NECESIDAD MATEMÁTICA Y MUNDOS POSIBLES

*Emilio Méndez Pinto**

RESUMEN: En este trabajo se amplían algunas tesis expuestas en "Sobre proposiciones *a priori* y contingentes y *a posteriori* y necesarias considerando teoremas geométricos elementales". En particular, se introducen las nociones de necesidad, posibilidad, imposibilidad y contingencia según la concepción de Ramsey en sus escritos de lógica matemática y filosofía de las matemáticas.

MATHEMATICAL NECESSITY AND POSSIBLE WORLDS

ABSTRACT: In this work some theses exposed in "Sobre proposiciones *a priori* y contingentes y *a posteriori* y necesarias considerando teoremas geométricos elementales". In particular, the notions of necessity, possibility, impossibility, and contingency are introduced according to Ramsey's conceptions in his writings on mathematical logic and philosophy of mathematics.

PALABRAS CLAVE: lógica modal, Ramsey.
KEY WORDS: modal logic, Ramsey.

RECEPCIÓN: 16 de enero de 2017.
APROBACIÓN: 25 de marzo de 2019.
DOI: 10.5347/01856383.0130.000295789

* Politólogo del ITESM-CCM.

NECESIDAD MATEMÁTICA Y MUNDOS POSIBLES

En un artículo publicado en esta revista[1] sostuve que algunas proposiciones de la geometría euclidiana son *a priori* y contingentes a la vez.[2] Esto significa que la verdad de algunas proposiciones de la geometría euclidiana no requiere una demostración fáctica o empírica y que, al mismo tiempo, tal verdad es falsa en algún mundo posible.

También sostuve que algunas proposiciones de la geometría no euclidiana (consideré particularmente la geometría elíptica) son *a posteriori* y necesarias a la vez. Esto significa que la verdad de algunas proposiciones de la geometría no euclidiana requiere ser demostrada fácticamente, y que, al mismo tiempo, tal verdad es verdadera en todos los mundos posibles.

En dicho trabajo hice cuatro cosas más. En primer lugar, mostré que hay contraejemplos a la afirmación de Kripke de que "un enunciado matemático, si es verdadero, es necesario".[3] Para ello asumí, como también haré aquí, que los enunciados geométricos verdaderos pertenecen a la clase de los enunciados matemáticos verdaderos.

[1] Emilio Méndez Pinto, "Sobre proposiciones *a priori* y contingentes y a posteriori y necesarias considerando teoremas geométricos elementales", *Estudios*, 114 (2015), pp. 175-182.

[2] Aunque según los modelos semánticos modales bidimensionales, que subrayan la divergencia entre las distinciones modales y las epistemológicas, no puede haber proposiciones *a priori* y contingentes a la vez, ni proposiciones *a posteriori* y necesarias a la vez.

[3] Saul Kripke, *El nombrar y la necesidad*, 2005, México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, trad. de Margarita Valdés, p. 156.

Estudios 130, pp. 7-25, vol. XVII, otoño 2019.

En segundo lugar, mostré que algunas proposiciones de la geometría euclidiana pueden ser *a priori* incluso si se considera que la verdad o falsedad de tales proposiciones es una cuestión hipotética o de hecho, y no una cuestión necesaria o de razón. Esta fue la postura, por ejemplo, de Gauss y de Riemann con respecto a la verdad o falsedad de las proposiciones geométricas euclidianas.[4] Pero, en mi opinión (y aquí creo seguir a Kripke), no hay ninguna contradicción, ni siquiera una oculta, entre sostener, por un lado, que la verdad o falsedad de los enunciados geométricos euclidianos es una cuestión sujeta a una investigación empírica sobre la estructura geométrica del espacio (por utilizar la terminología de Carnap) y, por el otro, que uno pueda saber *a priori* que el enunciado "La suma de los ángulos internos de un triángulo es = 180°" es verdadero. Esto, porque si definimos el conocimiento *a priori* como aquel cuya verdad no requiere una demostración fáctica (o como algo relevantemente similar), puede perfectamente seguirse que un conocimiento *puede* ser *a priori* sin que por ello *tenga* que serlo.

En tercer lugar, señalé que las definiciones de lo *a priori* como un conocimiento cuya verdad no requiere una demostración fáctica y de lo *a posteriori* como un conocimiento cuya verdad requiere una demostración fáctica son respectivamente equivalentes a las definiciones de Frege para los mismos términos, a saber, que una verdad es *a priori* en tanto que sea posible derivar su prueba exclusivamente de leyes generales que por sí mismas no necesiten o no admitan prueba alguna, mientras que una verdad es *a posteriori* en tanto que sea imposible construir una prueba de ella sin incluir una apelación a los hechos.

En cuarto y último lugar, di cuenta de todo lo anterior recurriendo a las definiciones aristotélicas y leibnizianas (que son equivalentes entre sí) de "verdad contingente" y "verdad necesaria" (con sus respectivas contrapartes de "verdad posible" y de "verdad imposible").

[4] Sobre ambos casos hay suficientes evidencias históricas. Para el caso de Gauss, que no publicó nada sobre el tema, véase Timothy Gowers (ed.), "Carl Friedrich Gauss", en *The Princeton companion to mathematics*, 2008, Princeton, Princeton University Press, pp. 755-757 y Rudolf Carnap, "The structure of space", en *An introduction to the philosophy of science*, 1995, Nueva York, Dover, pp.125-131. Para el caso de Riemann, basta consultar Bernhard Riemann, "On the hypotheses which lie at the bases of geometry", en Stephen Hawking, *God created the integers*, 2007, Filadelfia, Running Press, pp. 1031-1042.

Aunque de manera incidental me ocuparé de algunos aspectos de los primeros tres puntos, en este trabajo desarrollaré a detalle el cuarto punto en el siguiente sentido: extrapolaré los conceptos de "verdad contingente", "verdad necesaria", "verdad posible" y "verdad imposible" a las concepciones que sobre los mismos términos tuvo Ramsey en sus trabajos de lógica matemática (en particular, en su trabajo más filosóficamente significativo sobre el tema: *Los fundamentos de las matemáticas)*.[5]

Creo que esta extrapolación no solo ayudará a aclarar algunos puntos de mi trabajo anterior, sino que, lo más importante, contribuirá a una discusión más rica sobre el tema.

Sobre la distinción entre significatividad y veracidad

Antes de comenzar, es fundamental decir algo sobre la importante distinción entre la significatividad de las proposiciones matemáticas y la veracidad de las proposiciones matemáticas. Esto es relevante para nuestra exposición, porque si bien toda proposición matemática *verdadera* es *significativa,* no toda proposición matemática *significativa* es *verdadera*. Esto quiere decir que, al menos en las matemáticas (aunque creo firmemente que también sucede en el lenguaje en general), "significatividad" y "veracidad" no son sinónimos intercambiables, y por tanto, si bien en cualquier proposición matemática verdadera está implícita, *a fortiori*, su significatividad, no ocurre que en cualquier proposición matemática significativa esté implícita su veracidad.

En pocas palabras, hay enunciados matemáticos que, pese a ser falsos, son significativos (o, si se quiere, enunciados matemáticos que, pese a que son significativos, son falsos).

Es sabido que en la teoría internista del significado (lo que Kripke llama la teoría de Frege-Russell), el significado de una palabra o de una expresión está íntimamente conectado con el sentido, de tal suerte que, por ejemplo, un nombre propio desprovisto de sentido no significa nada.

[5] Frank P. Ramsey, *The foundations of mathematics and other logical essays*, 2013, Connecticut, Martino Publishing, pp. 1-61.

En este punto, se conocen bien algunos ejemplos clásicos, como el siguiente: si alguien profiere la expresión "Aristóteles", no está significando nada; si en cambio alguien profiere las expresiones "Aristóteles fue sabio",[6] "Aristóteles fue un filósofo estagirita", "Aristóteles fue el maestro de Alejandro Magno", etc., está significando algo. Es así que, según la teoría internista del significado, los nombres propios tienen connotación. (En la teoría rival, iniciada por John Stuart Mill, los nombres propios tienen denotación, pero no connotación.)

La teoría internista del significado tiene, entre otros, dos grandes problemas, de los cuales en mi opinión resuelve parcialmente uno y deja sin resolver el otro.

El problema de la identidad

Asumamos una identidad simple, como $A = B$. En *Los fundamentos de las matemáticas,* Ramsey señaló que, si A y B son nombres de la misma cosa, tenemos ante nosotros una tautología (porque cualquier cosa es idéntica a sí misma, y decir sobre A que es idéntica a sí misma equivale a no decir nada, pues no nos dice nada sobre A).[7] Si, por otro lado, A y B son nombres de cosas distintas, tenemos ante nosotros una contradicción (porque es imposible que dos cosas distintas entre sí sean idénticas entre sí. Si, siguiendo la terminología de Hempel, C denota cierta clase y n denota el número natural que tiene tal clase, entonces $n(C) = 2$ significa que, si C contiene dos objetos, entonces son mutuamente distintos, mientras que $n(C) = 1$ significa que, si C contiene dos objetos, entonces son mutuamente idénticos, lo que nos regresa a una situación tautológica).

Aquí hemos entendido los términos de tautología y de contradicción en el sentido de Ramsey. Ni las tautologías ni las contradicciones

[6] O, en un sentido desprovisto de temporalidad, "Aristóteles es sabio".

[7] Salvo, desde luego, que $A = A$. En lo particular, comparto por completo la tesis quineana según la cual "todo es idéntico a sí mismo" es una característica general de la manera de ser de nuestro mundo, y por tanto "$A = A$" no es una verdad analítica, sino una verdad sintética. Véase Gilbert Harman, *Significado y existencia en la filosofía de Quine*, 1983, México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, trad. de Hugo Margáin y Cristina Orozco.

son proposiciones genuinas (es decir, proposiciones relativas a los hechos del mundo), sino "casos degenerados". Esto porque, en la teoría (modal) de Ramsey, las tautologías expresan acuerdo con todas las posibilidades de verdad, mientras que las contradicciones no expresan acuerdo con ninguna posibilidad de verdad.

Informalmente, "llueve o no llueve" es una tautología porque expresa acuerdo con todas las posibilidades de verdad: no se sabe nada sobre el clima si se sabe que está lloviendo o que no está lloviendo. Por el otro lado, "ni llueve ni no llueve" es una contradicción en el sentido de que tal proposición no representa un estado de cosas *posible* cuya existencia pueda ser afirmada.[8]

Formalmente, considerando un solo argumento, la tautología "*p* o no *p*" significa que si *p* es verdadera, entonces la proposición "*p* o no *p*" es verdadera, mientras que si *p* es falsa, entonces la proposición "*p* o no *p*" es igualmente verdadera. Por el otro lado, la contradicción "*p* no es verdadera ni falsa" significa que si *p* es verdadera, entonces "*p* no es verdadera ni falsa" es una proposición falsa, mientras que si *p* es falsa, entonces la proposición "*p* no es verdadera ni falsa" es igualmente falsa.

En pocas palabras, ya que "*p* o no *p*" concuerda con todas las posibilidades de verdad, será una proposición verdadera independientemente de la verdad o de la falsedad de *p*, mientras que ya que "*p* no es verdadera ni falsa" no concuerda con ninguna posibilidad de verdad, será una proposición falsa independientemente de la verdad o de la falsedad de *p*.

Si llueve, es verdad que "llueve o no llueve"; si no llueve, es verdad que "llueve o no llueve"; si llueve, es falso que "ni llueve ni no llueve"; si no llueve, es falso que "ni llueve ni no llueve". Por lo tanto, la tautología "llueve o no llueve" concuerda con todas las posibilidades de verdad: si llueve, es verdadera; si no llueve, también es verdadera. En cambio, la contradicción "ni llueve ni no llueve" no concuerda con ninguna posibilidad de verdad: si llueve, es falsa; si no llueve, también es falsa.

[8] Ramsey, *op. cit.*, p. 10.

Claramente, al negar una tautología se produce una contradicción y viceversa. Por ejemplo, al negar la tautología '$p = p$' se produce la contradicción ~'$p = p$', que equivale a '$p \neq p$', y al negar esta contradicción se produce la tautología ~~'$p = p$', que equivale a '$p = p$'. Y esta regla vale para tautologías y contradicciones de cualquier grado de complejidad.

Si entiendo bien a Ramsey, creo que a esto es a lo que se refiere cuando dice que una tautología expresa acuerdo con todas las posibilidades de verdad y que una contradicción no expresa acuerdo con ninguna posibilidad de verdad (más adelante veremos que los conceptos de "verdad contingente" y de "verdad posible" encajan a la perfección en esta teoría).

Este problema de la identidad es resuelto por la teoría internista del significado de la siguiente manera.[9] El significado de "Aristóteles" se identifica, por ejemplo, con el significado de "el maestro de Alejandro Magno". Así pues, el significado de un nombre propio se identifica con el significado de una descripción definida asociada con ese nombre. Pero, y aquí está la clave (según la teoría internista del significado), asociamos descripciones definidas diferentes con nombres propios diferentes, de tal suerte que la descripción definida "el maestro de Alejandro Magno" no la asociamos ni con Sócrates ni con Platón ni con ningún nombre propio distinto a "Aristóteles". Tanto el nombre propio como la descripción definida ("Aristóteles" y "el maestro de Alejandro Magno", respectivamente) denotan lo mismo (a Aristóteles), pero saber que el único objeto que posee el atributo de ser Aristóteles es idéntico al único objeto que posee el atributo de ser el maestro de Alejando Magno no es un conocimiento trivial. Entonces la identidad "$A = B$" ya no es un problema porque A posee una propiedad definida (ser Aristóteles) distinta a la propiedad definida de B (ser el maestro de Alejandro Magno). El único objeto (A) que posee el atributo de ser Aristóteles es idéntico al único objeto (B) que posee la propiedad de ser el maestro de Alejandro Magno.

[9] La exposición de esta solución está tomada de Manuel Pérez Otero, *Esbozo de la filosofía de Kripke*, 2006, Barcelona, Montesinos.

Antes dije que la teoría internista del significado resuelve este problema de manera parcial.[10] Esto, porque no solo sucede que incluso alguien que no sepa que Aristóteles fue el maestro de Alejandro Magno se seguirá *refiriendo* a Aristóteles cuando profiere la expresión "Aristóteles", sino que se seguirá refiriendo a Aristóteles incluso si Aristóteles nunca hubiese sido el maestro de Alejandro Magno. Esta última cuestión involucra problemas que no consideraré aquí porque ello nos desviaría de nuestro tema (problemas relativos, por ejemplo, a la identidad personal al paso del tiempo y a las propiedades esenciales y accidentales de las cosas y de las personas).

Lo único que diré es que, *prima facie* (intuitivamente, si se quiere), sobre "Aristóteles fue el maestro de Alejandro Magno" tiene sentido decir que podría no haber sido el caso; sobre "Aristóteles no fue el maestro de Alejandro Magno" no tiene sentido decir que podría no haber sido el caso; sobre "Aristóteles fue el maestro de Alejandro Magno" no tiene sentido decir que podría haber sido el caso y sobre "Aristóteles no fue el maestro de Alejandro Magno" tiene sentido decir que podría haber sido el caso.

Después de esta larga digresión sobre el problema de la identidad, toca decir algo acerca del problema que, en mi opinión, deja sin resolver la teoría internista del significado.

Sobre la significatividad de enunciados matemáticos falsos

Como ya vimos, la teoría internista del significado establece una íntima relación entre *significado* y *sentido* (en el sentido fregeano del término). Tanto así que, en la versión más radical de la teoría, una palabra carente de sentido carece de significado. Pero aquí surge una cuestión:[11] ¿qué tan íntimamente relacionada está la *verdad* con el *sentido?* Para el caso de las matemáticas, ¿qué tan íntimamente relacionada está la verdad de una proposición matemática cualquiera con su sentido?

[10] En este punto creo seguir a Kripke.

[11] Esta cuestión fue magistralmente planteada por Paul Benacerraf. Véase Benacerraf, *Verdad matemática*, edición digital, México, Biblioteca Digital del ILCE, UNESCO, trad. de Emilio Méndez Pinto.

Si una proposición matemática falsa careciera, por ese solo hecho, de sentido (o, equivalentemente, si una proposición matemática sin sentido fuese automáticamente falsa), entonces bien podría decirse que en las proposiciones matemáticas existe una íntima relación entre sentido y verdad. Pero, habida cuenta de que las cosas no son así (a continuación expondré por qué no son así), lo más que podemos decir es que, siguiendo con la analogía de las relaciones interpersonales, entre la verdad y el sentido hay una relación cercana, pero no íntima.

En "The formalist foundations of mathematics",[12] von Neumann escribió que

> "1 + 1 = 2" es significativa, pero también lo es "1 + 1 = 1" independientemente del hecho de que una es verdadera y la otra falsa. Por otro lado, combinaciones como "1 + → = 1" y "+ + 1 = →" son insignificativas.

Aquí tenemos tres tipos de proposiciones (o de combinaciones, siguiendo a von Neumann): *1)* "1 + 1 = 2", que es una proposición significativa y verdadera; *2)* "1 + 1 = 1", que es una proposición significativa y falsa, y *3)* "1 + → = 1" y "+ + 1 = →", que no son proposiciones ni verdaderas ni falsas, sino simplemente insignificativas.

Sobre el primer tipo de proposición no tenemos nada que decir, así que lo dejaremos de lado. En cambio, sobre los tipos *2)* y *3)* hay que notar varias cosas.

Primero, que la proposición "1 + 1 = 1" tiene el suficiente sentido como para hacernos saber que es falsa. Desde luego, podemos decir que la proposición "1 + 1 = 1" es *un sinsentido*, del mismo modo que podemos decir que la proposición "El padre de Napoleón fue un robot fabricado por aborígenes australianos" es un sinsentido. Pero esto es una mera forma de hablar. En realidad, comprendemos el sentido de ambas proposiciones en la medida en la que comprendemos *qué se quiere decir* con ambas proposiciones. Y es justamente esta comprensión la que nos permite discernir, al menos para estos ejemplos, lo verdadero de lo falso.

[12] John von Neumann, "The formalist foundations of mathematics", en Paul Benacerraf y Hilary Putnam (comps.), *Philosophy of mathematics*, 1998, Cambridge, Cambridge University Press, p. 63. La traducción del pasaje es mía.

Segundo, y relacionado con lo anterior, las proposiciones "1 + → = 1" y "+ + 1 = →" no son ni verdaderas ni falsas justamente porque son insignificativas. Por lo tanto, de la insignificatividad de una proposición se sigue que tal proposición no es ni verdadera ni falsa, y de la significatividad de una proposición se sigue que tal proposición es verdadera o falsa.

Tercero, y según lo anterior, la significatividad no es un criterio válido para determinar la verdad o la falsedad de una proposición (porque hay proposiciones significativas tanto verdaderas como falsas), pero la verdad o la falsedad de una proposición sí es un criterio válido para determinar su significatividad (porque no puede haber proposiciones verdaderas o falsas insignificativas).

Habiendo dicho todo esto sobre la relación entre veracidad y significatividad, toca el turno de exponer las tesis sustanciales de este trabajo. En lo que sigue mostraré que, adoptando las concepciones de Ramsey, hay proposiciones geométricas que son contingentemente verdaderas (falsas en algún mundo posible), posiblemente verdaderas (verdaderas en algún mundo posible), necesariamente verdaderas (verdaderas en todos los mundos posibles) e imposiblemente verdaderas (falsas en todos los mundos posibles).

Dejaré de lado tanto el carácter epistemológico como el carácter lógico de las proposiciones que consideraremos. Así, para nuestros propósitos será irrelevante si una proposición determinada es *a priori* o *a posteriori*, o si es analítica o sintética.

Verdad contingente y verdad posible

Antes de proseguir es necesario adaptar, por así decirlo, los conceptos de "verdad contingente" y de "verdad posible" a la teoría de Ramsey. Ya dijimos que, según esta teoría, una tautología concuerda con todas las posibilidades de verdad, mientras que una contradicción no concuerda con ninguna posibilidad de verdad. *Prima facie,* parecería que una tautología es una verdad necesaria en todos los mundos posibles (o una verdad cuyo contrario es imposible), mientras que una contradicción es una afirmación falsa en todos los mundos posibles (o una afirmación cuyo contrario es necesario).

Pero en este punto nos enfrentamos a dos serios problemas. En primer lugar, la identificación entre tautologías y verdades necesarias, por un lado, y entre contradicciones y verdades imposibles, por el otro, no funciona bien para enunciados matemáticos. En segundo lugar, las mismas identificaciones no funcionan bien para enunciados de las ciencias naturales. Estas afirmaciones requieren ser explicadas.

El caso de los enunciados matemáticos

Consideremos el enunciado

$$1)\ a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Sobre la necesidad de este enunciado no hay nada que decir, pero ¿es una tautología? La respuesta dependerá de si consideramos a *1)* como una verdad analítica o sintética.[13] La célebre "contradicción irresoluble" de Poincaré tiene una íntima relación con este problema. En "Sobre la naturaleza del razonamiento matemático", Poincaré escribió lo siguiente:

> La mera posibilidad de la ciencia matemática parece ser una contradicción irresoluble. Si esta ciencia es solamente deductiva en apariencia, ¿de dónde deriva aquel perfecto rigor que nadie desafía? Si, por el contrario, todas las proposiciones que enuncia pueden derivarse en orden por las reglas de la lógica formal, ¿cómo es que las matemáticas no se reducen a una gigantesca tautología? El silogismo no puede enseñarnos nada esencialmente nuevo, y si todo debe surgir del principio de identidad, entonces todo debería poder ser reducido a ese principio. ¿Habremos entonces de admitir que las enunciaciones de todos los teoremas

[13] Parecería que aquí me estoy contradiciendo, porque en una nota anterior dije que, siguiendo a Quine (o al menos a la interpretación que hace Harman de la filosofía de Quine), puedo perfectamente aceptar que incluso un enunciado tan radicalmente tautológico como $A = A$ es un enunciado sintético. En mi defensa diré que, no obstante haber *sugerido* que el enunciado $a + (b + c) = (a + b) + c$ puede ser analítico o sintético, los resultados de mi indagación muestran (sea lo que sea "mostrar algo" en filosofía) que tal enunciado no puede ser analítico.

> con los que están llenos tantos volúmenes son solamente modos indirectos de decir que A es A?[14]

En efecto, si *1)* es un teorema deductivo *solamente* en apariencia (habida cuenta del papel que en su demostración desempeña la inducción matemática), ¿cómo es que es una verdad necesaria? Por el otro lado, si *1)* puede derivarse por las reglas de la lógica formal, ¿cómo es que no se reduce a una tautología, en el sentido de que podemos perfectamente considerarlo como una proposición *sintética* (a saber, una proposición que nos dice algo sobre el mundo)?

En mi opinión, la proposición $a + (b + c) = (a + b) + c$ tiene un carácter sintético, y no uno analítico. Esto, por lo siguiente.

En su ensayo "¿Es la matemática puramente lingüística?", Russell escribió:

> Toda demostración matemática consiste meramente en decir en otras palabras parte o todo lo que se dice en las premisas. Si de un teorema *A* se deduce un teorema *B*, debe ser el caso que *B* repite *A* (o parte de él) en otros términos. Y la verdad de *A* debe resultar de los significados de las palabras utilizadas al establecerlo.[15]

Llamemos a esto "el método de Russell para decidir si un teorema matemático es analítico". A continuación me gustaría reproducir textualmente lo que en otro trabajo he dicho sobre este tema.[16]

"Decimos que un teorema matemático *T* es analítico si:

1) De *T* se deduce un teorema *U* que repite a *T* (o parte de *T*) en otros términos y la verdad de *T* resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

Diremos que *1)* es la condición necesaria para la analiticidad de *T*.

[14] Henri Poincaré, *Ciencia e hipótesis*, edición digital, México, Biblioteca Digital del ILCE, UNESCO, trad. de Emilio Méndez Pinto.

[15] Bertrand Russell, *Análisis filosófico*, 1999, Barcelona, Paidós, trad. de Francisco Rodríguez Consuegra, pp. 124-125.

[16] Méndez Pinto, *Un método para decidir si un teorema matemático es analítico o sintético*, edición digital, México, Biblioteca Digital del ILCE, UNESCO.

Decimos que un teorema matemático *T* es analítico si:

2) De *T* se deduce una serie de teoremas *U, V, W,…* que repiten *T* (o parte de *T*) en otros términos y la verdad de *T* resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

Para que *2)* sea una condición necesaria y suficiente para la analiticidad de *T* (es decir, para que sea una condición de la forma "si y solo si"), debe ser el caso que *U= V, U = W, V, = W,…*

Entonces, decimos que un teorema matemático *T* es analítico si y solo si:

3) De *T* se deduce una serie de teoremas *U, V, W,…* tales que *T = U, T = V, T = W,…* y tales que *U= V, U = W, V, = W,…* y la verdad de *T* resulta de los significados de las palabras empleadas al establecerlo.

En *3),* la condición de que *T = U, T = V, T = W,…* cumple el propósito de la repetición de *T* en otros términos, mientras que la condición de que *U= V, U = W, V, = W,…* garantiza la analiticidad de *T* asumiendo que las condiciones expuestas en *2)* sean condiciones necesarias para la analiticidad de *T*. Si no se cumple que *U= V, U = W, V, = W,…*, entonces *T* no es un teorema analítico, incluso si se cumplen las condiciones expuestas en *2*).

En efecto, no es difícil imaginar casos en los que se cumple la primera condición (es decir, que *T = U, T = V, T = W,…*) pero no la segunda (es decir, que *U= V, U = W, V, = W,…*). Considérese una fórmula con infinitas proposiciones,[17] como $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$. Si *U* es $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 5^2 = \frac{1}{6}\ 5(5 + 1)(2\times 5 + 1)$ y *V* es $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2 = \frac{1}{6}\ 6(6 + 1)(2\times 6 + 1)$ (es decir, si tanto *U* como *V* repiten a *T* en otros términos), entonces tales deducciones cumplen con la primera condición *pero no con la segunda*, ya que inmediatamente se ve que $U \neq V$, es decir, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 5^2 = \frac{1}{6}5(5+1)(2\times 5+1) = 55,$$

mientras que

[17] El término "infinitas proposiciones" es de Hilbert. Véase David Hilbert, "On the infinite", en Jean van Heijenoort, *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931*, 1967, Cambridge, Harvard University Press, pp. 367-392.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 6^2 = \frac{1}{6}6(6+1)(2\times 6+1) = 91.$$

Por lo tanto, el teorema $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$ no es analítico según las condiciones expuestas en 3).

Decimos que un teorema matemático T es sintético si sus respectivas deducciones $U, V, W, \ldots$ son tales que $U \neq V$, $U \neq W$, $V \neq W, \ldots$, *independientemente de si son tales que* $T = U$, $T = V$, $T = W, \ldots$. (Ya vimos que el teorema $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}\, n(n+1)(2n+1)$ no es analítico porque, a pesar de que se cumple que $T = U$, $T = V$, $T = W, \ldots$, también se cumple que $U \neq V$, $U \neq W$, $V \neq W, \ldots$)

Tampoco es difícil imaginar casos en los que la condición de que $U \neq V$, $U \neq W$, $V \neq W, \ldots$ no se cumple. En tales casos, si se cumple que $T = U$, $T = V$, $T = W, \ldots$, el teorema será analítico. Ejemplos de esto son infinitos teoremas aritméticos con un número finito de proposiciones."[18]

Sostengo que el teorema $a + (b + c) = (a + b) + c$ es, en el sentido recién expuesto, *sintético:* si bien los teoremas derivados $U = a + (b + 1) = (a + b) + 1$ y $V = a + (b + 2) = (a + b) + 2$ repiten a $T = a + (b + c) = (a + b) + c$ en otros términos, también es verdad que, *independientemente de que* $T = U$, $T = V$ (nuestra condición de *repetibilidad),* también es verdad que $U \neq V$. (Desde luego, pueden hacerse "trampas" para conseguir que $U = V$, pero, si no hacemos "trampa", es decir, si durante toda nuestra inducción conservamos los valores originales que dimos para a y para b, entonces se cumplirá que $U \neq V$.)[19] 21

He aquí el carácter *sintético* de la proposición $a + (b + c) = (a + b) + c$, y por tanto, la imposibilidad de darle un carácter tautológico. Si bien es una proposición *necesaria*, no es una proposición *tautológica*,

[18] Porque mediante una transformación tautológica, puede cambiarse la forma de la expresión sin alterar su significado.

[19] De hecho, aquí "hacer trampa" equivale a violar el principio de inducción completa (o matemática).

y entonces no es válido que establezcamos una relación de sinonimia entre “necesidad” y “tautología”.

El caso de los enunciados de las ciencias naturales

Consideremos el enunciado

2) El agua es H_2O.

Según la identificación que antes supusimos entre “verdades necesarias” y “verdades tautológicas” (que ya vimos que, siguiendo lo que aquí llamamos “el método de Russell para decidir si un teorema matemático es analítico”, no es válida para todo enunciado matemático), ¿qué hay que decir sobre la proposición “El agua es H_2O” con respecto a esta identificación?

Siguiendo a Burgess,[20] digamos que “la posibilidad de *A* es la no necesidad de la negación de *A*, y la necesidad de *A* es la imposibilidad de la negación de *A*”. Formalmente: si $\Diamond$ denota “posiblemente” y $\Box$ denota “necesariamente”, $\Diamond A$ significa $\neg\Box\neg A$ y $\Box A$ significa $\neg\Diamond\neg A$. A partir de esto podemos decir que, si una verdad posible es aquella verdad cuyo contrario es contingente y una verdad necesaria es aquella verdad cuyo contrario es imposible, en términos de Burgess lo anterior sería como sigue: la contingencia de *A* es la posibilidad de no *A* y la posibilidad de *A*, mientras que la imposibilidad de *A* es la necesidad de no *A*.

Lo que nos interesa es saber si la proposición “El agua es H_2O” es una proposición necesariamente verdadera o contingentemente verdadera (para este caso, descartamos como absurdas las modalidades de “posibilidad” e “imposibilidad”, ya que nadie *podría sostener* que la proposición “El agua es H_2O” es meramente *posible* o directamente *imposible*, habida cuenta de que tal proposición ha sido *científicamente comprobada)*. En otras palabras, nos interesa saber si la proposición “El agua es H_2O” es tal que su negación es imposible o tal que su negación es posible. En realidad, todo depende del *tipo de necesidad* que consideremos.

[20] John Burgess, *Philosophical logic*, 2009, Princeton, Princeton University Press, p. 40.

Si consideramos la necesidad *lógica,* por ejemplo, la proposición "El agua es H_2O" no es necesariamente verdadera, sencillamente porque la proposición "El agua es XYZ" (donde "XYZ" es la composición química del agua), por ejemplo,[21] no supone ninguna contradicción lógica. Por lo tanto, es *lógicamente posible* que el agua fuese XYZ,[22] y entonces la proposición "El agua es H_2O" es una verdad *lógicamente contingente* (porque la proposición "El agua es XYZ" es una verdad lógicamente posible).

Pero si consideramos la necesidad *metafísica,*[23] la proposición "El agua es H_2O" es necesariamente verdadera, porque la proposición "El agua es XYZ" es metafísicamente imposible (es decir, *la sustancia* que llamamos "agua" siempre ha sido, es y será H_2O; si ante nosotros tenemos un vaso lleno con un líquido con todas las propiedades observables, olfativas, gustativas, etc., del agua pero cuya composición química es distinta de H_2O (por ejemplo, XYZ), entonces ante nosotros no tenemos un vaso de "agua"). Por lo tanto, es *metafísicamente imposible* que el agua fuese XYZ, y entonces la proposición "El agua es H_2O" es una verdad *metafísicamente necesaria* (porque la proposición "El agua es XYZ" es una verdad metafísicamente imposible).

Ramsey (otra vez)

Como vimos con los ejemplos anteriores, la identificación entre verdades necesarias y tautologías, por una parte, y entre verdades imposibles y contradicciones, por la otra, nos conduce a algunos problemas

[21] El ejemplo es de Hilary Putnam, "El significado de 'significado'", en Hilary Putnam, *Mente, lenguaje y realidad*, 2012, México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, trad. de Jorge G. Flematti, pp. 165-241.

[22] También es *epistemológicamente posible* que el agua tuviese la composición química XYZ (o cualquier composición química distinta a la que *científicamente* tiene, a saber, dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno). Esto porque, así como existe, de acuerdo con Kripke, una distinción entre *necesidad lógica* y *necesidad metafísica*, también existe una distinción entre *necesidad epistemológica* y *necesidad metafísica*.

[23] Algo es metafísicamente necesario si y solo si, cualquier cosa que fuese el caso (lógico, epistemológico, conceptual), aquello seguiría siendo el caso. Para esta definición de necesidad metafísica, véase Timothy Williamson, *La filosofía de la filosofía*, 2016, México, Instituto de Investigaciones Filosóficas, UNAM, trad. de Miguel Ángel Fernández, p. 214.

considerables. Pero esto no debe desanimarnos. Si bien ya no podemos considerar "verdad necesaria" y "tautología", etc., como sinónimos intercambiables, sigue estando a salvo de toda objeción la relación entre *definiendum* y *definiens* para los conceptos de "verdad necesaria" y "verdad imposible". Si, por ejemplo, "*e*" es el *definiendum* del *definiens* "$\lim_{n\to\infty} (1+1/n)^n$",[24] entonces análogamente "verdad necesaria" es el *definiendum* (expresión simple) del *definiens* (expresión compleja) "proposición que expresa acuerdo con todas las posibilidades de verdad". De modo igualmente analógico, podemos definir "verdad imposible" como "proposición que no expresa acuerdo con ninguna posibilidad de verdad".

Ahora estamos en posición de hacer dos cosas que prometí arriba: primero, adaptar los conceptos de "verdad contingente" y "verdad posible" a la teoría de Ramsey; segundo, ofrecer ejemplos de proposiciones geométricas contingentemente verdaderas, necesariamente verdaderas, etc., a partir de las concepciones ramseyanas sobre las nociones de "verdad contingente", "verdad necesaria", etc. (esto último lo complementaré con las concepciones aristotélicas y leibnizianas para las mismas nociones, con el propósito de mostrar su mutua equivalencia).

Si, según la teoría de Ramsey, una verdad necesaria concuerda con todas las posibilidades de verdad, mientras que una verdad imposible no concuerda con ninguna posibilidad de verdad, podemos decir que, según los criterios y la terminología de esta teoría, una verdad *contingente* no concuerda con alguna posibilidad de verdad, mientras que una verdad *posible* concuerda con alguna posibilidad de verdad. Equivalentemente, el contrario de una verdad *contingente* concuerda con alguna posibilidad de verdad, mientras que el contrario de una verdad *posible* no concuerda con alguna posibilidad de verdad.

Consideremos ahora los siguientes cuatro enunciados:

1) La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°.

2) No es el caso que "La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180°".

3) 6 + 6 = 12.

4) No es el caso que "6 + 6 = 12".

[24] W. V. Quine, "Truth by convention", en Benacerraf y Putnam, *op. cit.*, pp. 329-354.

El enunciado *1)* es verdadero según la geometría euclidiana, pero falso según la geometría no euclidiana (tanto en la geometría lobachevskiana, donde tal suma es menor a 180°, como en la riemanniana, donde es mayor a 180°). Por lo tanto, el enunciado *1)* es *contingentemente verdadero* según tres concepciones mutuamente equivalentes: según la aristotélica, donde es falso en algún mundo posible; según la leibniziana, donde es una verdad cuyo contrario es posible,[25] y según la ramseyana, donde es una proposición que no concuerda con alguna posibilidad de verdad.

El enunciado *2)* es falso según la geometría euclidiana, pero verdadero según las geometrías hiperbólica (lobachevskiana) y elíptica (riemanniana). Por lo tanto, el enunciado *2)* es *posiblemente verdadero* según las mismas tres concepciones mutuamente equivalentes: según la aristotélica, donde es verdadero en algún mundo posible; según la leibniziana, donde es una verdad cuyo contrario es contingente, y según la ramseyana, donde es una proposición que concuerda con alguna posibilidad de verdad.

El enunciado *3)* es *necesariamente verdadero* porque, según las mismas tres concepciones mutuamente equivalentes, *3)* es verdadero en todos los mundos posibles; *3)* es una verdad cuyo contrario es imposible; *3)* concuerda con todas las posibilidades de verdad.

Por último, el enunciado *4)* es *imposiblemente verdadero* porque, según las mismas tres concepciones mutuamente equivalentes, *4)* es falso en todos los mundos posibles; *4)* es una verdad cuyo contrario es necesario; *4)* no concuerda con ninguna posibilidad de verdad.

[25] En terminología leibniziana: si algo es tal que su contrario es imposible, entonces se debe a una verdad de razón; si algo es tal que su contrario es posible, entonces se debe a una verdad de hecho.