Thomas Mormann

Repräsentation, Struktur, Quasianalyse
Formale Aspekte einer Carnapianischen Konstitutionstheorie

1. Einleitung

Carnaps Quasianalyse hat den eigenartigen Status eines philosophisch ehrenhaft gescheiterten Unternehmens: auch wer sich nur oberflächlich mit Carnaps *Der logische Aufbau der Welt* (im folgenden kurz *Aufbau*) befaßt hat, kennt die Quasianalyse dem Namen nach. Sich ausführlicher mit ihr zu befassen, scheint jedoch überflüssig, da sie sich ja leider als eine aus prinzipiellen Gründen verfehlte Methode erwiesen hat. Ich möchte im folgenden zeigen, daß diese Einschätzung falsch ist. Dazu ist es zunächst notwendig, einiges zum Kontext der Quasianalyse zu sagen, also zumindest kurz auf den *Aufbau* einzugehen.

Seit einiger Zeit ist der *Aufbau* Gegenstand reger interpretatorischer Bemühungen, die die herkömmliche Deutung dieses Werkes als eines grandios gescheiterten phänomenalistischen Empirismus fragwürdig erscheinen lassen (vgl. Coffa 1991, Friedman 1992, Moulines 1991, Proust 1989). Man könnte deshalb vermuten, daß das neu erwachte Interesse am *Aufbau* auch seinen formalen Aspekten gälte. Das ist jedoch kaum der Fall. Einer ausführlicheren Diskussion der Quasianalyse gehen fast alle Autoren aus dem Wege.[1] Ich halte das für einen Fehler: die Quasianalyse ist *kein* technisches Detail, das für die allgemeine philosophische Einschätzung des *Aufbau* vernachlässigt werden könnte, sie ist der Schlüssel zum Verständnis dieses Werkes. Einen Beleg dafür liefert das folgende gut gesicherte Ergebnis der neueren *Aufbau*-Exegese (vgl. Friedman 1992): Die wesentliche Intention des *Aufbau* ist *nicht* die Darstellung eines speziellen phänomenalistischen Konstitutionssystems, sondern der

[1] Ausnahmen sind Moulines 1991 und Proust 1989.

Entwurf einer *allgemeinen Konstitutionstheorie* als einer Theorie von Konstitutionssystemen. Unter einem Konstitutionssystem ist dabei eine stufenweise Ordnung der Begriffe oder Gegenstände des (wissenschaftlichen) Wissens der Art zu verstehen, daß die Begriffe oder Gegenstände einer jeden Stufe aus denen der niederen Stufen konstituiert werden (vgl. *Aufbau* §2). In einer Theorie von Konstitutionssystemen geht es deshalb um eine allgemeine Methodologie von Konstitutionssystemen (vgl. Proust 1989). Eine solche allgemeine Methodologie aber ist, da sie nicht auf die Besonderheiten der einzelnen Systeme eingeht, notwendig formal. Das Kernstück dieser formalen Konstitutionstheorie ist offenbar die Quasianalyse. Damit steht und fällt das Programm einer Konstitutionstheorie im Sinne des *Aufbau* mit der Quasianalyse: erweist sich die Quasianalyse als verfehlt, ist es auch um den *Aufbau* insgesamt geschehen.

Im Folgenden möchte ich plausibel machen, daß der quasianalytische Ansatz keineswegs als grundsätzlich verfehlt abzutun ist, sondern als formales Kernstück einer modernen Konstitutionstheorie rehabilitiert werden kann. Ich gehe dabei historisch und systematisch vor: zunächst werde ich eine frühe Version der Quasizerlegung aus dem Jahre 1923 diskutieren. Anschließend soll dieser Ansatz als repräsentationale Theorie von Ähnlichkeitsstrukturen so reformuliert werden, daß er in den Rahmen einer „General Theory of Meaningful Representation“ (vgl. Mundy 1986) eingebettet werden kann. Damit läßt sich die Quasianalyse als Kern einer allgemeinen strukturellen Konstitutionstheorie begreifen.

2. *Die Quasizerlegung von 1923*

Die erste explizite Formulierung des quasianalytischen Ansatzes findet sich in einem Manuskript mit dem programmatischen Titel „Die Quasizerlegung. Ein Verfahren zur Ordnung nichthomogener Mengen mit den Mitteln der Beziehungslehre“ (RC-081-04-01) (im folgenden *Quasizerlegung*). Dieses bis heute nicht veröffentlichte Manuskript enthält eine Version der Quasianalyse, die im Vergleich zu der des *Aufbau* wesentlich neue Aspekte dieses Ansatzes zur Sprache bringt. In *Quasizerlegung* beschreibt Carnap die allgemeine Intention dieser Methode folgendermaßen:

> „Gegeben ist eine Menge von Elementen und für jedes Element die Angabe, mit welchen der übrigen es verwandt ist. Gesucht eine Beschreibung dieser Menge, die nur diese Angaben benutzt, aber den Elementen derart Quasibestandteile oder Quasimerkmale zuschreibt, daß es möglich wird, *jedes einzelne*

> *Element für sich, ohne Bezugnahme auf andere* aufgrund seiner Quasibestandteile *zu behandeln.*" [meine Hervorhebung]

Diese Charakterisierung der Quasizerlegung (im *Aufbau* dann Quasianalyse) macht klar, daß dieses Verfahren zunächst nichts mit dem Phänomenalismus zu tun hat. So wendet Carnap im *Aufbau* die Quasianalyse auf Mengen von „Elementarerlebnissen" an, die weniger phänomenalistischer als vielmehr gestalttheoretischer Herkunft sind. Es ist zwar nicht ausgeschlossen, die Quasizerlegung auf Mengen anzuwenden, die etwas mit dem Phänomenalismus zu tun haben, aber das ist für die Methode der Quasizerlegung nicht wesentlich. Die Quasizerlegung von 1923 ist eine rein formale Methode, die Carnap durch die folgenden Axiome charakterisiert:

(C1) Sind zwei Elemente verwandt, so stimmen sie in (mindestens) einem Quasibestandteil überein.
(C2) Sind zwei Elemente nicht verwandt, so stimmen sie in keinem Quasibestandteil überein.
(C3) Sind zwei Elemente *a* und *b* „verwandtschaftsgleich", (d. h. ist *a* mit allen und nur den Elementen verwandt wie *b*), so haben sie dieselben Quasibestandteile.
(C4) Es kommt kein Quasibestandteil vor, nach dessen Wegnahme die Bedingungen (C1)–(C3) noch erfüllt wären.

Die ersten beiden Bedingungen erscheinen ebenfalls im *Aufbau* und charakterisieren dort die „Quasianalyse erster Art"; (C3) und (C4) kommen im *Aufbau* nicht mehr vor, wohl (vgl. Proust 1989) weil es Carnap dort um möglichst einfache, leicht verständliche Beispiele von Konstitutionen ging, weshalb er auf die Darstellung komplizierterer technischer Details verzichtete.

3. *Quasizerlegung als Repräsentation*

Eine repräsentationale Formulierung der Quasizerlegung hat zunächst den Vorteil der größeren Übersichtlichkeit und formalen Präzision. Darüber hinaus erlaubt sie, die wesentlichen epistemologischen und ontologischen Charakteristika dieses Ansatzes zu explizieren. Dazu zunächst einige terminologische Vorbereitungen. Ist S eine Menge von Elementen, auf der eine reflexive und symmetrische Ähnlichkeits- oder Verwandtschaftsrelation $\sim \subseteq S \times S$ definiert ist, bezeichnen wir $(S, \sim)$ als eine ***Ähnlichkeitsstruktur***. Für $(x,y) \in \sim$ schreiben wir immer $x \sim y$. Die Menge $\{x \mid x \sim y\}$ werde mit $\mathrm{co}(x)$ bezeichnet. Die Potenzmenge einer Menge Q wird mit 2^Q bezeichnet. Durch $P \sim P'$ gdw $P \cap P' \neq \varnothing$ oder $P = P' = \varnothing$ wird eine Ähnlichkeitsrelation auf 2^Q definiert. Ist $Q' \subseteq Q$ eine Teilmenge von Q, so sei die Abbildung $i^*_{QQ'} : 2^Q \to 2^{Q'}$ definiert durch $i^*_{QQ'}(P) := P \cap Q', P \in 2^Q$. Carnaps Charakterisierung der Quasianalyse durch die Bedingungen (C1)–(C4) läßt sich dann folgendermaßen reformulieren:

(1) Definition. Sei $(S, \sim)$ eine Ähnlichkeitsstruktur und Q eine Menge. Eine Quasizerlegung von $(S, \sim)$ ist eine Abbildung $f : S \to 2^Q$, die die folgenden vier Bedingungen erfüllt:

(C1)′ $x \sim y \Rightarrow f(x) \sim f(y)$.
(C2)′ $f(x) \sim f(y) \Rightarrow x \sim y$.
(C3)′ $\mathrm{co}(x) = \mathrm{co}(y) \Rightarrow f(x) = f(y)$.
(C4)′ Ist $Q' \subset Q$ eine *echte* Teilmenge von Q, erfüllt die zusammengesetzte Abbildung $i_{QQ'} f : S \longrightarrow 2^{Q'}$ *nicht* alle Bedingungen (C1)'–(C3)':

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[dr] & 2^Q \arrow[d, "i^*"] \\ & 2^{Q'} \end{tikzcd}$$

In dieser Axiomatisierung wird eine Quasizerlegung von $(S, \sim)$ beschrieben als eine *strukturerhaltende Abbildung* oder *Repräsentation* einer Ähnlichkeitsstruktur S in eine spezielle repräsentierende Ähnlichkeitsstruktur $(2^Q, \sim)$.[2] Der Begriff der Strukturerhaltung kann hier in mehrfachem Sinne verstanden werden, z. B. ist die Abbildung f: $S \to 2^Q$ strukturerhaltend hinsichtlich der Ähnlichkeitsstruktur „$\sim$“, d. h., es gilt $x \sim y \Leftrightarrow f(x) \sim f(y)$. Außerdem ist f strukturerhaltend hinsichtlich der durch co induzierten Äquivalenzrelation „$=_{\mathrm{co}}$“: $\mathrm{co}(x) = \mathrm{co}(y) \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Allgemein ist der Begriff „Strukturerhaltung“ für die Quasizerlegung in einem *offenen* Sinne zu verwenden: es ist nicht ein für allemal und für alle quasianalytischen Repräsentationen festgelegt bezüglich welcher Strukturen sie strukturerhaltend sind. Dies ist vielmehr eine Frage, die von Fall zu Fall und für verschiedene Konstitutionssysteme verschieden zu beantworten ist. Eine interessante (von Carnap nicht betrachtete) Bedingung ist zum Beispiel Strukturerhaltung hinsichtlich der durch co

[2] Die Ähnlichkeitsstruktur $(2^Q, \sim)$ ist in mehrfacher Hinsicht speziell: z. B. hat 2^Q die Struktur einer Booleschen Algebra, für zwei beliebige Elemente $\varnothing \neq P, P''$ gibt es immer ein „verbindendes“ Element P' mit $P \sim P' \sim P''$. Dieser spezielle Charakter des repräsentierenden Bereichs findet sich bei den meisten Repräsentationen, z. B. auch in der numerischen Messung, wo der repräsentierende Bereich der reellen Zahlen R eine besondere Rolle spielt.

induzierten Ordnungsstruktur: $x \leq_{\text{co}} y \Leftrightarrow f(x) \subseteq f(y)$. Weitere strukturerhaltende Bedingungen können für spezielle Konstitutionssysteme formuliert werden. Es ist also eine *empirische* Frage, welche Strukturerhaltungsbedingungen für welche Konstitutionssysteme sinnvoll sind. Die Konstitutionstheorie als Theorie von Konstitutionssystemen ist deshalb durchaus nicht eine rein mathematische, sondern auch eine empirische Theorie, vergleichbar einer Theorie der mathematischen Naturwissenschaften.

Versteht man eine Quasizerlegung als eine strukturerhaltende Repräsentation einer Ähnlichkeitsstruktur, stellen sich sofort die beiden folgenden Fragen: (i) Gibt es für jede Ähnlichkeitsstruktur $(S, \sim)$ eine solche Repräsentation; (ii) Falls eine Repräsentation existiert, ist sie – in einem zu präzisierenden Sinne – eindeutig bestimmt? Wie schon Carnap wußte, ist die erste dieser beiden Fragen mit ja zu beantworten. Für eine gegebene (endliche) Ähnlichkeitsstruktur kann man folgendermaßen eine Quasizerlegung konstruieren:

(2) Definition und Lemma. Sei $(S, \sim)$ eine Ähnlichkeitsstruktur. Ein *Ähnlichkeitskreis* von $(S, \sim)$ ist eine Teilmenge $T \subseteq S$, die die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $x, y \in T \Rightarrow x \sim y$, und

(ii) $x \notin T \Rightarrow$ es gibt ein $y \in T$ mit $x \not\sim y$. Die Menge der Ähnlichkeitskreise von $(S, \sim)$ werde mit $SC(S)$ bezeichnet.

(iii) Definiert man eine Abbildung $f : S \to 2^{SC(S)}$ durch $f(s) := \{s \mid s \in T, T \in SC(S)\}$, erfüllt f (C1)′–(C3)′. Durch Wegnahme überflüssiger T kann man aus f eine Abbildung erhalten, die außerdem noch (C4)′ erfüllt.

Die Frage nach der *Eindeutigkeit* einer quasianalytischen Repräsentation einer eine Ähnlichkeitsstruktur $(S, \sim)$ läßt sich nicht ganz so einfach beantworten. 1963 wurde von Brockhaus der folgende Satz bewiesen:

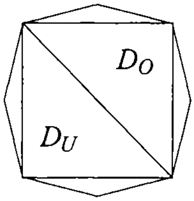
(3) Satz. Die Ähnlichkeitsstruktur $(S, \sim)$ hat genau dann eine einzige Quasizerlegung $f : S \to 2^{Q}$, die die Bedingungen (C1)′–(C4)′ erfüllt, wenn es eine Menge $SC(S, 2) \subseteq SC(S)$ von Ähnlichkeitskreisen gibt, die die folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\cup SC(S, 2) = S$

(ii) für jedes $T \in SC(S, 2)$ gibt es (nicht notwendigerweise verschiedene) Elemente $x_T, y_T \in T$, so daß $\text{co}(x_T) \cap \text{co}(y_T) = T$.

Wie das folgende Beispiel zeigt, erfüllen keineswegs alle Ähnlichkeitsstrukturen diese Bedingungen. Der folgende Graph $G(S)$ repräsentiere eine Ähnlichkeitsstruktur $(S,)$ in dem Sinne, daß die Elemente von S die Ecken von $G(S)$ darstellen und zwei (verschiedene) Elemente von S genau dann eine Kante des Graphen definieren, wenn sie zueinander ähnlich sind. Dann ist leicht zu sehen, daß die folgende Ähnlichkeitsstruktur genau zwei wesentlich verschiedene Quasizerlegungen hat, die die Bedingungen (C1)′–(C4)′ erfüllen. Sie sind dadurch charakterisiert, daß bei der einen den Ecken des oberen großen Dreiecks D_O eine gemeinsame Eigenschaft zugeordnet wird, den Elementen des unteren großen Dreiecks D_U jedoch nicht, während es sich bei der anderen genau umgekehrt verhält:

$G(S)$:



Für Ähnlichkeitsstrukturen dieser Art – und das sind, wie man zeigen kann, die meisten (vgl. Mormann 1994) – gibt es daher *mehrere* Quasizerlegungen. Die Frage ist nun, ob diese Mehrdeutigkeit bedeutet, daß der quasianalytische Ansatz tout court gescheitert ist. Dieser Meinung sind Goodman 1954 und andere Kritiker der Quasianalyse. Wie wohl als erste Proust ausgeführt hat (vgl. Proust 1989), ist diese These bei näherem Besehen keineswegs stichhaltig: aus der Perspektive der quasianalytischen Konstitution gibt es keine vor anderen ausgezeichnete quasianalytische Repräsentation einer Ähnlichkeitstruktur $(S, \sim)$. Wenn eine Ähnlichkeitsstruktur so beschaffen ist, daß sie mehrere Repräsentationen erlaubt, ist das genauso wenig beunruhigend als wenn eine empirische Datenstruktur mehrere theoretische Erklärungen zuläßt (vgl. Mormann 1994, 1995).

4. *Strukturkonstitution*

Die Konstitution von (Quasi)merkmalen ist nur ein erster Schritt beim Aufbau eines Konstitutionssystems. Jedes Konstitutionssystem, gleich welcher Art, wird sicherlich noch viele andere Arten von Gegenständen umfassen als nur Eigenschaften der Grundelemente. Im *Aufbau* gibt Carnap solche Beispiele für ein phänomenalistisches Konstitutionssystem, indem er Konstitutionen für den Farbraum, den Gesichtssinn und andere Begriffe skizziert. Diese Beispielkonstitutionen sind zugeschnitten auf gerade dieses spezielle

System und können nicht ohne weiteres auf andere übertragen werden. Es fragt sich daher, welche anderen Typen von Gegenständen, abgesehen von Quasieigenschaften der Grundelemente, für Konstitutionssysteme allgemein von Bedeutung sind. Auf dieses Problem kann hier nicht ausführlich eingegangen werden. Ich möchte deshalb nur die allgemeine Antwort geben, daß die für alle Systeme zu konstituierenden Gegenstände *Strukturen* (Mengen, Relationen etc.) sein werden. Dazu die folgenden Beispiele:

(4) Konstitution von Strukturen. Sei $(S, \sim)$ eine Ähnlichkeitsstruktur. Dann lassen sich (unter anderen) die folgenden Strukturen konstituieren:

(i) Konstitution einer Ordnungsstruktur: Eine partielle Ordnung „$\leq$" auf S wird konstituiert durch $x \leq y$ gdw $\mathrm{co}(x) \subseteq \mathrm{co}(y)$. Diese Ordnungsstruktur konstituiert (u. a.) eine neue, im allgemeinen mit „$\sim$" nicht übereinstimmende Ähnlichkeitsrelation „$\sim_m$". Diese wird konstituiert durch $x \sim_m y$ gdw es gibt ein z mit $\mathrm{co}(z) \subseteq \mathrm{co}(x) \cap \mathrm{co}(y)$. Sie läßt sich, wie man zeigen kann, mereologisch interpretieren, d. h. $x \sim_m y$ gdw x und y einen gemeinsamen Teil haben.

(ii) Konstitution einer topologischen Struktur: Ein (topologischer) Abschlußoperator $\mathrm{cl} : 2^S \longrightarrow 2^S$ wird konstituiert durch $\mathrm{cl}(T) := \{x \mid$ es gibt ein $y \in T$ mit $y \leq x\}, T \in 2^S$. Dieser Abschlußoperator definiert in kanonischer Weise eine Topologie auf S. Diese Topologie kann dazu benutzt werden, auf S Verbandsstrukturen zu definieren, die als „natürliche Arten" bezüglich „$\sim$" interpretiert werden können.

5. *Zusammenfassung*

Ausgehend von der sehr schmalen Basis einer reflexiven und symmetrischen Ähnlichkeitsrelation kann man also eine Vielzahl mathematischer Strukturen wie Ordnungsstrukturen, topologische und mereologische Strukturen konstituieren. Diese Strukturen, die man als mathematische „Mutterstrukturen" im Sinne Bourbakis bezeichnen kann, dürften für alle Arten von Konstitutionssystemen von Bedeutung sein. Dies ist ein Hinweis, daß Carnaps Quasianalyse tatsächlich den Ausgangspunkt für eine umfassende Konstitutionstheorie wissenschaftlicher Begriffe und Gegenstände bilden könnte.

6. *Literatur*

Brockhaus, Karl: *Untersuchungen zu Carnaps Logischem Aufbau der Welt,* Dissertation, Münster 1963.

Carnap, Rudolf: Die Quasizerlegung. Ein Verfahren zur Ordnung nichthomogener Mengen mit den Mitteln der Beziehungslehre, Unpublished Manuscript (1923) RC-081-04-01, University of Pittsburgh.

Carnap, Rudolf: *Der Logische Aufbau der Welt,* Berlin 1928.

Coffa, Alberto: *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: To the Vienna Station,* hrsg. L. Wessels, Cambridge 1991.

Friedman, Michael: Epistemology in the Aufbau. *Synthese* 93 (1992), 15–57.

Goodman, Nelson: *The Structure of Appearance,* Indianapolis 1954.

Mormann, Thomas: A Representational Reconstruction of Carnap's Quasianalysis. *PSA* 1994, Vol. 1, 96–104.

Mormann, Thomas: Incompatible Empirically Equivalent Theories: A Structural Explication. *Synthese* 103 (1995), 203–249.

Moulines, C. Ulises: Making Sense of Carnap's Aufbau. *Erkenntnis* 35 (1991), 263–286.

Mundy, Brent: On the General Theory of Meaningful Representation. *Synthese* 67 (1986), 391–437.

Proust, Joelle: *Questions of Form, Logic and the Analytic Proposition from Kant to Carnap,* Minneapolis 1989.