Una solución a la "contradicción irresoluble" de Poincaré

Por

Emilio Méndez Pinto

La “contradicción irresoluble” de Poincaré es la siguiente: la posibilidad de las matemáticas es una contradicción irresoluble dados los siguientes dos hechos:

(1) Las matemáticas son una ciencia deductiva *sólo en apariencia*, y sin embargo poseen un “rigor perfecto” que nadie desafía.

(2) Todas las proposiciones de las matemáticas pueden derivarse por las reglas de la lógica formal, y sin embargo no se reducen a una “gigantesca tautología” (i. e., a una forma indirecta o disfrazada de decir que $A = A$).

Obsérvese que *cada uno* de estos dos hechos involucra una contradicción virtualmente irresoluble: (1) si son deductivas sólo en apariencia, ¿de dónde surge su “rigor perfecto”?; (2) si todas sus proposiciones pueden derivarse por las reglas de la lógica formal, ¿cómo es que las matemáticas no se reducen a meros silogismos o a meras relaciones de identidad? En este trabajo, no obstante, dejaré de lado (aunque no por completo) no solamente las contradicciones inherentes a cada uno de estos dos hechos, sino también las cuestiones relativas al papel de la inducción matemática en la creación matemática, así como el supuesto de que todas las proposiciones matemáticas pueden derivarse por las reglas de la lógica formal (cuestiones que son las causantes de las respectivas contradicciones: si las matemáticas fuesen una ciencia *realmente* deductiva, entonces su “rigor perfecto” no supondría ningún misterio, y por tanto no surgiría la contradicción en (1); si las proposiciones matemáticas no pudiesen derivarse por las reglas de la lógica formal, entonces el que no se reduzcan a una “gigantesca tautología” no supondría ningún misterio, y por tanto no surgiría la contradicción en (2)).

En cambio, concentraré mi atención en la siguiente “contradicción irresoluble” general: la posibilidad de las matemáticas es una contradicción irresoluble por los siguientes dos hechos *aparentemente incompatibles*:

(1’) Las matemáticas poseen un “rigor perfecto” que nadie desafía.

(2’) Las matemáticas no son una gigantesca tautología.

Estos dos hechos son aparentemente incompatibles entre sí por lo siguiente: parecería que proposiciones no sujetas a ningún tipo de desafío son los silogismos y las relaciones de identidad;[1] pero los primeros son meras tautologías en al menos un sentido del término "tautología": no nos dan a conocer nada nuevo, mientras que las segundas son meras tautologías en al menos un sentido (el sentido de Ramsey) del término "tautología": concuerdan con todas las posibilidades de verdad. (No estoy nada convencido de que las relaciones de identidad no nos den a conocer nada nuevo; de ahí mi énfasis en "al menos un sentido del término".)

Por el contrario, si las matemáticas poseyeran un "rigor imperfecto" (suponiendo que tal concepto fuese posible), entonces el que no se reduzcan a una "gigantesca tautología" no supondría ningún misterio; si, por otra parte, las matemáticas se redujeran a una "gigantesca tautología" (por ejemplo, a una gigantesca relación de infinitas identidades), entonces el que posean un "rigor perfecto" no supondría ningún misterio. La realidad, empero, es que (1') y (2') son hechos incontrovertibles, y de ahí nuestra *contradicción irresoluble general* sobre la posibilidad de las matemáticas. El hecho (1') es incontrovertible porque hay *infinitas verdades matemáticas que son verdades necesarias, i. e., infinitas verdades matemáticas que son verdaderas en todos los mundos posibles*; el hecho (2') es incontrovertible porque hay *verdades matemáticas que son verdades contingentes, i. e., verdades matemáticas que son falsas en algún mundo posible*.[2]

La "contradicción irresoluble" de Poincaré es importante no sólo para el estudio sobre los fundamentos de las matemáticas, sino también, en mi opinión, para la metafísica y (en menor grado) para la epistemología y la lógica (si es que, siguiendo a Carnap, la distinción entre lo "a priori" y lo "a posteriori" es una distinción epistemológica, mientras que la distinción entre "analiticidad" y "sinteticidad" es una distinción lógica). En un trabajo anterior[3] ofrecí una breve exposición de por qué las matemáticas (o mejor dicho, *algunas* proposiciones aritméticas) no se reducen a una tautología recurriendo a la estrategia de asumir que hay proposiciones matemáticas sintéticas.

[1] El que pueda haber otras "proposiciones no sujetas a ningún tipo de desafío" es irrelevante para nuestro argumento.

[2] Para esta segunda afirmación, debe asumirse (cosa que haremos aquí) que las verdades geométricas pertenecen a la clase de las verdades matemáticas. Más adelante consideraré esta cuestión con más detalle.

[3] MÉNDEZ PINTO, Emilio, *Invitación a la filosofía matemática poincariana*, La Reina de las Ciencias (colección digital), ILCE, UNESCO.

Tal estrategia era más o menos como sigue: el teorema $a+(b+c)=(a+b)+c$ es verdadero para $c=1$ en virtud de que $a+(b+1)=(a+b)+1$ es una proposición matemática verdadera. El teorema $a+(b+c)=(a+b)+c$ es verdadero para $c=\gamma$ en virtud de que $(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma)$ es una proposición matemática verdadera. El teorema $a+(b+c)=(a+b)+c$ es verdadero para

$$c=\gamma+1, c=\gamma+2, c=\gamma+3, ..., c=\gamma+n, c=\gamma+n+1, ...$$

en virtud de que, por inducción matemática, $[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1$, etc., o $(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)]$, etc., son proposiciones matemáticas verdaderas.

La "sinteticidad" (en sentido kantiano) del teorema $a+(b+c)=(a+b)+c$ se sigue de los supuestos de que $c=\gamma+1$ dice *algo más* sobre $a+(b+c)=(a+b)+c$ de lo que dice $c=\gamma$; $c=\gamma+2$ dice *algo más* sobre $a+(b+c)=(a+b)+c$ de lo que dice $c=\gamma+1$; $c=\gamma+n+1$ dice *algo más* sobre $a+(b+c)=(a+b)+c$ de lo que dice $c=\gamma+n$, etc. En otras palabras, *todo* lo que puede decirse sobre $a+(b+c)=(a+b)+c$ no se encontraba contenido en éste desde un principio, en el sentido de que pueda decirse que "$a+(b+1)=(a+b)+1$" y "$a+(b+2)=(a+b)+2$" *dicen una y la misma cosa*. (Este no es el caso para enunciados *fuertemente* analíticos, por ejemplo para "Todos los solteros son no casados", porque "Todos los solteros son solteros" y "Todos los solteros son no casados" *dicen una y la misma cosa*: todo lo que puede decirse sobre "Todos los solteros son no casados" es "Todos los solteros son solteros", *y nada más*.)[4]

Pero esta solución "sintética" tiene el defecto de que, si bien puede llegar a solucionar (2'), de ninguna manera resuelve nuestro problema general de compatibilizar (1') y (2'). En un sentido importante, complica tal solución: el hecho de que existan

[4] Obviamente, bajo la suposición (que hicimos en aras del argumento) de que existe una distinción significativa entre lo analítico y lo sintético. Bajo esta suposición, un contraejemplo que afirmara que sobre "Todos los solteros son no casados" pudiese decirse "Todos los solteros son solteros felices" sería irrelevante, porque "no casados" y "solteros" son sinónimos perfectamente intercambiables, pero no así "no casados" y "solteros felices". En otras palabras, "Todos los solteros son solteros felices" es, en cualquier caso, una verdad sintética, pero no una verdad analítica, del mismo modo que "Todos los solteros son solteros infelices" sería una verdad igualmente sintética: ni la felicidad ni la infelicidad son propiedades esenciales de la soltería (y no hay que experimentar una u otra cosa para saberlo).

proposiciones matemáticas sintéticas hace todavía más misterioso el hecho de que posean un "rigor perfecto" que nadie desafía. Una respuesta de tipo kantiano a este problema no resuelve nada, porque, si bien en la epistemología kantiana los juicios matemáticos son juicios sintéticos, son a la vez juicios a priori *en el sentido kantiano de lo a priori*: juicios *necesariamente* verdaderos, i. e., no sujetos a ningún desafío (ni empírico, porque en la epistemología kantiana la experiencia sensible no puede contradecir a las intuiciones sensibles, ni apriorístico, porque en la epistemología kantiana "necesidad" y "aprioridad" son sinónimos intercambiables).[5]

Una solución alternativa

Si nuestro problema consiste en compatibilizar (1') y (2'), entonces nuestra vía no puede ser otra que la de encontrar proposiciones matemáticas *no tautológicas* que posean un "rigor perfecto".[6] Para conseguir esto, son necesarias las siguientes consideraciones: (1) qué entenderemos por "proposiciones matemáticas tautológicas" y por "proposiciones matemáticas no tautológicas"; (2) qué entenderemos por "rigor perfecto"; (3) responder a la cuestión de si hay algo relevantemente similar a "proposiciones matemáticas no tautológicas que posean un rigor perfecto" (si nuestra respuesta es afirmativa, entonces habremos conseguido nuestro propósito de ofrecer una solución (al menos à la reductio ad absurdum) a la "contradicción irresoluble" de Poincaré). A continuación desarrollaré cada uno de estos puntos.

(1) Sobre proposiciones matemáticas tautológicas y no tautológicas

Sobre proposiciones matemáticas tautológicas en general

Es conocida la postura filosófica que identifica a las matemáticas como un método de la lógica (o, en versiones afines, como reducibles a ella, o como una parte de ella, etc.).[7] La

[5] Según la interpretación kripkeana, que comparto, de la epistemología kantiana (o de *esta parte* de la epistemología kantiana). Por otra parte, Poincaré mismo dijo que la solución sintética elude la contradicción, pero no hace que desaparezca. Véase POINCARÉ, Henri: *Science and Hypothesis*, en *The Value of Science. Essential Writings of Henri Poincaré*, Modern Library, Nueva York, 2001, pp. 9-10.
[6] La estrategia alternativa sería la de encontrar proposiciones matemáticas tautológicas que poseyeran algo relevantemente similar a un "rigor imperfecto". Inmediatamente es claro que esta estrategia sería un despropósito en toda la extensión de la palabra.
[7] El que de la lectura del *Tractatus* pueda válidamente concluirse que las proposiciones *matemáticas* son tautologías es un asunto polémico en el que no entraré. Sin embargo, me inclino a pensar que es una

proposición 6.22 del *Tractatus*[8] es un buen ejemplo de esta postura: "La matemática muestra en las ecuaciones la lógica del mundo que las proposiciones de la lógica muestran en la tautologías." Entonces las ecuaciones matemáticas, si es que la lógica consiste meramente en tautologías, si es que las tautologías son una figura especular del mundo, etc., no son proposiciones (son *pseudo proposiciones* o *proposiciones no genuinas*): no dicen nada sobre la realidad o, en otras palabras, su verdad o falsedad no es una cuestión de hecho bruto.[9]

Sobre la identificación entre "tautologías" y "verdades necesarias"

En su ensayo *Facts and propositions*, Ramsey identificó las tautologías con las verdades necesarias.[10] Esta identificación es perfectamente consistente con su definición de "tautología" y con las definiciones clásicas de "verdad necesaria", tanto en su versión aristotélica como en su versión leibniziana. En efecto, si (según la definición de "tautología" de Ramsey) una tautología concuerda con todas las posibilidades de verdad, y si una verdad necesaria es (en el sentido aristotélico) una verdad verdadera en todos los mundos posibles o (en el sentido leibniziano) una verdad cuyo contrario es imposible, entonces la proposición "*v* es una verdad que concuerda con todas las posibilidades de verdad" *es semánticamente equivalente* a las proposiciones "*v* es una verdad verdadera en todos los mundos posibles" y a "*v* es una verdad cuyo contrario es falso en todos los mundos posibles".

Sin embargo, la identificación entre "tautologías" y "verdades necesarias" involucra algunos problemas serios. Asumiendo la validez de la necesidad metafísica (o material), hay proposiciones *metafísicamente necesarias* (como "El agua es H_2O") que bajo ninguna acepción son tautológicas. Por otra parte, hay proposiciones *necesariamente verdaderas* (i. e., proposiciones verdaderas en todos los mundos posibles o proposiciones cuyo contrario

---

conclusión válida, habida cuenta de la proposición 6.22 del *Tractatus*, expuesta a continuación. Russell parece concluir lo mismo. Véase RUSSELL, Bertrand, *Mi desarrollo mental*, en *Análisis filosófico*, Ed. Paidós, España, 1999, p. 62.

[8] WITTGENSTEIN, Ludwig, *Tractatus logico-philosophicus*, Alianza Editorial, España, 2009, p. 122. En lo que sigue recurriré, directa o indirectamente, a otras proposiciones del Tractatus. La referencia bibliográfica es la misma, excepto obviamente por los números de las páginas si las proposiciones aludidas se encuentran en páginas distintas a la 122.

[9] Véase RAMSEY, Frank: *The Foundations of Mathematics*, Martino Publishing, EEUU, 2013, pp. 11-12.

[10] Ibídem, pp. 138-155.

es imposible, como $"a+(b+c)=(a+b)+c"$) que, no obstante, no son tautológicas si se les interpreta sintéticamente (en sentido kantiano). No discutiré más estas cuestiones, ni su posible solución (que existe: consiste en ser logicista y al mismo tiempo aceptar una teoría *internista* del significado).

Sobre proposiciones matemáticas no tautológicas

¿Existe una proposición matemática (verdadera) *p* (dada nuestra asunción de que las proposiciones geométricas verdaderas pertenecen a la clase de las proposiciones matemáticas verdaderas) tal que *p* no concuerde con todas las posibilidades de verdad, i. e., tal que *p* sea falsa en algún mundo posible o tal que la negación de *p*, denotémosla con $\overline{p}$, sea verdadera en algún mundo posible? Si *p* existe, entonces es una proposición *no tautológica* (dada nuestra identificación entre “tautologías” y “verdades necesarias”). Sostengo que la respuesta a esta pregunta es afirmativa, y en lo que sigue mostraré por qué lo creo.

Si, como escribió Burgess en *Philosophical Logic*,[11] “la posibilidad de *A* es la no necesidad de la negación de *A*, y la necesidad de *A* es la imposibilidad de la negación de *A*” (es decir, si $\Diamond$ denota “posiblemente” y $\Box$ denota “necesariamente”, $\Diamond A$ quiere decir $\neg\Box\neg A$ y $\Box A$ quiere decir $\neg\Diamond\neg A$), entonces – dada la asunción de que la negación de una verdad contingente es posible y viceversa – la contingencia de *A* es la posibilidad de la afirmación de *no A*, mientras que la imposibilidad de *A* es la necesidad de la afirmación de *no A* (o, si se prefiere, la contingencia de *no A* es la posibilidad de la afirmación de *A* y la imposibilidad de *no A* es la necesidad de la afirmación de *A*).

Entonces ocurre que, dado lo anterior, las respectivas definiciones para “verdad contingente” y “verdad posible” en la terminología de Ramsey serían: “una verdad que no concuerda con alguna posibilidad de verdad” y “una verdad que concuerda con alguna posibilidad de verdad”. Entonces habría de ocurrir que, en aras de responder afirmativamente a la pregunta de “¿existe una *p* tal que…?”, hubiese una *p* que no concordase con alguna posibilidad de verdad y/o una $\overline{p}$ que concordase con alguna posibilidad de verdad.

[11] BURGESS, John, *Philosophical Logic*, Princeton University Press, EEUU, 2009, p. 40.

La proposición

$$\textit{La suma de los ángulos internos de un triángulo es } = 180°$$

es una *p* en nuestro sentido (i. e., no concuerda con alguna posibilidad de verdad) porque la proposición

$$\textit{La suma de los ángulos internos de un triángulo no es } = 180°$$

es una $\overline{p}$ en nuestro sentido (i. e., concuerda con alguna posibilidad de verdad).

Tanto *p* como $\overline{p}$ son proposiciones geométricas verdaderas, la primera para la geometría euclidiana y la segunda para las geometrías riemanniana y lobachevskiana. La pregunta "¿cuál proposición es verdadera?" (o incluso "¿cuál proposición es *más* verdadera?") carece de sentido si es que se pretende que éste tenga una relación estrecha con la verdad.

(2) Sobre el concepto de "rigor perfecto"

El concepto de "rigor perfecto" es, como ya insinué fuertemente arriba, algo muy cercano a un concepto *analítico*, en el sentido de que, cuando uno habla de "rigor", el adjetivo "perfecto" sobra: nadie hablaría de un rigor más o menos perfecto, ni mucho menos de un rigor imperfecto. Creo que esto se debe, al menos en parte, a que una oración como "el método *m* del científico *c* es riguroso" es válida dado el significado de la propiedad "ser riguroso", pero una oración como "el resultado *r* del científico *c* es riguroso" no es válida dado el significado de la propiedad "ser riguroso". En la ciencia, la propiedad de "rigurosidad" no se refiere a sus resultados, sino a sus métodos, y esto obedece al propio significado habitual del término: si "rigor" significa "última instancia a la que pueden llegar las cosas", *resultados rigurosos* en algún ámbito supondrían la imposibilidad de la investigación científica en ese ámbito, mientras que *métodos no rigurosos* en algún ámbito suponen la imposibilidad virtual de resultados científicamente significativos en ese ámbito.

Para el caso de las matemáticas aplica el mismo supuesto, aunque con muchísima mayor fuerza (*infinitos* de sus resultados son "la última instancia a la que pueden llegar las cosas", y sus métodos cuyos resultados no son "la última instancia a la que pueden llegar las cosas” no dejan de ser rigurosos por tal circunstancia. Ésta suele estar contemplada, ya sea implícita o explícitamente, en tales métodos). En definitiva, diremos que, para el caso de las matemáticas, éstas poseen tanto métodos como resultados rigurosamente perfectos en tanto que ni unos ni otros, al menos en términos generales (y esto ya vale de sobra para nuestro argumento), están sujetos al desafío (o a una revisión que valga la pena llevar a cabo, etc.).

(3) ¿Hay proposiciones matemáticas no tautológicas que posean un rigor perfecto?

Dados los puntos **(1)** y **(2)**, parecería que nuestra proposición matemática (verdadera) p es una proposición no tautológica que posee un rigor perfecto. A la vez, parecería que nuestra proposición matemática (verdadera) $\overline{p}$ es una proposición no tautológica que posee un rigor perfecto. Si lo anterior es cierto, y si interpreté correctamente la “contradicción irresoluble” de Poincaré, entonces tal contradicción tiene una solución: hay proposiciones matemáticas (verdaderas) “no tautológicas” que poseen un “rigor perfecto”.