérience* qui nous guide dans le choix de ces différentes conventions. On choisit les conventions qui sont les plus appropriées à l'expérience, et on leur confère le statut de principes agréés, susceptible de les protéger d'une réfutation future. Les conventions ne sont pas empiriquement contrôlables, elles ne sont pas soumises à l'expérience, bien qu'on puisse toujours concevoir que, pour de bonnes raisons, notamment liées à l'expérience, on puisse remplacer une convention agréée par une autre.

La relation de la géométrie avec l'expérience s'établit donc sur la base d'un équilibre soigneusement délibéré.

L'expérience joue un rôle dans la création de la géométrie, et ce rôle est double : les concepts et les hypothèses géométriques proviennent de l'expérience, et justice est ainsi rendue à l'empirisme ; mais, du statut de généralisations empiriques idéalisées auquel ce dernier se borne ses prétentions, les hypothèses géométriques sont élevées au rang de principes conventionnels ou de conventions terminologiques, protégées dès lors de toute sanction par l'expérience. Dans les applications, par exemple dans notre choix d'un système de géométrie métrique, nous sommes guidés par certains critères comme la simplicité.

Tout cela ne suffit pas à faire de la géométrie une science empirique, et part doit être faite au rationalisme. La géométrie n'est pas ouverte à la réfutation par contrôles, ou « tests », expérimentaux. Elle est une science exacte, et on peut même aller jusqu'à dire, en ce sens, que ce sont les géométries les plus applicables à notre espace qui sont les plus exactes. C'est pour garantir cette exactitude que Poincaré exige la position d'un élément *a priori* — élément qui sera tout naturellement, dans un premier temps[5], le concept de groupe abstrait. Selon Poincaré, l'esprit a la capacité innée de construire des groupes continus, qui ne se limitent pas aux groupes euclidiens, et d'en appliquer quelques-uns à l'expérience. C'est cette partie *a priori* de notre entendement[6] qui garantit que la géométrie peut être exacte et certaine.

En bref, les conventions servent de *pont* entre la connaissance empirique inexacte et les mathématiques précises. De ce point de vue, l'épistémologie géométrique de Poincaré peut être présentée comme un essai de

5. Sans renoncer à cette vue, d'abord exclusive, Poincaré la complètera ensuite (notamment après ses travaux relatifs à l'*analysis situs*) par un second élément, l'intuition topologique des continus à plusieurs dimensions.

6. La conception de Poincaré diffère sur ce point de celle de Kant. Pour Poincaré, l'élément *a priori* qui est pertinent pour la géométrie spatiale se trouve dans l'entendement, alors que, pour Kant, il s'agit d'une forme de la sensibilité.

réconciliation, ou plutôt de position d'une médiation, entre la certitude mathématique et l'incertitude, ou la « faillibilité », de l'expérience.

Revenons un instant sur ces deux points : le rôle et les limites de l'expérience.

Quant au premier, Poincaré souligne souvent le fait que ses conventions ne sont pas choisies arbitrairement. Elles ne sont pas de simples conventions de langage, comme quand nous décidons qu'un mot pourra être utilisé en lieu et place d'une autre expression linguistique généralement plus complexe — ce qui ne veut pas dire qu'elles n'ont pas un aspect de convention linguistique. Mais il ne donne qu'un petit nombre de ces règles générales d'acceptation ou de refus qui seraient susceptibles de nous aider à choisir les conventions, et il n'en analyse guère la signification. Ses règles principales pour choisir une convention plutôt qu'une autre paraissent être : la conformité approchée à l'expérience ordinaire, ce que recouvre semble-t-il l'expression de « commodité » ; la simplicité ; des considérations empiriques relevant de ces deux dernières, et liées par exemple à notre connaissance de l'existence dans la nature de corps solides dont les mouvements approchent de près les conditions de réalisation d'une structure de groupe euclidien. Dans tous les cas, il ne s'agit que de guides, plus ou moins subjectifs. L'expérience ne fournit jamais que des résultats inexacts. On doit, pour en dériver une convention précise, en fournir des interprétations, qui par nature peuvent varier et impliquer des éléments subjectifs[7].

Quant au second, il faut admettre que nous ne soumettons jamais à un contrôle expérimental les géométries, même les géométries métriques appliquées, relativement aux groupes de corps physiques et de leurs mouvements, mais que nous *ajustons* notre géométrie aux expériences par un choix approprié de la définition de la « congruence » et par des procédés d'essence linguistique analogues. En bref, comme on a proposé de le dire, nous adoptons, relativement aux géométries métriques, l'« attitude nominaliste[8] », d'où il résulte qu'elles fonctionnent alors pour nous comme des

---

7. La simplicité notamment est un critère plutôt vague, qui peut avoir un sens psychologique, pragmatique, mathématique. Poincaré pense semble-t-il surtout à la simplicité *mathématique* : simplicité d'une expression, d'une équation, d'un calcul, d'une théorie..., en comparaison d'une autre. L'aspect esthétique (élégance, économie dans la présentation) est ici moins important sans doute que l'aspect objectif, qui le rapproche des deux autres, et marque la dépendance de la situation réelle telle qu'elle se présente dans l'expérience. Il y a des cas où un système de coordonnées est plus commode, plus simple qu'un autre, mais le système de coordonnées le plus simple dans *un* cas n'est pas nécessairement le plus simple dans *tous* les cas. De même, il peut y avoir des raisons pour considérer une géométrie non euclidienne comme la plus simple pour traiter une situation physique précise. En général, on n'a pas de règles sûres, universellement applicables.

8. C'est un trait de ce que Poincaré appelle la « métaphysique moderne » (dans la lettre, destinée à la publication, qu'il adresse à C. Flammarion, pour s'expliquer, à la suite de la polémique suscitée par ses réflexions sur la rotation de la Terre dans *La Science et l'hypothèse,* voir Henri Poincaré, « La Terre tourne-t-elle ? », *Bulletin de la Société astronomique de*

langages plutôt que comme des théories empiriques — cela même dans les applications physiques. Elles demeurent donc des sciences exactes, non sujettes à révision, ce qui ne pourrait être le cas si on admettait qu'elles fussent expérimentalement contrôlables.

L'esprit humain a la possibilité de créer toute une variété de géométries, c'est-à-dire de langages géométriques alternatifs. On choisit, par convention, l'un d'entre eux comme la meilleure représentation de notre espace, et le meilleur langage mathématique pour nos théories physiques[9]. Pour Poincaré, comme pour Klein et Lie, *une géométrie n'est rien d'autre que l'étude d'un groupe*. Les groupes possibles de géométrie spatiale sont tous suggérés par les mouvements de corps solides dans la nature. La convention que les classes de déplacements forment un groupe est pertinente, mais seulement partielle. On peut l'exprimer plus complètement en incorporant en elle l'alternative que les déplacements forment un groupe euclidien *ou* qu'ils forment l'un des groupes non euclidiens. On choisira le groupe euclidien parce qu'il est le meilleur de ce point de vue pour la géométrie spatiale : il est mathématiquement le plus simple, à l'inverse d'autres groupes, il contient un sous-groupe invariant, et il est conforme à notre expérience des corps solides.

Les géométries, qu'elles soient euclidiennes ou non euclidiennes, sont autant de manières possibles de décrire les phénomènes naturels, et il est possible de passer de l'une à l'autre en construisant des dictionnaires spécifiques de termes équivalents pour les différentes géométries. Envisagées de ce point de vue, elles constituent des systèmes de langage complexes qui, présentés axiomatiquement, constituent des « définitions implicites » de leurs termes primitifs. Le fait que quelques uns au moins de ces langages sont inter-transformables, et même inter-traductibles, rend possible le choix de commodité, et présente l'avantage de faciliter la solution des problèmes géométriques : par un choix convenable de la géométrie, on peut simplifier la solution d'un problème, exactement comme on peut le faire par un choix convenable du système de coordonnées[10]. C'est l'aspect de conven-

France, 1904, vol 8, p. 216-217) : l'absence de justification absolue des énoncés de l'existence des choses, du monde extérieur, d'une réalité intangible qui se situerait au delà de nos approches théoriques. C'est un des aspects de ce qui semble caractériser le mieux sa philosophie de la science : l'idéalisme.

9. Poincaré plaide notamment pour la possibilité de deux systèmes d'alternatives (formulables en thèses de « philosophie du non » à la manière de Bachelard) : (1) non-euclidianisme : la géométrie spatiale peut être une forme de géométrie non euclidienne ; (2) non-tridimensionnalité : il est possible de concevoir notre espace autrement qu'à 3 dimensions.

10. Le choix d'une géométrie est donc effectivement, comme le dit et le répète Poincaré, semblable à celui d'un système de coordonnées : il est matière d'agrément (« de commodité »). D'où l'importance du concept général d'invariance : un système de coordonnées représente un choix spatial — choix d'un repère, ou référentiel, qui implique toujours une manière particulière de repérer les positions et de mesurer. L'essentiel, c'est-à-dire l'objectif, c'est ce qu'il y a d'absolu, au sens d'indépendant de ces méthodes de repérage et de mesure. C'est l'invariance, donc le groupe.

tion linguistique, que retiendront exclusivement Carnap, Reichenbach et leurs successeurs.

2. Une application privilégiée : la genèse de nos idées d'espace

Comment obtenons-nous notre connaissance de l'espace et de ses propriétés ?

Pour répondre à cette question, Poincaré expose ce qui est une véritable théorie de la *genèse* de nos idées d'espace et de notre connaissance de la géométrie spatiale ; elle constitue une expression importante de son conventionnalisme[11].

Dès le départ, il adopte une psychologie référée au sujet, de type *associationniste et sensationniste ;* elle va servir de cadre à sa théorie de la genèse de l'espace et de la géométrie. À partir de cette position subjectiviste, il décrit la manière dont on acquiert les relations spatiales, pour constituer finalement l'espace géométrique.

Les sensations par elles-mêmes, qu'elles soient visuelles, tactiles ou musculaires, ne nous donnent pas la notion d'espace directement. Elles n'ont pas en soi de caractère spatial. Elles ne peuvent donc produire par une relation causale directe, comme une vue empiriste naïve pourrait le laisser croire, la notion d'espace ou de géométrie d'un espace. Ici intervient un point fondamental : pour Poincaré, nous n'avons pas de connaissance, ou d'appréhension, *direct*e de l'espace physique.

L'expression même d'« espace physique » ne fait pas partie de son vocabulaire philosophique. De son point de vue, il y a un espace *sensible ou représentatif* construit à partir de sensations visuelles, tactiles, cinesthésiques, et par un processus de classification. Cependant, cet espace empirique n'a aucune des propriétés du véritable espace *géométrique* : il n'est ni infini (ou même non-borné), ni homogène ni isotrope. L'explication vise moins l'origine et les propriétés de l'espace empirique que celles de l'*espace géométrique pur, espace conceptuel sur lequel nous raisonnons et que nous pouvons utiliser dans nos théories physiques*[12]. Poincaré considère cependant

11. E. Mach, dans ses études de 1901-1903 qui développent une théorie empirique et psycho-physiologique des origines de la géométrie, tiendra à se démarquer d'abord de Poincaré. Voir ses 3 articles : Mach, Ernst, « On Physiological, as Distinguished from Geometrical Space », *The Monist*, 1901, vol 11, n° 3 ; « On the Psychology and Natural Development of Geometry », *Tje Monist*, 1902, vol. 12, n° 4 ; « Space and Geometry form the Point of View of Physical Inquiry », *The Monist*, 1903, vol. 14, n° 1. Vues reprises ensuite dans l'ouvrage *Space and Geometry in the Light of Physiological, Psychological and Physical Inquiry*, Chicago, 1906.

12. C'est seulement l'ingrédient géométrique d'une théorie de physique mathématique (ou de « mathématique appliquée »), envisagée en tant qu'elle porte sur les traits spatiaux des phénomènes, qui est conventionnelle, et non la théorie toute entière. Chez Poincaré, c'est la géométrie qui est conventionnelle : *toute* la géométrie (à la différence de Riemann, chez lequel une partie de la géométrie, celle qui concerne la détermination de la métrique de l'espace, et notamment l'hypothèse qui soutient la représentation de l'étalon de mesure, relève de l'empirie) mais *seulement* la géométrie.

les sensations comme ayant une fonction significative dans la création et le développement de notre concept d'espace géométrique : elles fournissent à notre esprit l'*occasion* de construire l'espace géométrique. Notre esprit forge une relation entre les sensations et l'espace géométrique par des actes de classification et d'analyse de certains *changements* de nos sensations.

Supposons un objet devant nous, en mouvement, hors de notre centre de vision. On peut le ramener au centre de notre rétine par un mouvement de nos yeux ou de notre corps. En termes sensationnistes, on peut rétablir notre sensation primitive de l'objet. Poincaré donne l'exemple d'une sphère placée devant nous, et comportant un hémisphère bleu et un autre rouge. Si on voit d'abord l'hémisphère bleu, et qu'ensuite la sphère tourne, de telle sorte que le rouge devienne visible, nous pouvons ramener notre sensation de bleu par des changements de nos sensations internes, par exemple, en tournant nous-même autour de la sphère. Nous sommes capables de corriger un changement *externe* de sensations, une rotation de la sphère, par un changement *interne* de sensations, par un mouvement autour de la sphère qui constitue une rotation compensatoire. Cela est souvent possible, mais pas toujours, comme le montre l'exemple d'un changement d'état chimique, celui d'un liquide passant du bleu au rouge par une réaction d'ordre chimique. En général, il y a des changements indépendants de notre volonté, et non accompagnés de sensations musculaires. Ces changements externes que nous pouvons corriger par des changements internes de manière à rétablir notre impression première sont appelés « déplacements » ; les autres, ceux que nous ne pouvons corriger, « altérations ».

On peut de plus classer ces changements externes qui sont des déplacements. Une telle classification est cruciale pour la théorie de Poincaré. Si les hémisphères offraient deux autres couleurs, et que la sphère subisse une rotation, on pourrait corriger le changement externe des impressions, le déplacement, par le même changement interne que celui utilisé auparavant. Le changement interne serait le même en ceci que les sensations musculaires seraient les mêmes, alors que les visuelles ne le seraient pas. Donc, dans ce cas, il y a une variété de déplacements équivalents. En termes géométriques, la classe de tous les déplacements ainsi équivalents est supposée correspondre à une rotation de 180 degrés. Cependant, Poincaré ne peut, à ce stade, utiliser un tel langage géométrique, puisqu'il en est encore à en expliquer l'origine.

De même, on peut imaginer qu'il est possible de distribuer tous les déplacements individuels externes en classes. En effet, il y a des classes d'équivalence : deux déplacements externes sont *équivalents* si, et seulement si ils peuvent être corrigés par *le même* changement interne, au moins sur le plan des sensations motrices. De la même manière, on peut considérer des déplacements internes, c'est-à-dire des changements internes correspondant à des déplacements externes, et imaginer qu'ils sont distribués en classes d'équivalence, coextensives à celles des déplacements externes. Ces déplacements individuels, plus précisément les classes de déplacements individuels (qu'il appelle aussi, par abus de langage, « déplacements »), sont fondamentales pour la création de la géométrie. On apprend à rassembler les déplacements en classes d'équivalence par une application active de l'esprit. L'opération revient à pratiquer une abstraction sur les mouvements purs, tels que les translations et les rotations, à partir des sensations, en écartant les propriétés incidentes, comme la couleur. Ainsi les classes de déplacements engendrées au niveau des sensations s'identifient aux mouvements et transformations au niveau plus élevé de la géométrie.

On a fait remarquer que beaucoup de difficultés subsistaient, relatives en particulier à l'identification précise des déplacements individuels et à leur classification. Il s'agit d'une théorie qui n'est peut-être pas entièrement plausible : comment déterminer des déplacements plus ou moins exacts à partir de sensations musculaires ? Comment développer une géométrie globale, à partir de ces phénomènes locaux[13] ? Une fois encore, l'hypothèse clé nous paraît être que tout ensemble de classes de déplacements forme un *groupe* au sens mathématique abstrait[14]. La théorie se trouvait ainsi en relation étroite de correspondance avec les travaux de Lie sur les fondements de théorie des groupes de la géométrie, dont les résultats étaient exposés dans les trois parties du monumental traité de Lie et Engel publié entre 1886 et 1893. C'est par là que l'épistémologie de Poincaré s'articule à l'histoire.

Avant d'y venir, il nous faut encore préciser en quoi la position médiatrice de la convention renvoie à la conception de l'espace.

3. Le statut médiateur de la convention et le principe de relativité : l'exemple de l'hypothèse d'existence des groupes de déplacements

On a vu que si le problème épistémologique est bien celui, posé pour la première fois par Kant, de la condition de possibilité de la mise en relation de la théorie et du fait, on ne peut, pour le résoudre, se satisfaire du synthétique *a priori* kantien. La géométrie spatiale, dans sa spécification concrète évoquée plus haut, doit servir d'intermédiaire entre les théories et les faits expérimentaux. Poincaré soulignera, dans sa discussion avec Le Roy, que les faits scientifiques ne sont pas « faits » (créés de toutes pièces) par le savant, comme on se complaisait parfois à le dire alors, mais que ce ne sont jamais que les faits bruts, ordinaires, les faits du sens commun, *traduits* dans le langage de la science. Ces faits d'expérience, ou d'ailleurs d'observation, ne sont comparables aux prédictions théoriques que s'ils

13. Ces difficultés ont été soulignées notamment par Torretti, voir : Torretti, Roberto, *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*, Dordrecht, 1978, p. 343-345.

14. Selon les vues de son temps, Poincaré définit le concept par la propriété de clôture, conçue comme la propriété essentielle : une classe de déplacements suivie d'une autre redonne une classe de déplacements.

sont *préalablement rendus homogènes* aux théories qui permettent les prédictions. Et c'est la géométrie qui fournit les outils, ou moyens, de la description géo-chronométrique et cinématique exigée pour cette homogénéisation, ainsi que les termes de comparaison pour l'évaluation des théories physiques.

D'où l'élimination, déjà relevée, de l'espace mécanique ou physique. Tout se passe en effet comme si, aux yeux de Poincaré, l'espace de la géométrie suffisait à la physique. C'est la géométrie qui procure le schéma dans lequel les données de l'expérience se déploient pour avoir le sens théorique qui les rend acceptable par la science. Aussi est-il impossible qu'elles la contredisent. Or l'élimination de l'espace physique est elle-même liée par une relation d'essence au « principe de relativité », lequel entraîne à son tour la disjonction de la géométrie et de l'expérience qui est au cœur du conventionnalisme de Poincaré.

L'énoncé que donne le chapitre v de *La Science et l'hypothèse* du principe de relativité stipule que « l'état des corps et leurs distances mutuelles à un instant quelconque dépendront seulement de l'état de ces mêmes corps et de leurs distances mutuelles à l'instant initial ».

Et non pas de leurs relations à l'espace[15]. Le principe signifie que l'information empirique n'a pas de rapport avec la structure de l'espace géométrique. Il prive ainsi de sens la question même de savoir si la géométrie peut être soumise à la décision de l'expérience. Dans cette mesure, comme le souligne Jules Vuillemin, Poincaré est plus radical que Klein, car ce n'est pas seulement, comme chez ce dernier, l'imagination de l'espace, mais encore l'espace lui-même dans son rapport à la réalité physique qui est conventionnel[16]. À vrai dire, on peut donner au principe diverses formes, géométrique, mécanique, physique en général : quelle que soit cette forme, il s'agit toujours d'affirmer l'existence d'invariants relatifs à certains groupes de transformations. Une théorie des invariants relatifs à un groupe de transformations n'est rien d'autre qu'une théorie de la relativité par rapport à un groupe.

Analogue ici à celle de Mach, la position de Poincaré consiste à dire qu'une stricte application de la loi exigerait qu'on considérât l'univers entier.

> Mais si notre système est l'univers entier, l'expérience est impuissante à nous renseigner sur sa position et son orientation absolues dans l'espace. Tout ce que nos instruments si perfectionnés qu'ils soient, pourront nous faire connaître, ce sera l'état des diverses parties de l'univers et leurs distances mutuelles. (…)

---

15. Poincaré, *La Science et l'hypothèse*, Paris, 1968, p. 98
16. Voir Jules Vuillemin, *Le Conventionnalisme géométrique et la théorie des espaces à courbure constante*, 1974.

> Les lectures que nous pourrons faire sur nos instruments, à un instant quelconque, dépendront seulement des lectures que nous aurions pu faire sur ces mêmes instruments à l'instant initial.

Elles ne peuvent donc par elles-mêmes nous permettre de décider entre les géométries. Elles sont indépendantes de l'interprétation géométrique de ces lectures.

D'où la pluralité. C'est la géométrie qui opère la traduction de la nature en langage mathématique que nous venons d'évoquer. Mais il y a plusieurs manières possibles de le faire, et non par la seule géométrie euclidienne, comme au temps de Galilée ou Newton. Il y a autant de traductions possibles que de géométries disponibles, qui sont elles-mêmes traductibles entre elles. La formulation de la théorie scientifique doit convenir au système de description choisi, mais son pouvoir prédictif restera inchangé dans ses diverses traductions.

Reprenons son exemple favori des déplacements, en tant qu'ils sont à l'origine de l'espace.

Des déplacements individuels, on ne peut dire en toute rigueur, on l'a vu, qu'ils forment un groupe, car ils dépendent des sensations d'objets individuels. Même des déplacements équivalents peuvent commencer et finir avec des sensations distinctes, de sorte qu'il n'est pas toujours possible de combiner deux déplacements individuels par succession. On fait alors l'hypothèse qu'il existe toujours deux classes quelconques de déplacements individuels compatibles. La *propriété* des déplacements de former un groupe n'est peut-être pas tout à fait évidente, mais la *condition* que les déplacements forment un groupe est absolument nécessaire pour la géométrie, ou, pour mieux dire, pour la géométrisation.

Le problème philosophique est la justification de cette hypothèse.

Aux yeux de Poincaré, elle n'est ni *a priori*, ni empirique.

Elle n'est pas *a priori* car elle n'est pas évidente ou absolument certaine, du fait de la complexité de la compensation des changements externes par les changements internes, et de leur composition en classes.

Elle n'est pas empirique, car elle serait alors ouverte au verdict de l'expérience, et, en cas de falsification, la géométrie serait détruite. Il y a des réfutations apparentes, de déplacements qui ne forment pas un groupe, que nous rejetons comme réfutations. Nous préférons les ajuster pour qu'ils rentrent dans les classes de déplacements en satisfaisant la loi de groupe (voir sa distinction de la forme et de la matière du groupe). En négligeant les non-déplacements nous faisons pour ainsi dire rentrer de force les déplacements dans ce moule de théorie des groupes. Nous faisons *une convention*, non arbitraire, mais cohérente avec l'expérience ordinaire. Les déplacements qui paraissent satisfaire la loi de groupe s'insèrent dans des classes obtenues approximativement à la loi de groupe. Dans l'analyse finale, nous renforçons la loi par une convention, pour obtenir la construction de la géométrie qui se fonde sur la théorie des groupes. Nous élevons la loi de clôture pour les groupes de déplacements au statut d'un principe conventionnel, que nous choisissons de ne pas réfuter.

L'existence même du groupe des déplacements garantit que l'espace résultant est homogène, isotrope, et non borné : autant de propriétés qui le distinguent de l'espace représentatif. Un tel groupe de transformations à 6 paramètres (tout déplacement suffisamment petit pouvant être engendré par 6 rotations infinitésimales) est *continu* au sens de Lie : les classes de déplacements forment un continu physique « parfait ». Nous choisissons par convention le groupe euclidien des mouvements (isométries directes) rigides, préservant l'orientation, comme la meilleure représentation du groupe des déplacements. Cette convention est justifiée par le fait que le groupe euclidien a un sous-groupe *invariant*, celui de toutes les translations, propriété qui fait défaut aux groupes non euclidiens. Ainsi, la géométrie de l'espace devient seulement l'étude des propriétés formelles[17] d'un certain groupe continu à 6 paramètres, le groupe euclidien. On impose ce groupe à la nature, bien que l'expérience nous guide dans le choix du groupe le meilleur pour l'application à la nature[18].

4. La théorie des groupes de transformations de Sophus Lie, fondement mathématique du conventionalisme de Poincaré.

4.1. Premiers mémoires et premiers travaux.

Comme plusieurs commentateurs l'ont suggéré, les travaux de Lie sur les groupes sont la véritable origine du conventionnalisme géométrique de Poincaré[19].

A la fin du premier mémoire dans lequel on trouve trace d'une position philosophique concernant le statut des axiomes de la géométrie, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, mémoire dont le titre pourrait plutôt évoquer Riemann[20], Poincaré déclare :

17. On sait que Poincaré distingue entre la « forme » (ensemble des opérations envisagé abstraitement, défini par la clôture) et la « matière » (domaine ou espace des objets pour les opérations) du groupe. La distinction est proche de celle des algébristes d'aujourd'hui entre un groupe « opérant » dans un espace, et cet espace même.

18. C'est ainsi, nous semble-t-il, qu'on pourrait résoudre la difficulté soulevée par Torretti (*op. cit.* note 12) dans l'explication de l'origine du concept de continu. Poincaré confond d'après lui sa relation d'indistinguabilité dans l'expérimentation du poids avec la relation d'égalité ou d'identité de quantité par simple usage du signe d'égalité. La relation d'indistinguabilité, n'étant pas transitive, n'est pas du tout la même que celle d'égalité ou d'identité.

19. C'est notamment le cas de Giedymin, Jerzy, *On the origin and Significance of Poincaré's conventionalism*, Studies in History and Philosophy of Science 8, 1977, p. 287.

20. Poincaré, Henri, *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie*, Bulletin de la Société mathématique de France, XV, 1887 ; *Œuvres,* 11, p. 79-91.

> Ce résultat n'étonnera pas les mathématiciens qui ont lu les remarquables travaux de M. Sophus Lie sur la théorie des groupes. [...] Nous ferons par la suite de fréquents emprunts au Mémoire du savant norvégien.

On y voit Poincaré s'inspirer clairement de l'approche de « théorie des groupes » qui a été celle de Lie en géométrie[21], une approche qui consiste dans une méthode pour trouver tous les groupes continus possibles pour les différentes géométries d'une variété à deux dimensions, ou du plan. On peut considérer que c'est en raison de ce rattachement à Lie :

1) que Poincaré met en avant dans tous ces essais l'idée que le concept de groupe, comme concept *a priori*, forme un fondement naturel et sûr pour la géométrie, que *la géométrie est l'étude des groupes continus ;*
2) qu'il exclut les géométries plus générales considérées par Riemann dans sa thèse d'habilitation ;
3) qu'il se restreint au point de vue dit « de Helmholtz-Lie » sur le problème de l'espace. Comme Klein, il ne garde que les espaces à courbure constante — à l'exclusion de ceux à courbure variable, c'est-à-dire de toutes les géométries riemanniennes dans lesquelles « l'axiome de libre mobilité » n'est pas valide, et bien qu'il les accepte comme mathématiquement (analytiquement) possibles[22].

---

21. Lors de sa première visite à Paris de 1882, Lie avait trouvé Poincaré déjà convaincu pour son propre compte de l'importance du concept de groupe, et il dit dans une lettre à Klein que Poincaré lui avait expliqué que toutes les mathématiques ne sont qu'« une histoire de groupes » (« eine Gruppengeschichte » ; lettre d'octobre 1882, citée, ainsi que les faits suivants, par Hawkins, Thomas, *The Erlanger Programm of Felix Klein : Reflections on its Place in the History of Mathematics*, Historia Mathematica, 11, 1984, p. 447). Dans un des trois suppléments (écrits en vue du Grand Prix des sciences mathématiques, republiés récemment : Gray, Jeremy, *The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on Fuchsian fonctions*, Archives internationales d'histoire des sciences, 32, 1982, p. 221-235) à un premier mémoire sur les fonctions fuchsiennes, Poincaré avait conclu que « la géométrie était l'étude du groupe des déplacements formé par les déplacements auxquels on peut soumettre une figure sans la déformer ». Il était prêt à recevoir la leçon de Lie. C'est bien ce qui s'est passé. Dans la même lettre à Klein, Lie indique que Poincaré ne connaissait pas alors le Programme d'Erlangen, et en effet on n'a pas de témoignage d'une quelconque influence de ce dernier sur un Poincaré parvenu par sa propre voie aux mêmes conclusions. Comme Emile Picard, Poincaré a été impressionné par Lie et ses travaux. Entre 1883 et 1892, les deux mathématiciens publient de nombreux mémoires sur les applications de la théorie de Lie à divers domaines des mathématiques : théorie des fonctions complexes, géométrie algébrique, systèmes des nombres hyper-complexes, équations différentielles, fondements de la géométrie. Poincaré en vient lui-même à s'intéresser à l'application de la théorie de Lie (surtout les « algèbres de Lie ») au « problème de l'espace » de Helmholtz en 2 dimensions, et c'est justement le sujet du mémoire de 1887.

22. La fin du mémoire, en forme de commentaire épistémologique, affirme : « Les lecteurs qui m'ont suivi jusque là n'ont pu manquer d'observer que ce qui précède a une relation au célèbre mémoire de Riemann... ils n'ont pu non plus manquer de remarquer certaines différences entre nos méthodes et résultats respectifs... », et un peu plus loin :

L'étude de 1887, dont l'intérêt historique est de contenir un exposé de l'essentiel de ce qui deviendra son bréviaire conventionnaliste, montre que Poincaré rejette non seulement la conception kantienne mais aussi la conception riemannienne. Il considère cette dernière comme empiriste, parce qu'elle implique qu'il est possible de décider quelle géométrie est vraie sur la base de fondements, c'est-à-dire de faits, expérimentaux. La leçon du mémoire, c'est que la source du conventionnalisme géométrique de Poincaré ne doit pas être cherchée dans les vues et la discussion des fondements de la géométrie de Riemann, mais ailleurs, à savoir dans la théorie des groupes de Lie.

C'est ce que viendrait confirmer le travail proprement mathématique de Poincaré de cette période, à propos duquel nous ne pouvons malheureusement entrer dans le détail.

C'est au cours de ses recherches sur les fonctions automorphes d'une variable complexe (dites par lui fuchsiennes » ou « kleinéennes ») que Poincaré introduit pour la première fois des considérations de géométrie non euclidienne. Il y avait rencontré ce qu'on appelle aujourd'hui le « groupe modulaire », c'est-à-dire le groupe des transformations $T: z \rightarrow T(z)$ données par l'expression :

$$z \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \qquad ad - bc \neq 0 \qquad (1)$$

où a, b, c, d sont des constantes réelles. Pour ces transformations, les fonctions analytiques définies sur un ouvert connexe D du plan complexe sont invariantes. Poincaré avait montré, en utilisant les géométries non euclidiennes, que pour tout groupe discontinu de transformations de ce type, il existe un *domaine fondamental* borné par des segments ou des cercles, et dont les transformés par des éléments de G recouvrent D sans chevauchement. Réciproquement, étant donné un tel polygone circulaire, satisfaisant certaines conditions explicites relatives aux angles et côtés, on peut montrer qu'il est le domaine fondamental d'un groupe discontinu de transformations de type (1).

On sait qu'en commençant ses recherches, Poincaré ignorait à peu près tout de la littérature. Son idée d'associer à tout groupe fuchsien un domaine fondamental, comme celle d'utiliser la géométrie non euclidienne est sans aucun doute une innovation personnelle (elle n'est jamais men-

---

« Riemann caractérise une géométrie par l'expression de l'élément d'arc en fonction des coordonnées. Il est ainsi conduit à un très grand nombre de géométries logiquement possibles et dont je n'ai même pas parlé. Cela tient à ce que j'ai pris pour point de départ la possibilité de mouvements ou plutôt l'existence d'un groupe de mouvements qui n'altèrent pas les distances. » Compte tenu de sa réfutation *a priori* de toute tentative d'établir expérimentalement la vérité d'une géométrie non euclidienne — par exemple par des mesures de parallaxe —, il semble plausible de supposer que Poincaré aurait aussi rejeté toute conclusion fondée sur des mesures attestant que l'espace a une courbure variable.

tionnée dans les travaux sur les fonctions modulaires avant 1880). Il est raisonnable de penser qu'il y a eu en fait convergence avec le travail de Lie, accueil de possibilités déjà développées dans une certaine mesure par Poincaré, virtualités que Lie a en quelque sorte cristallisées.

4.2. La théorie de Plücker-Lie.

De l'aveu même de leur auteur, les nouvelles conceptions développées par Lie dans son mémoire de 1871, *Sur une classe de transformations géométriques*[23], sont « fondées sur le fait qu'une courbe de l'espace qui dépend de 3 paramètres peut être choisie comme élément pour la géométrie de l'espace » et que, en général, le choix d'une géométrie est une affaire d'opportunité : on développe et on utilise une géométrie dans la mesure où elle se révèle avantageuse ou commode pour résoudre les problèmes du moment[24]. Un des grands résultats de Lie a consisté à établir que la géométrie dite « de Plücker », dont Klein a démontré qu'elle était interprétable comme géométrie métrique à 4 variables, peut être transformée, par une « transformation de contact », en une géométrie spatiale dont l'élément est une sphère, c'est-à-dire en une géométrie sphérique. Cette opération consistant à transformer une géométrie en une autre présente de grands avantages : un problème concernant les sphères peut être transformé en un problème concernant les droites, ce qui peut procurer les moyens d'une résolution plus simple. Le « *principe de transformation* » qui règle une telle opération peut être considéré comme un des fondements du conventionnalisme géométrique de Poincaré.

La théorie de Lie dérive elle-même de celle de la réciprocité, plus généralement de la dualité, dite de Poncelet-Gergonne. Cette dernière

23. Lie, Sophus, *Über eine Klasse geometrischer Transformationen*, Forh. Videnskabs-Selskabet Christiania, 1871, p. 182-245 ; Gesammelte Abahndlungen, 1, p. 153-210 ; les idées principales en avaient été déjà exposées dans une note de Lie et Klein des Monatsberichte… de Berlin (15 décembre 1870). On en trouve une traduction anglaise dans le *Source Book in Mathematics* de D. E. Smith, p. 485-523.

24. Au début de son mémoire, Lie se réfère à « la conception philosophique de la géométrie » et ajoute : « la géométrie analytique cartésienne traduit tout théorème de géométrie dans un théorème algébrique, et entraîne que la géométrie du plan devient une représentation de l'algèbre à 2 variables et, de même la géométrie de l'espace, une interprétation de l'algèbre à 3 quantités variables… Plücker a attiré notre attention sur le fait que la géométrie analytique de Descartes est encombrée par un double arbitraire. Descartes représente un système de valeurs pour les variables x et y par un point du plan ; comme on le dit ordinairement, il a choisi le point comme élément de la géométrie du plan, alors qu'on aurait pu avec une égale validité utiliser pour cela la droite ou toute courbe dépendant de 2 paramètres. De plus, Descartes représente un système de quantités (x, y) par ce point du plan dont les distances aux axes donnés sont égales à x et y ; dans un nombre infini de systèmes de coordonnées, il en choisit un particulier. Le progrès de la géométrie au XIXe siècle a été largement rendu possible par la claire reconnaissance de ce double arbitraire dans la géométrie analytique de Descartes. » (cité par Giedymin, *On the Origin aud Significance of Poincaré's Conventionalism*, p. 287).

permet d'en saisir l'esprit en évitant les complications techniques qu'exigerait le rappel des travaux fondateurs de Lie.

La géométrie projective a habitué les géomètres à considérer les figures engendrées par des plans, des droites, etc., d'où l'idée de regarder ces plans, droites, etc., comme des *éléments générateurs* de la géométrie, au même titre que les points (les points ne sont pas engendrés par des droites, mais l'on peut identifier un point à la gerbe de droites passant par lui). Toute projectivité transforme de la même manière points et gerbes de droites correspondantes, et c'est la *loi* suivant laquelle s'effectuent toutes ces transformations qui est la source de toutes les propriétés projectives des figures ponctuelles : en remplaçant dans les énoncés « point » par « gerbe », on a des énoncés encore valides. Ainsi, la géométrie projective réglée et la géométrie ponctuelle peuvent être considérées comme des chapitres respectifs l'une de l'autre, ce sont deux aspects différents d'une *seule et même géométrie*. Mais le choix de la droite comme élément générateur modifie profondément l'espace et le groupe de cette géométrie. L'espace dont les éléments sont les droites est à 4 dimensions au lieu de 3 : il subsiste cependant quelque chose de commun, et c'est l'étude du *groupe*, de la loi de composition des opérations.

Il suit de ce principe que, si l'on prend la droite comme élément fondamental de la géométrie projective plane, on arrive à une géométrie tout à fait identique à la géométrie initiale. En géométrie dans l'espace, la situation est quelque peu différente : le principe de dualité énonce ici que c'est la géométrie des plans dans l'espace projectif qui est identique à la géométrie projective des points dans l'espace ordinaire. La géométrie des droites dans l'espace projectif est quelque chose de tout à fait nouveau : l'espace des droites est à 4 dimensions (on peut par exemple prendre les coordonnées du point P d'intersection d'une droite avec xOy et celles de l'intersection P' de la même droite avec xOz).

Il devait revenir à Plücker d'élaborer analytiquement le principe.

Dans son ouvrage de 1828[25], il part de la remarque très simple que l'équation d'une droite, donnée en coordonnées homogènes dans le plan :

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3=0 \qquad (2)$$

est complètement *symétrique* en u et en x. Plücker en profite pour interpréter alors les coefficients u comme les quantités variables, de sorte que l'équation en vient à représenter le système de droites passant par le point fixé x (si les quantités x_i sont fixées, les u_i, ou tous nombres proportionnels, sont les coordonnées d'une droite dans le plan). Ainsi, tout comme l'équation $f(x_1,x_2,x_3)$ représente une collection de points, $f(u_1,u_2,u_3)$ représente une collection de droites, ou « courbe linéaire » (par exemple les tangentes

25. Plücker, Julius, *Analytisch-geometrische Entwicklungen*, Essen, 1828 (un second volume paraîtra en 1836).

à une courbe ponctuelle forment une courbe linéaire : dans le cas d'une conique, c'est la duale, ou conique linéaire). Il en irait exactement de même de l'équation $u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4=0$ d'un plan en coordonnées parallèles dans l'espace.

En 1846[26], Plücker généralise l'argument de l'ouvrage de 1828, il admet la droite comme élément de base possible dans le plan *et* dans l'espace, et nomme les termes u_i « *coordonnées linéaires* » (ou « *coordonnées de droites* »). En termes des coefficients u, l'équation (2) représente le faisceau des droites passant par le point x, donc, en un sens, le point x lui-même. On peut interpréter l'équation linéaire *aussi bien* comme l'équation d'une droite en coordonnées ponctuelles que celle d'un point en coordonnées linéaires (et il en va de même du point et du plan dans l'espace).

Le point fondamental, comme l'a bien vu Plücker, consistait dans la remarque suivante : le caractère symétrique en u et x de l'équation (2) pour la configuration unitaire point / droite, d'où résulte la possibilité d'intervertir les deux termes dans tout énoncé fondé sur leur simple concaténation, rend possible une formulation et une démonstration *algébriques* du principe de dualité.

Etant donnée une équation générale f(r,s,t)=0, *si* on interprète r,s,t comme les coordonnées homogènes x_1,x_2,x_3 d'un point, alors on a l'équation d'une courbe ponctuelle (ou courbe algébrique), mais *si* on les interprète comme les coordonnées u_1,u_2,u_3 d'une droite, on a l'équation de la courbe linéaire (ou faisceau algébrique) duale. Et toute propriété démontrée par un procédé algébrique pour une courbe ponctuelle donnera une propriété duale pour la courbe linéaire parce que l'algèbre est la même sous les deux interprétations. Utilisé jusqu'alors de manière plutôt heuristique, et souvent comme une sorte de *deus ex machina*, le « principe de dualité » de Poncelet-Gergonne y trouvait l'instrument de son élucidation théorique, et la voie d'une libération opératoire. Le contenu mathématique essentiel en était clarifié comme *équivalence* du point et de la droite en tant qu'éléments de base de la géométrie plane —du point et du plan pour la géométrie dans l'espace, d'où résultera directement, une fois mis au point le concept d'espace abstrait (ou variété) l'idée de la liberté du choix de l'« élément d'espace » comme point de départ de la géométrie.

Dans le Programme d'Erlangen, Klein théorisera cette notion d'équivalence, énonçant que deux théories géométriques apparemment différentes peuvent devenir *équivalentes* (gleichbedeutend) en ce sens précis que, par une correspondance bijective (ou 1-1) entre des *éléments* spatiaux convenablement choisis dans chacune, on établit un *isomorphisme* entre leurs groupes associés. Quant au « programme » lui-même, on ne souligne pas

26. Plücker, Julius, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend*, Düsseldorf, 1846.

assez que, pour être correcte, et en tout cas complète, sa description exige trois traits, et non pas deux. Pour déterminer une géométrie, la donnée du domaine ou de l'espace et celle du groupe ne suffit pas : il convient d'y ajouter l'*élément générateur*, l'atome ou l'élément le plus simple du domaine[27].

Le concept de variété n-dimensionnelle de Grassmann offrait un autre champ d'application des idées fécondes de Plücker. Jusqu'alors perçu comme une généralisation vide, il acquiert un contenu géométrique substantiel, qui le fait sortir du domaine des constructions algébriques formelles.

Rappelons brièvement la définition des coordonnées plückériennes[28]. Soient X et Y des points de l'espace projectif à 3 dimensions, de coordonnées (x_i) et (y_i), i=1,2,3,4. Les coordonnées de droite de Plücker déterminées par X et Y sont alors les 6 quantités : p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{34}, p_{42}, p_{23}, avec : $p_{ik}=x_iy_k-x_ky_i$. Ces coordonnées linéaires, dites « plückeriennes » sont liées par la relation : $p_{12}p_{34}+p_{13}p_{42}+p_{14}p_{23}=0$. Elles forment donc une variété à 4 dimensions. Plücker les conçoit comme les éléments d'une sorte de *géométrie à 4 dimensions*. La géométrie linéaire, construite à partir d'un ensemble dépendant de 4 paramètres, procure donc un modèle de théorie d'objets à 4 dimensions dans l'espace ordinaire, dont il apparaît que la dimension n'est fixée à 3 que pour autant qu'on considère les points comme objets géométriques de base, que l'on a effectué le libre choix des points comme éléments d'espace. En choisissant un ensemble de base dépendant d'un nombre suffisant de paramètres, il est possible d'étudier des variétés de dimension arbitrairement grande sans abandonner l'espace à 3 dimensions. L'espace multi-dimensionnel reste inséré dans l'espace à 3 dimensions.

---

27. Prenons le cas de la géométrie plane. On peut choisir différents éléments comme éléments générateurs : point, ligne (orientée ou non), cercle, parabole, en général un « élément linéaire » (point+direction en ce point). Il y correspond ce qu'on appelle aujourd'hui un sous-groupe dit *stabilisateur*, celui qui conserve l'élément générateur. Par exemple, pour la géométrie euclidienne, si ξ est un cercle de diamètre fixé, le groupe correspondant est celui des rotations (avec une ligne droite, c'est celui des translations/réflexions). Si G opère dans E, on définit le sous-groupe de G *stabilisateur* de $x\varepsilon E$ comme l'ensemble {g ; $g\varepsilon G$, gx=x}] Si ξ et ξ' sont tels que leurs groupes stabilisateurs sont les mêmes, alors les géométries sont elles-mêmes *équivalente*s. Ainsi, si on a deux géométries de domaine d'opération et de groupe communs, par exemple le plan et le groupe G des isométries, mais d'éléments générateurs différents, par exemple, pour le premier, un point, pour le second, un cercle de diamètre fixé de longueur *a*, ces géométries seront *équivalentes* en ce sens précis qu'elles auront le même groupe stabilisateur. Dans la pratique, elles coïncideront, par application possible de l'une sur l'autre : cercle $\eta \rightarrow$ centre ξ ; point $\xi \rightarrow$ cercle de centre ξ, de rayon *a*, avec le rôle de la *droite* joué par le trajet entre lignes parallèles, rempli par des cercles de rayon *a*, le rôle de l'*angle* joué par deux de ces directions, avec un cercle commun η_0, et un angle qui est l'angle des lignes médianes.

28. Plücker, *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, n°258.

On voit les conséquences, dès lors qu'on pourra disposer du concept de groupe abstrait. S'il n'y a pas de sens géométrique à assigner à une variété une dimension qui lui soit « naturelle », on doit établir une séparation conceptuelle entre l'espace objectivement existant (à 3 dimensions) et la construction mathématique d'une variété (de dimension arbitraire). L'interprétation de cette séparation en termes matériels conduit directement, au-delà du Programme d'Erlangen, aux idées de Riemann et de Hilbert, et à la géométrie de la théorie de la relativité. On avait là une pierre d'attente pour le concept de groupe de transformations dans l'espace à n dimensions.

Les idées de Plücker ont sans aucun doute beaucoup influencé Poincaré. Mais, comme on l'a déjà remarqué, l'autre source, encore plus proche, solidaire d'ailleurs de celle de Plücker, est certainement à chercher chez Lie. Les recherches, souvent menées en commun avec Klein, de ce dernier, ont puissamment contribué à promouvoir l'idée que le concept de groupe est le véritable fondement de la géométrie. Chacune des géométries les plus importantes, d'Euclide, de Lobatchevski, de Riemann, correspond à un groupe continu particulier, au sens de Lie, par exemple l'objet de la géométrie euclidienne ordinaire est l'étude du groupe des déplacements euclidiens, qui la contient toute en lui, et il y a autant de géométries que de groupes de transformations. Le but d'une géométrie est l'étude des propriétés des figures qui restent inaltérées quand on leur fait subir un déplacement quelconque — propriétés indépendantes de leur position et de leur orientation. Une fois le groupe supposé connu, tous les théorèmes de géométrie s'en déduisent par le calcul. Un algébriste qui disposerait de ce groupe pourrait reconstituer les notions, proprement géométriques de point, de droite, de plan, etc. C'est le fond même du Programme d'Erlangen, qui doit beaucoup, à la fois dans ses origines et dans ses développements, au travaux de Lie sur les groupes continus. Poincaré a fait sienne cette conception[29].

---

29. Voir Hawkins, Thomas, *The Erlanger Programm of Felix Klein : Reflections on its Place in the History of Mathematics*.

On en trouverait une ultime confirmation dans le travail de 1898 (cité note 2). Poincaré y établit l'existence de trois variétés particulières sur lesquelles le groupe des déplacements peut opérer : le 3-espace de points, relié au type des sous-groupes rotatifs ; le 4-espace des droites, relié au type hélicoïdal ; le 5-espace des droites (avec des points fixés sur elles), relié au type des « gerbes » rotatives. Dans ces trois dérivations, Poincaré fait clairement une application directe du *principe d'équivalence de Plücker* pour construire des espaces de dimensions différentes par choix de différents éléments de base. Il en conclut que nous choisissons le nombre 3 comme nombre de dimensions de notre espace parce que : 1) c'est le plus petit nombre ; et 2) le sous-groupe ou élément associé se présente de lui-même, étant relié à nos idées empiriques de lieu et de point. Dans ce choix, on retrouve les deux aspects traditionnels de la convention chez Poincaré : sa nature linguistique et sa dépendance vis-à-vis de l'expérience. Bien que d'autres représentations soient possibles, l'expérience nous guide vers celle-ci comme vers celle qui se trouve particulièrement appropriée. Finalement, la 3-dimensionnalité de l'espace repose sur une

5. Conclusions. Poincaré entre Lie et Riemann

La question des rapports de Poincaré à l'œuvre de Riemann a été considérablement embrouillée du fait à la fois des événements intervenus dans l'histoire de la théorie physique après la mort du premier, avec l'apparition de la Relativité générale, et des vues rétrospectives que cette dernière a inévitablement engendrées. Un bon exemple des ambiguïtés et confusions dont a été recouverte la position de Poincaré est fourni par la revendication du « conventionnalisme géométrique » par la tradition empiriste, celle de Carnap, de Reichenbach, et des membres du Cercle de Vienne. Poincaré a, de manière trop claire, et à de trop nombreuses reprises, critiqué et rejeté l'empirisme, pour qu'on en accepte aussi facilement les conclusions. Certains, comme Grünbaum[30], ont voulu en corriger les excès, en expliquant les origines riemanniennes de l'idée conventionnaliste. La construction riemannienne du concept d'espace à partir d'un continu pris comme variété n-dimensionnelle générale, d'abord métriquement amorphe, structuré ensuite librement par choix de relations métriques, fondement de la possibilité de la mesure et de la congruence (caractère amorphe de l'espace, métriques alternatives, conventionnalité de la congruence), serait la véritable origine du conventionnalisme de Poincaré.

Une telle interprétation permet de laver en quelque sorte ce dernier du soupçon de manquer au devoir élémentaire de l'empiriste, de préférer toujours la leçon de l'expérience à la pérennité de la théorie. En interprétant comme il le fait l'épreuve expérimentale, par exemple les mesures parallactiques, Poincaré refuse moins le verdict de l'expérience qu'il ne réaffirme la thèse riemannienne de structuration *a posteriori* d'un espace initialement amorphe par la métrique. Il n'y avait rien là de contradictoire avec un empirisme modéré, qui serait celui de Poincaré. Un autre avantage de la dite interprétation est de montrer que Poincaré, s'il combat « l'empirisme géométrique » — et peut donc être enrôlé chez les empiristes modérés, proches de Carnap ou Reichenbach[31], comme veut le faire Grünbaum — n'est pas

convention *raisonnable*, qui s'insère dans la continuité de notre expérience. Par ailleurs, en créant une variété d'espaces de différentes dimensions par le principe de Plücker, Poincaré reste dans les limites des sous-groupes non euclidiens à 6 paramètres. Il veut considérer des espaces et des géométries associées à ces sous-groupes. Acceptant la solution de Lie du « problème de Helmholtz » comme une borne et une contrainte, il considère seulement trois groupes ou géométries, et leurs espaces correspondants.

30. Dans ses ouvrages classiques : Grünbaum, Adolf, *Philosophical Problems of Space and Time*, New York, 1965 ; *Geometry and Chronometry in Philosophical Perspective*, Minneapolis, 1968.

31. Ainsi, Poincaré n'invoque jamais la distinction entre géométrie pure, abstraite, et géométrie appliquée, même après sa lecture des *Grundlagen der Geometrie* de Hilbert, qui a été semble-t-il pour lui une véritable révélation, notamment de la richesse des géométries suscitées par le point de vue axiomatique. Cette indifférence est d'autant plus remarquable que l'interprétation, par Poincaré, des géométries comme systèmes de langage (avec la position des conventions définitions déguisées, l'« attitude nominaliste », etc.), plutôt que comme

anti-empiriste ou nominaliste pour autant, puisqu'il est avéré par les textes qu'il a formellement, et à plusieurs reprises, rejeté le nominalisme de Le Roy.

L'empirisme géométrique consiste dans l'idée qu'il y a une métrique intrinsèque dans l'espace lui-même, à découvrir par l'expérience, ou alors que, s'il n'y a pas de métrique intrinsèque dans l'espace (comme c'est peut-être le cas), elle peut de toute façon être mise expérimentalement en évidence *ailleurs* : par exemple dans les « forces de liaison » qui opèrent sur, ou dans, l'espace même — exactement comme on peut découvrir par expérience si l'espace physique est euclidien, non euclidien, ou doté d'un non-euclidianisme variable, ce qui est une autre idée des empiristes.

La question du statut de la géométrie, de son rapport à l'expérience et à la physique, est trop complexe chez Poincaré pour pouvoir être envisagée ici dans toute son extension. Nous nous contenterons des remarques suivantes, que nous semble autoriser la mise en relation exigée des positions épistémologiques avec le travail mathématique.

Enraciné dans les travaux de Lie et Plücker, le « conventionnalisme » de Poincaré ne paraît pas avoir été directement inspiré par une forme, au demeurant assez hypothétique, de ce dernier, qu'on trouverait chez Riemann[32]. La thèse de l'amorphisme de l'espace, fondement de la conventionnalité de la congruence ou de la métrisabilité alternative, énonce une propriété structurale de l'espace physique. Il n'est pas sûr qu'on puisse l'attribuer sous sa forme stricte à Poincaré, pour lequel il y a moins amorphisme de l'espace qu'élidation, pour ne pas dire négation, ou élimination de l'espace en tant qu'entité physique. Si l'espace physique est élidé c'est qu'il est moins métriquement amorphe qu'intrinsèquement inobservable.

---

théories empiriques, aurait pu conduire à les rejeter du côté du calcul ininterprété —à l'opposé des géométries appliquées, « coordonnées », ou « correspondantes », aux lois formelles, familières à la tradition empiriste. C'est chez lui, nous semble-t-il, le cadre même de la distinction qui est refusé, ou ignoré. Et elle l'est à cause de la conception qu'a Poincaré de la géométrie.

32. En fait, quand on lit le mémoire de Riemann, on est frappé par l'absence, dans son texte, de toute trace claire d'idée et de terminologie conventionnalistes. Si la simplicité est évoquée, c'est seulement au sens où on parle de simplicité relative d'hypothèses empiriques alternatives. La tendance est manifestement empiriste. La conventionnalité (en un sens) de la congruence peut avoir été une conséquence de la stipulation du caractère amorphe de l'espace physique comme variété continue. Cependant cela même est incertain si l'on se réfère à la suggestion explicite de Riemann d'avoir à chercher, selon les termes du passage célèbre du §III de son mémoire de 1854, « le fondement (la cause ?) des relations métriques… dans les forces qui opèrent sur (l'espace) » (« es muss … der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in *darauf* wirkenden Kräften gesucht werden. »). Il ne serait guère surprenant que le jeune Poincaré ait réagi à ce qui lui apparaissait chez Riemann comme une prise en compte insuffisante de la conventionnalité de la congruence. Si tel était le cas, alors sa critique viserait à la fois la non-reconnaissance par Riemann de la nature conventionnelle de critères extrinsèques des relations métriques *et* l'idée que l'expérience peut permettre de découvrir la nature euclidienne ou non de l'espace physique.

La séparation, d'essence hilbertienne[33], entre géométrie et physique est d'abord interprétable ontologiquement : les termes géométriques ne se réfèrent pas à la réalité (la géométrie ne prédique rien de la réalité), à la différence des termes physiques, dont ils sont ontologiquement indépendants. Chez Poincaré, il s'agit d'une thèse épistémologique plus encore qu'ontologique. Les termes géométriques ne prédiquent rien d'observationnel. On ne préjuge pas de la réalité : si la référence réelle est possible, elle est en tout cas inobservable[34].

Les notions fondamentales de la mécanique n'ont aucun sens, si on les prend comme absolues. Poincaré a eu la conscience aigüe de cette impossibilité d'observer des positions et mouvements spatiaux absolus, et de l'importance de cette impossibilité pour la philosophie de la science. La non-pertinence totale de l'espace absolu pour l'observation ou l'expérimentation scientifique apparaît comme le fondement dernier du fait que le choix d'une géométrie pour la description des phénomènes physiques est une affaire purement conventionnelle.

Son « principe de relativité » ne pouvait dès lors coïncider avec celui d'Einstein, qui continue à croire à quelque chose comme un espace physique, se révélant plus proche en cela de Riemann, lequel parle toujours de l'« espace », au sens quasiment newtonien d'une réalité physique, réservoir de points, à la fois géométriques et physiques. Poincaré ne saurait en fin de compte adopter la position de Riemann parce qu'elle n'est pas cohérente avec la sienne propre, avec la séparation instituée entre géométrie

33. Poincaré n'a sans doute jamais conçu la géométrie comme une discipline « formelle », de la manière que pourrait suggérer la description de Hilbert. Tout au contraire, on voit bien que, pour lui, elle reste une sorte de science naturelle, disons plutôt, pour éviter toute ambiguïté, concrète. Ce qu'il a de commun avec Hilbert, la disjonction de la géométrie d'avec toute référence ou signification factuelle (et absolue, pour Poincaré), n'a sans doute pas tout à fait le même sens pour lui. En tout cas, cela ne procède pas d'un souci de soustraire la géométrie, discipline qui a la teneur et l'unité d'une science rationnelle, à l'épreuve de l'expérience, donc de la relativité empirique (Reichenbach parle de « relativité de la géométrie »). Il n'y a, et il ne saurait y avoir, rien d'empiriquement vérifiable en géométrie. C'est, relativement à la tradition empiriste, une autre idée de la géométrie, de sa structure, de ses pouvoirs, de sa fonction dans la science.

34. *Voir, dans Science et hypothèse,* ch. VII, Le mouvement absolu et le mouvement relatif, la fameuse présentation, qui a suscité un scandale, des hypothèses ptoléméenne et copernicienne (cf. note 7). Il n'y a pas de sens à énoncer que « la terre tourne autour du soleil… », mais seulement à dire qu'« il est plus commode de supposer que la terre tourne ». La raison en est que l'espace absolu n'a « aucune existence objective ».

On soulignera l'originalité et la profondeur de cette conception. Tant Galilée que Newton, ou même Einstein, ont travaillé avec une certaine conception de l'espace comme d'une réalité physique. Ils pensent intuitivement, on pourrait dire instinctivement, que le mouvement a lieu dans l'espace, et se trouve déterminé relativement à cet espace. Poincaré pense qu'on peut, sans dommage pour la théorie physique, « se dispenser de cette hypothèse », et faire l'économie du support spatial.

et physique, et l'indifférence à la notion d'espace physique comme intermédiaire entre espace géométrique et espace représentatif.

Il n'est pas interdit de penser qu'il y avait peut-être aussi à cela une raison plus cachée, que peut seulement rendre visible l'histoire des mathématiques.

Il n'y avait pas de place pour le schéma de Klein dans la géométrie de Riemann.

Selon Klein, une géométrie est un espace, ou un ensemble de points, avec une structure, et les applications bijectives de l'espace sur lui-même qui conservent la structure forment un groupe, qu'on peut appeler groupe des automorphismes.

Selon Riemann, un automorphisme d'un espace riemannien est une application de l'espace sur lui-même conservant la distance, et il peut arriver que le seul automorphisme de l'espace soit l'identité. D'après Riemann et Helmholtz, seuls les espaces de courbure constante peuvent avoir « suffisamment » d'automorphismes. Aussi la géométrie elliptique, une géométrie à courbure constante positive, a été pendant longtemps appelée « géométrie riemannienne », de même que la géométrie hyperbolique a été appelée « lobatchevskienne » (ou « bolyaienne », ou « gaussienne »).

D'abord élaboré comme un principe de classification des géométries existantes et une aide, le programme de Klein finit par promouvoir l'idée que la géométrie peut être *définie* comme théorie des invariants d'un groupe. Quant à Riemann[35], il travaillait à l'intérieur d'une tradition géométrique plus ancienne que celle de Klein et du programme d'Erlangen. Il n'y a pas de coordonnées, ni de mouvements chez Euclide — pas plus qu'il n'y en a dans la formulation moderne, hilbertienne, des fondements de la géométrie. On ne vérifie pas la congruence des triangles en se donnant la peine de mouvoir le plan entier, une procédure inconcevable pour Euclide. Ce dont on a besoin, c'est de comparaisons de distances, et Riemann introduit les mesures de longueur sur les courbes. L'existence d'un groupe de mouvements conservant la congruence, dans les cas d'Euclide et de Hilbert, est une conséquence quasi accidentelle, *a posteriori*. Les coordonnées et les applications jouent un rôle secondaire en géométrie. C'est avec Klein qu'elles deviennent objet primordial, jusqu'à procurer la définition de son essence.

Il faudra attendre Elie Cartan pour apercevoir que les deux points de vue, de Klein et de Riemann, loin d'être irréconciliables, pouvaient être unifiés dans une grande synthèse susceptible de procurer un cadre géométrique adéquat aux théories les plus générales de la mécanique, relativistes

35. Comme l'a remarqué avec une grande pertinence D. Laugwitz : Laugwitz, Detlef, *Bernhard Riemann, 1826-1866, Turning points in the philosophy of mathematics*, Boston-Berlin, 1999, p. 249-250.

ou non. L'inscription dans la tradition géométrique de Plücker-Lie, qui éloignait Poincaré de la voie riemannienne, devait aussi l'écarter de celle qui allait conduire aux accomplissements einsteiniens. Telle est la part de l'histoire, irréductible même à celle du génie.